Agmon-Kato-Kuroda Theoreme für L^p Potentiale

30. November 2020

Agmon-Kato-Kuroda Theorem (Teil 1)

Theorem (Ionescu, Schlag: Theorem 1.3)

Sei L eine zulässige Störung. Dann gelten:

(a) *Der Operator $H = H_0 + L$ ist ein abgeschlossener, selbstadjungierter Operator auf*

$$D(H) = \left\{ u \in W^{1,2}\left(\mathbb{R}^d\right) : Hu \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right) \right\}.$$

Außerdem ist $D(H)$ dicht in $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ und H ist nach unten beschränkt auf $D(H)$.

(b) *Die Menge $\mathcal{E} = \sigma_{pp} \setminus \{0\}$ ist diskret in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Weiterhin hat jeder Eigenwert endliche Multiplizität.*

(c) *Jede Eigenfunktion u von H mit Eigenwert $\lambda \neq 0$ ist schnell fallend, d.h. für jedes $N \geq 0$ ist*

$$\left(1 + x^2\right)^N u \in W^{1,2}\left(\mathbb{R}^d\right).$$

Agmon-Kato-Kuroda Theorem (Teil 2)

Theorem (IS, Theorem 1.3)

Sei L eine zulässige Störung. Dann gelten:

(d) Sei $I \subset (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \setminus \mathcal{E}$ kompakt. Dann gilt

$$\sup_{\lambda \in I, \varepsilon \in [-1,1] \setminus \{0\}} \| R_L(\lambda + i\varepsilon) \|_{X \to X^\star} \leq C_{d,L,I} < \infty$$

Damit ist das Spektrum von H rein absolut stetig auf I.

(e) $\sigma_{sc} = \emptyset$ und $\sigma_{ac} = [0, \infty)$.

(f) Die Wellenoperatoren $\Omega^{\pm}(H, H_0)$ existieren und sind vollständig. Dabei ist $H_0 = -\Delta$.

Zur Abwesenheit des singulär stetigen Spektrums

Nach [RS, Theorem XIII.20] ist es hinreichend für $\sigma_{sc} = \emptyset$, dass auf einer dichten Menge $X \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ der Ausdruck $\left\langle \phi, (H - z)^{-1} \phi \right\rangle$ beschränkt bleibt, wenn z gegen die reelle Achse geht. Wegen

$$\| (H - z)^{-1} \|_{L^2 \to L^2} \geq \frac{1}{dist(z, \sigma(H))}$$

liefert die Abschätzung

$$\left\langle \phi, (H - z)^{-1} \phi \right\rangle \leq \|\phi\|_{L^2}^2 \| (H - z)^{-1} \|_{L^2 \to L^2}$$

keine uniforme Schranke.

Zur Abwesenheit des singulär stetigen Spektrums

Angenommen es gibt eine Norm $\|\cdot\|_X$, sodass $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum ist und dass $\|\cdot\|_X \geq \|\cdot\|_{L^2}$ auf X. Dann gelten

(a) $L^2 \subset X^\star$,

(b) $\|\cdot\|_{L^2} \geq \|\cdot\|_{X^\star}$ auf L^2,

(c) $\langle \phi, \psi \rangle \leq \|\phi\|_X \|\psi\|_{X^\star}$, für $\phi \in X$, $\psi \in L^2$,

sowie

$$(H - z)^{-1} : L^2 \supset X \longrightarrow L^2 \subset X^\star.$$

Falls nun $\|(H - z)^{-1}\|_{X \to X^\star}$ beschränkt bleibt, wenn z gegen die reelle Achse geht, so erhalten wir die uniforme Schranke über

$$\langle \phi, (H - z)^{-1} \phi \rangle \leq \|\phi\|_X^2 \, \|(H - z)^{-1}\|_{X \to X^\star}.$$

Zur Abwesenheit des singulär stetigen Spektrums

Wir erinnern uns außerdem an die Resolventenidentität

$$R_L(\lambda + i\varepsilon) = (1 + R_0(\lambda + i\varepsilon)L)^{-1} R_0(\lambda + i\varepsilon),$$

wobei $\lambda, \varepsilon > 0$ und R_L, R_0 die Resolventen von $H = H_0 + L$, bzw. $H_0 = -\Delta$ notieren. Diese liegt nahe, dass die Resolvente der freien Dynamik zu untersuchen. Außerdem erinnern wir uns an

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \to 0} \left\langle \phi, \left[(H_0 - \lambda + i\varepsilon)^{-1} - (H_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1} \right] \phi \right\rangle \\
=&\lim_{\varepsilon \to 0} \int |\hat{f}(p)|^2 \frac{2i\varepsilon}{(p^2 - \lambda)^2 - \varepsilon^2} \mathrm{d}^\mathrm{d} p \\
=& - 2\pi i \int |\hat{f}(p)|^2 \delta(p^2 - \lambda) \mathrm{d}^\mathrm{d} p.
\end{aligned}$$

Zur Wahl von X und $X^\star$

Mögliche Kandidaten für X und $X^\star$ sind

$$L^2_\sigma, L^2_{-\sigma} \qquad\qquad B, B^\star$$

dabei sind

$$L^2_\sigma = \left\{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \,\middle|\, \|f\|^2_\sigma = \int |(1+|x|)^\sigma f(x)|^2 \mathrm{d}^\mathrm{d} x < \infty \right\}$$

die gewichteten L^2 Räume, sowie

$$B = \left\{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \,\middle|\, \|f\|_B = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{\frac{j}{2}} \|f\|_{L^2(D_j)} < \infty \right\},$$

$$B^\star = \left\{ u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \,\middle|\, \|u\|_{B^\star} = \sup_{j \geq 0} 2^{-\frac{j}{2}} \|u\|_{L^2(D_j)} < \infty \right\}.$$

Anmerkung zum klassischen Theorem

Für Multiplikationsoperatoren zu Potentialen V, für die es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|)^{1+\varepsilon} |V(x)| < \infty,$$

ist die asymptotische Vollständigkeit bekannt. Diese folgerte Agmon mit dem *Limiting Absorption Principle*

$$\sup_{\lambda \geq \lambda_0} \sup_{\varepsilon > 0} \| (H - (\lambda + i\varepsilon))^{-1} \|_{L^2_\sigma \to L^2_{-\sigma}} \leq C_{V,\lambda_0},$$

wobei $\lambda_0 > 0$ und $\sigma > \frac{1}{2}$.

Notationen

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir $S_\alpha : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ über die Multiplikation mit $(1 + |\xi|^2)^{\frac{\alpha}{2}}$ im Fourierraum. Mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, f \rangle := \int \bar{u}(x) f(x) \mathrm{d}^{\mathrm{d}} x$$

notieren wir die rechte Seite, für alle Paare f, g für die diese existiert. Beispielsweise ist für $u \in W^{1,2}, f \in W^{-1,2}$

$$\langle u, f \rangle = \langle S_\alpha(u), S_{-\alpha}(f) \rangle.$$

Zur Wahl von X und $X^\star$

Wir betrachten nun die Abbildung

$$R_0(z) : W^{-1,2} \to W^{1,2},$$

welche durch die Multiplikation mit $(|\xi|^2 - z)^{-1}$ im Fourierraum definiert ist und wählen $X \subset W^{-1,2}$ als

$$X := W^{-\frac{1}{d+1},p_d} + S_1(B),$$
$$\text{mit } \|f\|_X := \inf_{f_1+f_2=f} \|S_{-\frac{1}{d+1}}(f_1)\|_{L^{p_d}} + \|S_{-1}(f_2)\|_B,$$

sowie $X^\star \supset W^{1,2}$ als

$$X^\star := W^{\frac{1}{d+1},p_d'} \cap S_{-1}(B^\star),$$
$$\text{mit } \|u\|_{X^\star} := \max\left(\|S_{\frac{1}{d+1}}(u)\|_{L^{p_d'}}, \|S_1(u)\|_{B^\star} \right).$$

Zur Wahl von X und $X^\star$

Die Räume X und $X^\star$ erfüllen folgende Eigenschaften:

(a) Es gelten $X \subset W^{-1,2}$ und $X^\star \supset W^{1,2}$.

(b) Es gilt $\left|\left\langle u, f \right\rangle\right| \leq \|f\|_X \|u\|_{X^\star}$ für $f \in X, u \in X^\star$.

(c) Die Fouriertransformation und ihre Inverse sind beschränkte Operatoren

$$\mathcal{F} : X \to L^2(\mathbb{S}^{d-1}) \text{ und } \mathcal{F}^{-1} : L^2(\mathbb{S}^{d-1}) \to X^\star.$$

Limiting Absorption für die freie Resolvente

Theorem (Ionescu, Schlag: Theorem 1.1)

Sei $\delta \in (0,1]$. Dann ist

$$\sup_{|\lambda|\in[\delta,\delta^{-1}],\varepsilon\in[-1,1]\setminus\{0\}} \|R_0(\lambda+i\varepsilon)\|_{X\to X^\star} \leq C_\delta < \infty,$$

wobei C_δ eine Konstante ist, welche nur von δ und der Dimension d abhängt.

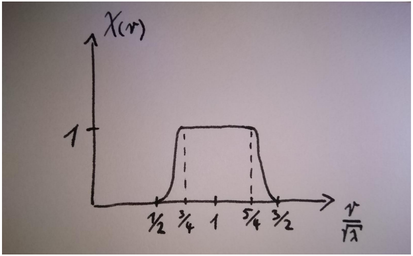
Zu Theorem 1.1

Die $W^{-1,2} \to W^{1,2}$ Operatornorm explodiert für $\varepsilon \to 0$.
Wir beobachten

$$
\begin{aligned}
&\|R_0(\lambda + i\varepsilon)\|_{W^{-1,2}\to W^{1,2}} \\
&= \sup_{f\in W^{-1,2}} \frac{\|(|p|^2 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}(1+|p|^2)^{\frac{1}{2}}\hat{f}(p)\|_{L^2}}{\|(1+|p|^2)^{-\frac{1}{2}}\hat{f}(p)\|_{L^2}} \\
&= \sup_{f\in W^{-1,2}} \frac{\|(|p|^2 - \lambda - i\varepsilon)^{-1}(1+|p|^2)(1+|p|^2)^{-\frac{1}{2}}\hat{f}(p)\|_{L^2}}{\|(1+|p|^2)^{-\frac{1}{2}}\hat{f}(p)\|_{L^2}} \\
&\leq \left\| \frac{1+|p|^2}{|p|^2 - \lambda - i\varepsilon} \right\|_{L^\infty}.
\end{aligned}
$$

Beweis von Theorem 1.1

Sei $\chi : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ eine glatte Funktion mit Träger in $\left\{|p| \in \left[\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}, \frac{3}{2}\sqrt{\lambda}\right]\right\}$ mit $\chi \equiv 1$ auf $\left\{|p| \in \left[\frac{3}{4}\sqrt{\lambda}, \frac{5}{4}\sqrt{\lambda}\right]\right\}$



und seien $\chi(D)$ und $(1-\chi)(D)$ jene Operatoren, welche durch Multiplikation mit $\chi(p)$ bzw. $1-\chi(p)$ im Fourierraum definiert sind. Dann können wir ohne Einschränkungen $\lambda \in [\delta, \delta^{-1}]$ und $|\varepsilon| \leq \delta$ annehmen und es genügt

$$\|\chi(D)R_0(\lambda + i\varepsilon)\|_{X \to X^\star} \leq C_\delta$$

zu zeigen.

Beweis von Theorem 1.1

Es gilt

$$
\begin{aligned}
&\|R_0(z)\|_{X\to X^\star} \\
&= \sup_{f\in X} \frac{\max\left(\left\|S_{\frac{1}{d+1}}(R_0(z)f)\right\|_{L^{p_d'}},\ \|S_1(R_0(z)f)\|_{B^\star}\right)}{\inf_{f_1+f_2=f}\left\|S_{-\frac{1}{d+1}}(f_1)\right\|_{L^{p_d}}+\|S_{-1}(f_2)\|_B} \\
&\le \sup_{\substack{f_1\in W^{-\frac{1}{d+1},p_d}\\ f_2\in S_1(B)}} \frac{\max\left(\left\|S_{\frac{1}{d+1}}R_0(z)(f_1+f_2)\right\|_{L^{p_d'}},\ \|S_1R_0(z)(f_1+f_2)\|_{B^\star}\right)}{\left\|S_{-\frac{1}{d+1}}(f_1)\right\|_{L^{p_d}}+\|S_{-1}(f_2)\|_B} \\
&\le \sup_{f_1\in W^{-\frac{1}{d+1},p_d}} \frac{\left\|S_{\frac{1}{d+1}}R_0(z)(f_1)\right\|_{L^{p_d'}}}{\left\|S_{-\frac{1}{d+1}}(f_1)\right\|_{L^{p_d}}} + \sup_{f_2\in S_1(B)}\frac{\|S_1R_0(z)(f_2)\|_{B^\star}}{\|S_{-1}(f_2)\|_B} \\
&+ \sup_{f_1\in W^{-\frac{1}{d+1},p_d}} \frac{\|S_1R_0(z)(f_1)\|_{B^\star}}{\left\|S_{-\frac{1}{d+1}}(f_1)\right\|_{L^{p_d}}} + \sup_{f_2\in S_1(B)}\frac{\left\|S_{\frac{1}{d+1}}R_0(z)(f_2)\right\|_{L^{p_d'}}}{\|S_{-1}(f_2)\|_B}
\end{aligned}
$$

Beweis von Theorem 1.1

$$
\begin{aligned}
&\leq \sup_{g_1 \in L^{p_d}} \frac{\left\| S_{\frac{1}{d+1}} R_0(z) S_{\frac{1}{d+1}}(g_1) \right\|_{L^{p_d'}}}{\|g_1\|_{L^{p_d}}} + \sup_{g_2 \in B} \frac{\|S_1 R_0(z) S_1(g_2)\|_{B^\star}}{\|g_2\|_B} \\
&+ \sup_{g_1 \in L^{p_d}} \frac{\left\| S_1 R_0(z) S_{\frac{1}{d+1}}(g_1) \right\|_{B^\star}}{\|g_1\|_{L^{p_d}}} + \sup_{g_2 \in B} \frac{\left\| S_{\frac{1}{d+1}} R_0(z) S_1(g_2) \right\|_{L^{p_d'}}}{\|g_2\|_B}.
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$
\begin{aligned}
&\|\chi(D) R_0(\lambda + i\varepsilon)\|_{X \to X^\star} \\
\leq &\|S_{\frac{1}{d+1}} \chi(D) R_0(\lambda + i\varepsilon) S_{\frac{1}{d+1}}\|_{L^{p_d} \to L^{p_d'}} + \|S_1 \chi(D) R_0(\lambda + i\varepsilon) S_1\|_{B \to B^\star} \\
+ &\|S_1 \chi(D) R_0(\lambda + i\varepsilon) S_{\frac{1}{d+1}}\|_{L^{p_d} \to B^\star} + \|S_{\frac{1}{d+1}} \chi(D) R_0(\lambda + i\varepsilon) S_1\|_{B \to L^{p_d'}}.
\end{aligned}
$$

Beweis von Theorem 1.1

Die uniformen Schranken für $L^{p_d} \to B^\star$ und $B \to L^{p_d'}$ [Ruiz, Vega; Theorem 3.1], sowie $B \to B^\star$ [Hörmander; Theorem 14.2.2] sind bekannt. Weiterhin bemerken wir, dass $S_{\frac{2}{d+1}}\chi(D)$ auf L^{p_d} beschränkt ist und mit der Submultiplikativität der Operatornorm nur noch

$$\|R_0(\lambda + i\varepsilon)\|_{L^{p_d} \to L^{p_d'}} \leq C_\delta$$

uniform in $|\varepsilon| \leq \delta$ und $\lambda \in [\delta, \delta^{-1}]$ zu zeigen ist. Diese kennen wir bereits aus [KRS; Theorem 2.3] und somit ist alles gezeigt.

Zum Beweis von Theorem 1.1

Theorem (Kenig, Ruiz, Sogge; Theorem 2.3)
Sei $d \geq 3$. Dann gibt es eine Konstante C für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq 1$, sodass

$$\|u\|_{L^{p_d'}} \leq C\|(H_0 - z)u\|_{L^{p_d}}, \quad u \in W^{2,p_d}.$$

Für die Resolvente $R_0(z) : L^{p_d} \to L^{p_d'}$ gilt damit

$$\sup_{f \in L^{p_d}} \frac{\|R_0(z)f\|_{L^{p_d'}}}{\|f\|_{L^{p_d}}} = \sup_{u \in W^{2,p_d}} \frac{\|R_0(z)(H_0 - z)u\|_{L^{p_d'}}}{\|(H_0 - z)u\|_{L^{p_d}}}$$

$$= \sup_{u \in W^{2,p_d}} \frac{\|u\|_{L^{p_d'}}}{\|(H_0 - z)u\|_{L^{p_d}}} < \infty.$$

Theorem 1.2

Definition

Für $N \geq 0$, $\gamma \in (0,1]$ und $x \in \mathbb{R}^d$ definieren wir das Gewicht

$$\mu_{N,\gamma}(x) = \frac{\left(1 + |x|^2\right)^N}{\left(1 + \gamma|x|^2\right)^N}.$$

Theorem (Ionescu, Schlag: Theorem 1.2)

Seien $\delta \in (0,1]$. Dann ist für alle reellen λ mit $|\lambda| \in [\delta, \delta^{-1}]$

$$\|\mu_{N,\gamma} u\|_{X^\star} \leq C_{N,\gamma} \|\mu_{N,\gamma}(-\Delta + \lambda)u\|_X$$

für jedes $u \in X^\star$ mit der Eigenschaft, dass

$$\lim_{R \to \infty} R^{-1} \int_{R \leq |x| \leq 2R} |u|^2 d^d x = 0.$$

Die Konstante $C_{N,\delta}$ ist nur von N, δ und d abhängig (und damit insbesondere nicht von γ).

Zulässige Störungen

Definition

Sei $\mathcal{L}(X^\star, X)$ der Raum der linearen, beschränkten Operatoren von $X^\star$ nach X. L heißt zulässige Störung, falls

(a) $L \in \mathcal{L}(X^\star, X)$ und $\langle L\phi, \psi \rangle = \langle L\psi, \phi \rangle$ für alle $\psi, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

(b) Für jedes $\varepsilon > 0$ und $N \geq 0$ gibt es $A_{N,\varepsilon}, R_{N,\varepsilon} \in [1, \infty)$, sodass

$$\|\mu_{N,\gamma} L u\|_X \leq \varepsilon \|\mu_{N,\gamma} u\|_{X^\star} + A_{N,\varepsilon} \|u \mathbb{1}_{\{|x| \leq R_{N,\varepsilon}\}}\|_{L^2},$$

für jedes $u \in X^\star$ und jedes $\gamma \in (0, 1]$.

(c) Es gibt ein $J \in \mathbb{N}$ und Operatoren $A_j, B_j \in \mathcal{L}(X^\star, L^2)$ für $1 \leq j \leq J$, sodass

$$\langle L\phi, \psi \rangle = \sum_{j=1}^{J} \langle B_j \phi, A_j \psi \rangle,$$

für jedes $\phi, \psi \in X^\star$.

Beispiele für zulässige Störungen

Wir definieren die Banachraum

$$Y = \left\{ V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \,\middle|\, \|V\|_Y := \sum_{J=0}^{\infty} 2^j \|V\|_{L^\infty(D_j)} < \infty \right\},$$

und für $\delta \in (0, \frac{1}{2}]$ definieren wir die Kerne

$$K_{d,\delta}(x) = \mathbb{1}_{|x| \leq \delta} \begin{cases} |x|^{-(d-2)} & \text{falls } d \geq 3; \\ \log(1/|x|) & \text{falls } d = 2. \end{cases}$$

Weiter sei für ein $q \in [1, \infty)$ und eine messbare Funktion f

$$M_q(f)(x) = \left[\int_{|y| \leq \frac{1}{2}} |f(x+y)|^q \mathrm{d}^\mathrm{d} y \right]^{\frac{1}{q}}.$$

Wir setzen $q_0 = \frac{d}{2}$, falls $d \geq 3$ und $q_0 > 1$, falls $d = 2$.

Beispiele für zulässige Störungen

Theorem (Ionescu, Schlag; Proposition 1.4)

Folgendes sind Beispiele für zulässige Störungen:

(a) *Ein Multiplikationsoperator, welcher durch ein reellwertiges Potential V definiert ist und entweder*

$$M_{q_0}(V) \in L^{\frac{d+1}{2}},$$

oder

$$M_{q_0}(V) \in Y,$$

oder

$$\lim_{\delta \to 0} \| |V| * K_{d,\delta} \|_Y = 0.$$

Beispiele für zulässige Störungen

Theorem (Ionescu, Schlag; Proposition 1.4)

Folgendes sind Beispiele für zulässige Störungen:

(b) *Ein Differentialoperator der Form $\vec{a} \cdot \nabla - \nabla \cdot \vec{a}$, wobei $\vec{a} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^d$ ein vektorwertiges Potential ist mit entweder*

$$\left[\sum_{j=0}^{\infty} \left(2^{\frac{j}{2}} \| M_{2q_0} (|\vec{a}|) \|_{L^{d+1}(D_j)} \right)^{p_d} \right]^{\frac{1}{p_d}} < \infty,$$

oder

$$M_{2q_0} (|\vec{a}|) \in Y,$$

oder

$$\lim_{\delta \to 0} \| [|\vec{a}|^2 * K_{d,\delta}]^{\frac{1}{2}} \|_Y = 0.$$

(c) *Eine Linearkombination von zulässigen Störungen mit reellen Koeffizienten.*

Literatur

- A. Ionescu und W. Schlag, Agmon-Kato-Kuroda theorems for a large class of perturbations., Duke Math. J. 131, 2006
- M. Reed, B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics. IV. Analysis of Operators., Academic Press, 1978
- C. E. Kenig, A. Ruiz, C. D. Sogge, Uniform Sobolev inequalities and unique continuation for second order constant coefficient differential operators., Duke Math. J. 55, 1987
- S. Agmon, Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 2 (1975), 151–218.

Literatur

- L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer–Verlag, Berlin (1985).
- A. Ruiz and L. Vega, On local regularity of Schrödinger equations, Int. Math. Res. Not. 1993 (1993), 13–27.