Resolventenungleichungen und Zusammenhang mit Stein-Tomas

16.11.2020 (1)

[KRS, Thm 2.1]: Sei $d\geq 3$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{2}{d}$, dann gilt:

$$\exists C>0: \quad \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C\cdot \|P(D)u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \quad u\in H^{2,p}(\mathbb{R}^d) \qquad (1.2)$$

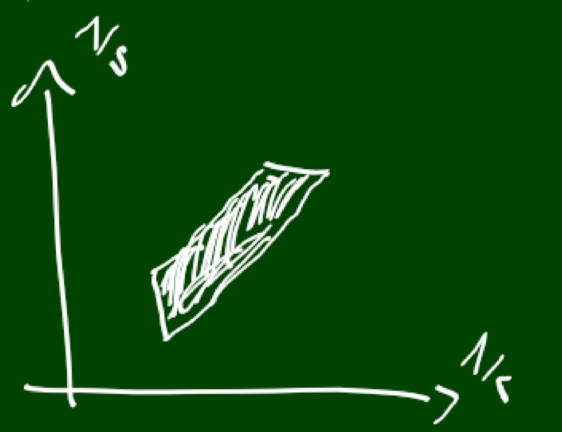
Differentialop., konst. Koeff'en, Hauptsymbol $Q(\xi) := -\sum_{i=1}^{j}\xi_i^2+\sum_{k=j+1}^{d}\xi_k^2$

Bsp: $\Delta = \sum_{k=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ (1.2) klass. Sobolevungleichung

$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\sum_{i=2}^{d}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$

$\Box+1$ Klein-Gordon Operator

Bem: [Thm 2.2]: Für r,s beliebig mit $\min\left(\left|\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\right|,\left|\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\right|\right)>\frac{1}{2d}$, $Q(D)=\Delta$.
Dann gilt obige Ungl. mit $q\to s$, $p\to r$



Speziell: [KRS, Thm 2.3]: Sei $d\geq 3$, $Q(\xi)$ wie oben, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\in\left[\frac{2}{d+1},\frac{2}{d}\right]$

entspricht optimaler Schranke von Tomas Stein

Dann gilt: $\exists C>0\ \forall z\in\mathbb{C}, |z|\geq 1$:

$$(\circledast) \qquad \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C\cdot\|(Q(D)+z)u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \quad u\in H^{2,p}(\mathbb{R}^d)$$

Zusammenhang mit Stein Tomas und Streutheorie

Für $Q(D)=\Delta$: $\quad \circledast \Longleftrightarrow \boxed{\left\{ \|(-\Delta-z)^{-1}f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \right\}}$ [KRS]

I: KRS $\Rightarrow$ TS
P_{TS} scharf $\Rightarrow \frac{2}{d+1}$ optimal

[TS]: $\exists C>0: \|\widehat{f\,d\sigma}\|_q \leq C_q\|f\|_2$

II: Zshg. Streutheorie
Abwesenheit d. singulärstetl. Spektrums

[RS, Thm XIII.19-21]:
Vor.: $\sup_{0<\varepsilon<1}\int_a^b |\mathrm{Im}(\varphi, R(x+i\varepsilon)\varphi)|^p\,dx<\infty$
Folge: $\sigma_{sing}=\emptyset$

[FS] Verallgemeinerung für Schattenideale

I Zshg Res.ungl. und Stein Tomas:

Betrachte für $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$

$$(f,(-\Delta-z)^{-1}f) \overset{\text{multiplier thm}}{=} \int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat f(\xi)|^2}{\xi^2-z}\,d\xi$$

$$=\int_0^\infty\int_{S^{d-1}}\frac{k^{d-1}}{k^2-z}|\hat f(k\omega)|^2\,d\sigma(\omega)\,dk$$

$k^2=\tilde k$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{1}{k-z}k^{\frac{d}{2}-1}\int_{S^{d-1}}|\hat f(\sqrt{k}\omega)|^2\,d\sigma(\omega)\,dk$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{k^{\frac{d}{2}-1}}{k-z}\underbrace{\int_{S^{d-1}}|\hat g_k(\omega)|^2\,d\sigma(\omega)}_{\|\hat g_k\|^2_{L^2(S^{d-1})}=\frac{1}{\sqrt{k}}\|\hat f(\sqrt{k}\cdot)\|^2_{L^2(S^{d-1})}}dk$$

$Tf(x)=\int_{\mathbb{R}^d}m(\xi)\hat f(\xi)e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}\,d\xi$
für m so, dass $\widehat{Tf}(\xi)=m(\xi)\hat f(\xi)$
$T(-i\nabla)\rightsquigarrow m(\xi)=T(\xi)$

$g_k := f\left(\frac{\cdot}{\sqrt{k}}\right)\frac{1}{\sqrt{k}}$

$\hat g_k = \frac{1}{\sqrt{k}}(\hat f\circ(\sqrt{k}\cdot))$

Betrachte:

a) Angenommen $\nexists C>0$: $\|\hat g_k\|_{L^2(S^{d-1})}\leq C\|g_k\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$

Dann $\|(-\Delta-z)^{-1}\|_{L^p\to L^q}$ nicht endlich ↯ [KRS]

b) Angenommen, $\|(-\Delta-z)^{-1}\|_{L^p\to L^q}<C$ gälte für $p>p_{TS}=\frac{2(d+1)}{d+3}$ (i.e. $q<\frac{2(d+1)}{d-1}$, $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}<\frac{2}{d+1}$)

Dann ex. $C>0$: $\|\hat g_k\|_{L^2(S^{d-1})}\leq C\|g_k\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$

also wäre auch [Stein Tomas] für $p>p_{TS}$ wahr ↯

② Zshg. mit Streutheorie

[RS, Thm XIII.20]: Sei H s.a., $R(\lambda) := (H-\lambda)^{-1}$, $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Dann gilt:

(i) Ex. $D \subset \mathcal{H}$ dicht so, dass für alle $\varphi \in D$:

$$\boxed{\sup_{0<\varepsilon<1} \int_a^b |\operatorname{Im}(\varphi, R(\lambda+i\varepsilon)\varphi)|^p \, d\lambda < \infty}$$

für ein $p>1$, dann hat H auf (a,b) rein absolutstetiges Spektrum.

[RS, Thm XIII.21]: Sei V aus der Rollnik-Klasse, $H = -\Delta + V$. Gelte eine der beiden Eigenschaften

(a) $\|V\|_R < 4\pi$ oder (b) $V e^{a|x|} \in R$, $a>0$

Dann gilt $\sigma_{sing}(H) = \emptyset$.

Einschub: Imaginärteil?

$$(f, (-\Delta - z)^{-1} f) = \ldots = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{k^{\frac{d}{2}-1}}{k-z} \int_{S^{d-1}} |\hat{f}(\sqrt{k}\omega)|^2 \, d\sigma(\omega)\, dk$$

- $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{k-\lambda+i\varepsilon}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{k-\lambda-i\varepsilon}{(k-\lambda)^2+\varepsilon^2}\right) = -\frac{\varepsilon}{(k-\lambda)^2+\varepsilon^2} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \boxed{\delta(k-\lambda)}$

- $\lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{Im}(f, (-\Delta-(\lambda+i\varepsilon))^{-1} f) = \frac{\lambda^{\frac{d}{2}-1}}{2} \underbrace{\int_{S^{d-1}} |\hat{f}(\sqrt{\lambda}\omega)|^2 \, d\sigma(\omega)}$

$= \|\hat{f} \circ (\sqrt{\lambda}\,\cdot)\|^2_{L^2(S^{d-1})}$ mit optimalem PTS

$= (f, E_{-\Delta}(\lambda) f)$ Spektrale Resolution

In Streutheorie:

EW kein Zerfall

- Entwicklung der $\mathbb{1}$: $f = P_{pp} f + P_{ac} f + P_{sc} f$ ← verschwindet für "schöne" Potentiale

$P_{ac} f$: fällt; $P_{sc} f$: fällt langsamer

$\mu = \mu_{pp} + \mu_{ac} + \mu_{sc}$

- σ_{sing}: Weniger stabil unter Störungen ([RS, Thm XIII.21.5]: $H_\alpha = H_0 + \alpha(\varphi, \cdot)\varphi$, $\alpha \in \{\alpha_1, \alpha_2\}$)

- Betrachte $(-\Delta + V - z)^{-1} = \underbrace{(\mathbb{1} + (-\Delta - z)^{-1} V)^{-1}} \cdot \underbrace{(-\Delta-z)^{-1}}$

$(-\Delta-z)^{-1}$: hier für $L^p \to L^q$ Schranken

möchte Beschränktheit für $V \in L^r$ für möglichst großes r, speziell hier: $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \in \left[\frac{2}{d+1}, \frac{2}{d}\right]$ scharf!

(vgl [TS, Thm 12 + 13] $\hookrightarrow \|V^{1/2}(-\Delta-z)^{-1} V^{1/2}\| \cdot c \cdot |z|^{-1+\frac{d}{2r}} \cdot \|V\|_{L^r}$

Bem: zum Beweis von [KRS, Thm 2.3]

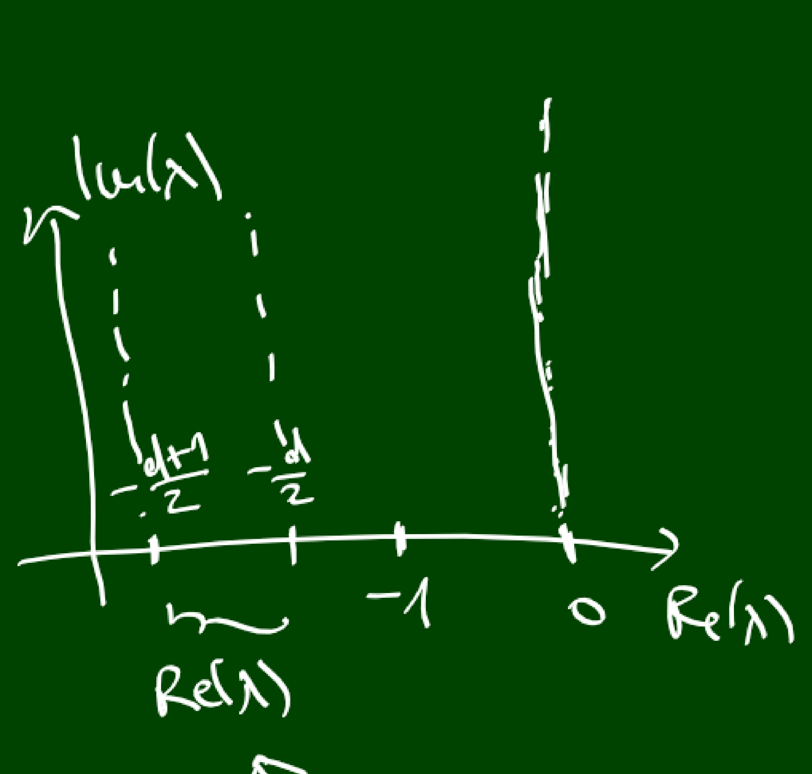
- Verallgemeinerung, nicht notwendig Kompaktheit gegeben, hier neues Mittel. Stein Interpolation thm.

- Möchte zeigen: $\|T_{-1} f\|_q \le C \cdot \|f\|_p$ $\{T_\lambda\}$ Familie

Mit Steininterpolation reicht es zu zeigen:

(a) $\|T_{0+i\operatorname{Im}(\lambda)} f\|_2 \le C \cdot \|f\|_2$

(b) $\|T_{\operatorname{Re}(a)+i\operatorname{Im}(\lambda)} f\|_\infty \le C \cdot \|f\|_1$



$-1 = (1-\theta) \cdot 0 + \theta \cdot \operatorname{Re}(\lambda)$

$\frac{1}{p_\theta} = (1-\theta)\frac{1}{p_0} + \theta \cdot \frac{1}{p_1} \quad \wedge \quad \frac{1}{q_\theta} = (1-\theta)\frac{1}{q_0} + \theta \frac{1}{q_1}$

$\frac{1}{p_\theta} - \frac{1}{q_\theta} \in \left[\frac{2}{d+1}, \frac{2}{d}\right]$