N-Teilchen asympotische Vollständigkeit

Literatur:

- Bücher: Reed-Simon III, Cycon-Froese-Kirsch-Simon, Derezinski-Gerard
- Paper:
  - Enß 1977,
  - Deift + Simon 1977,
  - Mourre 1980,
  - Perry + Sigal + Soffer 1983,
  - Sigal + Soffer 1984 – 88,
  - Graf 1990,
  - Derezinski 1994,
  - Graf 1997:
    „N-Body Quantum System: A Tutorial"

    Quelle für heutigen Vortrag

1. N-Teilchensysteme

Hilbertraum $= L^2(\mathbb{R}^d)^{\otimes N} = L^2(X)$,

$$X = (\mathbb{R}^d)^N = \{(x^1, \dots, x^N) \mid x_i \in \mathbb{R}^d\}.$$

Hamiltonian:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(-\Delta_{x^i}) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} V_{ij}(x^i - x^j),$$

wobei $V_{ij} = V_{ji}$ und $V_{jj} \equiv 0$. Zentrale Annahmen sind:

- $V_{ij}(z)$ und $z \cdot \nabla V_{ij}(z)$ sind relativ $-\Delta_z$-kompakt,
- $\exists \mu > 0\ \forall |z| > 1: \ |V_{ij}(z)|, \ |z \cdot \nabla V_{ij}(z)| \leq \frac{C}{|z|^{1+\mu}}$,

(short range ass.)

Wir nehmen der Einfachheit halber $\boxed{V_{ij} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)}$ an.

$\Rightarrow$ H ist selbstadj. auf $\mathrm{dom}(-\Delta) = H^2(\mathbb{R}^{dN})$.

Bemerkungen:

- V_{ij} kann positiv oder negativ sein.
- Keine Teilchensymmetrie wird angenommen.
- $V(x) := \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} V_{ij}(x^i - x^j)$ ist nicht relativ $(-\Delta_x)$-kompakt.

2. Clusterzerlegungen

$\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, N\}$,

$a \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{N})$ heißt Clusterzerlegung von $\mathcal{N}$, $a \in \mathcal{C}(\mathcal{N})$ $:\Longleftrightarrow$

$$a = \{c_1, \ldots, c_k\}, \quad \bigcup_{\alpha=1}^{k} c_\alpha = \mathcal{N}, \quad \alpha \neq \beta \Rightarrow c_\alpha \cap c_\beta = \phi.$$

Bsp.: $N = 4$: $\mathcal{C}(\mathcal{N}) = \{a_1, a_2, \ldots, a_{15}\}$,

$a_1 = (1234) =: 0$,

$a_2 = (1)(234)$, $a_3 = (2)(134)$, $a_4 = (3)(124)$, $a_5 = (4)(123)$,

$a_6 = (12)(34)$, $a_7 = (13)(24)$, $a_8 = (14)(23)$,

$a_9 = (1)(2)(34)$, $a_{10} = (1)(3)(24)$, $a_{11} = (1)(4)(23)$,

$a_{12} = (2)(3)(14)$, $a_{13} = (2)(4)(13)$, $a_{14} = (3)(4)(12)$,

$a_{15} = (1)(2)(3)(4)$.

Halbordnung auf $\mathcal{C}(\mathcal{N})$:

- $a \leq b$ $:\Longleftrightarrow$ $\forall c_b \in b \; \exists c_a \in a : c_b \subseteq c_a$,
- $a < b$ $:\Longleftrightarrow$ $a \leq b \wedge a \neq b$.

Bsp.: $(12)(34) < (1)(2)(34)$, $(12)(34) < (12)(3)(4)$.

- $m[a] := \max\limits_{c \in a} |c|$, dann sind $m[(1)(2)(34)] = 2$, $m[0] = N$,

und es gilt $a > 0 \Rightarrow m[a] < m[0]$.

Seien $\underline{X} = (\mathbb{R}^d)^N$, $a = \{C_1, C_2, \dots, C_k\} \in \mathcal{C}(\mathcal{N})$.

$$\underline{X}_a := \{ x \in \underline{X} \mid \forall \alpha \in \mathbb{Z}_1^k \ \forall i,j \in C_\alpha : \ x^i = x^j \},$$

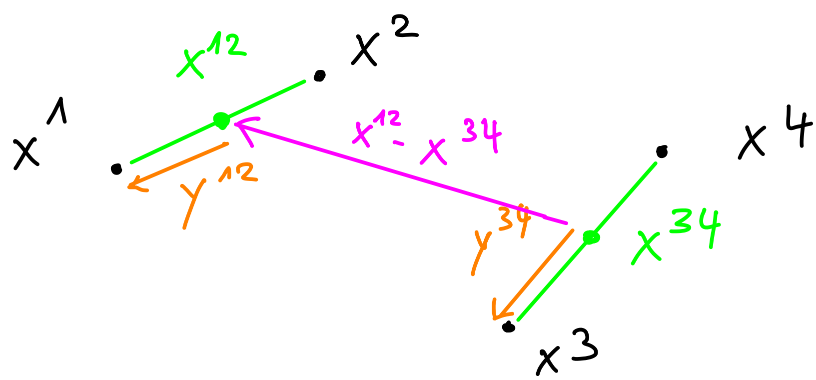
$$\underline{X}^a := \{ x \in \underline{X} \mid \forall \alpha \in \mathbb{Z}_1^k : \ \langle x \rangle_{C_\alpha} := \frac{1}{|C_\alpha|} \sum_{i \in C_\alpha} x^i = 0 \}.$$

Bsple:

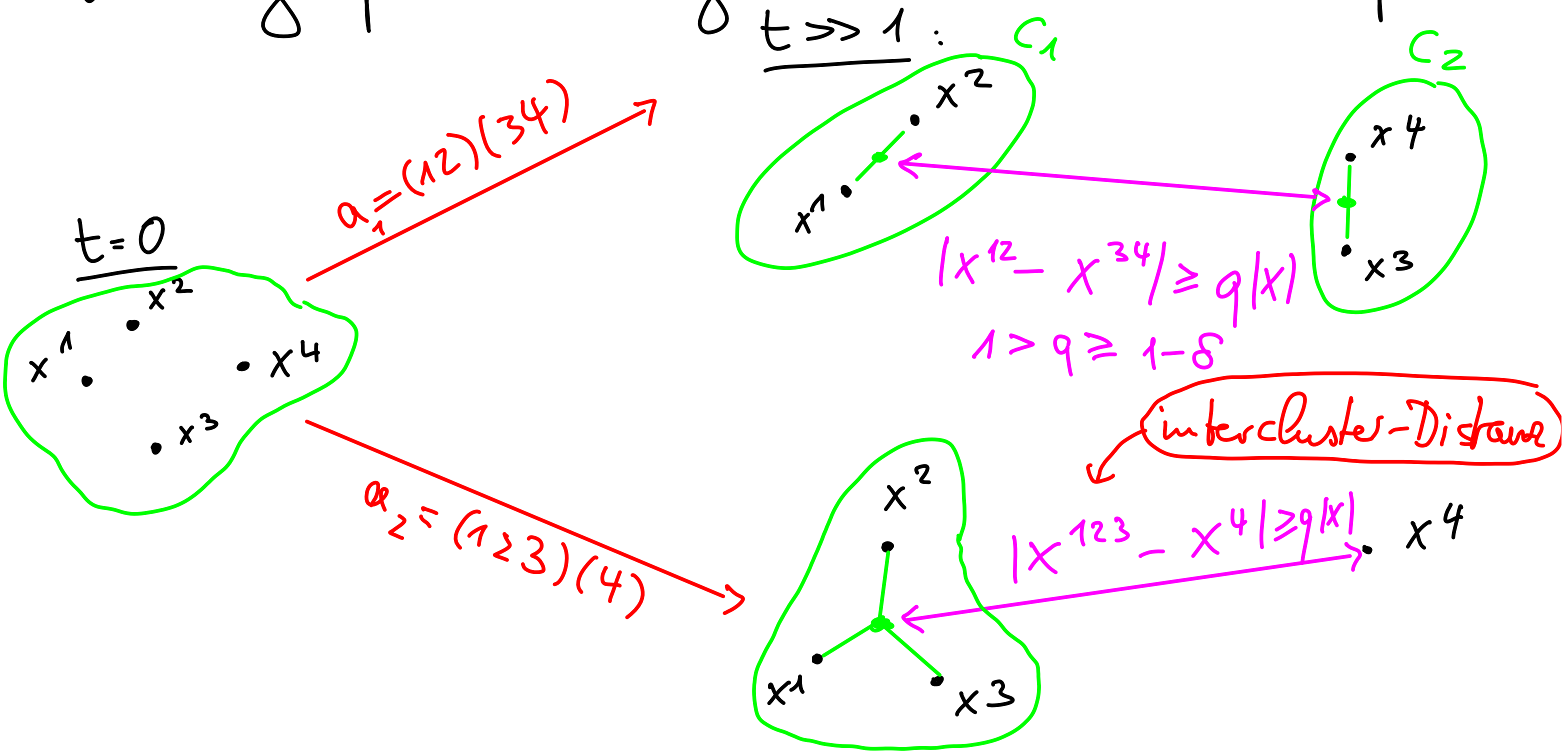
$$\underline{X}_{(12)(34)} = \{ (x^{12}, x^{12}, x^{34}, x^{34}) \mid x^{12}, x^{34} \in \mathbb{R}^d \},$$

$$\underline{X}^{(12)(34)} = \{ (y^{12}, -y^{12}, y^{34}, -y^{34}) \mid y^{12}, y^{34} \in \mathbb{R}^d \},$$

$$\Rightarrow \underline{X} = \underline{X}_{(12)(34)} \oplus \underline{X}^{(12)(34)}.$$



- Cluster definieren kinematische Koordinatenwahlen die asymptotische dynamische Szenarien repräsentieren:



- Asymptotische Vollständigkeit (AC) besagt, dass die Möglichkeiten, welche asymptotische Form die Lsg. der Schrödingergl. $i\partial_t \psi_t = H\psi_t$ für $t \to \infty$ annimmt, durch $\mathcal{C}(N)$ ausgeschöpft werden. Dabei brechen Cluster auf und werden nicht wieder zusammengefügt, wenn man lang genug wartet.

3. HVZ-Theorem (Hunziker, van Winter, Zishlin)

Sei $a = \{C_1, \dots, C_k\} \in \mathcal{C}(\mathcal{N})$. Nach Koordinatenwechsel

$$x = (x^1, \dots, x^N) \longrightarrow (x_a, x^a),$$

$$x_a = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^{dk}, \quad y_\alpha := \langle x \rangle_{C_\alpha},$$

$$x^a = (z^1, \dots, z^k), \quad z^\alpha = (x^i - \langle x \rangle_{C_\alpha})_{i \in C_\alpha},$$

$$p = \frac{1}{i} \nabla_x = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{N} \nabla_{x^j},$$

$$p_a = \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{1}{i} \nabla_{y_\alpha}, \quad p^a = \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{1}{i} \nabla_{z^\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{j \in C_\alpha} \frac{1}{i} \nabla_{z^\alpha_j}$$

werden:

- $p^2 = p_a^2 + (p^a)^2, \quad V(x) = V^a(x^a) + I_a(x_a),$
- $V^a(x^a) = \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{1}{2} \sum_{i,j \in C_\alpha} V_{ij}(x^i - x^j),$ $\boxed{\text{Innerclusterpot.}}$
- $I_a(x_a) = \sum_{1 \le \alpha < \beta \le k} \sum_{i \in C_\alpha} \sum_{j \in C_\beta} V_{ij}(x^i - x^j).$ $\boxed{\text{Intercluster-potential}}$

$$\Rightarrow \quad |I_a(x)| \le \frac{C}{(1 + |x|_a)^{1+\mu}}, \quad \text{wobei}$$

$$|x|_a := \min_{\alpha \ne \beta} \left| \langle x \rangle_{C_\alpha} - \langle x \rangle_{C_\beta} \right|$$

$\boxed{\text{Intercluster-distanz}}$

$$\Rightarrow \quad H = H_a + I_a(x_a) \otimes \mathbb{1}^a \,,$$

$$H_a = \frac{1}{2} p_a^2 \otimes \mathbb{1}^a + \mathbb{1}_a \otimes H^a \,, \qquad \Rightarrow I_a \, (p_a^2 + 1)^{-1} \ \underline{\text{kompakt}}$$

$$H^a = \frac{1}{2} (p^a)^2 + V^a(x^a)$$

$$= \bigoplus_{\alpha=1}^{k} \Big[\frac{1}{2} (p_{z^\alpha})^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j \in C_\alpha} V_{ij} (z^{\alpha,i} - z^{\alpha,j})$$

$a = 0 = (1, \dots, N)$:

$$H \equiv H_0 = \frac{1}{2} (p_0)^2 \otimes \mathbb{1}^0 + \mathbb{1}_0 \otimes H^0$$

$$H = H_a + I_a, \qquad H_a = \tfrac{1}{2} p_a^2 \otimes 1^a + 1_a \otimes H^a.$$

<u>Thm [HVZ]</u>: $\sigma_{ess}(H^0) = \bigcup_{a>0} \sigma(H_a).$

<u>Bem.</u>: $\sigma(A \otimes 1 + 1 \otimes B) = \overline{\sigma(A) + \sigma(B)}$

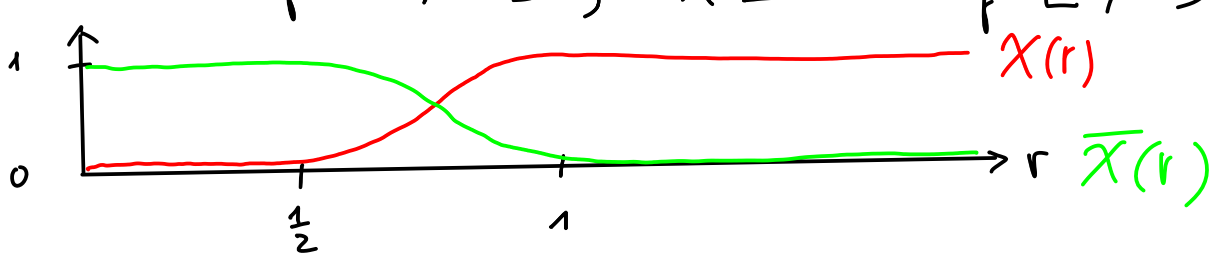
$$\sigma(H_a) = \overline{\underbrace{\sigma(\tfrac{1}{2} p_a^2)}_{= \mathbb{R}_0^+} + \sigma(H^a)} = \overline{\sigma(H^a) + \mathbb{R}_0^+} = [\Sigma_a, \infty),$$

$$\Sigma_a := \inf \sigma(H^a) = \inf \sigma(H_a)$$

$$\Rightarrow \sigma_{ess}(H^0) = [\Sigma, \infty), \quad \Sigma := \min_{a>0} \{\Sigma_a\} = \Sigma_0$$

<u>Beweisidee</u>: Konstruktion einer IMS-Partition der 1:

- Seien $S'_{\underline{X}} := \{x \in \underline{X} \mid |x| = 1\}$, $\delta > 0$, $a \in \mathcal{C}(\mathcal{N})$.
- Wähle $s_a \in C^\infty(S'_{\underline{X}}; [0,1])$ so, dass $\operatorname{supp}(s_a) \subseteq \{\omega \in S_{\underline{X}} : |\omega|_a > \delta\}$ und dass $\forall \omega \in S'_{\underline{X}}: \sum_{a>0} s_a^2(\omega) = 1.$
- Wähle weiterhin $\chi, \bar{\chi} \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+)$ so, dass $\forall r \geq 0: \chi^2(r) + \bar{\chi}^2(r) = 1$, $\chi' \geq 0$, $\chi \equiv 0$ auf $[0, \tfrac{1}{2}]$, $\bar{\chi} \equiv 0$ auf $[1, \infty).$



• Schließlich für $x \in \overline{X}$: $\quad j_0(x) := \overline{\chi}(|x|)$,

$\forall a>0$: $\quad j_a(x) := \mathcal{S}_a\left(\frac{x}{|x|}\right)\cdot \chi(|x|)$.

$\Rightarrow$ • $\sum_{a\geq 0} j_a^2(x) = 1, \quad x\in\overline{X}$,

• $\left(j_0 H^0 j_0 + |\nabla j_0|^2\right)$ ist relativ H^0-kpkt,

• $\forall a>0,\ |x|\geq 1,\ x\in \operatorname{supp}(j_a)$: $\quad |x|_a \geq \delta\cdot|x|$.

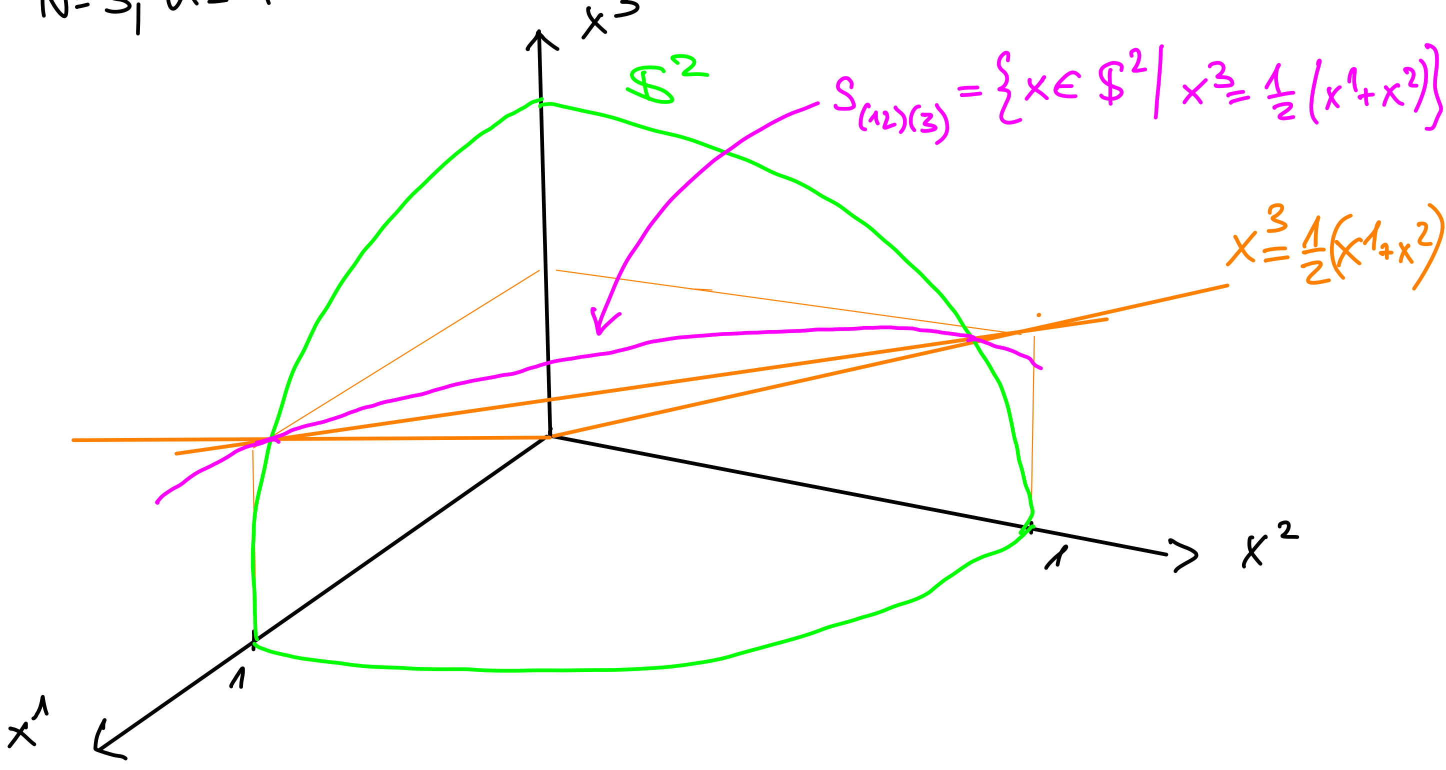
Dann IMS-Formel benutzen:

$$H^0 = \sum_{a\geq 0}\left\{ j_a H^0 j_a + |\nabla j_a(x)|^2 \right\}$$

$$= \sum_{a>0}\left\{ j_a\left(\tfrac{1}{2}p_a^2 + H^a\right)j_a + \underbrace{j_a I_a j_a + |\nabla j_a|^2}_{\underbrace{\mathcal{O}(|x_a|^{-1-\mu})}_{\swarrow}}\right\}$$

$$+ \underbrace{j_0 H^0 j_0 + \tfrac{1}{2} j_0 p_0^2 j_0}_{\text{tragen nicht zu } \sigma_{ess}(H^0) \text{ bei}}$$

Bsp.: $N=3,\ d=1$



4. Mourre Estimates:

$$\mathcal{E}(H^0) := \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von } H^0 \},$$

$$\mathcal{T}(H^0) := \bigcup_{a>0} \mathcal{E}(H^a),$$

$$\forall\, E \in \sigma(H^0): \quad \Theta(E) := \inf\{ 2(E-\lambda) \mid \lambda \in \mathcal{T}(H^0) \cup \{-\infty\},\ \lambda \le E \}.$$

<u>Thm [Perry, Sigal, Simon]</u>: $A := \frac{1}{2}(x \cdot p + p \cdot x)$

(i) $\forall\, E \in \sigma(H^0),\ \varepsilon > 0\ \exists\, \Delta = (a,b) \ni E$, K kompakt:

$$E_\Delta(H^0)\, i[H^0, A]\, E_\Delta(H^0) \ge (\Theta(E) - \varepsilon) \cdot E_\Delta(H^0) + K.$$

(ii) $$\overline{\mathcal{E}(H^0)} \subseteq \mathcal{E}(H^0) \cup \mathcal{T}(H^0).$$

(iii) $\forall\, E \in \sigma(H^0) \setminus \mathcal{E}(H^0),\ \varepsilon > 0\ \exists\, \Delta = (a,b) \ni E$:

$$E_\Delta(H^0)\, i[H^0, A]\, E_\Delta(H^0) \ge (\Theta(E) - \varepsilon)\, E_\Delta(H^0).$$

<u>Bem:</u> (i) $\Rightarrow$ (iii)

5. Propagation Estimates

Thm [Maximal Velocity Estimate]: Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt. Für $\lambda < \infty$ genügend groß gibt es eine Konstante $C < \infty$ so, dass $\forall \psi \in L^2(X)$, $\|\psi\| = 1$:

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t} \left\langle \psi_t \middle| E_\Omega(H^0)\, \mathbb{1}\left[\lambda \leq \frac{|x|}{t} \leq 2\lambda\right] E_\Omega(H^0) \psi_t \right\rangle \leq C.$$

Thm [Minimal Velocity Estimate]:

$\forall E \notin \mathcal{E}(H^0) \cup \mathcal{J}(H^0)$ $\exists \Delta = (a,b) \ni E$, $v > 0$ $\forall \|\psi\| = 1$:

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t} \left\langle \psi_t \middle| E_\Delta(H^0)\, j_0^2\left(\frac{x}{vt}\right) E_\Delta(H^0) \psi_t \right\rangle \leq C$$

Beweis: $\Phi_t := E_\Delta(H^0)\, \underbrace{j_0\left(\frac{x}{vt}\right)}_{=:j_0} \frac{A}{t}\, \underbrace{j_0\left(\frac{x}{vt}\right)}_{=:j_0} \underbrace{E_\Delta(H^0)}_{=:E_\Delta}$

$$\Rightarrow D\Phi_t := i[H^0, \Phi_t] + \partial_t \Phi_t$$

$$= E_\Delta\left((Dj_0)\frac{A}{t} j_0 + j_0\left[D\left(\frac{A}{t}\right)\right] j_0 + j_0 \frac{A}{t}(Dj_0)\right) E_\Delta$$

$$= \frac{1}{t} E_\Delta \Big\{ \underbrace{j_0\left(i[H^0, A] - \frac{A}{t}\right) j_0}_{\geq (\theta(E) - \varepsilon - cv) E_\Delta j_0^2 E_\Delta} + \underbrace{\left(j_0 \frac{A}{t}(Dj_0) + \text{adj.}\right)}_{\mathcal{O}(1/t)} \Big\} E_\Delta$$

$$\geq \frac{1}{t}(\theta(E) - 2\varepsilon) E_\Delta j_0^2 E_\Delta - c \cdot t^{-2} \cdot E_\Delta$$

$$\Rightarrow \frac{\theta(E) - 2\varepsilon}{t} E_\Delta j_0^2 E_\Delta \leq D\Phi_t + \frac{c}{t^2} .$$

$$\Rightarrow (\theta(E) - 2\varepsilon) \int_1^L \frac{dt}{t} \langle \psi_t | E_\Delta j_0^2 E_\Delta \psi_t \rangle$$

$$\leq C \cdot \int_1^L \frac{dt}{t^2} + \int_1^L \langle \psi_t | D\Phi_t \psi_t \rangle \, dt$$

$$= \tilde{C} + \int_1^L \left(\frac{d}{dt} \langle \psi_t | \Phi_t \psi_t \rangle \right) dt$$

$$= \tilde{C} + \sup_{t \geq 1} (\|\Phi_t\|) \cdot (\|\psi_1\|^2 + \|\psi_L\|^2) \leq \tilde{\tilde{C}} . \square$$

6. Asymptotische Vollständigkeit

Def.: Sei zu $a \in \mathcal{C}(\mathcal{N})$: $P^a := \{\text{Proj. auf Eigenw. v. } H^a\}$

AC_1: $\forall \psi \in L^2(X),\ \|\psi\| = 1 \quad \exists (\psi^a)_{a \geq 0},\ \psi^a \in \operatorname{Ran} P^a$:

$$\lim_{t \to \infty} \Big\| e^{-itH_0}\psi - \sum_{a \geq 0} e^{-itH_a}\psi^a \Big\| = 0 .$$

$\Uparrow$

AC_2: $\forall \|\psi\| = 1$: $\displaystyle \lim_{t \to \infty} \Big\| \Big(\mathbb{1} - \sum_{a \geq 0} e^{itH_0} e^{-itH_a} P^a\Big)\psi \Big\| = 0$

$\Uparrow$

AC_3: $\forall a \in \mathcal{C}(\mathcal{N})$: $\displaystyle \Omega_a := \operatorname*{s-lim}_{t \to \infty} \{ e^{itH_0} e^{-itH_a} P^a \}$ existieren

und $\displaystyle \bigoplus_{a \geq 0} \operatorname{Ran} \Omega_a = L^2(X)$.

Lemma 1 [Deift, Simon]: $\forall a \in \mathcal{C}(\mathcal{N}),\ v > 0$:

$$W_a(v) := \operatorname*{s-lim}_{t \to \infty} \Big\{ e^{itH_a} \underbrace{j_a^2\Big(\frac{x}{vt}\Big)}_{=: j_a^2} e^{-itH_0} \Big\} \text{ existiert.}$$

Folgerung:

$$e^{-itH_0}\psi = \sum_a j_a^2 e^{-itH_0}\psi = \sum_a e^{-itH_a}\big(e^{itH_a} j_a^2 e^{-itH_0}\psi\big)$$

$$= \sum_a e^{-itH_a} W_a(v)\psi + o_t(1) .$$

Lemma 2: Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, $\Omega \cap (\mathcal{E}(H_0) \cup \mathcal{J}(H_0)) = \emptyset$. Dann gibt es ein $v > 0$ so, dass

$$W_0(v) E_\Omega(H_0) = 0 .$$

Beweis: $E \in \Omega \Rightarrow \exists \Delta = (a,b) \ni E$:

$$\forall \|\psi\| = 1 : \int_1^\infty \frac{dt}{t} \langle \psi_t | E_\Delta \, j_0^2 \, E_\Delta \psi_t \rangle \leq C$$

$$\Rightarrow \exists (t_n)_{n=1}^\infty, \; t_n \to \infty : \; \| j_0\left(\tfrac{x}{v t_n}\right) E_\Delta(H_0) e^{-it_n H_0} \psi \| \to 0$$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{n\to\infty} \| e^{it_n H_0} j_0\left(\frac{x}{v t_n}\right) e^{-it_n H_0} E_\Delta(H_0) \psi \|$$

$$= \| W_0(v) E_\Delta(H_0) \psi \| .$$

Ω kompakt $\Rightarrow$ endl. Überdeckung durch $\Delta(E_1), \dots, \Delta(E_L)$.

$\square$

Beweis von A.C.: Sei $\psi \in L^2(X)$, $\|\psi\| = 1$.

- $\psi = \psi_{bdd} + \psi_{unbd}$, $\psi_{bdd} = P^0 \psi$, $\psi_{unbd} = (P^0)^\perp \psi$,

$$\Rightarrow \psi_{bdd} = \sum_{\lambda \in \mathcal{E}(H_0)} \langle \varphi_\lambda | \psi \rangle \varphi_\lambda ,$$

$$e^{-itH_0} \psi_{bdd} = \sum_{\lambda \in \mathcal{E}(H_0)} e^{-it\lambda} \langle \varphi_\lambda | \psi \rangle \varphi_\lambda .$$

- Mourre $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \Omega \subseteq \mathbb{R}$ kpkt, $\Omega \cap (\mathcal{E}(H_0) \cup \mathcal{J}(H_0)) = \emptyset$:

$$\| \psi_{unbd} - E_\Omega(H_0) \psi_{unbd} \| \leq \varepsilon .$$

- Min. Velocity Est. $\Rightarrow$

$$\exists v > 0 : \| j_0\left(\frac{x}{vt}\right) e^{-itH_0} E_\Omega(H_0) \psi_{unbd} \| \xrightarrow{t \to \infty} 0 .$$

- $\forall \varepsilon > 0$:

$$\lim_{t \to \infty} \Big\| e^{-itH_0}\psi - \Big\{ e^{-itH_0}\psi_{bdd} + \underbrace{\left[1 - j_0^2\left(\frac{x}{vt}\right)\right]}_{= \sum_{a > 0} j_a^2\left(\frac{x}{vt}\right)} e^{-itH_0} \underbrace{E_\Omega(H_0)\psi_{unbd}}_{=: \psi_1} \Big\| \leq \varepsilon$$

$$j_a\left(\frac{x}{vt}\right) e^{-itH_0}\psi_1 = e^{-itH_a}\left(e^{itH_a} j_a\left(\frac{x}{vt}\right) e^{-itH_0}\psi_1\right)$$

$$= e^{-itH_a} W_a(v) \psi_1 + o_t(1) .$$

Jetzt $W_a(v)\psi_1 = \psi_{1,bdd} + \psi_{1,unbd} + O(\varepsilon)$

$$\psi_{1,bdd} = P^a \psi_{1,bdd} \quad \text{und} \quad \psi_{1,unbd} = E_{\Omega_1}(H^a)\psi_{1,unbd}.$$

Nun Induktion in $N(a) := \max_{c\in a} |c|$: Verfahren für alle Teilcluster $a > 0$ wiederholen, d.h. $0 = (1,\dots,N) \in \mathcal{C}(\mathcal{N})$ durch $a \in \mathcal{C}(\mathcal{N})\setminus\{0\}$ ersetzen. $\square$