Institut für Analysis und Algebra
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Wintersemester 2019/20

Partielle Differentialgleichungen 2
Lösungsskizze zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 3.1 (10 Punkte)
Bestimmen Sie die Fouriertransformationen von

a) $h^{d/2}\mathrm{e}^{-h\pi|x|^2}$ in $\mathbb{R}^d$ für $h>0$ sowie

b) $|\xi|^{-\alpha}$ in $\mathbb{R}^d$ für $0<\alpha<d$ im Sinne temperierter Distributionen (sprich, berechnen Sie $\mathcal{F}[|\cdot|^{-\alpha}f](x)$ für $f\in\mathcal{S}$).

Beweis. a) Durch Skalieren von $x\mapsto x/h^{1/2}$ ist ersichtlich, dass $\mathcal{F}[h^{d/2}\mathrm{e}^{-h\pi|\cdot|^2}](\xi)$ nur von $\xi/h^{1/2}$ abhängen kann, weshalb es genügt $h=1$ zu betrachten. Wegen der Faktorisierungseigenschaft der Exponentialfunktion genügt es weiter nur $d=1$ zu betrachten. Man kann nun entweder das Quadrat ergänzen, den Cauchyschen Integralsatz und $\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\pi x^2}=1$ (Kugelkoordinaten) verwenden, um zum Ergebnis zu gelangen.

Wir lösen stattdessen eine „gewöhnliche Differentialgleichung" und beginnen mit der Beobachtung

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-\pi|\cdot|^2}](\xi)=\mathrm{e}^{-\pi\xi^2}f(\xi)\,,$$

wobei

$$f(\xi)=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\pi(x+i\xi)^2}\,dx\,.$$

Aus majorisierter Konvergenz folgt, dass beliebig viele Ableitungen nach ξ durch die Integration gezogen werden können. Das heißt $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ und es gilt

$$\frac{df}{d\xi}(\xi)=-2\pi i\int_{\mathbb{R}}(x+i\xi)\mathrm{e}^{-\pi(x+i\xi)^2}\,dx=i\int_{\mathbb{R}}\frac{d}{dx}\mathrm{e}^{-\pi(x+i\xi)^2}\,dx=i\mathrm{e}^{-\pi(x+i\xi)^2}\big|_{-\infty}^{\infty}=0\,,$$

sprich $f(\xi)$ ist konstant. Die Behauptung folgt dann aus $f(0)=1$.

b) Wir beginnen mit der „Wärmeleitungskerndarstellung"

$$a_\alpha|\xi|^{-\alpha}=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\pi t|\xi|^2}t^{\alpha/2}\frac{dt}{t}\,,$$

wobei $a_\alpha=\pi^{-\alpha/2}\Gamma(\alpha/2)$. (Bis auf die Konstante a_α folgt dies einfach aus Skalieren.) Da $|\xi|^{-\alpha}f(\xi)$ integrierbar ist, folgt mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
a_\alpha\mathcal{F}[|\cdot|^{-\alpha}f](x)&=\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\pi t|\xi|^2}t^{\alpha/2}\frac{dt}{t}\right)f(\xi)\,d\xi\\
&=\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{e}^{-\pi t|\xi|^2}f(\xi)\,d\xi\right)t^{\alpha/2}\frac{dt}{t}\\
&=\int_0^\infty t^{\alpha/2-d/2}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{-\pi|x-y|^2/t}\check{f}(y)\,dy\right)\frac{dt}{t}=a_{d-\alpha}\int_{\mathbb{R}^d}|x-y|^{-d+\alpha}\check{f}(y)\,dy\,.
\end{aligned}$$

In der vorletzten Gleichheit haben wir Aufgabenteil a) sowie die inverse Fouriertransformation verwendet und in der letzten Gleichheit nochmals Fubini.

□

Aufgabe 3.2 (10 Punkte)
Sei $u \in W^{2,1}((0,1))$ mit $u(0) = u'(0) = 0$ und setze

$$v(x) := \begin{cases} \frac{u(x)}{x} & \text{falls } x \in (0,1] \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases} .$$

Prüfen Sie, dass $v \in C([0,1])$ und zeigen Sie $v \in W^{1,1}((0,1))$. (Hinweise: Erinnern Sie sich an die erste Aufgabe des ersten Blatts. Zeigen Sie die Gleichheit $v'(x) = x^{-2} \int_0^x yu''(y)\, dy$.)

Beweis. Die Stetigkeit von $v \in C([0,1])$ abseits des Ursprungs ist klar. Die Stetigkeit bei Null folgt aus $v(x) = x^{-1} \int_0^x u'(y)\, dy$, $u' \in C((0,1))$ (da $u \in W^{1,1}$), dem Mittelwertsatz (der Integralrechnung) und $u'(0) = 0$.
Wir zeigen jetzt $v \in W^{1,1}((0,1))$. Zum einen ist $\|v\|_1 \leq \|v\|_\infty$, da $v \in C([0,1])$. Andererseits folgt aus partieller Integration

$$v'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_0^x u'(y)\, dy + \frac{1}{x} u'(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x yu''(y)\, dy\,,$$

weshalb (mit Fubini und der Heaviside-Funktion θ)

$$\begin{aligned} \|v'\|_1 &= \int_0^1 dx\; x^{-2} \left| \int_0^x yu''(y)\, dy \right| \leq \int_0^1 dx \int_0^1 dy\; x^{-2} y |u''(y)| \theta(x-y) \\ &= \int_0^1 dy\; y|u''(y)| \int_y^1 dx\; x^{-2} = \int_0^1 |u''(y)|(1-y)\, dy \leq \|u''\|_1 \,. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 3.3 (10 Punkte)

a) Zeigen Sie die Young-Ungleichung $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ für $1 + 1/r = 1/p + 1/q$. (Hinweis: Der Satz von Riesz–Thorin könnte nützlich sein.)

b) Seien $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$ mit $p, p' > 1$ und $1/p + 1/p' = 1$. Zeigen Sie, dass $f * g$ stetig ist und es für alle $\varepsilon > 0$ ein $R_\varepsilon > 0$ gibt, sodass $\sup_{|x| > R_\varepsilon} |(f * g)(x)| < \varepsilon$. (In diesem Fall sagt man, dass $f * g$ im starken Sinne im Unendlichen verschwindet.) (Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass C_0^∞ dicht in L^p ist.)

Beweis. a) Für festes $g \in L^p$ definieren wir den Faltungsoperator T_g durch $T_g[f] := g * f$, $f \in \mathcal{S}$. Aus der Hölderungleichung folgen dann $\|T_g\|_{L^1 \to L^p} \leq \|g\|_p$ und $\|T_g\|_{L^{p'} \to L^\infty} \leq \|g\|_p$ mit $1/p + 1/p' = 1$. Aus Interpolation mit $p_0 = 1, p_1 = p', p_\theta = q, q_0 = p, q_1 = \infty, q_\theta = r$, sprich

$$\frac{1}{q} = 1 - \theta + \frac{\theta}{p'} \quad \text{und} \quad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p}\,,$$

folgt daher $\|T_g\|_{L^q \to L^r}$ mit $1 + 1/r = 1/p + 1/q$ (nach Elimination von $1 - \theta = p/r$).

Bemerkung: Aus der optimalen Hausdorff–Young-Ungleichung zeigten Beckner (1975) und Brascamp und Lieb (1976), dass die optimale Konstante der Young-Ungleichung durch $A_p A_q A_{r'}$ mit $A_p = (p^{1/p} p'^{-1/p'})^{d/2}$ gegeben ist. Brascamp und Lieb zeigten außerdem, dass Optimierer wieder nur Gausssche Funktionen sein können.

b) Wegen der Hölderungleichung ist $(f * g)(x) < \infty$ für jedes $x \in \mathbb{R}^d$. Als Nächstes approximieren wir für $\delta > 0$ die Funktionen f und g mit C_0^∞-Funktionen f_δ und g_δ, sodass $\|f - f_\delta\|_p, \|g - g_\delta\|_{p'} \leq \delta$. Aus der Dreiecks- und der Hölderungleichung folgt dann

$$\|f * g - f_\delta * g_\delta\|_\infty \leq \|f - f_\delta\|_p \|g\|_{p'} + \|f_\delta\|_p \|g - g_\delta\|_{p'} \leq \delta(\|f\|_p + \|g\|_{p'})\,.$$

Da auch $f_\delta * g_\delta \in C_0^\infty$, sehen wir, dass wir $f * g$ gleichmäßig durch glatte Funktionen approximieren können, das heißt $f * g$ ist stetig. Da $f_\delta * g_\delta$ kompakt getragen ist, folgt insbesondere, dass $f * g$ stark im Unendlichen verschwindet.

□

Aufgabe 3.4 (10 Punkte)
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein offenes, beschränktes Gebiet (sprich $\overline{\Omega}$ ist kompakt) und seien $0 < \alpha < \beta \leq 1$. Zeigen Sie $C^\beta(\overline{\Omega}) \Subset C^\alpha(\overline{\Omega})$ (kompakte Einbettung). (Hinweis: Erinnern Sie sich an den Satz von Arzelà–Ascoli.)

Beweis. Aus der Definition der Hölderräume folgt $[f]_{C^\alpha} \leq (\operatorname{diam}\Omega)^{\beta-\alpha}[f]_{C^\beta}$ und daraus die stetige Einbettung. (Tatsächlich gilt die stetige Einbettung auch für unbeschränkte Gebiete Ω. Dazu zerlegt man, wie unten, die Halbnorm in $|x - y| \leq 1$ und $|x - y| \geq 1$ und verwendet $|x-y|^{-\alpha} \leq |x-y|^{-\beta}$ im ersten und $|x-y|^{-\alpha} \leq 1$ im zweiten Fall.) Um die kompakte Einbettung zu zeigen, betrachten wir eine in C^β beschränkte Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\|u_n\|_\infty \leq 1 \quad \text{und} \quad |u_n(x) - u_n(y)| \leq |x - y|^\beta \quad \text{für alle } x, y \in \overline{\Omega}$$

ohne Einschränkung der Allgemeinheit. Offensichtlich ist die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig (mit der Wahl $\delta = \varepsilon^{1/\beta}$ in der standard Notation). Wegen des Satzes von Arzelà–Ascoli gibt es daher eine Teilfolge $(\tilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $u \in C(\overline{\Omega})$, sodass $\tilde{u}_n \to u$ in C^0. Insbesondere ist auch $u \in C^\beta(\overline{\Omega})$, da

$$|u(x) - u(y)| = \lim_{n\to\infty} |\tilde{u}_n(x) - \tilde{u}_n(y)| \leq |x - y|^\beta \quad \text{für alle } x, y \in \overline{\Omega}\,.$$

Sei nun $g_n := u - \tilde{u}_n \in C^\beta$, dann gilt

$$\|g_n\|_{C^\beta} = \|g_n\|_\infty + [g_n]_{C^\beta} \leq 2$$

und $g_n \to 0$ in C^0. Der Beweis ist beendet, sobald wir auch $[g_n]_{C^\alpha} \to 0$ gezeigt haben. Für festes $\delta > 0$ betrachten wir $|x - y| \leq \delta$ und $|x - y| \geq \delta$. Im zweiten Fall gilt

$$\sup_{|x-y|\geq\delta} \frac{|g_n(x) - g_n(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq 2\|g_n\|_{L^\infty}\delta^{-\alpha}\,.$$

Andererseits gilt im ersten Fall

$$\sup_{|x-y|\leq\delta} \frac{|g_n(x) - g_n(y)|}{|x - y|^\beta} \cdot |x - y|^{\beta-\alpha} \leq \delta^{\beta-\alpha}[g_n]_{C^\beta} \leq 2\delta^{\beta-\alpha}\,.$$

Das bedeutet

$$\limsup_{n\to\infty} [g_n]_{C^\alpha} \leq 2 \limsup_{n\to\infty} \left(\|g_n\|_{L^\infty}\delta^{-\alpha} + \delta^{\beta-\alpha}\right) = 2\delta^{\beta-\alpha}.$$

Da δ beliebig war, folgt die Aussage. □

Institut für Analysis und Algebra
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Wintersemester
2019/20

Partielle Differentialgleichungen 2
Lösungsskizze zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1 (20 Punkte)

$m(D)f \overset{?}{=} \int \check{m}(x-y) f(y)\,dy$

$m \in L^\infty \cap L^2$, $f \in L^2$

Faltungssatz

a) Sei $m \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie

$$(m(-i\nabla)f)(x) := \mathcal{F}^{-1}[m\hat{f}](x) = \int_{\mathbb{R}^d} \check{m}(x-y) f(y)\,dy$$

für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Insbesondere konvergiert das Integral für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

$\mathcal{F}(f * g) \overset{?}{=} \hat{f}\hat{g}$

b) Seien $t \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie in $\mathbb{R}^d$, dass

$e^{-z\xi^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{z}} e^{-x^2/z}$

$t - i\varepsilon$

$$\boxed{\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-i\pi(t-i\varepsilon)\xi^2}](x) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{\varepsilon+it}}}{(\varepsilon+it)^{d/2}}}\,.$$

$f \in \mathcal{S}$, $g \in \mathcal{S}'$

Zeigen Sie weiter, dass für $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und $\check{f} = \mathcal{F}^{-1}[f]$,

$f \in \mathcal{E}'$, $g \in \mathcal{S}'$

$(C^\infty)'$

$e^{it\Delta} f(x) = \mathcal{F}((e^{it\xi^2})\hat{f})$

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-i\pi t\xi^2}\check{f}](x) = \lim_{R\to\infty} \int_{|y|\le R} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{it}}}{(it)^{d/2}} f(y)\,dy$$

gilt, wobei der Grenzwert in der $L^2(\mathbb{R}^d)$-Norm zu verstehen ist. Darüberhinaus ist $(it)^{d/2}$ als $((it)^{1/2})^d$ zu verstehen mit $\operatorname{Re} z^{1/2} > 0$ für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

c) Sei $\kappa \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\kappa > 0$ und $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie

$$[(-\Delta + \kappa^2)^{-1} f](x) = \pi \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{e}^{-2\pi\kappa|x-y|}}{|x-y|} f(y)\,dy\,.$$

Beweis. a) Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ gilt offenbar wegen des Faltungssatzes für $\check{m} * f$ (mit $\check{m} \in \mathcal{S}'$)

$$m(D)f = \mathcal{F}^{-1}[m\hat{f}] = \check{m} * f = \int_{\mathbb{R}^d} \check{m}(x-y) f(y)\,dy\,.$$

$m \in \mathcal{S}'$, $f \in \mathcal{S}$

$f_n \to f$ in L^2

Dies zeigt die Behauptung für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Ist $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, dann approximieren wir f mit einer Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ in L^2. Da $m \in L^\infty$, folgt $m\hat{f}_n \to m\hat{f}$ in L^2 und daher auch $m(D)f_n \to m(D)f$ in L^2 wegen Plancherel. Insbesondere gibt es eine Teilfolge (die wir unter Missbrauch der Notation wieder f_n nennen), sodass $m(D)f_n \to m(D)f$ punktweise fast überall konvergiert. Da $\check{m} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, folgt mit majorisierter Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} (m(D)f_n)(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \check{m}(x-y) f_n(y)\,dy = \int \check{m}(x-y) f(y)\,dy$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$, was behauptet war.

$m(D) f_n \to m(D) f$ da $m \in L^\infty$
(Plancherel)

$m(\xi)\hat{f}_n \to m(\xi)\hat{f}$

b) Wir ergänzen zunächst quadratisch und erhalten

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi - \pi i(t-i\varepsilon)\xi^2}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\pi(\varepsilon - it)\left(\xi + \frac{ix}{\varepsilon+it}\right)^2\right) \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{\varepsilon+it}}\, d\xi$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{\varepsilon+it}}}{(\varepsilon+it)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\pi\left(\xi + \frac{ix}{\sqrt{\varepsilon+it}}\right)^2\right) d\xi\,,$$

wobei wir im letzten Schritt $\xi \mapsto \xi(\varepsilon+it)^{-1/2}$ (mit dem gewöhnlichen Hauptzweig $|z|^{1/2}\mathrm{e}^{i\arg(z)/2}$ der Wurzel) ersetzt haben. Zur Bestimmung des ξ-Integrals genügt es wegen der Faktorisierung von $\mathrm{e}^{-|z|^2}$ lediglich $d=1$ zu betrachten. Weiter kürzen wir $\zeta := x/(\varepsilon+it)^{1/2}$ ab. Da $\mathrm{e}^{-|z|^2}$ holomorph ist, folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz (entlang des Rechtecks $(-R,0)\to(R,0)\to(R,i\zeta)\to(-R,i\zeta)\to(-R,0)$ in $\mathbb{C}$) insbesondere

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\pi(z+i\zeta)^2\right) dz$$
$$+ \lim_{R\to\infty}\left(-\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-\pi z^2}\, dz + \int_0^{\zeta} \mathrm{e}^{-\pi(R+it+i\zeta)^2}\, dt - \int_0^{\zeta} \mathrm{e}^{-\pi(-R+it-i\zeta)^2}\, dt\right).$$

Da die t-Integrale für $R\to\infty$ wegen des exponentiellen Abfalls verschwinden, folgt

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\pi(z+i\zeta)^2\right) dz = 1 \quad \text{für alle } \zeta\in\mathbb{C}\,,$$

sprich $\mathcal{F}(e^{it\xi^2}\hat{f})(x) = \underset{R\to\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{|y|<R} \frac{e^{i|x-y|^2/t}}{t^{d/2}} f(y)\,dy$ $\quad f\in L^2$

$f_R = f\mathbb{1}_{|x|<R} \in L^1\cap L^2$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi - \pi i(t-i\varepsilon)\xi^2}\, d\xi = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{\varepsilon+it}}}{(\varepsilon+it)^{d/2}} \quad \text{für alle } t\in\mathbb{R}, \varepsilon>0\,.$$

Wir bestimmen nun den Grenzwert $\varepsilon\to0$ im L^2-Sinne. Sei dazu zunächst $f\in L^1\cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Wegen Plancherel und $\lim_{\varepsilon\to0}\mathrm{e}^{-i\pi(t-i\varepsilon)\xi^2} = \mathrm{e}^{-i\pi t\xi^2}$ gilt

$$\lim_{\varepsilon\searrow0}\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-i\pi(t-i\varepsilon)\xi^2}\check{f}] \to \mathcal{F}[\mathrm{e}^{-i\pi t\xi^2}\check{f}] \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^d),$$ wenn $f\in L^1\cap L^2$

Das heißt es gibt eine Teilfolge, die punktweise fast überall konvergiert. Daher gilt

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-i\pi t\xi^2}\check{f}](x) = \lim_{\varepsilon\searrow0}\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-i\pi(t-i\varepsilon)\xi^2}\check{f}](x) = \lim_{\varepsilon\searrow0}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{\varepsilon+it}}}{(\varepsilon+it)^{d/2}}f(y)\,dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d}\frac{\mathrm{e}^{i\frac{|x-y|^2}{t}}}{(it)^{d/2}}f(y)\,dy\,,$$ $f\in L^1\cap L^2$

mit Teilaufgabe a), dem Faltungssatz und majorisierter Konvergenz, da $f\in L^1$. Die L^2-Konvergenz erfolgt durch Approximation von $f\in L^2$ mit $f_R(x) := \mathbf{1}_{\{|x|\le R\}}(x)f(x)\in L^1(\mathbb{R}^d)$. Da $f_R\to f$ in L^2 für $R\to\infty$, folgt mit Plancherel

$$0 \xleftarrow{R\to\infty} \|\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-i\pi t\xi^2}(\check{f}_R - \check{f})]\|_2 = \|\mathrm{e}^{-i\pi t\xi^2}(\check{f}_R-\check{f})\|_2 \le \|f_R - f\|_2 \to 0 \quad \text{für } R\to\infty\,.$$

c) Da $(\xi^2+\kappa^2)^{-1}\in L^2(\mathbb{R}^3)\cap L^\infty$, genügt es wegen Teilaufgabe a) $\mathcal{F}^{-1}[(\xi^2+\kappa^2)^{-1}](x)$ zu berechnen. Insbesondere ist die Fouriertransformation in L^2 zu verstehen.

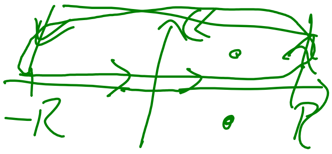
Wegen Plancherel und $(\xi^2+\kappa^2)^{-1}\in L^2(\mathbb{R}^3)$ gilt zunächst

$$\mathcal{F}^{-1}[(\xi^2+\kappa^2)^{-1}] = \lim_{R\to\infty}\mathcal{F}^{-1}[(\xi^2+\kappa^2)^{-1}\mathbf{1}_{\{|\xi|\le R\}}] \quad \text{in } L^2\,.$$

$m\in L^2\cap L^\infty$

$m(D)f(x) = \int \check{m}(x-y)f(y)\,dy$

$\oint f(z) = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Res}_{z_0} f(z)$



$\int_{\mathbb{R}^3} d^3\xi \, e^{ix\cdot\xi} = \frac{1}{|x|\,|\xi|}$

Wir bestimmen nun $\lim_{R\to\infty} \mathcal{F}^{-1}[(\xi^2+\kappa^2)^{-1}\mathbf{1}_{\{|\xi|\le R\}}](x)$. In sphärischen Koordinaten erhält man

Polarkoord.

$$\mathcal{F}^{-1}[(\xi^2+\kappa^2)^{-1}\mathbf{1}_{\{|\xi|\le R\}}](x) = 2\pi \int_0^R dp\, p^2 \int_{-1}^1 du\, \frac{e^{2\pi i p|x|u}}{p^2+\kappa^2} = \frac{1}{i|x|}\int_{-R}^R dp\, \frac{p\, e^{2\pi i p |x|}}{(p+i\kappa)(p-i\kappa)}\,.$$

Für $R\to\infty$ folgt mit dem Residuensatz (siehe auch Bemerkung 0.1), dass das letzte Integral für alle $x\in\mathbb{R}^3$ gegen $\boxed{\pi e^{-2\pi\kappa|x|}/|x|}$ konvergiert.

Alternativ erhält man auch mit partieller Integration, majorisierter Konvergenz und Fouriertransformation von $(p^2+\kappa^2)^{-1}\in L^1(\mathbb{R})$ mittels Residuensatz

$$\begin{aligned}\frac{1}{i|x|}\int_{-\infty}^{\infty} dp\, \frac{p\, e^{2\pi i p|x|}}{p^2+\kappa^2} &= \frac{1}{2\pi i\cdot i|x|}\int_{-\infty}^{\infty} dp\, \partial_{|x|}\frac{e^{2\pi i p|x|}}{p^2+\kappa^2} = -\frac{1}{2\pi|x|}\partial_{|x|}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi i p|x|}}{(p+i\kappa)(p-i\kappa)}\, dp \\ &= \frac{1}{i|x|}\partial_{|x|}\frac{e^{-2\pi\kappa|x|}}{2i\kappa} = \pi\frac{e^{-2\pi\kappa|x|}}{|x|}\end{aligned}$$

für alle $x\in\mathbb{R}^3$.

Mit diesem Wissen folgt die Konvergenz

$$\lim_{R\to\infty} \mathcal{F}^{-1}[(\xi^2+\kappa^2)^{-1}\mathbf{1}_{\{|\xi|\le R\}}] = \pi\frac{e^{-2\pi\kappa|x|}}{|x|} \quad \text{in } L^2\,,$$

denn

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\Big\| \int e^{2\pi i x\cdot\xi}(\xi^2+\kappa^2)^{-1}\mathbf{1}_{\{|\xi|\le R\}} - \pi\frac{e^{-2\pi\kappa|x|}}{|x|}\Big\|_2 &= \lim_{R\to\infty}\Big\|\int e^{2\pi i x\cdot\xi}(\xi^2+\kappa^2)^{-1}\mathbf{1}_{\{|\xi|\ge R\}}\Big\|_2 \\ = \lim_{R\to\infty}\|(\xi^2+\kappa^2)^{-1}\mathbf{1}_{\{|\xi|\ge R\}}\|_2 = 0\,.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 0.1. Bei der Anwendung des Residuensaztes integrieren wir entlang des Rechtecks $(-R,0)\to(R,0)\to(R,R+i\sqrt{R})\to(-R,R+i\sqrt{R})\to(-R,0)$. Das Integral über $(R,R+i\sqrt{R})\to(-R,R+i\sqrt{R})$ fällt exponentiell in R, wohingegen die „vertikalen Integrale" durch

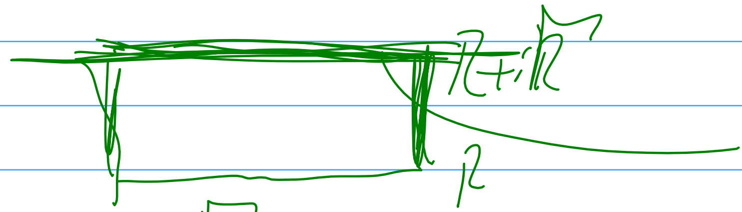
$$\int_0^{\sqrt{R}} \frac{|R+it|}{\sqrt{R^2+(t-\kappa)^2}\sqrt{R^2+(t+\kappa)^2}}\, dt \lesssim \frac{R}{R^2}\sqrt{R} = R^{-1/2}$$

für genügend großes R beschränkt sind.

Wir schließen mit einem Kommentar zur Bestimmung von $\mathcal{F}[e^{-i\pi t\xi^2}\check{f}](x)$. Der Laplaceoperator $-\Delta$ ist ein linearer Operator auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ für den es zwei vernünftige Definitionsbereiche gibt, nämlich $\mathcal{D}_{max} = H^2(\mathbb{R}^d)$ und $\mathcal{D}_{min} = C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Seien $T_{max} := -\Delta|_{\mathcal{D}_{\max}}$ und $T_{min} := -\Delta|_{\mathcal{D}_{\min}}$. Es stellt sich heraus, dass $T_{\max}$ selbstadjungiert und T_{min} wesentlich selbstadjungiert ist. Wir nennen von nun an $H_0 := T_{max}$ den freien Hamiltonoperator. Mit Hilfe der Fouriertransformation gilt dann $H_0 = \mathcal{F}^{-1}\xi^2\mathcal{F}$, sprich die Fouriertransformation *diagonalisiert* H_0. (Insbesondere ist der Integralkern der Spektralprojektion gerade $e^{-2\pi i\xi(x-y)}$.) Dementsprechend gilt $f(H_0) = \mathcal{F}^{-1}f(\xi^2)\mathcal{F}$ für beschränkte und messbare Funktionen f. (Erinnern Sie sich an den Spektralsatz.) Was wir in Teilaufgabe b) ausgerechnet haben, war also (bis auf die Verwechslung von $\mathcal{F}$ mit $\mathcal{F}^{-1}$ sowie $\check{f}$ und $\hat{f}$:-)) gerade $\mathcal{F}^{-1}e^{-it\xi^2}\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\hat{f} = (e^{it\Delta}f)(x)$!

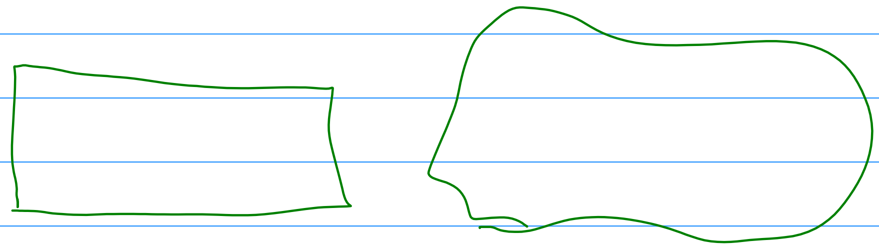
Aufgabe 4.2 (20 Punkte)

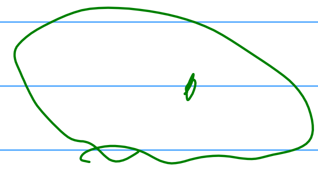
$$\int_R^{R+i\sqrt{R}} dp \, \frac{p \, e^{2\pi i p|x|}}{(p-ik)(p+ik)} + \int_{R+i\sqrt{R}}^{R-i\sqrt{R}} dp \, \frac{p \, e^{2\pi i p|x|}}{(p-ik)(p+ik)}$$



$e^{-R|x|}$ $\qquad \frac{e^{-R|x|/2}}{p}$

$$\int_0^{\sqrt{R}} dp \, \frac{|R+p|}{\sqrt{R^2+(p-k)^2}\sqrt{R^2+(p+k)^2}} \lesssim \frac{R}{R^2}\sqrt{R}$$
$$\lesssim R^{-1/2}$$





$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\xi^2}\right)$ $\qquad \mathcal{F}\left(\frac{1}{\xi^2+k^2}\right)$

Wär

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\xi^2+k^2}\right) = \int_0^\infty \mathcal{F}\left(e^{-t(\xi^2+k^2)}\right) dt$$
$$= \int_0^\infty dt \, e^{-tk^2} \, t^{-d/2} \, e^{-|x|^2/t}$$

$t \mapsto t/k^2$

$$\overset{?}{=} \left(\frac{2k|x|}{|x|^2}\right)^{d/2-1} K_{\frac{d}{2}-1}(k|x|)$$

Gelfand - Shilov

$\mathcal{F}\rho(x)$ oszilliert $\qquad K_\nu(ix)$

Y_ν $\qquad I_\nu(ix)$

Terence Tao

→ complex analysis

↳ Abramowitz-Stegun

Watson (Treatise on Bessel fcts)

Lemma 0.2 (p, q, r-Lemma)**.** *Seien $1 \le p < q < r \le \infty$ und $g \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^r(\mathbb{R}^d)$ mit $\|g\|_p^p \le C_p < \infty$, $\|g\|_r^r \le C_r < \infty$ und $\|g\|_q^q \ge C_q > 0$. Dann gibt es Konstanten $\varepsilon > 0$ und $M > 0$, welche nur von p, q, r, C_p, C_q, C_r abhängen, sodass $f(\varepsilon) := |\{x \in \mathbb{R}^d : |g(x)| \ge \varepsilon\}| > M$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst den Hinweis, welcher aus Skalieren und Tonellis Satz folgt, da

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \varepsilon^{p-1}\, |\{x : |g(x)| > \varepsilon\}|\, d\varepsilon &= \int_0^\infty d\varepsilon\ \varepsilon^{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} dx\ \mathbf{1}_{\{|g(x)|>\varepsilon\}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} dx\ |g(x)|^p \int_0^\infty d\varepsilon\ \varepsilon^{p-1} \mathbf{1}_{\{\varepsilon<1\}} = p^{-1}\|g\|_p^p\,.\end{aligned}$$

Daraus und der Tatsache, dass $f(\varepsilon)$ monoton nicht-steigend ist, folgt

$$C_p \ge p \int_0^R \varepsilon^{p-1} f(\varepsilon)\, d\varepsilon \ge R^p f(R) \quad \text{für alle } R > 0\,,$$

beziehungsweise

$$f(\varepsilon) \le \varepsilon^{-p} C_p \quad \text{für alle } \varepsilon > 0\,. \tag{1}$$

Analog erhält man

$$f(\varepsilon) \le \varepsilon^{-r} C_r \quad \text{für alle } \varepsilon > 0\,. \tag{2}$$

Wir definieren nun zwei Zahlen S und T durch

$$qC_pS^{q-p} = \frac{1}{4}(q-p)C_q \quad \text{und} \quad qC_rT^{q-r} = \frac{1}{4}(r-q)C_q\,.$$

Dann folgt aus (1)

$$q\int_0^S f(\varepsilon)\varepsilon^{q-1}\, d\varepsilon \le qC_p \int_0^S \varepsilon^{q-p-1}\, d\varepsilon = \frac{1}{4}C_q \tag{3}$$

und analog aus (2)

$$q\int_T^\infty f(\varepsilon)\varepsilon^{q-1}\, d\varepsilon \le \frac{1}{4}C_q\,. \tag{4}$$

Die Ungleichungen (3) und (4) zeigen damit $S < T$ und

$$I := q\int_S^T f(\varepsilon)\varepsilon^{q-1}\, d\varepsilon \ge \frac{1}{2}C_q\,.$$

Andererseits gilt $I \le f(S)|T^q - S^q|$, da f monoton nicht-steigend ist. Daraus folgt

$$f(S) \ge \frac{C_q/2}{|T^q - S^q|}$$

und damit das Lemma (durch Setzen von $\varepsilon = S$ und $M = C_q/(2|T^q - S^q|)$), da S und T explizit nicht von f abhängen. □

Dieses Lemma wird zur Verifikation der Annahmen im folgenden Kompaktheitslemma von Lieb verwendet. Dieses verallgemeinert den Satz von Rellich–Kondrachov auf unbeschränkte Gebiete, wenn man bereit ist, die Folge zu verschieben. In translationsinvarianten Problemen (beispielsweise auf $\mathbb{R}^d$) ist dies eine typische Situation.

Satz 0.3 (Lieb (1983))**.** *Seien $1 < p < \infty$ und $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Angenommen, es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodass $|\{x : |f_j(x)| > \varepsilon\}| > \delta > 0$ für ein $\delta > 0$ und alle j. Dann gibt es eine Folge von Translationen $y_j \in \mathbb{R}^d$, sodass $f_j(x + y_j)$ eine Teilfolge hat, die schwach in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ konvergiert. Insbesondere ist das Grenzelement von der Nullfunktion verschieden.*