3.3 Einige "dynamische" Ergebnisse

(Überlebens-WS) Recurrence probability $|(\psi, e^{itH}\psi)|^2 \overset{\text{spec thm}}{=} |\int d\mu_\psi(\lambda)\, e^{it\lambda}|^2 = |\hat{\mu}_\psi(t)|^2$

$(\varphi, f(A)\psi) = \int f(\lambda)\, d\mu_{\varphi\psi}(\lambda)$

$\|$

FT vom Spektralmaß im Zst ψ $\quad d\mu = f(x)\,dx + d\mu_s$

$\int d\mu = 1$

Prop 3.3.1 Sei μ ein pos. WS-Borelmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \Rightarrow$ (1) $\hat{\mu}_{ac}(t) \in \mathcal{U}$ C^0_∞ (stetig und im Unendlichen verschwindend, $\lim_{t\to\pm\infty} \hat{\mu}(t) = 0$.

(2) $|\hat{\mu}(t) - \hat{\mu}(t-\epsilon)| \le \int d\mu(\lambda)\, |1 - e^{i\epsilon\lambda}|$

d.h. $\hat{\mu}(t)$ ist glm. stetig.

"Dynamische Ergebnisse"

Bew Riemann-Lebesgue / major. Konv.

Prop 3.3.2 (Wiener) Sei μ ein pos. WS-Borelmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. $\quad \hat{\mu}_{ac}(t), \hat{\mu}_{sc}(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$

$$\Rightarrow \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\hat{\mu}(t)|^2\, dt = \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} |\mu(\{\lambda\})|^2$$

$\mu_{pp} \Leftrightarrow$ gebundene Zst.

Bem (1) In QM bedeutet das, dass über lange Zeiten die Zst. aus dem stetigen Spektrum (in einem gemittelten (Cesaro)-Sinne) dispergieren und nur noch Zst., die zu Eigenwerten (ob diskret oder nicht!) überbleiben. Diese werden als gebundene Zst. bezeichnet

(2) Für isolierte EW kann die Proj. auf den zugehörigen EV mittels Riesz (d.h. Cauchy + Spektralsatz) $P(\{\lambda\}) = |\psi_\lambda \times \psi_\lambda| = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda - z| = \epsilon} (H-z)^{-1}\, dz$ geschrieben, wobei $\epsilon \ll 1$ so klein, dass $\{z : |\lambda - z| = \epsilon\}$ nur λ umzirkelt.

Für nicht-isolierte, z.B. eingebettete EW geht das nicht mehr und Wiener kann in dem Fall als Ersatz gesehen werden.

Vgl. mit Katos "mean ergodic thm"

$$P(\{\lambda\}) = s\text{-}\lim_{t_2 - t_1 \to\infty} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} e^{it(H-\lambda)}\, dt$$

$$\mu_\psi(\{\lambda\}) = \underbrace{\lim_{t_2 - t_1 \to\infty} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} dt\, \underbrace{\int d\mu_\psi(E)\, e^{it(E-\lambda)}}_{\hat{\mu}_\psi(t)\, e^{-it\lambda}}}_{(\hat{\mu}_\psi \mathbb{1}_{[t_1, t_2]})^\vee(\lambda)}$$

Pf (Prop 3.3.2)

$$\frac{1}{T}\int_0^T |\hat\mu(t)|^2 dt = \iint_{\mathbb{R}\mathbb{R}} \Big(\overbrace{\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T e^{it(\lambda-\lambda')}dt}_{= \frac{e^{iT(\lambda-\lambda')}-1}{T(\lambda-\lambda')} \xrightarrow{T\to\infty} \delta_{\lambda,\lambda'}}}^{\leq 1}\Big) d\mu(\lambda)\, d\overline{\mu(\lambda')}$$

$\mu \geq 0$

$$\xrightarrow[T\to\infty]{\text{majorisiert}} \iint \delta_{\lambda\lambda'}\, d\mu(\lambda)\, d\overline{\mu(\lambda')} = \int d\overline{\mu(\lambda')}\ \mu(\{\lambda'\})$$

$$= \sum_\lambda |\mu(\{\lambda\})|^2$$

(μ_c gibt keine Masse auf Atome) $\square$

$d\mu = f\,dx + d\mu_s = d\mu_{\alpha c} + d\mu_{\alpha s}$ bzgl. H_α $\alpha\in[0,1]$

Bisher haben wir Lebesgues Zerlegungssatz immer benutzt, um ac-Teil von μ bzgl. Lebesgue zu extrahieren.

$U\alpha H$ $\quad \mu_{\alpha H}(I) \leq |I|^\alpha$ $\quad \alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$

Wir hätten allerdings auch ac bzgl. Hausdorffmaßen extrahieren können

→ Theorie von Rogers und Taylor; angewandt von Y. Last, um dynamische Eigenschaften von Zst. aus $\mathfrak{H}_{sc}$ zu verstehen (H_0 → Zählmaß, H_1 → Lebesguemaß)

→ $d\mu = d\mu_{\alpha s} + d\mu_{\alpha c}$, wobei $\mu_{\alpha s}$ singulär bzgl H_α (α-dim Hausdorff) ($\mu_{\alpha}(S)=0$ falls $H_\alpha(S)>0$)
$\mu_{\alpha c}$ stetig bzgl H_α, d.h. $\mu_{\alpha c}$ gibt keine Masse auf Mengen E mit $H_\alpha(E)=0$

$\widehat{d\mu_c}(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$

($\alpha = 1 \Rightarrow$ Lebesgue und $\mu_{\alpha c} = \mu_{ac}$, $\mu_{\alpha s} = \mu_s$)
($\alpha=0 \Rightarrow d\mu_{\alpha s} = 0 \Rightarrow d\mu = d\mu_c + d\mu_{pp}$ [illegible])

Def 3.3.3 Sei $\mu \geq 0$ ein US-Borelmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $\alpha\in[0,1]$. Dann heißt μ glm.-α-Hölderstetig ($U\alpha H$), falls für alle Intervalle $I\subseteq\mathbb{R}$ mit $|I|\leq 1$ gilt, dass $\mu(I) \leq |I|^\alpha$.

$\alpha = 0$ → keine zusätzliche Information; Bedingung wird sogar für reine Punktmaße erfüllt

$\alpha = 1 \Rightarrow \mu \ll$ Lebesgue

Prop 3.3.4 (Last-Thm 4.2) (Rogers-Taylor) Sei μ ein US-Borelmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\alpha\in[0,1]$

⇒ μ ist α-stetig $\Leftrightarrow$ $\forall \epsilon>0$ gibt es zwei zueinander singuläre Borelmaße μ_1^ϵ, μ_2^ϵ mit $d\mu = d\mu_1^\epsilon + d\mu_2^\epsilon$, wobei μ_1^ϵ ist $U\alpha H$ und $\mu_2^\epsilon(\mathbb{R}) < \epsilon$.

$\mu_{\alpha c} = \lim_{\epsilon\to 0} \mu_{\alpha H} + \mu^\epsilon$

D.h. α-stetige Maße sind Grenzwerte (in geeigneter Topologie) von $U\alpha H$-Maßen

Thm 3.3.5 (Strichartz 1990, sh. auch Last Thm 2.5, 3.1)

Sei μ ein WS-Borelmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, ~~welches UαH für ein~~ $\alpha \in [0,1]$ $\mu = \mu_{ac} + \mu_{sc} + \mu_{pp}$

(1) Falls μ UαH, dann ~~Dann~~ gilt für alle $T>0$ μ αH $\frac{1}{T}\int_0^T dt\, |\hat{\mu}(t)|^2 \lesssim T^{-\alpha}$.

(2) Falls $\frac{1}{T}\int_0^T dt\, |\hat{\mu}(t)|^2 \lesssim T^{-\alpha}$ $\forall T>0$, dann ist μ ein $U\frac{\alpha}{2}H$-Maß.

~~3.4 Einige~~

3.4 Lokale L^p-Normen der Poisson-Transformierten von μ (→ Simon 1995)

Sei μ ein positives Borelmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit $\int \frac{d\mu(\lambda)}{1+|\lambda|} < \infty$, wobei für die Diskussion hier auch $\int \frac{d\mu}{1+\lambda^2} < \infty$ genügt. $\sup_{0<\epsilon<1} \int_a^b |(\varphi, (A-\lambda-i\epsilon)^{-1}\varphi)|^p\, d\lambda \lesssim C_\varphi$ $\downarrow$ $\varphi \in \mathcal{H}_{ac}$

Upshot $\int_a^b |\mathrm{Im}\, F(x+i\epsilon)|^p dx$ ist sensitiv für $d\mu_s$ ~~wohin~~ wenn $p>1$, wohingegen μ_s irrelevant ist, wenn $p<1$

Genauer Lokale L^p-Integrierbarkeit gibt ~~an~~ an, ob $\mu_s = 0$ $(p>1)$ oder $\mu_{ac} = 0$ $(p<1)$ L^p-Beschränktheit d. Maximalfkt ?

Thm 3.4.1 Sei $p>1$ und angenommen $\sup_{0<\epsilon<1} \int_a^b |\mathrm{Im}\, F(x+i\epsilon)|^p dx < \infty$. Sei $\mu = g\,dx + \mu_s$.

$$\Rightarrow \underbrace{d\mu|_{(a,b)}}_{\equiv \mathbb{1}_{(a,b)}\, d\mu} = g(x)\,dx, \text{ für ein } g \in L^p(a,b), \text{ also ac auf } (a,b)$$

$\int_a^b |g| \lesssim \|g\|_p \cdot C_{a,b}$

und $\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\, F(x+i\epsilon) \xrightarrow[L^p]{\epsilon\to 0} g(x)$ in $L^p([c,d])$ $\forall [c,d] \subset (a,b)$

Ist umgekehrt $[a,b] \subseteq (e,f)$ und μ ist ac auf (e,f), und ~~...~~ $g \in L^p(e,f)$, dann gilt $\sup_{0<\epsilon<1} \int_a^b |\mathrm{Im}\, F(x+i\epsilon)|^p dx < \infty$

$\mathrm{Im}\, F(E+i\epsilon) \to d\mu(E)$

Beweis Sei $d\mu_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\, F(x+i\epsilon)$, dann gilt (Thm 3.2.10 (1)) $d\mu_\epsilon \to d\mu$, d.h.

$\int f(x)\,d\mu_\epsilon(x) \longrightarrow \int f(x)\,d\mu(x)$, $f \in C_c^0(\mathbb{R})$. Damit folgt, wenn $\mathrm{supp}\, f \subseteq (a,b)$

$\to |\int f\,d\mu| = \lim_{\epsilon\to 0} |\int f\,d\mu_\epsilon| \leq \overline{\lim_{\epsilon\to 0}}\, \|f\|_{L^{p'}(a,b)} \cdot c = \|f\|_{p'}$, wobei

Höldern

$c = \sup_{0<\epsilon<1} \int_a^b |\mathrm{Im}\, F(x+i\epsilon)|^p$

$\Rightarrow$ Das Funktional $L^{p'}_{(a,b)} \to \mathbb{C}$, $f \mapsto \int f\,d\mu$ ist beschränkt, d.h. $\mathbb{1}_{(a,b)}\,d\mu = \tilde{g}\,dx$ für ein $\tilde{g} \in L^p(a,b)$

$\mathbb{1}_{(a,b)}\,d\mu$

Wir haben also $\int_a^b f(x)\,d\mu(x) = \int_a^b f(x)\cdot \tilde g(x)\,dx$, d.h. $\mu|_{(a,b)}$ ist ac bzgl. Lebesgue und $\tilde g(x) = g(x)$ (aus $d\mu = g\,dx + d\mu_s$) gilt f.ü., d.h. insbesondere $g \in L^p(a,b)$, und $d\mu|_{(a,b)} = g\,dx$ 42

Wir zeigen nun noch $\forall\, [c,d] \subset (a,b)$, dass $\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} F(x+i\epsilon) \to g$ in $L^p(c,d)$

Dazu zerlegen wir $F(z) = \int \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z} = F_1(z) + F_2(z)$, wobei F_1 die Boreltransf. von $d\mu_1 = 1\!\!1_{(a,b)}\, \underbrace{d\mu}_{= g\,dx}$ und F_2 die Boreltransf. von $d\mu_2 = (1 - 1\!\!1_{(a,b)})\,d\mu$

- $\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} F_1(x+i\epsilon) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + (x-\lambda)^2} \underbrace{d\mu(\lambda)}_{= g\,dx} \xrightarrow{\epsilon \to 0} g$ in $L^p([c,d])$

  ↑ Poissonkern

- $\operatorname{Im} F_2(x+i\epsilon) = \int_{\mathbb{R}\setminus(a,b)} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + \underbrace{(x-\lambda)^2}_{>\delta}} d\mu(\lambda)$

  $\leq \frac{\epsilon}{\operatorname{dist}((c,d), \mathbb{R}\setminus(a,b))} \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0$ punktweise f. $x \in (c,d) \subseteq (a,b)$

  also insb. auch in $L^p(c,d)$

Die Umkehrung, sprich $\sup_{0<\epsilon<1} \int_a^b |\operatorname{Im} F(x+i\epsilon)|^p\,dx < \infty$ folgt analog, falls $d\mu|_{(e,f)} = d\mu_{ac}|_{(e,f)} = g\, 1\!\!1_{(e,f)}\,dx$ mit $g \in L^p(e,f)$, $(e,f) \supseteq (a,b)$

Im Prinzip ist die gesamte Aussage eine Manifestation des Prinzips d. glm. Beschränktheit ($T_\epsilon f \underset{L^p}{\longrightarrow} Tf \iff \|T_\epsilon\|_{p,p} \leq 1 \;\forall \epsilon \in (0,1)$ u. $T_\epsilon f \underset{\mathcal{S}}{\longrightarrow} Tf$

$\square$

Thm 3.4.2 (Lokaler Wiener-Thm)

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon \cdot \int_a^b |\operatorname{Im} F(x+i\epsilon)|^2\, dx = \frac{\pi}{2}\left(\frac12 \mu(\{a\})^2 + \frac12 \mu(\{b\})^2 + \sum_{x\in(a,b)} \mu(\{x\})\right)$$

~ Resolvente, nicht Zeitentwicklung

(Vgl $\int dt\, e^{-2\epsilon t} |\hat\mu(t)|^2 = \int d\lambda\, |F(\lambda+i\epsilon)|^2$

$$\cancel{\int dt\, e^{-2\epsilon t} \left|\int d\mu(\xi)\, e^{it\xi}\right|^2}$$

$$= \cancel{\int d\mu(\xi)\, d\mu(\tilde\xi) \int dt\, e^{-t(2\epsilon + i(\xi-\tilde\xi))}}$$

$$= \cancel{\int \frac{d\mu}{\ }}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T |\hat\mu(t)|^2\, dt \to \sum_\lambda \mu(\{\lambda\})$$

$$\hat\mu(t)\, e^{-\epsilon t}\, \theta(t) = \int d\mu(\lambda)\, e^{-\epsilon t + it\lambda}\, \theta(t)$$

$$\xrightarrow{FT} \int_0^\infty dt\, d\mu(\lambda)\, e^{-\epsilon t + it(\lambda - y)}$$

$$\int_0^\infty |\hat\mu(t)|^2 e^{-2\epsilon t}\, dt = |\operatorname{Im} F(y-i\epsilon)|^2$$

denn $\theta(t)\, e^{-\epsilon t}\, \hat\mu(t) = \int d\mu(\xi)\, e^{it\xi - \epsilon t} \equiv f_\epsilon(t)$

weshalb und $\hat f_\epsilon(\lambda) = \int_0^\infty dt\, \cancel{d\mu}\, e^{-i\lambda t + it\xi - \epsilon t}$

$$= \int d\mu(\xi)\, \frac{1}{\epsilon + i(\lambda - \xi)} = +i\int \frac{d\mu(\xi)}{(-\lambda+\xi)+i\epsilon} = i\, F(\lambda - i\epsilon)$$

$\Rightarrow$ mit Plancherel $\int |\hat f_\epsilon(\lambda)|^2 = \int |f_\epsilon(t)|^2\, dt$

d.h. $\int_{\mathbb R} d\lambda\, |F(\lambda - i\epsilon)|^2 = \int_0^\infty dt\, e^{-2\epsilon t}\, |\hat\mu(t)|^2$

Pf $|\operatorname{Im} F(x+i\epsilon)|^2 = \epsilon^2 \int_{\mathbb R^2} \frac{d\mu(t)\, d\mu(t')}{((x-t)^2+\epsilon^2)((x-t')^2+\epsilon^2)}$

$$\Rightarrow \epsilon \int_a^b |\operatorname{Im} F(x+i\epsilon)|^2\, dx = \iint_{\mathbb R^2} g_\epsilon(t,t')\, d\mu(t)\, d\mu(t')$$

mit $g_\epsilon(t,t') = \int_a^b \frac{\epsilon^3}{((x-t)^2+\epsilon^2)((x-t')^2+\epsilon^2)}\, dx$

Beobachtungen: (1) $0 \le g_\epsilon(t,t') \le \pi \cdot \frac{1}{1+\operatorname{dist}(x,[a,b])^2}$ $\epsilon\pi$

(2) $\lim_{\epsilon\to 0} g_\epsilon(t,t') = 0$, falls $t \ne t'$, oder $t \notin [a,b]$ oder $t' \notin [a,b]$

(3) Falls $t = t' \in (a,b)$, dann $\lim_{\epsilon\to0} g_\epsilon(t,t) = \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^3 \int_{\mathbb R} \frac{dx}{(x^2+\epsilon^2)^2} =$

($(a,b) \to (-\infty,\infty)$ ohne Umstände vergrößerbar

wg Beob. (2))

(4) Falls $t = t' = a$ oder $t = t' = b$, dann

$$\lim_{\epsilon \to 0} g_\epsilon(t,t) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\epsilon^2)^2} = \pi/4$$

$\to$ Behauptung folgt daraus, sowie majorisierter Konvergenz

Bem 1) Thm bleibt gültig (mit ~~selbem~~ ähnlichem Beweis), wenn LHS durch

$$\epsilon^{p-1} \int_a^b |\operatorname{Im} F(x+i\epsilon)|^p dx, \quad p > 1 \quad \text{ersetzt wird.}$$

Auf RHS werden dann $\left\{ \begin{array}{l} \pi \text{ durch } \int_{\mathbb{R}} dx\, (x^2+1)^{-p/2} \\ \mu(\{x\})^2 \text{ durch } \mu(\{x\})^p \end{array} \right\}$ ersetzt

[Genauer: zunächst für $p = 3, 4, 5, \ldots$ zeigen und dann interpolieren, wobei μ_c beim Grenzwertnehmen keinen Beitrag erzeugt)

2) $\sup_{0<\epsilon<1} \epsilon^\alpha \int_a^b |\operatorname{Im} F(x+i\epsilon)|^2 < \infty$ für $0 < \alpha < 1$ sagt $\mu(A) = 0 \ \forall A \subseteq [a,b]$ mit $\dim_H A < 1-\alpha$ ($\to$ del Rio, Jitomirskaya, Last, Simon 1996)

Thm 3.4.3 ($p<1$ über ac-Teil)

Sei $p<1$, dann $\lim_{\epsilon \to 0} \int_a^b \left|\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} F(x+i\epsilon)\right|^p dx = \int_a^b \left(\frac{d\mu_{ac}}{dx}\right)^p dx$

Pf (Wolff) $\mu = \mu_1 + \mu_2$, wobei $\mu_1(\mathbb{R}) < \infty$ und μ_2 erfüllt $\int \frac{d\mu_2}{1+|\lambda|} < \infty$ und ist auf $\mathbb{R} \setminus [a,b]$ getragen

$\to \mu_2$ liefert keinen Beitrag, da Imaginärteil ~~verschwindet~~, wenn von $F_2(x+i\epsilon)$ für $x \in (a,b)$ verschwindet

$\to$ konzentrieren uns auf $\mu_1 \equiv \mu$ mit $\mu(\mathbb{R}) < \infty$.

Sei $M_\mu(x) := \sup_{t>0} \frac{1}{2t} \mu(x-t, x+t)$ die zu μ gehörende Hardy-Littlewood-Maximalfkt.

$\Rightarrow$ H die $L^1 \to L^{1,\infty}$-bdd ist, also $|\{x \in \mathbb{R} : M_\mu(x) > t\}| \lesssim t^{-1} \mu(\mathbb{R})$, $\sim t^{-1}$

d.h. aber $\cancel{\int_a^b M_\mu(x)^p} \overset{\text{Hölder}}{\lesssim_{a,b}} \left(\int_a^b M_\mu(x)^q dx\right)^{p/q} \overset{\cancel{\text{layer cake}}}{=} \cancel{q \int_0^\infty \alpha^{q-1} |\{x \in \mathbb{R} \cap (a,b) : M_\mu(x) > \alpha\}|}$

$$\int_a^b M_\mu(x)^p\,dx = \int_a^b M_\mu(x)^p \Big(\underset{\uparrow\ \text{layer-cake}}{1\!\!1_{M_\mu > t}} + \underset{\uparrow\ \text{easy}}{1\!\!1_{M_\mu < t}}\Big)\,dx\,, \qquad t<\infty \text{ fix}$$

$$= -t^p(a-b) + p\int_t^\infty \underbrace{|\{x\in(a,b): M_\mu > \alpha\}|\,\alpha^{p-1}}_{\lesssim\ \alpha^{p-2}}\,d\alpha \ \leq\ C_{a,b,t} < \infty$$

Stein 1970, p. 62, 63

Außerdem gilt $\frac{1}{\pi}|\operatorname{Im} F(x+i\epsilon)| \leq M_\mu(x)$ $\forall \epsilon \geq 0$, $x\in\mathbb{R}$ ~~$x\in(a,b)$~~ sowie (Thm 3.2.10)

$\frac{1}{\pi}\operatorname{Im} F(x+i\epsilon) \longrightarrow \frac{d\mu_{ac}}{dx}(x)$ für Lebesgue-f.ü. x, d.h.

$\int_a^b \left|\frac{1}{\pi}\operatorname{Im} F(x+i\epsilon)\right|^p \longrightarrow \int_a^b \left(\frac{d\mu_{ac}}{dx}\right)^p dx$ folgt aus majorisierter Konvergenz ☐

$\hookrightarrow$ $|(\varphi_\epsilon * f)(x)| \leq A\,(Mf)(x)$, $A = \int \psi(x)\,dx$, $\psi(|x|) := \sup_{|y|\geq|x|} |\varphi(y)|$ (langsamst abfallende Majorante)

Jahsic

4 Spektralsatz und maßtheoretische Zerlegung des Spektrums → Teschl

Ziel Sei $A: D(A) \to \mathfrak{H}$ s.a. Dann gibt es ein eindeutiges projektorwertiges Maß $P_A: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \{\text{orthogonale Proj. in } \mathfrak{H}\}$, sodaß

(Teschl p. 99-110)

$(\varphi, A\varphi) = \int d\mu_\varphi(\lambda)\,\lambda$

$\to A = \int_{\sigma(A)} \lambda \, dP_A(\lambda)$ PVM

Im Sinne, dass $(\phi, A\psi) = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d(\phi, P_A(\lambda)\psi) = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\mu^{(A)}_{\phi,\psi}(\lambda)$, $\phi \in \mathfrak{H}$, $\psi \in D(A)$

wobei $\mu^{(A)}_{\phi,\psi}(\lambda)$ durch Polarisation aus $\mu^{(A)}_{\phi\phi}(\lambda) = \mu^{(A)}_{\phi\phi}((-\infty, \lambda]) = (\phi, P_A((-\infty,\lambda])\phi)$ gewonnen wird und Spektralschar genannt wird.

Funktionalkalkül

Weiter gilt für Borelfunktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, dann $\to f(A) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, dP_A(\lambda)$

$f(A)^* = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(\lambda)}\, dP_A(\lambda)$,

$(\varphi, f(A)\varphi) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda)\, d\mu_\varphi(\lambda)$

$f(A)$ kommutiert mit allen $P_A(\Omega)$, $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, und es gilt $\|f(A)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |f(\lambda)|$

Weiter gilt für alle Borelfkt. en f, g und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\left.\begin{aligned} \alpha f(A) + \beta g(A) &\subseteq (\alpha f + \beta g)(A) \\ f(A) g(A) &\subseteq (fg)(A) \end{aligned}\right\} \text{ offenbar für } f, g \text{ Polynome, dann durch "}\to\text{"}$$

e^{itH} unitär

$|e^{it\lambda}| = 1$

Schließlich ~~ist~~ $\to f(A)$ s.a. $\Leftrightarrow f(\lambda) \in \mathbb{R}$ $\forall \lambda \in \sigma(A)$

$\to f(A)$ unitär $\Leftrightarrow |f(\lambda)| = 1$ $\forall \lambda \in \sigma(A)$.

$\to \sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{R}: P_A(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon) \neq 0 \ \forall \epsilon > 0\}$ $(\to P_A(\sigma(A)) = \mathbb{1}_{\mathfrak{H}}$, $P_A(\rho(A)) = 0)$

$\hookrightarrow$ S. 1-9

$\lambda \in \mathbb{R}: \mu(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon) > 0 \ \forall \epsilon > 0$

Alternative Form (→ z.B. Zahsic - Topics in spec theory)

Zunächst Erinnerung (sh. auch Beh. 2.1.1 und HA 3.1)

Sei (X, Σ) ein Maßraum mit Maß $\mu \geq 0$. Sei $f: X \to \mathbb{R}$ messbar und ~~A_f~~ → A_f

$A_f: D(A_f) \to L^2(X, d\mu)$ ein linearer Operator mit maximalem Definitionsbereich $D(A_f) = \{\psi \in L^2(X, d\mu): f\psi \in L^2(X, d\mu)\}$, $A_f \psi = f\psi$.

→ (1) A_f ist s.a.

(2) A_f ist beschr. $\Leftrightarrow f \in L^\infty(X, d\mu)$. In diesem Fall ist $\|A_f\| = \|f\|_{L^\infty(X, d\mu)}$

(3) $\sigma(A_f) = \{\lambda \in \mathbb{R}: \mu(f^{-1}(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)) > 0 \ \forall \epsilon > 0\}$

→ **Spektlsatz** Sei $A: D(A) \to \mathfrak{H}$ s.a. $\Rightarrow$ Es gibt einen Maßraum (X, Σ), ~~und~~ ein WS-Maß $\mu \geq 0$ und eine messbare Fkt. $f: X \to \mathbb{R}$, ~~sodass~~ und eine unitäre Abb. $U: \mathfrak{H} \to L^2(X, d\mu)$ s.d. $UAU^{-1} = A_f$. → sh. S. R. Thm 4.3.4

Motivation für Spektthm offenbar: wir wollen nicht nur Polynome v. s.a. Operatoren, sondern allgemeine Fkt.en von s.a. Operatoren verstehen

Zwar kann $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ in Potenzreihen entwickelt werden, doch solch ein Ansatz funktioniert nur für beschränkte s.a. Operatore

4.1 Projektorwertige Maße – Definitionen / einfache Eigenschaften

$P = P^* = P^2$

Def 4.1.1 Ein PVM (projektorwertiges Maß) $P: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\Omega \mapsto P(\Omega)$ ist eine

$A = \int \lambda \, dP_A(\lambda)$

orthogonale Proj., sprich $P(\Omega)^2 = P(\Omega) = P(\Omega)^*$, die zudem

$\mu(\mathbb{R}) = 1 \longrightarrow$ (1) $P(\mathbb{R}) = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$ (Normierung)

(2) Falls $\Omega = \dot{\bigcup}_n \Omega_n \Rightarrow \sum_n P(\Omega_n)\psi = P(\Omega)\psi \quad \forall \psi \in \mathcal{H}$ (starke σ-Additivität) im starken/schwachen Sinne

erfüllt. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

HA • Für σ-Additivität bräuchte sogar nur schwache Konv. verlangt werden, sprich schwache σ-Additivität $\Rightarrow$ starke σ-Additivität

• Norm-σ-Additivität gilt i. A. nicht

Bsp • $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ symmetrisch mit EV $\lambda_1 \ldots \lambda_m$ distinkten EW $(m \le n)$ $\{P_j\}_{j=1}^m$ zugehörige Projektionen $\Rightarrow A = \sum_{\lambda_j} \lambda_j P_j$ und $P_A(\Omega) = \sum_{j:\lambda_j \in \Omega} P_j(A)$ ist ein PVM.

• $g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ messbar, $P_\lambda f := \mathbb{1}_{\{g \le \lambda\}} f$, $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ definiert eine Spektralfamilie $P_\lambda \equiv P((-\infty, \lambda])$

Eigenschaften von PVMs: (1) $P(\emptyset) = 0 \quad P(\mathbb{R} \setminus \Omega) = \mathbb{1} - P(\Omega)$

(2) $P(\Omega_1 \cup \Omega_2) + P(\Omega_1 \cap \Omega_2) = P(\Omega_1) + P(\Omega_2)$

$P: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to$ Proj. $\to$ (3) $P(\Omega_1 \cap \Omega_2) = P(\Omega_1)\,P(\Omega_2)$

$\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$

$\mu((-\infty, \lambda]) \equiv \mu(\lambda) \to$ (4) $P(\Omega_1) \le P(\Omega_2)$ falls $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ Monotonie

Def 4.1.2 Sei $P: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein PVM, dann heißt $P(\lambda) \equiv P_\lambda := P((-\infty, \lambda])$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ Spektralfamilie oder Resolution der Identität. (Verteilungsfkt)

Eigenschaften von $P(\lambda)$ $\to$ (1) $P(\lambda)$ ist orth Proj

$\to$ (2) $P(\lambda_1) \le P(\lambda_2)$ falls $\lambda_1 \le \lambda_2$

(3) $s\text{-}\lim_{\lambda_n \downarrow \lambda} P(\lambda_n) = P(\lambda)$ (starke rechtsseitige Stetigkeit)

(4) $s\text{-}\lim_{\lambda \to -\infty} P(\lambda) = 0$, $s\text{-}\lim_{\lambda \to \infty} P(\lambda) = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$

Wie bei PVMs kann gezeigt werden, dass starke und schwache rechtsseitige Stetigkeit von $P(\lambda)$ äquivalent zueinander sind.

→ zu $P(\Omega)$ und $P(\lambda)$ können zugehörige, endliche Borelmaße / Verteilungsfkt.en definiert werden.

$(\psi, P(\Omega)\psi) = \Sigma \dots$

Borelmaß

Sei $\psi \in \mathfrak{H}$, dann → $\mu_\psi(\Omega) := (\psi, P(\Omega)\psi)$, $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

→ $\mu_\psi(\lambda) := (\psi, P_\lambda \psi)$ (Verteilungsfkt

Lect. 3

Da für jede Verteilungsfkt. ein eindeutiges Borelmaß konstruiert werden kann, folgt, dass es für jede Spektralfamilie P_λ ein eindeutiges zugehöriges PVM $P(\Omega)$ gibt.

→ mit Polarisation erhalten wir aus $\mu_\psi(\Omega)$ komplexe Maße

$$\mu_{\varphi\psi}(\Omega) = (\varphi, P(\Omega)\psi) = \frac{1}{4}\left[\mu_{\varphi+\psi}(\Omega) - \mu_{\varphi-\psi}(\Omega) + i\mu_{\varphi-i\psi}(\Omega) - i\mu_{\varphi+i\psi}(\Omega)\right]$$

$\forall \varphi, \psi \in \mathfrak{H}$, $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

und offenbar $|\mu_{\varphi\psi}(\Omega)| \le 1$

4.2 Integration über PVMs

Sei $f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{\Omega_j}$ (mit $\Omega_j = f^{-1}(\alpha_j)$) eine Treppenfkt. (einfache Fkt.en), dann setzen wir

⇒ $P(f) := \int f(\lambda)\, dP(\lambda) = \sum \alpha_j P(\Omega_j)$, d.h. insb. ist $P(\mathbb{1}_\Omega) = P(\Omega)$

$\sum_j \alpha_j P(\Omega_j)$

⇒ $(\varphi, P(f)\psi) = \sum \alpha_j \mu_{\varphi\psi}(\Omega_j) = \int f(\lambda)\, d\mu_{\varphi\psi}(\lambda)$

⇒ wg Linearität des Integrals ist $P : \{\text{einfache Fkt.en}\} \to \mathcal{L}(\mathfrak{H})$

$$\underset{\sum \alpha_j \mathbb{1}_{\Omega_j}}{f} \mapsto P(f) = \sum \alpha_j P(\Omega_j)$$

Aus $\|P(f)\psi\|^2 = (\psi, P(f)^2\psi) = \sum |\alpha_j|^2 \mu_\psi(\Omega_j)$ ($\Omega_j \cap \Omega_\ell = \emptyset$, falls $j \neq \ell$)

folgt weiter $\|P(f)\psi\|^2 = \int |f(\lambda)|^2\, d\mu_\psi(\lambda) \le \|f\|_\infty^2 \|\psi\|_{\mathfrak{H}}^2$

⇒ $\|P\|_{\text{op-norm}} = 1$

Da Menge d. einfache Fkt.en dicht in Menge der beschr. Borelfkt.en (bzgl $\|\cdot\|_\infty$-Norm), gibt es eine eindeutige Erweiterung $P : \{\text{beschr. Borelfkt.en mit } \|\cdot\|_\infty\text{-Norm}\} \to \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, $\|P\| = 1$

und $(\varphi, P(f)\psi) = \int f(\lambda)\, d\mu_{\varphi\psi}(\lambda)$ und $\|P(f)\psi\| = \int |f(\lambda)|^2\, d\mu_\psi(\lambda)$ gelten weiterhin

→ weitere Struktur hinter dieser Erweiterung

Erinnerung: $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ formt eine ~~$\mathbb{R}$~~ C^*-Algebra

Ein C^*-Algebra-Homomorphismus $\phi : C^*\text{-Alg} \to C^*\text{-Alg}$ ist eine lineare Abbildung, die $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ und $\phi(a^*) = \phi(a)^*$ erfüllt.

Adjungieren in C^*-Alg

Thm 4.2.1 Sei $P(\Omega)$ ein PVM, dann ist der zugehörige Operator

$$P : \{\text{beschr. Borelfkten}\} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$$
$$f \mapsto \int f(\lambda)\, dP(\lambda) \equiv P(f)$$

ein C^*-Alg.-Homomorphismus mit Norm 1, sodass

$$(P(g)\varphi, P(f)\psi) = \int \overline{g(\lambda)}\, f(\lambda)\, d\mu_{\varphi\psi}(\lambda) \qquad (*)$$

Gilt weiter $f_n \to f$ pktweise mit $\|f_n\|_\infty \leq 1$, dann gilt

~~$P(f_n) \to$~~ $\quad s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} P(f_n) = P(f)$

Beweis Die Eigenschaften $P(1) = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$, $P(\bar f) = P(f)^*$, $P(fg) = P(f)P(g)$ sind offenbar für einfache Fkt.en → Für f bdd und messbar mit Treppenfkt.en approximieren ~~(*)~~ fol ⇒ P ist C^*-Alg.-Homomorphismus

$(*)$ folgt aus $(P(g)\varphi, P(f)\psi) = (\varphi, P(g^* f)\psi)$

letzte Beh. folgt aus majorisierter Konv. und $\|P(f)\psi\| \leq \|f\|_\infty \|\psi\|_{\mathcal{H}}$ □

Bem $(*) \Rightarrow \mu_{P(g)\varphi, P(f)\psi}(\Omega) = (P(g)\varphi, P(\Omega)P(f)\psi) = \int_\Omega \overline{g(\lambda)}\, f(\lambda)\, d\mu_{\varphi\psi}(\lambda)$

$\Rightarrow d\mu_{P(g)\varphi, P(f)\psi} = \bar g f\, d\mu_{\varphi\psi}$

Bsp 4.2.2 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, $P_A(\Omega) = \sum\limits_{\lambda_j \in \Omega} P_j \Rightarrow P_A(f) = \sum\limits_{j=1}^{n} f(\lambda_j) P_j$

$P_A(id) = A \qquad \left(id(x) = x \text{ auf } \mathbb{R} \right)$

$$d\mu_\psi(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \|P_j\psi\|^2\, d\theta(\lambda - \lambda_j)$$

Heaviside

Dirac-Maß bei λ_j

$\|P(f)\psi\|_2^2 = (P(f)\psi, P(f)\psi) = \int |f(\lambda)|^2 d\mu_\psi(\lambda) < \infty$

$P(f) \qquad \int f(\lambda)$

Nun Erweiterung des Frameworks auf unbeschr. Borelfkt.en
$\to$ unbeschr. Operatoren $\to$ was ist richtiges domain?

Wg $\| P(f)\psi\| \le \|f\|_\infty \|\psi\|$ scheint es vernünftig (wie bei Multiplikationsoperatoren aus den Anfängen von VL 2)

$$D_f = \{ \psi \in \mathcal{H} : \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d\mu_\psi(\lambda) < \infty \}$$

zu setzen. Offenbar ist $D_f \subseteq \mathcal{H}$ ein linearer Unterraum, denn

$$\mu_{\alpha\psi}(\Omega) = |\alpha|^2 \mu_\psi(\Omega) \qquad (\alpha \in \mathbb{C})$$
$$\mu_{\psi+\varphi}(\Omega) = \|P(\Omega)(\psi+\varphi)\|^2 \le 2(\|P(\Omega)\varphi\|^2 + \|P(\Omega)\psi\|^2) = 2(\mu_\varphi(\Omega) + \mu_\psi(\Omega))$$

Beob. Für $\psi \in D_f$ ist $f_n = \mathbb{1}_{\Omega_n} f$, $\Omega_n = \{\lambda \in \mathbb{R} : |f(\lambda)| < n\}$ eine Folge beschränkter Borelfkt.en, die Cauchy in $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)$ ist und dort gegen f konvergiert.
$\Rightarrow$ Wg $\|P(f_n)\psi\| \le \|f_n\|_\infty \|\psi\|$ bildet also $\psi_n = P(f_n)\psi$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{H}$ die uns erlaubt

$$P(f)\psi := \lim_{n\to\infty} P(f_n)\psi, \quad \psi \in D_f$$

zu definieren.
Per Konstruktion ist $P(f)$ linear und es gilt weiter $\|P(f)\psi\| \le \|f\|_\infty \|\psi\|$, falls $f \in L^\infty$. Falls $f \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_\psi)$ gilt außerdem weiter $(\psi, P(f)\psi) = \int f(\lambda) d\mu_\psi(\lambda)$
Schließlich ist D_f dicht. Sei dazu Ω_n wie oben und $\psi_n = P(\Omega_n)\psi$. Dann ist $d\mu_{\psi_n} = \mathbb{1}_{\Omega_n} d\mu_\psi$ und damit $\psi_n \in D_f$. Darüberhinaus folgt $\psi_n \to \psi$ aus $\|P(f)\psi\|^2 = \int |f(\lambda)|^2 d\mu_\psi(\lambda)$, da $\mathbb{1}_{\Omega_n} \to 1$ in $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)$.
Wir fassen diese Beobachtungen wie folgt zusammen

Thm 4.2.3 Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ messbar (nicht notwendigerweise beschr.) und $P(\Omega)$ ein PVM. Dann ist $D_f = \{\psi \in \mathcal{H} : \int |f(\lambda)|^2 d\mu_\psi(\lambda) < \infty\}$ ein dichter, linearer Unterraum von $\mathcal{H}$.
Für $f_n = \mathbb{1}_{\Omega_n} f$, $\Omega_n = \{\lambda \in \mathbb{R} : |f(\lambda)| < n\}$ existiert

$$P(f)\psi := \operatorname{s-lim}_{n\to\infty} P(f_n)\psi, \quad \psi \in D_f$$

und $P(f)$ ist ein linearer Operator, der $\|P(f)\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d\mu_\psi(\lambda)$
und $(\psi, P(f)\psi) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, d\mu_\psi(\lambda)$ (für $f \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_\psi)$) erfüllt.

⑥

Der Operator $P(f)$ hat weitere schöne Eigenschaften, die für den Beweis des Spektralsatzes sein werden.

Thm 4.2.4 normal / Thm 3.2 in Teschl: Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ messbar, dann ist $\to P(f) = \int f(\lambda)\, dP(\lambda)$, $D(P(f)) = D_f$ und erfüllt $\to \|P(f)\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d\mu_\psi(\lambda)$ $\forall \psi \in D_f$.

$\to (\psi, P(f)\psi) = \int f(\lambda)\, d\mu_\psi(\lambda)$

$[f(A), g(A)] = 0$

$\int g\, dP(\lambda)$, $\int f\, dP(\lambda)$

Außerdem ist $\to [P(f), P(\lambda)] = 0$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ und es gilt ~~...~~

$\Rightarrow (A+1)^{-1} e^{-A} = e^{-A}(A+1)^{-1}$

$\|P(f)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(P(f))} |f(\lambda)|$.

Thm 3.2: Seien ferner $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}_n$ messbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, dann gelte

$\int (f+g)\, dP = \int f\, dP + \int g\, dP$

(1) $P(f)^* = P(\bar{f})$

(2) $\alpha P(f) + \beta P(g) \subseteq P(\alpha f + \beta g)$, $D(\alpha P(f) + \beta P(g)) = D_{|f|+|g|}$ Linearität

(3) $P(f)P(g) \subseteq P(fg)$, $D(P(f)P(g)) = D_g \cap D_{fg}$

$\int f\, dP \int g\, dP = \int fg\, dP$

Insbesondere folgen daraus

(1) $P(f)P(\bar{f}) = P(\bar{f})P(f) = P(|f|^2)$

(2) $(P(f)\varphi, P(g)\psi) = \int \bar{f}(\lambda) g(\lambda)\, d\mu_{\varphi\psi}(\lambda)$

Schließlich ist (1) $P(f)$ s.a. $\Leftrightarrow f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(2) $P(f)$ unitär $\Leftrightarrow |f(\lambda)| = 1$ $\forall \lambda \in D(f)$

gegeben A s.a. $\to \exists P_A$ PVM?

Pf Teschl p. 104–105 $\int f\, dP(\lambda) = A_P$ s.a. falls f reell

Bem $P(f)$ als Op in $\mathcal{H}$ $\cong$ Multiplikationsoperator M_f in $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)$ s.d. $A = \int \lambda\, dP_A(\lambda)$

Wir sehen, dass für jedes PVM $P(\Omega)$ ein zugehöriger Operator $\int_{\mathbb{R}} \lambda\, dP(\lambda) = A$ gewonnen werden kann. PVM P $\to$ gilt auch die Umkehrung, sprich ~~für gegeben~~ $A: D(A) \to \mathcal{H}$, gibt es ein PVM P_A ~~sodass~~ $\to$ Borelmaße $\mu_\varphi(\Omega) = (\varphi, P_A(\Omega)\varphi)$ $A = \int \lambda\, dP_A(\lambda)$?

$\to$ betrachte dazu ~~Resolvente~~ $\to (\varphi, R_A(z)\varphi) = (\varphi, (A-z)^{-1}\varphi)$ $z \in \rho(A)$, ~~genauer gesagt~~

Frage: können wir $\int (\lambda - z)^{-1} dP(\lambda)$ invertieren?? Sprich, ist es möglich zu zeigen, dass es P_A PVM gibt, sodass $(A-z)^{-1} = \int (\lambda - z)^{-1} dP_A(\lambda)$?

$\to (\varphi, R_A(z)\varphi) \equiv F_\varphi(z)$ Pick?!

$0 \stackrel{?}{=} b = \lim_{y \to \infty} \frac{F(iy)}{iy}$

$\to$ wenn ja, dann Nevanlinna

$0 \stackrel{?}{=} a = \mathrm{Re}\, F(i)$, $\mu(\beta) - \mu(\alpha) = \int_\alpha^\beta \mathrm{Im}\, F(x+i0)\, dx$ $\Rightarrow \exists a, b, \mu_\varphi$ $F_\varphi(z) = a + bz + \int \frac{1}{\lambda - z}\, d\mu_\varphi(\lambda)$

Sei also zunächst ein PVM $P(\Omega)$ gegeben und betrachte $g[\psi]\geq 0 \Rightarrow \exists$ zugehöriges B! (7)

$R_A(z) \equiv \int (\lambda - z)^{-1}\, dP(\lambda)$ bzw. die Boreltransf. vom zugehörigen $g[\psi] = (\psi, R\psi)$ (Pick)

Spektralmaß μ_ψ, d.h. $F_\psi(z) = (\psi, R_A(z)\psi) = \int \frac{d\mu_\psi(\lambda)}{\lambda - z}$

Man kann zeigen, dass jede Pickfkt g die Darst. (Bhatia Thm V.4.11, Teschl Thm 3.20)

$$g(z) = a + bz + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\lambda-z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) d\mu(\lambda) \quad \text{für } b\geq 0,\ a\in\mathbb{R},\ \mu\geq 0 \text{ Borelmaß auf } \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

mit $\int \frac{d\mu(\lambda)}{1+\lambda^2}$ hat.

Insbesondere kann man ausrechnen, dass $a = \mathrm{Re}\, g(i)$, $b = \lim_{\eta\to\infty} \frac{g(i\eta)}{i\eta}$
(Bhatia S. 139_u + Thm V.4.12, Teschl Thm 3.23) sind,

sowie für alle α, β, die keine Atome von μ sind, $\mu((\alpha,\beta]) = \lim_{\eta\to 0}\frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta \mathrm{Im}\, g(x+i\eta)\,dx$
(Stieltjessche Umkehrformel)

bzw. $\forall \lambda\in\mathbb{R}$ $\mu((-\infty,\lambda]) = \lim_{\delta\to 0}\lim_{\eta\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\lambda+\delta}\mathrm{Im}\, g(x+i\eta)\,dx$

$\to$ Bsp: $g(z) = -z^{-1} \Rightarrow a=b=0$, $\mu(\lambda) = \lim_{\delta\to 0}\lim_{\eta\to 0}\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\lambda+\delta} \cancel{\mathrm{Im}}\,\frac{\eta}{\eta^2+x^2}\,dx}_{\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} 1_{x\leq\lambda+\delta} P_\eta(x)\,dx \,=\, 1_{\lambda\geq 0} \,=\, \theta(\lambda)} = \theta(\lambda)$

$\Rightarrow d\mu(\lambda) = \delta(\lambda)$

$\Rightarrow \int d\mu(\lambda)\left(\frac{1}{\lambda-z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) = -\frac{1}{z}$ ✓

weitere Bsp $z^{1/2}$, $\log z$ (HA) $a, b = 0$

In unserer ~~Situation:~~ $\to$ $F_\psi(z) = \int \frac{d\mu_\psi(\lambda)}{\lambda - z}$ und μ_ψ lässt sich durch
$F_\psi(z) = (\psi, (A-z)^{-1}\psi)$

$0\leq \mu_\psi(\lambda) = \lim_{\delta\to 0}\lim_{\eta\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\lambda+\delta}\mathrm{Im}\, F_\psi(x+i\eta)\,dx$ wiederherstellen

$\to$ jetzt können wir unsere Frage der Invertierbarkeit $P(\Omega)\mapsto A_P$ s.o. beantworten.
Sei also jetzt $A: D(A)\to\mathcal{H}$ gegeben mit $F_\psi(z) = (\psi, (A-z)^{-1}\psi)$. Offenbar ist F_ψ Pick, denn $F_\psi(z)$ ist holomorph in $z\in\rho(A)$ mit $F_\psi(\bar z) = \overline{F_\psi(z)}$, $|F_\psi(z)| \leq \frac{\|\psi\|^2}{|\mathrm{Im}\, z|}$ (Lemma 13.4) und $F_\psi(z)$ bildet $\mathbb{C}_+$ in sich selbst ab, da
$\mathrm{Im}\, F_\psi(z) = \mathrm{Im}(z)\, \|R_A(z)\psi\|^2$ (mit Resolventenformel)

~~$\Rightarrow$ per Polarisation~~ $\Rightarrow F_\psi(z) = a + bz + \int\left(\frac{1}{\lambda-z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) d\mu_\psi(\lambda)$ Was sind a, b?

Betrachte $g(z) = F_\psi(z) - \int \frac{d\mu_\psi(\lambda)}{\lambda - z}$ holomorph in $\mathbb{C}_+$

Da $\operatorname{Im} g(z) = 0$ folgt aus Cauchy-Riemann, dass $g(z) = a + bz \equiv const \Rightarrow b = 0$

Andererseits ~~gilt~~ $\lim_{\operatorname{Im} z \to \infty} (\psi, (A-z)^{-1}\psi), \int \frac{d\mu_\psi(\lambda)}{\lambda - z} = 0$, d.h. $\lim_{\operatorname{Im} z \to \infty} g(z) = 0 \Rightarrow a = 0$

Weiter sehen wir, dass $\underbrace{\epsilon \cdot \operatorname{Im} F_\psi(x + i\epsilon)}_{= \epsilon^2 \underbrace{\|(A-x-i\epsilon)^{-1}\psi\|^2}_{\leq \frac{\|\psi\|^2}{\epsilon^2}} \to \|\psi\|^2} = \epsilon^2 \int \frac{d\mu_\psi(\lambda)}{\epsilon^2 + (\lambda - x)^2} \xrightarrow{\epsilon \to \infty} \mu_\psi(\mathbb{R})$ (majorisiert

$\Rightarrow \mu_\psi(\mathbb{R}) = \|\psi\|^2$

$\rightarrow$ Zusammengefasst gilt also

Thm 4.2.5 Sei $A: D(A) \to \mathcal{H}$ s.a., $z \in \rho(A)$, $\psi \in \mathcal{H}$, ~~4a~~ $\varphi \in \mathcal{H}$. Dann gibt es eindeutiges ~~W~~ Borelmaß $\mu_\psi \geq 0$ mit ~~h~~ $\mu_\psi(\mathbb{R}) = \|\psi\|^2$ und

$\rightarrow (\psi, (A-z)^{-1}\psi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_\psi(\lambda)}{\lambda - z}$ $\quad \mu_\psi \geq 0$

und eindeutige komplexe Maße $\mu_{\varphi\psi}$ in $\mathbb{R}$ s.d. $(\varphi, (A-z)^{-1}\psi) = \int \frac{d\mu_{\varphi\psi}(\lambda)}{\lambda - z}$.

$\rightarrow$ Jetzt: Konstruktion eines PVMs aus $\mu_\psi(\Omega)$!

Definiere nun $\rightarrow s_\Omega(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_\Omega(\lambda)\, d\mu_{\varphi\psi}(\lambda)$ ~~und~~ und

$\rightarrow q_\Omega[\psi] = s_\Omega(\psi, \psi) \geq 0$, ~~k~~ ~~...~~se $\Rightarrow |s_\Omega(\varphi, \psi)| \leq q_\Omega[\psi]^{1/2} q_\Omega[\varphi]^{1/2}$
$\leq \mu_\psi(\Omega)^{1/2} \mu_\varphi(\Omega)^{1/2}$
$\leq \|\psi\| \|\varphi\|$.

$\rightarrow q_\Omega(\psi) = \int_\Omega d\mu_\psi(\lambda) \geq 0$

$\underset{\text{s.a.}}{A} \rightarrow \underset{\Omega}{(A-z)^{-1}} \rightarrow F_\psi(z)$
$\rightarrow \mu_\psi(z)$

~~$\Rightarrow \exists$ zugehörigen beschränkten Operator $P_A(\Omega)$, der~~

$\Rightarrow \exists$ zugehöriger nicht-negativer (und damit s.a.) Operator $0 \leq P_A(\Omega) \leq 1$ definiert

durch $(\varphi, P_A(\Omega)\psi) := s_\Omega(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_\Omega(\lambda)\, d\mu_{\varphi\psi}(\lambda)$ $\quad 0 \leq P_A \leq 1$

$\cancel{P_A^*} = P_A^2 = P_A$

Prop 4.2.6 Die Familie der ~~PVMs~~ $P_A(\Omega)$ bildet ein PVM $\rightarrow$ jetzt 4.2.1, 4.2.3., 4.2.4 anwendbar

Pf zu $P_A(\Omega_1)P_A(\Omega_2) \stackrel{?}{=} P_A(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ bemerken wir zunächst, dass die Stieltjessche Inversionsformel (durch Polarisation) auch für komplexe Maße gilt

$\rightarrow$ „Stonesche Formel" $\frac{1}{2}\left(\mu(\lambda_1, \lambda_2) + \mu([\lambda_1, \lambda_2])\right) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} dx \left[F(x+i\epsilon) - F(x-i\epsilon)\right]$

komplexes Maß $\qquad \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - x - i\epsilon}$

PVM $\rightarrow$ S.a. $\rightarrow (A-z)^{-1}$

Als Nächstes folgt aus der Resolventenformel

$$\int \frac{d\mu_{R_A(\bar z)\phi,\psi}(\lambda)}{\lambda-\tilde z} = (R_A(\bar z)\phi, R_A(\tilde z)\psi) = (\phi, R_A(z)R_A(\tilde z)\psi)$$

$$= \frac{1}{z-\tilde z}\left[(\phi, R_A(z)\psi) - (\phi, R_A(\tilde z)\psi)\right] = \frac{1}{z-\tilde z}\int\left(\frac{1}{\lambda-z} - \frac{1}{\lambda-\tilde z}\right) d\mu_{\phi\psi}(\lambda)$$

$$= \int \frac{1}{\lambda - z}\,\frac{d\mu_{\phi\psi}(\lambda)}{\lambda-\tilde z} \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ ergo $d\mu_{R_A(\bar z)\phi,\psi}(\lambda) = \dfrac{d\mu_{\phi\psi}(\lambda)}{\lambda - z}$ mit Stonescher Formel

Als Nächstes rechnen wir

$$\int \frac{d\mu_{\varphi, P_A(\Omega)\psi}(\lambda)}{\lambda - z} = (\varphi, R_A(z)P_A(\Omega)\psi) = \cancel{(R_A(\bar z)}\ \cancel{(R_A(\bar z), P_A}$$

$$= (R_A(\bar z)\varphi, P_A(\Omega)\psi) = \int \mathbb{1}_\Omega(\lambda)\, d\mu_{R_A(\bar z)\varphi,\psi}(\lambda) \overset{(*)}{=} \int \frac{1}{\lambda - z}\mathbb{1}_\Omega(\lambda)\, d\mu_{\varphi\psi}(\lambda)$$

d.h. $d\mu_{\varphi, P_A(\Omega)\psi}(\lambda) = \mathbb{1}_\Omega(\lambda)\, d\mu_{\varphi\psi}(\lambda)$, d.h. aber wg $\mathbb{1}_{\Omega_1}\mathbb{1}_{\Omega_2} = \mathbb{1}_{\Omega_1\cap\Omega_2}$

$(\Omega = \Omega_1\cap\Omega_2)$ $\quad (\varphi, P_A(\Omega_1)P_A(\Omega_2)\psi) = (\varphi, P_A(\Omega_1\cap\Omega_2)\psi)$

Insb. ist $P_A(\Omega) = P_A(\Omega)^2 = P_A(\Omega)^*$

Um $P_A(\mathbb{R}) = \mathbb{1}$ zu zeigen, sei $\psi \in \ker P_A(\mathbb{R})$, d.h. $0 = d\mu_{\varphi, P_A(\mathbb{R})\psi}(\lambda)$

$$= \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(\lambda)\, d\mu_{\varphi\psi}(\lambda) = d\mu_{\varphi\psi}(\lambda)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\varphi, R_A(z)\psi)}_{=\int \frac{d\mu_{\varphi\psi}}{\lambda - z}} = 0 \Rightarrow \psi \overset{!}{=} 0$$

Schließlich sei $\Omega = \dot\bigcup \Omega_n \Rightarrow \sum_{j=1}^N (\psi, P_A(\Omega_j)\psi) = \sum_{j=1}^N \mu_\psi(\Omega_j) \xrightarrow{N\to\infty} (\psi, P_A(\Omega)\psi)$

$$= \mu_\psi(\Omega)$$

wg σ-Additivität der μ_ψ

$\Rightarrow P_A(\Omega)$ schwach und damit stark σ-additiv (wie zuvor bemerkt) $\square$

$R_A(z) \to \mu_{\varphi\psi}$ aus $(\psi, R_A(z)\psi) \to P_A$ aus $(\psi, P_A(\Omega)\psi) = \int_\Omega d\mu_\psi(\lambda)$

$\Rightarrow$ <u>Spek thm</u> Zu jedem $A: D(A)\to \mathcal{H}$ $\exists!\ P_A(\Omega)$ (PVM) s.d.

$$A = \int \lambda\, dP_A(\lambda)$$

<u>Pf</u> Existenz ~~Ex~~ gerade bewiesen durch explizite Konstruktion. Wg Thm 4.2.1 und 4.2.3 gilt $P_A((\lambda-z)^{-1}) = R_A(z)$, $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Da die Maße $\mu_{\varphi,\psi}$ eindeutig durch $R_A(z)$ bestimmt und das PVM eindeutig durch $\mu_{\varphi\psi}$ bestimmt, ist P_A eindeutig durch $R_A(z)$ bestimmt $\square$

Quad Form von A durch $q_A[\psi] = \int \lambda \, d\mu_\psi(\lambda)$

$\psi \in Q(A) = D(|A|^{1/2}) = \{\psi \in \mathcal{H} : \int |\lambda| \, d\mu_\psi(\lambda) < \infty\}$

gegeben (auch für s.a. A, die einen Negativteil haben)

<u>Thm 4.2.7</u> $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : P_A(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon) \neq 0 \quad \forall \epsilon > 0\}$, und insb. $P_A(\sigma(A)) = \mathbb{1}$, $P_A(\rho(A)) = 0$
$P_A((\lambda_1, \lambda_2)) = 0 \Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2) \subseteq \rho(A)$

Pf Sei $\Omega_n := (\lambda_0 - \frac{1}{n}, \lambda_0 + \frac{1}{n})$ u. angenommen $P_A(\Omega_n) \neq 0$

$\Rightarrow \exists \psi_n \in P_A(\Omega_n)\mathcal{H}$ mit $\|\psi_n\| = 1$.

Da $\|(A - \lambda_0)\psi_n\|^2 = \|(A - \lambda_0) P_A(\Omega_n)\psi_n\|^2 = \int (\lambda - \lambda_0)^2 \mathbb{1}_{\Omega_n}(\lambda) \, d\mu_{\psi_n}(\lambda) \leq \frac{1}{n^2}$

$\Rightarrow \lambda \in \sigma(A)$ wg Charakterisierung von $\sigma(A)$ mit Weyl-Folgen (Lem. 1.2.8)

Sei andererseits $P_A(\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon) = 0$, dann setze $f_\epsilon(\lambda) = \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)}(\lambda)(\lambda - \lambda_0)^{-1}$

$\Rightarrow (A - \lambda_0) P_A(f_\epsilon) = P_A((\lambda - \lambda_0) f_\epsilon(\lambda)) = P_A(\mathbb{R} \setminus (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)) = \mathbb{1}$

Ähnlich erhält man $P_A(f_\epsilon)(A - \lambda_0) = \mathbb{1}|_{D(A)}$, d.h. $\lambda_0 \in \rho(A)$ $\square$

$\Rightarrow P_A(f) = P_A(\sigma(A)) P_A(f) = P_A(\mathbb{1}_{\sigma(A)} f)$, d.h. $P_A(f)$ hängt nicht vom Verhalten von f auf $\mathbb{R} \setminus \sigma(A)$ ab

Von nun an schreiben wir $f(A) \equiv P_A(f)$.

Aus der Konstruktion von P_A oben sehen wir außerdem

$(\psi, P_A(\Omega)\psi) = \int \mathbb{1}_\Omega \, d\mu_\psi(\lambda)$ dann aus Thm 4.2.7

folgt, dass $\sigma(A) = \sigma(\mu_\psi)$, falls ψ ein zyklischer Vektor von A ist,

d.h. falls $\{A^n \psi : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $\mathcal{H}$.

<u>Etwas genauer</u> im Folgenden

4.3. Zusammenhang zwischen Spektren von Operatoren und Borelmaßen

Wir haben gesehen $A: D(A) \to \mathcal{H}$ s.a.

$$\Downarrow R_A(z); \quad (\Psi, R_A(z)\Psi) = \int \frac{d\mu_\Psi(\lambda)}{\lambda - z}$$

$$d\mu_\Psi(\lambda)$$

$$\Downarrow$$

$$\int \mathbb{1}_\Omega(\lambda)\, d\mu_\Psi(\lambda) \equiv (\Psi, P_A(\Omega)\Psi), \quad P_A(\Omega) \text{ PVM}$$

$$\Downarrow$$

$$A = \int \lambda\, dP_A(\lambda) \quad \text{und} \quad (\Psi, A\Psi) = \int \lambda\, (\Psi, dP_A(\lambda)\Psi)$$
$$= \int \lambda\, d\mu_\Psi(\lambda)$$

Vermutung

$\Rightarrow$ A in $\mathcal{H}$ unitär äq zu M_{id} in $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\Psi)$, falls Ψ zyklisch für A,
↳ Multiplikation mit λ
d.h. $\{A^n\Psi : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{H}$ dicht
(sh auch Thm 3.13 Teschl)

$\Rightarrow$ Vermutung wahr

Thm 4.3.1 Sei $A: D(A) \to \mathcal{H}$ s.a. und Ψ zyklisch für A
$\Rightarrow \exists$ unitäre Abb $U: \mathcal{H} \to L^2(\mathbb{R}, d\mu_\Psi)$ s.d. $UAU^{-1} = M_{id} \equiv \tilde{A}$
Multiplikation mit x

Insb. folgt (aus Thm 4.2.7), $\sigma(A) = \sigma(\mu_\Psi)$

Pf Später (z.B. Teschl Thm 3.13)

Bem U nicht eindeutig! Falls U existiert, so ist $U\Psi$ zyklisch für M_{id} in $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\Psi)$.
Ist andererseits $f \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_\Psi)$ bereits zyklisch für M_{id}, dann gibt es eine eindeutige unitäre Abb $U: \mathcal{H} \to L^2(\mathbb{R}, d\mu_\Psi)$, sodass $UAU^{-1} = M_{id}$ und $U\Psi = f\,\|\Psi\| / \|f\|$. Die unitäre Abb., die man im Beweis konstruiert, erfüllt $U\Psi = 1$.

Allgemeiner Fall $\to$ Thm 3.8 (Jahrk)

Thm 4.3.2 (Zerlegung in zyklische Unterräume)
Sei $A: D(A) \to \mathcal{H}$ s.a., $\mathcal{H}$ separabel $\Rightarrow \exists$ abzählbare Menge Γ, eine Familie von zueinander orthogonalen Unterräumen $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\Gamma}$ von $\mathcal{H}$ und s.a. Operatoren A_n auf $\mathcal{H}_n$ mit

(1) $\forall n \in \Gamma \; \exists \; \psi_n \in \mathcal{H}_n$ zyklisch für A_n

(2) $\mathcal{H} = \oplus \mathcal{H}_n$ und $A = \oplus A_n$

($\psi \in \mathcal{H}$, $\psi = (\psi_n)_n$, $\psi_n \in \mathcal{H}_n$, $\sum_{n\in\Gamma} \|\psi_n\|^2_{\mathcal{H}_n} < \infty$, $(\varphi, \psi)_{\mathcal{H}} = \sum_{n\in\Gamma} (\varphi_n, \psi_n)_{\mathcal{H}_n}$

A_n s.a. in $\mathcal{H}_n$, setze $D(A) = \{\psi = (\psi_n)_n \in \mathcal{H} : \psi_n \in D(A_n) : \sum_{n\in\Gamma} \|A_n \psi_n\|^2 < \infty\}$

$\Rightarrow A\psi = (A_n \psi_n)_n$ ist s.a. in $\mathcal{H}$ und man schreibt $A = \bigoplus_{n\in\Gamma} A_n$

weiter gilt $(A-z)^{-1} = \bigoplus_n (A_n - z)^{-1}$, $\sigma(A) = \overline{\bigcup_n \sigma(A_n)}$

Im Allgemeinen Fall zerlegen wir also $A = \bigoplus_n A_n$, erhalten unitäre $U_n : \mathcal{H}_n \to L^2(\mathbb{R}, d\mu_{\psi_n})$ mit $U_n A_n U_n^{-1} = \tilde{A}_n$ und zyklischen ψ_n für A_n

$\oplus U_n \equiv U$

Thm 4.3.3 $U: \mathcal{H} \to \bigoplus_n L^2(\mathbb{R}, d\mu_{\psi_n})$ ist unitär und $UAU^{-1} = \oplus \tilde{A}_n \equiv \tilde{A}$, d.h.

insb. ist $\sigma(A) = \overline{\bigcup_n \sigma(A_n)} = \overline{\bigcup_n \sigma(\mu_{\psi_n})}$

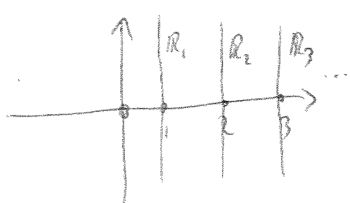
Pf Jahsic Thm 3.14

~~Setze nun $\mu_{\mathbb{R}}(E)$~~

Sei $\mathbb{R}_n$ eine Kopie von $\mathbb{R}$ und $M := \bigcup_{n\in\Gamma} \mathbb{R}_n$

z.B. $\Gamma = \{1..N\}$ oder $\Gamma = \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n = \{(n,x) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$\to$ M ist eine Familie von Geraden in $\mathbb{R}^2$, die parallel zur y-Achse sind und durch den Punkt $(n, 0)$ $(n\in\Gamma)$ laufen.



$\Rightarrow U: \mathcal{H} \to L^2(M, d\mu)$ unitär mit $UAU^{-1} = \tilde{A}$
mit $\tilde{A}$ = Multiplikation mit f in $L^2(M, d\mu)$, $f(n,x) = x$

Sei $\mathcal{F}$ die Familie aller Mengen $F \subset M$ mit $F \cap \mathbb{R}_n$ ist Borel $\forall n \in \Gamma$.

$\to$ $\mathcal{F}$ ist eine σ-Algebra und $\mu(F) = \sum_n \mu_{\psi_n}(F \cap \mathbb{R}_n)$

Setze nun $\underset{\mathcal{F}}{\mu_{ac}(\mathcal{F})} = \sum_{n\in\Gamma} \mu_{\psi_n, ac}(\mathcal{F} \cap \mathbb{R}_n)$

$$\mu_{sc}(\mathcal{F}) = \sum_n \mu_{\psi_n, sc}(\mathcal{F} \cap \mathbb{R}_n)$$

$$\mu_{pp}(\mathcal{F}) = \sum_n \mu_{\psi_n, pp}(\mathcal{F} \cap \mathbb{R}_n)$$

(*)
$\Rightarrow L^2(M, d\mu_{ac})$, $L^2(M, d\mu_{sc})$, $L^2(M, d\mu_{pp})$ sind abgeschlossene Unterräume von $L^2(M, d\mu)$, die invariant unter $A_f = \oplus \tilde{A}_n$ $(f(n,x) = x)$ sind

Weiter ~~und~~ gilt $L^2(M, d\mu) = L^2(M, d\mu_{ac}) \oplus L^2(M, d\mu_{sc}) \oplus L^2(M, d\mu_{pp})$,

~~wg d. disjunkten Zerlegung d. Maße~~

da alle Maße singulär zueinander sind und disjunkte Träger haben

Zu jedem A_n mit $d\mu_{\psi_n}$ definieren wir also Projektoren $P_n^{xx} = \mathbb{1}_{M_n^{xx}}(A_n)$, wo M_n^{xx} Träger von $\mu_{\psi_n}^{xx}$ $(xx = sc, pp, ac)$ $\rightarrow P_n^{pp} + P_n^{sc} + P_n^{ac} = \mathbb{1}_{\mathfrak{H}_n}$

$\Rightarrow L^2(\mathbb{R}_n, d\mu_{\psi_n}) = L^2(\mathbb{R}_n, d\mu_n^{ac}) \oplus L^2(\mathbb{R}_n, d\mu_n^{pp}) \oplus L^2(\mathbb{R}_n, d\mu_n^{sc})$

$\Rightarrow A_n = (A_n P_n^{ac}) \oplus (A_n P_n^{pp}) \oplus (A_n P_n^{sc})$

$\sigma_{ac}(A_n) = \sigma(\mu_{\psi_n}^{ac})$, $\sigma_{pp}(A_n) = \sigma(\mu_{\psi_n}^{pp})$, $\sigma_{sc}(A_n) = \sigma(\mu_{\psi_n}^{sc})$

(<u>Bem</u> $\sigma_{pp}(A_n) = \overline{\sigma_p(A_n)}$, wobei $\sigma_p(A_n) = \{\lambda \in \mathbb{R}_n : \lambda \text{ EW von } A_n\}$)
<u>HA</u> Beispiel?

Dies erklärt (*) durch Nehmen von direkten Summen $\bigoplus_{n\in\Gamma}$

Wir gehen jetzt mit unserer gefundenen Unitären $U = \bigoplus_n U_n : \mathfrak{H} \to \oplus L^2(\mathbb{R}_n, d\mu_{\psi_n})$ zurück und definieren

$\mathfrak{H}_{ac} = U^{-1} L^2(M, d\mu_{ac})$ $\quad \mathfrak{H}_{pp} = U^{-1} L^2(M, d\mu_{pp})$, $\quad \mathfrak{H}_{sc} = U^{-1} L^2(M, d\mu_{sc})$

welche wieder invariante Unterräume für A sind. Wg wechselseitiger Singularität der μ_{xx} gilt entsprechend $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{ac} \oplus \mathfrak{H}_{pp} \oplus \mathfrak{H}_{sc}$.

$$\sigma_{ac}(A) = \sigma(A|_{\mathfrak{H}_{ac}}) = \overline{\bigcup_n \underbrace{\sigma_{ac}(A_n)}_{= \sigma(\mu_{\psi_n}^{ac})}} \quad \text{etc.}$$

$\psi \in \mathfrak{H}_{ac} \Leftrightarrow \mu_\psi$ ac bzgl. Lebesgue

$\psi \in \mathfrak{H}_{pp} \Leftrightarrow \mu_\psi$ ist pure point

$\psi \in \mathfrak{H}_{sc} \Leftrightarrow \mu_\psi$ ist sc bzgl. Leb.

~~Wir sind~~

~~4.~~ 4.4 Anwendung der Ergebnisse aus VL 3

Wir sind nun in der Lage unser Wissen über Boreltransformationen von Stieltjesmaßen auf die Spektralmaße von s.a. Operatoren anzuwenden

$A: D(A) \to \mathcal{H}$ s.a., $\psi \in \mathcal{H}$, μ_ψ zugehöriges Spek.maß, $F_{\mu_\psi} \equiv F_\psi \equiv F$ Boreltransf.

Thm 4.4.1 (1) Für Lebesgue-f.a. $x \in \mathbb{R}$ existiert der Grenzwert
$$\lim_{\epsilon \searrow 0} (\psi, (A - x - i\epsilon)^{-1}\psi) \equiv (\psi, (A - x - i0)^{-1}\psi)$$
und ist endlich und nicht-verschwindend

(2) $d\mu_\psi^{ac} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} (\psi, (A - x - i0)^{-1}\psi) dx$

(3) μ_ψ^s ist auf $\{x : \lim_{\epsilon \searrow 0} \operatorname{Im}(\psi, (A - x - i\epsilon)^{-1}\psi) = \infty\}$ getragen

Pf Folgt aus voriger Diskussion + Thms 3.2.9, 3.2.10

Thm 4.4.2 Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$

(1) $\mu_\psi^{ac}([a,b]) = 0 \iff$ für ein $0<p<1$ gilt
$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_a^b \left(\operatorname{Im}(\psi, (A - x - i\epsilon)^{-1}\psi)\right)^p dx = 0$$ (Thm 3.4.3)

(2) Ang. für ein $p>1$ gilt
$$\int_a^b \left(\operatorname{Im}(\psi, (A - x - i\epsilon)^{-1}\psi)\right)^p dx < \infty \quad \forall\, \epsilon \in (0,1)$$ (Thm 3.4.1)
$$\Rightarrow \mu_\psi^s([a,b]) = 0$$

(3) $\mu_\psi^{pp}([a,b]) = 0 \iff \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_a^b \left(\operatorname{Im}(\psi, (A - x - i\epsilon)^{-1}\psi)\right)^2 dx = 0$ (Thm 3.4.2)

4.5 Weitere Anwendungen, Ausblick

(RAGE)

Wir schließen mit einem weiteren dynamischen Ergebnis + einem Beispiel, das zeigt, dass μ_{ac} / σ_{ac} typischerweise nicht stabil unter Störungen ist (vgl mit Streutheorie, wo wir Kriterien suchen, die besagen, dass σ_{ac} stabil)

Stabilitätstheorie von σ_{xx}, σ extrem reichhaltig ... sicherlich nicht machbar in einer VL (z.B. zig Bücher über math. Streutheorie $\to \sigma_{ac}$

$\downarrow$ z.B. Kato ~~[illegible]~~ (Vater aller Thme über Stab.-theorie)

zig Paper über σ_{sc} auf $L^2(\mathbb{R}^d)$, $L^2(\mathbb{Z}^d)$, $L^2(\Gamma)$, $\ell^2(\mathbb{Z}^d) \to$ Quasikristalle oder Jacobibäume

$\hookrightarrow$ Simon, Jitomirskaya, Last, Gordon, Damanik, Avila und so viele mehr

$\sigma_{pp} \rightsquigarrow$ Lieb-Thirring, Laptev, Birman, Solomyak, ...)

Thm 4.5.1 (Ruelle, Amrein, Georgescu, Enss)

$H: D(H) \to \mathcal{H}$ s.a., $(K_L)_{L\in\mathbb{R}} \subseteq \gamma^\infty(\mathcal{H})$ (z.B. $\mathbb{1}_{[-L,L]^d}(-\Delta+1)^{-\alpha}$)

$\Rightarrow \mathcal{H}^c = \{\psi \in \mathcal{H}: \lim_{L\to\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \|K_L e^{itH}\psi\|^2 dt = 0\}$ ~~gilt auch, wenn~~

$\mathcal{H}^{pp} = \{\psi \in \mathcal{H}: \lim_{L\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|(1-K_L)e^{itH}\psi\| = 0\}$

$\Longrightarrow$ Charakterisierung von $\mathcal{H}^c$, $\mathcal{H}^{pp}$!!

Prop 4.5.2 (Baby-RAGE)

$H: D(H) \to \mathcal{H}$ s.a. $K \in \gamma^\infty$. Dann gelten

$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \|Ke^{itH}P^c\psi\|^2 = 0$, $\lim_{T\to\infty} \|Ke^{itH}P^{ac}\psi\|^2 = 0$ (ohne Zeitmittelung)

Falls K lediglich $K(H+i)^{-1} \in \gamma^\infty$ erfüllt, gelten die Aussagen $\forall \psi \in D(H)$

Falls — " ——— und bdd, — " ——— $\forall \psi \in \mathcal{H}$

Pf Wg. Dichtheit der Operatoren endlichen Ranges in γ^p $1 \le p \le \infty$ genügt es $K = \sum_{j=1}^n |\phi_j\rangle\langle\phi_j|$ zu betrachten. Durch Induktion + Dreiecksungl. ~~sich~~ kann man sich sogar auf $K = |\phi\rangle\langle\phi|$ zurückziehe.

Wir zeigen also $\frac{1}{T}\int_0^T |(\phi, e^{itH}\psi)|^2 dt \cdot \|\phi\|^2$

$= \frac{\|\phi\|^2}{T}\int_0^T dt\, |\widehat{\mu_{\phi\psi}}(t)|^2 \xrightarrow[\mu \text{ hat keine Atome}]{\text{Wiener}} 0$

Für den ac-Teil konvergiert bereits der Integrand gegen 0 für $t \to \infty$ wg Riemann-Lebesgue, was die zweite Behauptung zeigt. 16

(Beob. dass wenn $\psi \in \mathcal{H}^{**}$, dann automatisch auch $\rho \in \mathcal{H}^{**}$

da $(\rho, e^{itH} p^{**}\psi) = (p^{**}\rho, e^{itH} p^{**}\psi)$)

~~Bew A~~

Falls $K(H+i)^{-1} \in \gamma^\infty$, dann $\|K e^{itH}\psi\| = \|\underbrace{K(A+i)^{-1}}_{\gamma^\infty} e^{itH} \underbrace{(A+i)\psi}_{\in \mathcal{H}^{**}}\|$ falls $\psi \in D(A) \cap \mathcal{H}^{**}$

vorige Situation

$\rightarrow$ sind in voriger Situation

Falls $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, dann approximiere $\psi = \lim \psi_n$, $\psi_n \in D(A)$, $\psi \in \mathcal{H}$ und

$$\|Ke^{itH}\psi\| \leq \underbrace{\|Ke^{itH}(\psi-\psi_n)\|}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0 \ \forall t} + \underbrace{\|Ke^{itH}\psi_n\|}_{\text{gerade gezeigt}}$$

$\boxed{}$

Thm 4.6.3 (Weyl, Neumann) (Instabilität von σ_{ac}) $\longrightarrow$ Mehr zu Störungen endlichen Rangs in Simons Buch + dortigen Referenz

$H: D(H) \to \mathcal{H}$ s.a. $\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists \ A \in \gamma^2$ s.a. mit $\|A\|_2 < \epsilon$ s.d. $H+A$ hat reines Pktspektrum

Thm 4.6.4 (Kuroda) In Thm 4.6.3 kann A so gewählt werden, dass $|||A||| < \epsilon$ für jede Norm $|||\cdot||| \neq \|\cdot\|_1$, die unitär ~~invariant~~ invariant sind

$\rightarrow$ optimal Katos (X, Thm 4.3)

(Kato, Rosenblum) $\sigma_{ac}(H) = \sigma_{ac}(H+A)$, falls $A \in \gamma^1$

Thm 4.6.5 (Weyl) Sei $A: D(A) \to \mathcal{H}$ s.a. und $B(A+i)^{-1} \in \gamma^\infty$ (oder nur im Form-Sinne $(B\text{-}w)^{1/2}(A+i)^{-1}$)

(Reicht eig. dass $R_A(z) - R_{A+B}(z) \in \gamma^\infty$, $z \in \rho(A) \cap \rho(A+B)$)

$\Rightarrow \sigma_{ess}(A+B) = \sigma_{ess}(A)$

$\rightarrow$ Rein stetiges Spek kann in reines Punktspek übergeführt werden. Die EW sind aber nicht diskret, sondern dicht in jedem Intervall, da ~~$\sigma_c \subseteq \sigma_{ess}$~~

$$\sigma_c(H) \subseteq \sigma_{ess}(H) = \sigma_{ess}(H+A)$$

Pf (Thm 4.6.5) falls $B \in \gamma^\infty$ Wg Symmetrie reicht es $\sigma_{ess}(A+B) \subset \sigma_{ess}(A)$ z.z. ~~$\sigma_{ess}(A+B) \subset \sigma_{ess}(A)$ z.z.~~

Sei $\lambda \in \sigma_{ess}(A+B)$, ψ_n eine Orthonormalfolge, sodass (oder $\psi_n \rightharpoonup 0$)

$$\|(A+B-\lambda)\psi_n\| \to 0$$

Da $\psi_n \rightharpoonup 0$ und $B \in \gamma^\infty$ folgt $B\psi_n \xrightarrow{s} 0 \Rightarrow \|(A-\lambda)\psi_n\| \leq \|(A+B-\lambda)\psi_n\| + \|B\psi_n\| \to 0$

d.h. $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$ $\boxed{}$

(Wir verwenden Weyls Charakterisierung von σ_{ess}, sh z.B. Teschl Lemma 6.17