13.1.2021

3 Stieltjesmaße und Boreltransformation

→ Teschl Anhang
Rudin (Real & complex analysis Kap. 6)
→ Jaksic – Topics in spectral theory

$A : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$ s.a.

$$\boxed{(\varphi, A\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\mu_\varphi(\lambda)}$$

→ Spektralsatz: $\sigma(A) " = " \sigma(\mu_\varphi)$ wenn φ zyklisch

3.1 Stieltjes-Maße $\mathbb{R}$

↳ allgemeine Maße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ lassen sich zerlegen (Lebesgue-Zerlegung)

$$\mu = \mu_{pp} + \mu_{ac} + \mu_{sc}$$

$$\sum_j \delta_{x_j}(x - x_j) \qquad \mu_{ac}(A) = \int_A f(x)\, dx, \quad f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$$

Cantormaß
(Konstruktion mit Hilfe "der" Cantormengen
(hier 3er-Cantormenge)

Terminologie, Allgemeinwissen.

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt und monoton steigend

$\Rightarrow$ Existenz der Grenzwerte $F(x-0) := \lim_{\epsilon \searrow 0} F(x-\epsilon)$

$$F(x+0) := \lim_{\epsilon \searrow 0} F(x+\epsilon)$$

$$F(\infty) := \lim_{x \to \infty} F(x)$$

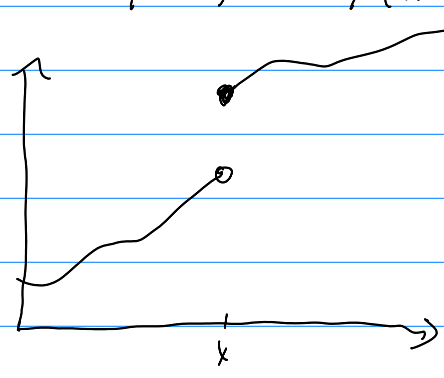
$$F(-\infty) := \lim_{x \to -\infty} F(x)$$

Falls $F(\cdot)$ bei x stetig, dann $F(x+0) = F(x-0)$

Falls $F(\cdot)$ bei x nicht stetig, dann $F(x+0) - F(x-0) \neq 0$

In dem Fall verwenden wir die Konvention

$F(x) := F(x+0)$ $\rightsquigarrow$ F rechtsseitig stetig



Lemma 3.11. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $F: I \to \mathbb{R}$ monoton

$\Rightarrow$ a) $F: I \to \mathbb{R}$ kann höchstens Sprungstellen haben und ist sonst stetig

b) Die Menge aller Sprungstellen ist abzählbar

<u>Ziel</u> Konstruktion allgemeiner Maße auf $\mathbb{R}$ mit Hilfe von monoton steigenden Fkt.en.

$$\underline{\mu = \mu_{pp} + \mu_{ac} + \mu_{sc}} \leftarrow F = \underbrace{F_{pp}}_{\uparrow} + \underbrace{F_{ac}}_{\uparrow} + \underline{F_{sc}}$$

X Menge mit Familie $\mathcal{A}$ von Teilmengen von X heißt <u>Algebra</u>, falls

(1) $X \in \mathcal{A}$
(2) $\mathcal{A}$ abgeschlossen unter endlichen Vereinigungen
(3) $\mathcal{A}$ abgeschlossen unter Komplement-Nehmen

$\Rightarrow$ $\emptyset \in \mathcal{A}$, $X \setminus A = A^c \in \mathcal{A}$, falls $A \in \mathcal{A}$
endliche Schnitte sowie relative Komplemente ebenfalls in $\mathcal{A}$ enthalten.

$\mathcal{A}$ heißt <u>σ-Algebra</u>, falls $\mathcal{A}$ unter abzählbaren Vereinigungen (und damit abzählbaren Schnitten) abgeschlossen

$(X, \underbrace{\Sigma}_{\sigma\text{-Algebra}})$ messbarer Raum

Maß: $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$

$\mu(\emptyset) = 0$
$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$
falls $A_j \cap A_k = \emptyset$ für $j \neq k$
(σ-Additivität)

Ein Maß μ heißt <u>σ-endlich</u>, falls es eine abzählbare Überdeckung $\{X_j\}_j$ von X gibt mit $\mu(X_j) < \infty$

und $X_j \in \Sigma \quad \forall j$.

μ heißt endlich, falls $\mu(X) < \infty$.
μ heißt WS-Maß, falls $\mu(X) = 1$

$(X, \underbrace{\Sigma}_{\text{Sigma-Alg.}}, \overbrace{\mu}^{\text{Maß}})$ heißt Maßraum

Wenn Σ eine Algebra ist, dann heißt μ <u>Prämaß</u>.

Eigenschaften von Maßen:

- $\mu(A) \leq \mu(B)$ falls $A \subseteq B$
- Falls $A_n \nearrow A$, d.h. $A_n \subseteq A_{n+1}$ und $A = \bigcup_n A_n$
  dann $\mu(A_n) \to \mu(A)$ (Stetigkeit von unten)
- Falls $A_n \searrow A$ $\quad A_n \supseteq A_{n+1}$ und $A = \bigcap_n A_n$
  dann $\mu(A_n) \to \mu(A)$ (Stetigkeit von oben)

  falls $\mu(A_n) < \infty$.

Falls X ein topologischer Raum ist, dann heißt $\mathcal{B}(X)$ Borelsche σ-Algebra, die die kleinste σ-Algebra aller offenen Mengen darstellt.

Ein Maß μ auf einer Borel-σ-Algebra heißt Borelmaß, falls $\mu(K) < \infty$ $\forall$ Kompakta K.

Ein <u>Borelmaß</u> μ heißt <u>von außen regulär</u>, falls

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O) : O \supseteq A \text{ und } O \text{ offen}\}$$

und <u>von innen regulär</u>, falls

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A,\ K \text{ kompakt}\}$$

Im Folgenden betrachten wir $X = \mathbb{R}$ und interessieren uns für die Konstruktion von Borelmaßen (manchmal auch Stieltjes-Maße genannt).

<u>Definition 3.1.2</u> Angenommen, μ ist ein Borelmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Dann heißt $\mu : \mathbb{R} \to [0, \infty]$

$$\mu(x) := \begin{cases} -\mu((x, 0]) & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \mu([0, x)) & x > 0 \end{cases}$$

<u>Verteilungsfunktion</u>. (Diese Funktion ist rechtsseitig stetig und monoton steigend)

<u>Bemerkung 3.1.3</u> Falls μ endlich ist, bezeichnet man auch

$\tilde{\mu}(x) = \mu((-\infty, x])$ als <u>Verteilungsfkt.</u>

Beobachte: $\tilde{\mu}(x) - \mu(x) = \mu((-\infty, 0])$

<u>Idee</u> Konstruktion von Borelmaßen auf $\mathbb{R}$. Starte mit monotoner Fkt. F und definiere "$\mu((a, b]) = F(b+0) - F(a-0)$"

→ erweitere Definition auf Mengen, die sich als endliche Vereinigung disjunkter Intervalle schreiben lassen

Teschl Thm A.3

$$A = \dot{\bigcup_{j=1\dots k}} I_j \qquad \mu(A) = \sum_{j=1}^{k} \mu(I_j)$$

→ erweitere das Maß auf alle Teilmengen von $\mathbb{R}$ wodurch man ein äußeres Maß gewinnt

$(\mu(\emptyset)=0, \quad A \subseteq \bigcup_j B_j \Rightarrow \mu(A) \leq \sum \mu(B_j))$

→ restringiere das gewonnene äußere Maß wieder auf Borelmengen $\xrightarrow{\text{Thm}}$ man erhält ein Maß.

14.1.2021

$I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall: (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$
$a \leq b$

$\{a\} = [a,a]$, $[a,a) = (a,a] = (a,a) = \emptyset$.

Def 3.1.4 Sei $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton nicht-fallend.

$\to m_F(\emptyset) = 0$, $m_F(\{a\}) = F(a+0) - F(a-0)$

$$m_F(I) = \begin{cases} F(b+0) - F(a+0), & I = (a,b] \\ F(b+0) - F(a-0) & I = [a,b] \\ F(b-0) - F(a+0) & I = (a,b) \\ F(b-0) - F(a-0) & I = [a,b) \end{cases}$$

m_F heißt zu F gehörendes <u>Borel-Stieltjes-Maß</u> und $m_F(I)$ heißt Variation von F auf I

Bemerkungen. • $m_F(\{a\}) = 0 \iff F$ ist bei a stetig und es kann nur abzählbar viele solcher Stellen geben $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $m_F(\{a_j\}) > 0$.

$F(a+) = F(a+0)$
$F(a-) = F(a-0)$

• Obige Definition von m_F involviert nicht den Wert von F bei Sprungstellen, sondern lediglich $F(a+) - F(a-)$. D.h. jede andere Funktion $\tilde{F}$, die
$$F(x-0) \le \tilde{F}(x) \le F(x+0)$$
erfüllt, führt auf dasselbe Maß m_F.

• Oft werden wir voraussetzen, dass F rechtsseitig stetig ist. In diesem Fall stimmt F mit der Verteilungsfunktion von m_F bis auf $F(0+0)$ überein

$x > 0$
$$m_F(x) = m_F((0,x]) = F(x+0) - F(0+0)$$
$$\tilde{m}_F(x) = m_F((-\infty,x]) = F(x+0) - F(-\infty)$$

Wir können jetzt die Algebra der endlichen Vereinigungen disjunkter Intervalle betrachten und das in Def 3.1.4 gewonnene Maß auf endliche Vereinigungen disjunkter Intervalle durch
$$m_F(\underbrace{A}_{=\dot\bigcup_{j=1..K} I_j}) := \sum_{j=1}^{K} m_F(I_j)$$
auf solchen Mengen definieren.

Lemma 3.1.5 Sei $\mathcal{A}$ die Algebra aller endlichen Vereinigungen disjunkter Intervalle und m_F die Intervall-fkt aus Def 3.1.4.

$\Rightarrow$ m_F erzeugt ein eindeutiges, wohldefiniertes, endlich additives, σ-endliches Prämaß auf $\mathcal{A}$.

$\mu(\dot{\bigcup}_{j=1..N} A_j) = \sum_{j=1}^{N} \mu(A_j)$

Beweis Teschl Lemma A.2.

Insbesondere ist m_F ein Prämaß auf der Algebra der endlichen Vereinigungen von Intervallen, welches wir jetzt zu einem Borelmaß erweitern.

Thm 3.1.6 Für jede nicht-fallende Fkt $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt es ein eindeutiges Borelmaß, welches m_F aus Def 3.1.4. erweitert. Zwei unterschiedliche Fkt.en erzeugen dasselbe Maß g.d.w., wenn ihre Differenz abseits der Sprungstellen konstant ist.

Bew Teschl Thm A.3.

Definition 3.1.7 Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum. (Σ: σ-Algebra)

1) Eine Menge $A \in \Sigma$ heißt Träger von μ wenn $\mu(X \setminus A) = 0$. (μ heißt auch auf A konzentriert)

2) Falls X ein topologischer Raum, und $\Sigma = \mathcal{B}(X)$ die Borelsche σ-Algebra, dann definiert man den Träger oder topologischen Träger

durch $\sigma(\mu) = \operatorname{supp} \mu = \{x \in X : \mu(U_x) > 0$ für jede Umgebung von $x\}$

3) Falls $X = \mathbb{R}$ mit $\Sigma = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, dann heißt

$\sigma(\mu) := \operatorname{supp} \mu := \{ t \in \mathbb{R} : \mu((t-\epsilon, t+\epsilon)) > 0 \quad \forall \epsilon > 0 \}$

heißt Menge der Wachstumspunkte oder Spektrum von μ.

4) Falls $X = \mathbb{R}$, dann heißt ein Träger M von μ minimaler Träger, falls für alle Teilmengen $M_0 \subseteq M$ mit $\mu(M_0) = 0$ auch $\operatorname{Leb}(M_0) = 0$.

<u>Bemerkungen 3.1.8</u> 1) $\sigma(\mu)$ ist (für X topologisch) ein Träger von μ.

2) Träger von Maßen sind nicht eindeutig.

<u>Bsp</u> $X = \mathbb{R}$, $\mu = \operatorname{Leb}$.

$\rightarrow$ $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \{\pi\}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sind Träger von μ. auch $\mathbb{R} \setminus C_n$ ist ein Träger von μ.

(C_n: n-er-Cantor-Menge)

3) $\operatorname{supp} \mu$ ist abgeschlossen. ($\operatorname{supp} \mu$ kann auch durch Entfernen aller Punkte, die eine Umgebung mit Maß 0 haben, gewonnen werden)

$\rightarrow$ Einige Beispiele auf $\mathbb{R}$, die den extremst möglichen Charakter allgemeiner Borel-Stieltjes-Maße herausstellen.

<u>Bsp 3.1.9</u> (Diskretes Maß 1, Dirac-Maß)

$$F(x) := \theta(x) := \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \text{(Heaviside)}$$

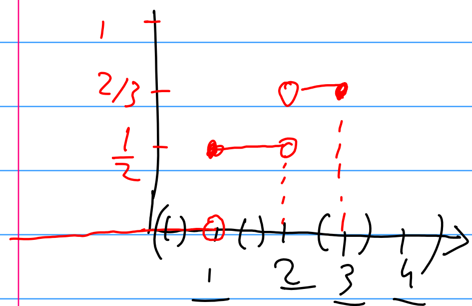
$\rightarrow$ $\operatorname{supp}(m_F) = \{0\}$

$\to$ jede Menge $V \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in V$ ist ein Träger von m_F

$$\tilde{m}_F(x) = m_F((-\infty, x]) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Bsp 3.1.10 (Diskretes Maß 2)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{k}{k+1} & x \in [k, k+1), \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$



$\operatorname{supp} m_F = \mathbb{N}$ also die Menge aller Sprungstellen von F.

Aber wie vorhin ist jede Menge $V \subseteq \mathbb{R}$ mit $V \supseteq \mathbb{N}$ ebenfalls ein Träger von m_F.

$$m_F(\{n\}) = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n(n+1)}$$
$$n \in \mathbb{N}$$

$$m_F(V) = \sum_{n \in V \cap \mathbb{N}} \frac{1}{n(n+1)} .$$

Definition 3.1.11 Ein Maß auf $\mathbb{R}$ heißt diskret, falls es auf einer diskreten Menge von $\mathbb{R}$ topologisch getragen ist.

($I \subseteq \mathbb{R}$ diskret $\Leftrightarrow$ $K \cap I$ endlich $\forall$ Kompakta K)

Bsp 3.1.12 (Reines Punktmaß)

$$\mathbb{Q} \cap (0,1) \equiv \{r_j\}_{j \in \mathbb{N}} \quad ; \quad F(x) = \sum_{r_j \leq x} 2^{-j}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

(monoton nicht-fallend u. rechtsseitig stetig)

$$\rightarrow \quad F(r_j+0) - F(r_j-0) = F(\{r_j\}) = 2^{-j}$$

$$\rightarrow \quad m_F(V) = \sum_{r_j \in V} m_F(\{r_j\}) = \sum_{r_j \in V} 2^{-j}$$

Ein Träger ist $\mathbb{Q} \cap (0,1)$.

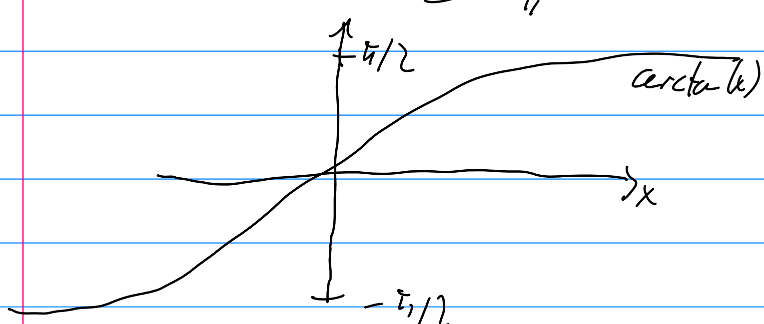
Def 3.1.13 (Reines Punktmaß) Borelmaße, die nur auf abzählbar vielen Singletons getragen sind, heißen Punktmaße. (Abzählbare Summe von Dirac-Maßen).

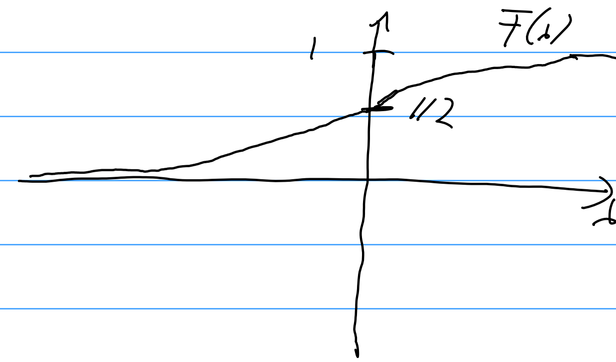
Wenn $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton nicht-fallend und stetig ist, dann

$$\forall d \in \mathbb{R} \quad \underset{\substack{\| \\ 0}}{m_F\{d\}} = \lim_{\epsilon \to 0} \left(F(d+\epsilon) - F(d-\epsilon)\right) \leq \underbrace{F(d) - F(d-\epsilon_0)}_{\xrightarrow{\epsilon_0 \to 0}\, 0,\ \text{falls } F \text{ stetig}}$$

Bsp 3.1.14 (Absolut-stetiges Maß)

$$F(d) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(d)$$





$$\text{"}F(d/\epsilon) \overset{\epsilon \to 0}{\rightarrow} \Theta(d)\text{"}$$

$$F(d/\epsilon) = (P_\epsilon * \Theta)(d), \quad P_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + x^2}$$

$$F(d) = (P_1 * \Theta)(d) = \frac{1}{\pi} \int_d^\infty \frac{dt}{1+t^2}$$

$$F(b) = \int_{-\infty}^{b} g(t)\,dt \quad \text{mit} \quad g \in L^1(\mathbb{R})$$

d.h. $F \in AC(\mathbb{R})$ $\quad \left(g(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}\right)$

Bemerkung Lebesgue: monotone Fkt.en sind f.ü. differenzierbar

$$m_F(V) = \int_V g(t)\,dt$$

Definition 3.1.15 Sei (X, Σ) messbarer Raum.

Σ: σ-Algebra

Eine abzählbare Familie $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \Sigma$ heißt Zerlegung von $E \subseteq X$, falls $E_i \cap E_j = \emptyset$ und

$$E = \bigcup_j E_j.$$

Ein komplexes Maß μ auf Σ ist eine komplexe Mengenfkt auf Σ mit

- $\mu(E) = \sum_j \mu(E_j)$ $\forall$ Zerlegung $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ von E

  Konvergenz der Reihe ist Teil der Voraussetzung an μ.

- Die totale Variation eines komplexen Maßes

$$|\mu|(E) := \sup\left\{ \sum_j |\mu(E_j)| : \{E_j\}_{j \in \mathbb{N}} \text{ ist eine Zerlegung von } E \right\}$$

Beobachtungen • $|\mu(E)| \leq |\mu|(E) \leq |\mu|(X)$, d.h. jedes komplexe Maß auf (X, Σ) ist beschränkt mit

$\operatorname{ran} \mu \subseteq D_0(|\mu|(X))$

- Falls das komplexe Maß μ nicht-negativ ist, dann $|\mu|(A) = \mu(A) \quad \forall A \in \Sigma$.

Thm 3.1.16 Sei μ komplex, dann:
- $|\mu|$ ist ein positives Maß auf Σ
- $|\mu|(X) < \infty$.

Pf Rudin Thm 6.2, 6.4

Definition 3.1.17 Sei $\mu \geq 0$ ein Maß auf Σ und λ ein weiteres, beliebiges, komplexes Maß auf Σ

- wir sagen $\lambda \ll \mu$ "λ ist absolut stetig bzgl. μ" falls für alle $E \in \Sigma$ mit $\mu(E)=0$ auch $\lambda(E)=0$

- Seien μ_1, μ_2 zwei Maße auf (X, Σ) sowie $A, B \in \Sigma$ disjunkte Mengen. Dann heißen μ_1 und μ_2 singulär zueinander, $\mu_1 \perp \mu_2$, falls μ_1 auf A und μ_2 auf B konzentriert.

Bem 3.1.18 Seien $\mu, \lambda, \lambda_1, \lambda_2$ Maße auf einer σ-Algebra mit $\mu \geq 0$.

(1) λ auf A konzentriert $\Rightarrow |\lambda|$ auf A konzentriert
(2) $\lambda_1 \perp \lambda_2 \Rightarrow |\lambda_1| \perp |\lambda_2|$
(3) $\lambda_1 \perp \mu \quad \lambda_2 \perp \mu \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 \perp \mu$
(4) $\lambda_1 \ll \mu \quad \lambda_2 \ll \mu \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 \ll \mu$
(5) $\lambda \ll \mu \Rightarrow |\lambda| \ll \mu$
(6) $\lambda_1 \ll \mu, \quad \lambda_2 \perp \mu \Rightarrow \lambda_1 \perp \lambda_2$

(7) $\lambda \ll \mu$ und $\lambda \perp \mu \Rightarrow \lambda = 0$.

Pf Thm 6.10 in Rudin.

Rudin Thm 6.10 21.1.2021

Thm 3.1.19 (Lebesgue-Zerlegung)

Sei $\mu \geq 0$ σ-endliches Maß auf (X, Σ) und λ sei ein komplexes Maß

a) Es gibt ein eindeutiges Paar von komplexen Maßen λ_a und λ_s mit $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$ und

$$\lambda_a \ll \mu \quad \text{und} \quad \lambda_s \perp \mu$$

Falls zusätzlich $\lambda \geq 0$ und endlich, dann gilt dies auch für λ_a und λ_s.

b) (Radon-Nikodym): Es gibt ein eindeutiges $h \in L^1(\mu)$ mit

$$\lambda_a(E) = \int_E h(x) d\mu(x) \quad \forall E \in \Sigma$$

Thm 6.11 Rudin

Thm 3.1.20 Seien $\mu \geq 0$ und λ komplexes Maß auf (X, Σ). Dann sind äquivalent

(1) $\lambda \ll \mu$

(2) Für alle $\epsilon > 0$ $\exists$ $\delta > 0$ sodass $|\lambda(E)| < \epsilon$ $\forall E \in \Sigma$, wann immer $\mu(E) < \delta$.

Bem Lebesgue-Zerlegung $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$ lässt sich verfeinern.

Def 3.1.21 Ein komplexes Maß μ auf (X, Σ) heißt stetig, falls $\mu(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in X$.

→ weitere Zerlegung des singulären Teils $\mu_s = \mu_{sc} + \mu_{pp}$ mit μ_{sc} ist stetig und $\mu_{pp}(E) = \sum_{x \in E} \mu_{pp}(\{x\})$ reines Punktmaß.

→ Frage: Wie extrahiert man $\mu_{ac}, \mu_{sc}, \mu_{pp}$ aus gegebenem (komplexen) Maß μ?

Worauf sind $\mu_\#$ getragen?

↳ später: mit Borel-Transformation

$$F_\mu(z) = \int \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z} \quad \text{(Pick)}$$

↳ klassische Frage: Untersuchung von Randwerten

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} F_\mu(\lambda + i\varepsilon)$$

→ Hardy-Räume $H^p(\mathbb{C}_+)$

$H^p(\mathbb{D})$

↳ analytische Fkt.en mit $\sup_{0<y<\varepsilon} \int |F(x+iy)|^p \, dx < \infty$

$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta$

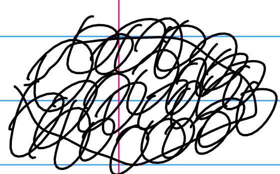
Koosis, ↳ B. Simon (Comprehensive course in analysis – harmonic analysis) Kap 5

<u>Jetzt</u> Wie hat man sich μ_{sc}, also den Teil von μ, der weder Sprünge hat, noch sich als Integral über eine L^1-Fkt. schreiben lässt, vorzustellen?

<u>Def 3.1.22</u> Fixiere $\alpha > 0$, $E \subseteq \mathbb{R}^d$ und definiere für $\epsilon > 0$

$$H_\alpha^\epsilon(E) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} r_j^\alpha \right\},$$ wobei der inf

über alle abzählbaren Überdeckungen mit Kugeln $B_{x_j}(r_j)$ von E genommen wird, wobei $r_j \leq \epsilon$.



<u>Sphärisches H.-Maß</u> → Das <u>Hausdorffmaß</u> ist $H_\alpha(E) := \lim_{\epsilon \downarrow 0} H_\alpha^\epsilon(E)$.

(man hätte auch mit anderen, ggf. konvexen, Mengen überdecken können)

<u>Bemerkungen</u>

1) H_α^ϵ fällt mit ϵ

2) $H_\alpha^\epsilon(E) \leq H_\beta^\epsilon(E) \quad \forall \beta < \alpha$

$\Rightarrow H_\alpha(E)$ ist nicht-steigend in α.

3) $H_\alpha^1(E) = 0 \Rightarrow H_\alpha(E) = 0$

wenn $H_\alpha^1(E) < \delta \Rightarrow$ notwendigerweise müssen die überdeckenden Kugeln Radius $< \delta^{1/\alpha}$ haben

Federer Thm 2.10.35 (Notation in 2.10.2) → 4) $H_d(E) = \frac{1}{Leb(B_0(1))} Leb(E)$

→ $H_\alpha(E) = 0 \quad \forall \alpha > d$.

(Konsequenz aus folgendem Lemma)

Lemma 3.1.23 Sei $E \subseteq \mathbb{R}^d$. Dann gibt es ein eindeutiges α_0, genannt Hausdorffdimension von E, sodaß
$\llcorner \dim_H(E)$

$$H_\alpha(E) = \infty \quad \text{falls} \quad \alpha < \alpha_0 \quad \text{und}$$
$$H_\alpha(E) = 0 \quad \text{falls} \quad \alpha > \alpha_0$$

Beweis Definiere α_0 als Supremum über alle α für die $H_\alpha(E) = \infty$, sprich $H_\alpha(E) = \infty \ \forall \alpha < \alpha_0$.

Für $\alpha > \alpha_0$ sei $\beta \in (\alpha_0, \alpha)$ und

$M = 1 + H_\beta(E) < \infty$. Für gegebenes $\epsilon > 0$ überdecken wir E mit $\{B_{x_j}(r_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$, $r_j < \epsilon$ sodaß $\sum r_j^\beta < \infty$.

$$\sum r_j^{\alpha - \beta + \beta} \leq \epsilon^{\alpha - \beta} \underbrace{\sum r_j^\beta}_{\leq M} \leq \epsilon^{\alpha - \beta} M \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0$$

$\Rightarrow H_\alpha(E) = 0$. $\boxtimes$

Anders formuliert: Für $0 \leq \beta < \alpha$ und $E \subseteq \mathbb{R}^d$.

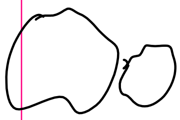
$$H_\beta(E) < \infty \Rightarrow H_\alpha(E) = 0$$

$$(\Leftrightarrow) \ H_\alpha(E) > 0 \Rightarrow H_\beta(E) = \infty.$$

Bemerkungen 3.1.24

1) H_α ist σ-additiv auf Borelmengen
$$H_\alpha(\dot\bigcup A_j) = \sum_j H_\alpha(A_j) \quad A_j \cap A_k = \emptyset \ {}_{j \neq k}$$

Insb. definiert H_α ein Borelmaß.



σ-Additivität i. A. falsch für H_α^ε
(z.B. $H_\alpha^1(E \cup F) \neq H_\alpha^1(E) + H_\alpha^1(F)$.)
kompakt, disjunkt

2) H_α nicht σ-endlich, falls $\alpha < d$, da bereits $H_\alpha(A) = \infty$ für alle $A \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $Leb(A) > 0$ (Lemma 3.1.23)

Falconer – Geometry of fractal sets (Kap I, VIII)

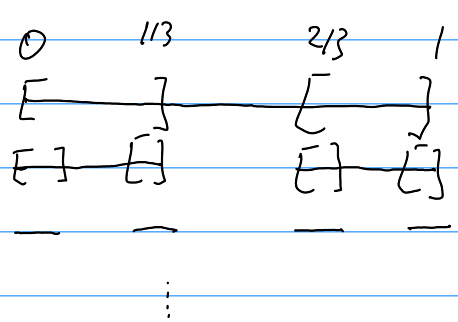
Federer – Geometric measure theory (Abschnitt 2.10 z.B.)

Mattila – Geometry of sets and measures in euclidean spaces (Abschn. 4.3)

Wolff – Lectures in harmonic analysis (Kap. 8)

Allgemeine Cantormenge in $[0,1]$
$\gamma \in (0, \frac{1}{2}) \to$ mittleres Intervall d. Länge $1-2\gamma$ rausschneiden → übrig bleiben zwei Intervalle d. Länge γ → iterieren gibt nach k-ter Iteration 2^k Intervalle der Länge γ^k

→ hier: Spezialfall 3er-Cantormenge C_3



$A_0 = [0,1]$

$A_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$

$A_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, \frac{7}{9}] \cup [8/9, 1]$

$\vdots$

$$A_k = [0, 3^{-k}] \cup [2\cdot 3^{-k}, 3^{1-k}] \cup \ldots \cup [1-3^{-k}, 1]$$

__Definition 3.1.25__ Die 3er-Cantormenge ist die „Grenzmenge" dieser Iteration, sprich

$$C_3 := \lim_{k\to\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k .$$

__Beobachtung__ Jedes Element in C_3 kann im 3er-Zahlensystem entwickelt werden, wobei jede Stelle entweder 0 oder 2 ist.

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{3^j}$$

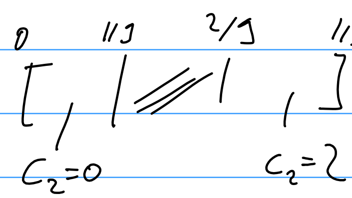
diese Entwicklung ist eindeutig, außer für den Fall, wo $x = a/3^n$ mit $a, n \in \mathbb{N}$, und a nicht durch 3 teilbar. In diesem Fall ist $x = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot 3^{-j}$ mit $c_j \in \{1, 2\}$

$1/3 = {}_3 0{,}1 = {}_3 0{,}0\overline{2}$

Sei $x = 0{,}c_1 c_2 c_3 \ldots$ im 3er-System, d.h. $c_j \in \{0, 1, 2\}$.

Betrachte erste Iteration $A_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$

und nimm an $x \in [0, 1/3) \Rightarrow c_1 = 0$



„Die Cantormenge ist sehr dünn".

heuristisch: wie viel haben wir ausgeschnitten?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ausschnitt eines Intervalls in } k\text{-ter Iteration}}}{3^{-k}} \cdot 2^{k-1} = 1 \quad !$$

Wir haben aus $[0,1]$ etwas ausgeschnitten, was Lebesgue-maß 1 hat $\Rightarrow$ C_3 hat keine Intervalle.

C_3 besteht allerdings nicht nur aus Randpunkten, die beim Drittel-Entfernen übrig bleiben.

$\hookrightarrow$ z.B. ist $1/4 \in C_3$ (denn $\frac{1}{4} = 0,\overline{02}$ im 3er-System)

(wie schauen Randpkte im 3er-System aus?)

Eigenschaften von C_3

HA

a) Kardinalität von $C_3 = \infty$.

b) C_3 beinhaltet keine Intervalle ✓

c) C_3 kompakt ✓

d) C_3 ist perfekt, d.h. C_3 ist abgeschlossen und alle Elemente von C_3 sind Häufungspkte.

($\Leftrightarrow$ Lücken sind dicht)

e) C_3 nirgends dicht, d.h. das innere von $\overline{C_3} = C_3$ ist leer bzw. $C_3 \cap U$ ist nicht dicht in U für alle offenen Teilmengen $U \subseteq [0,1]$.

Jetzt quantifizieren wir diese Aussagen und zeigen, dass es ein $\alpha \in (0,1)$ gibt, sodass $H_\alpha(C_3) \in (0,\infty)$; $\alpha = \log 2 / \log 3$
(allgemein $\log 2 / \log(1/\gamma)$)

→ zwei Beweise → einer in Notizen
→ hier mit weiterer Eigenschaft von C_3, nämlich mit Selbstähnlichkeit.

Viele aber nicht alle klassischen fraktalen Mengen (z.B. Mandelbrot, Julia, ...) sind "selbstähnlich".

$\Psi: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $x \mapsto \Psi(x)$ heißt Kontraktion mit Verhältnis $0 < c < 1$, falls $|\Psi(x) - \Psi(y)| \leq c|x-y|$

Eine Kontraktion heißt <u>Ähnlichkeitstransf.</u> / <u>Similitude</u>, falls

$$\Psi(x) = c \cdot \underline{A} x + t, \quad c \in (0,1), \ \underline{A} \in O(d), \ t \in \mathbb{R}^d$$

Eine Teilmenge $E \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt <u>invariant</u> unter einer Menge $\{\Psi_j\}_{j=1}^m$ von Kontraktionen, falls $E = \bigcup_{j=1}^m \Psi_j(E)$.

Falls die $\{\Psi_j\}$ Similituden sind und es $\alpha > 0$ gibt mit $H_\alpha(E) > 0$, aber $H_\alpha(\Psi_j(E) \cap \Psi_k(E)) = 0$, dann heißt E selbstähnlich

↳ sichert, dass "selbstähnliche Eigenschaften" nicht zerstört werden

Bsp (Cantor): $\Psi_1(x) = x/3$, $\Psi_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$

Falconer Thm 8.3 <u>Thm 3.1.26</u> Seien $\{\Psi_j\}_{j=1}^m$ Kontraktionen ⇒ es gibt ein eindeutiges Kompaktum $E \subseteq \mathbb{R}^d$, sodass

$$E = \bigcup_{j=1}^m \Psi_j(E) \equiv \Psi(E).$$ Weiter gilt für

jedes Kompaktum $F \subseteq \mathbb{R}^d$ die Konvergenz
$\lim_{h\to\infty} \Psi^h(F) = E$ in Hausdorff-Metrik

(Falconer Thm 8.6) Thm 3.1.27 Angenommen $\{\psi_j\}_{j=1}^n$ sind Similituden mit Verhältnissen $r_j < 1$. Dann gilt für das Kompaktum $E = \Psi(E)$ aus Thm 3.1.26, dass
$0 < H_\alpha(E) < \infty$ mit α bestimmt durch
$$\sum_{j=1}^m r_j^\alpha = 1$$

→ Cantor $\psi_1 = \frac{x}{3}$, $\psi_2 = \frac{x+2}{3}$, d.h. $r_1 = r_2 = 1/3$,
d.h. $(1/3)^\alpha \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$
$\Rightarrow \dim_H(C_3) = \frac{\log 2}{\log 3}$

Analog: $\dim_H(C_\gamma) = \frac{\log 2}{\log 1/\gamma}$ (C_γ Cantormenge mit $\gamma \in (0,1/2)$)
→ "Cantormenge hat fraktale Dimension"

Hinreichendes Kriterium für Selbstähnlichkeit

Def Die Kontraktionen $\{\psi_j\}_{j=1}^m$ erfüllen die offene Mengen Bedingung, falls es $V \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt gibt mit $\Psi(V) \equiv \bigcup \psi_j(V) \subset V$, wobei die Vereinigung disjunkt ist

Aus Thm 3.1.27 erhält man folgende Bedingung für Selbstähnlichkeit

Kor 3.1.28 (Cor 8.7 in Falconer) Falls die Kontraktionen $\{\Psi_j\}_{j=1}^{m}$ die offene Mengen-Bedingung erfüllen, dann gilt für das Kompaktum $E \subseteq \mathbb{R}^d$ aus Thm 3.1.26,

$$H_\alpha(\Psi_j(E) \cap \Psi_k(E)) = 0$$ sprich E ist per Definition selbstähnlich.

27.1.21

Oben haben wir gesehen, dass die 3er-Cantormenge C_3 "dünn" ist, in dem Sinne, dass $H_\alpha(C_3) \in (0, \infty)$ genau dann, wenn $\alpha = \log 2 / \log 3$.

→ Es gibt allerdings auch (treten wesentlich häufiger auf, sh. Konstruktion unten) **fette Cantormengen**, wie z.B. das Spektrum des Beinahe-Mathieu-Operators

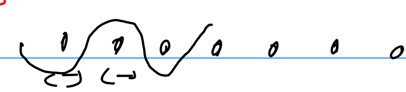
$$\longrightarrow (H_\omega^{\lambda,\alpha} u)(n) = \underbrace{u(n+1) + u(n-1)}_{\text{Gitter-Laplace}} + 2\underbrace{\lambda}^{\lambda>0} \cos(2\pi(\omega + n\alpha))\, u(n)$$

in $\ell^2(\mathbb{Z})$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $u \in \ell^2$ $n \in \mathbb{Z}$

wobei $\alpha, \omega \in \mathbb{T}^1$ (Torus) und $\lambda > 0$

→ falls $\alpha \in \mathbb{Q}$, dann ist $H_\omega^{\lambda,\alpha}$ periodisch ⇒ rein ac Spektrum

→ Falls $\alpha \notin \mathbb{Q}$, dann ist $\sigma(H_\omega^{\lambda,\alpha})$ für fast alle ω dasselbe (Ergodizität) und zwar Cantor



→ $0 < \lambda < 1$ ⇒ Spektrum rein ac (Avila 2008)

→ $\lambda = 1$ ⇒ Spektrum rein sc (Jitomirskaya (preprint) und Gordon-Jitomirskaya.

$\rightarrow$ $d>1 \Rightarrow$ Spektrum rein pp, fast sicher (für fast-alle $\omega \in \mathbb{T}$) — Last-Simon 1997 (Avron-Simon 1982, Jitomirskaya-Simon 1994, Jitomirskaya 1999)

Leb.-Maß des Spektrums: $\mathrm{Leb}(\sigma(H_\omega^{d,\alpha})) = |4-4d|$, $d>0$
(Last '93, '94,
Jitomirskaya-Krasovsky 2019 (preprint)
($\dim_H(\sigma(H_\omega^{d=1,\alpha})) \leq 1/2$ für kritischen Op.)
Für $d=1$ ist das Spektrum bekannt als
Hofstadter butterfly

(Bem: Existenz von Cantor-Spektrum schwieriger zu zeigen, je größer d!!)

Mehr zu allgemeinen quasiperiodischen Operatoren im Übersichtsartikel von Damanik-Fillman (2020, IAMP bulletin) und Referenzen darin.

Wie erhält man fette Cantormengen? Wir schneiden in jeder Iteration etwas weniger als das mittlere Drittel aus...
$\rightarrow$ man erhält Mengen, die homeomorph zur Cantormenge sind, positives Lebesgue-Maß haben und nirgends dicht sind.

Bsp Schneide in k-ter Iteration Intervalle der Länge r^k mit $r \leq 1/3$ aus
$\Rightarrow$ nach ∞ vielen Iterationen haben wir Intervalle der Gesamtlänge $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} r^k = \frac{r}{1-2r}$ ausgeschnitten, d.h.

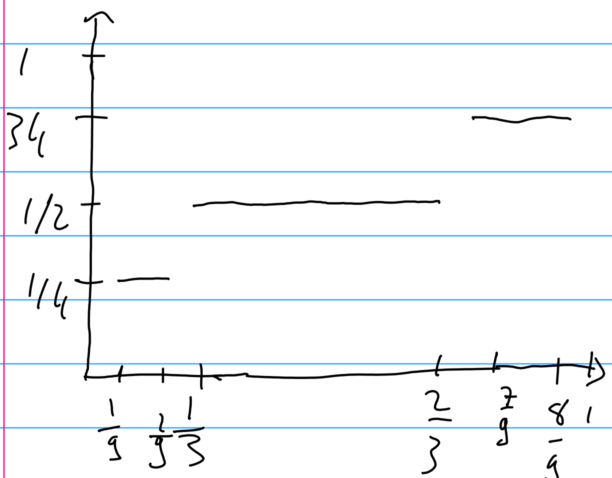
die resultierende Cantormenge hat Lebesguemaß $\frac{1-3r}{1-2r}$
$\Rightarrow$ $r=1/3$ ist gerade Grenzfall für verschwindendes Leb.-maß.
($r=1/4$ "Smith-Volterra-Cantor-Menge" (1875-1881) (C_3 erst 1883))

F monoton nicht-fallend

$\hookrightarrow m_F = m_{ac} + m_s$

$\qquad\qquad\qquad m_s = m_{pp} + m_{sc}$

27.1.2021



$$\cancel{F_c(x) = \int_0^x g(y)\,dy}$$

$\uparrow L^1$

$$C_3 = \bigcap A_n$$

$$A_1 = [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1]$$

$$A_2 = [0, \tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9}, 1]$$

$$[0,1] \ni x = \sum_{n \geq 1} \frac{a_{nx}}{3^n} \qquad a_{nx} \in \{0, 1, 2\}$$

$$x \in C_3 \iff a_{nx} \in \{0, 2\}$$

Definition 3.1.29 (Cantorfunktion)

$$x \in C_3: \quad F_C(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{nx}}{2^n} \qquad \text{(Zweierzerlegung)}$$

$$x \in [0,1] \setminus C_3 \quad F_C(x) := \frac{1}{2^{N_x}} + \sum_{n=1}^{N_x - 1} \frac{a_{nx}}{2^n}$$

und $F(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 1 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

$$[0,1] \setminus C_3 \ni x = {}_3\, 0, \underbrace{a_1 \ldots a_{N_x - 1}}_{\in \{0,2\}}\, 1\, a_{N_x + 1} \ldots$$

Beobachtungen 3.1.30

Darstellung im 3er-System

$\longrightarrow$ • $F_C(x)$ ist nicht-fallend

$\longrightarrow$ • $({}_3 0, a_1 \dots a_n 0 \bar{2} ; {}_3 0, a_1 \dots a_n 2) \subseteq [0,1] \setminus C_3$

$\Rightarrow$ $F(x)$ ist auf solchen Intervallen konstant

insb. $F(x)$ auf $[0,1] \setminus C_3$ konstant,

${}_3 0, a_1 \dots a_n | a_{n+2} \dots$ d.h. $F'(x) = 0$ für Leb.-fast alle x.

$\neq 2$

$\to 2$

$\longrightarrow$ • $F_C(x)$ ist stetig. Falls $x \to y$, dann konvergieren Entwicklungen in jedem Zahlensystem, d.h.

$$x = 0, a_{1x} a_{2x} \dots \qquad y = 0, a_{1y} a_{2y} \dots$$

$$\min\{n : |a_{nx} - a_{ny}| \neq 0\} \to \infty \quad \text{f. } x \to y$$

$\Rightarrow$ d.h. F_C ist per Definition stetig

(tatsächlich Hölderstetig,

$$|F_C(x) - F_C(y)| \lesssim |x-y|^{\log 2/\log 3}$$

$$\left(\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0-h)}{2h} = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \setminus C_3 \\ \infty & x \in C_3 \setminus \{1,0\} \end{cases} \right)$$

$F(x)$ lässt sich nicht als $\int_0^x g(y)\,dy$, $g \in L^1(dx)$ schreiben

Def 3.1.31 Eine nicht-fallende Fkt $F : I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$) heißt singulär-(stetig), falls F stetig ist und $F' = 0$ Lebesgue-fast überall.

In dem Fall bezeichnet man das zugehörige Stieltjesmaß m_F auch als singulär-stetig.

(d.h. $m_F(\{\lambda\})=0 \ \forall \{\lambda\}\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und m_F ist auf einer Lebesgue-Nullmenge getragen)

<u>Bemerkung</u> $\mu = \mu_{ac} + \mu_s$

$\mu_{ac} \ll Leb \qquad \mu_s \perp Leb.$

→ Lebesgue-Zerlegung hätte auch bzgl. jedes anderen Hausdorffmaßes H_α $\alpha\in[0,1)$ durchgeführt werden.

↳ Rogers - Taylor

Y. Last → QM

3.2 Boreltransformation

Wie charakterisieren wir $\mu_{ac}, \mu_{pp}, \mu_{sc}$?

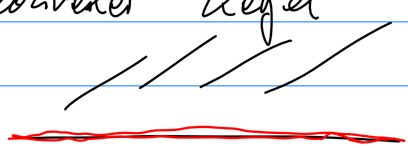
<u>Definition 3.2.1</u> Sei μ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}$ mit $\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{1+|\lambda|} < \infty$.

Boreltransformation: $F_\mu(z) := \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z}$ für $z\in\mathbb{C}\setminus\sigma(\mu)$

Im Folgenden nehmen wir immer $\mu\geq 0$ und $\operatorname{supp}\mu \subseteq [a,\infty)$ mit $a>-\infty$ an.

<u>Def 3.2.2</u> Eine holomorphe Fkt $F:\mathbb{C}_+\to\overline{\mathbb{C}_+}$, die die obere Halbebene in sich selbst abbildet, heißt (Herglotz-Nevanlinna)-Pick-Fkt.;

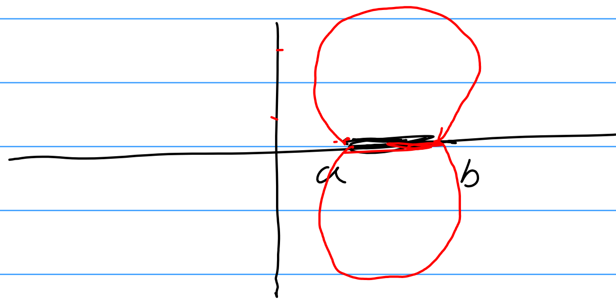
Offenbar sind Summen und Kompositionen von Pick-Fkten wieder Pick. Weiter ist die Klasse aller Pick-Fkten ein konvexer Kegel



Durch Reflexion an $\mathbb{R}$ erhält man eine analytische Fortsetzung von F in der unteren Halbebene

$F(\bar z) = \overline{F(z)}$

Def 3.2.3 Für $a<b$, $a,b \in \mathbb{R}$ bezeichnet $P(a,b)$ die Klasse aller Pick-Fkt.en, die eine analytische Fortsetzung in $\mathbb{C}_-$ haben, die durch Reflexion an (a,b) gegeben ist

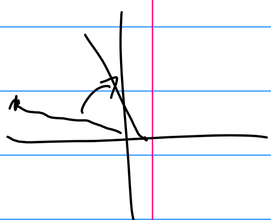


$$F(\bar z) = \overline{F(z)}$$

Bsp 3.2.3

- $az+b$ $\quad \operatorname{Im}(a),\ b \geq 0$
- $(b-z)^{-1}$ falls $\operatorname{Im} b \leq 0$

$\Big\}$ $F(\bar z) = \overline{F(z)}$ nur, wenn $a,b\in\mathbb{R}$



- $\log z$ (mit standard Hauptzweig)
- z^{σ} für $\sigma \in (0,1]$
- $\tan z$
- $F \in P \Rightarrow -1/F \in P$

Bem 3.2.4 (1) $F \in P(a,b) \Rightarrow F(x) \in \mathbb{R}$ falls $x \in (a,b)$

(2) Angenommen $f(z) = \underset{\operatorname{Re} f}{u(z)} + i \underbrace{v(z)}_{\operatorname{Im} f}$ ist Pick.

Da $v(x)=0$ für $x\in\mathbb{R}$ folgt wg Pick-Bed, dann $\partial_y v(x+iy) \geq 0 \Rightarrow$ wg Cauchy-Riemann ist $\partial_x u(x) \geq 0$, d.h. $f(x)$ ist monoton nicht-fallend auf (a,b)

(3) Diese Bem lässt sich dramatisch erweitern

Seien $A, \underset{\text{bdd}}{B}$ s.a. $\quad A \geq B \Leftrightarrow A-B \geq 0$
$\Leftrightarrow (\varphi, \underbrace{(A-B)}_{\text{s.a.}}\varphi) \geq 0 \quad \forall \varphi\in\mathfrak{H}$

$$f(A) = \int \lambda \, dE_A(\lambda) \quad ; \quad f(A) = U^* f(D) U$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= U^* \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} U$$

x^2 ist nicht "operator monoton"

(Finde A, B so, dass $A - B \geq 0$, aber $A^2 - B^2 \not\geq 0$)

$\to A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$

$\lambda_\pm = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2}$)

$f : I \to \mathbb{R}$ heißt operatormonoton $:\Leftrightarrow A \geq B \Rightarrow f(A) \geq f(B)$ $\forall A, B$ mit $\mathrm{spek}(A) \subseteq I$, $\mathrm{spek}(B) \subseteq I$

$f : I \to \mathbb{R}$ heißt operatorkonvex $\Leftrightarrow f(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B)$, $\lambda \in [0,1]$

<u>Satz (Loewner)</u> $f : I \to \mathbb{R}$ operatormonoton

$$\Updownarrow$$

$$f \in P(I)$$

<u>Thm 3.2.5</u> Sei $\mu \geq 0$ ein endliches Borelmaß

$\Rightarrow F_\mu \in P(\mathrm{supp}(\mu))$ mit

$$|F(z)| \leq \frac{\mu(\mathbb{R})}{\mathrm{Im}(z)}, \quad z \in \mathbb{C}_+$$

Insb. ist $F(z)$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \mathrm{supp}\,\mu$.

(Simon – Trace ideals Kap 4

Jaksic – Topics in spectral theory

((Katznelson, Koosis)) $\to$ verdaulicher: Simon – Harmonic analysis Kap 5)

28.1.21

Beweis $\operatorname{Im} F(z) = \operatorname{Im}(z) \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda - z|^2} > 0, \quad \operatorname{Im} z > 0$

$\Rightarrow F : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+ \qquad F(\bar{z}) = \overline{F(z)}$

$(*) \quad |F(z)| \leq \int \frac{d\mu}{|\lambda - z|} \leq \min\left(\frac{\mu(\mathbb{R})}{\operatorname{dist}(z, \sigma(\mu))}, \frac{\mu(\mathbb{R})}{|\operatorname{Im}(z)|} \right)$

$|\lambda - z| > \operatorname{dist}(z, \sigma(\mu))$

$|\lambda - z| = |\lambda - \operatorname{Re}(z) - i \operatorname{Im}(z)|$

$\geq |\operatorname{Im}(z)|$

Holomorphie? $F(z)$ ist wg $(*)$ stetig $\to$ Morera anwendbar

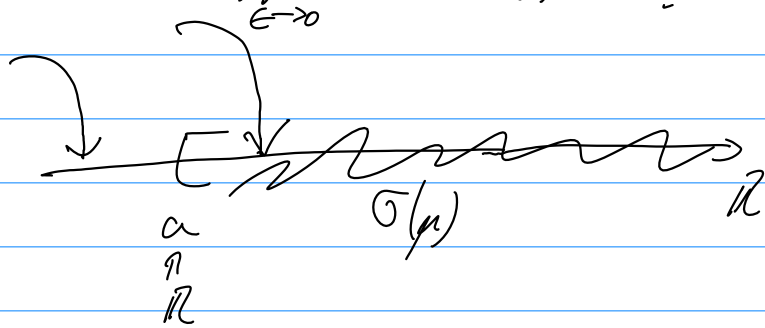
$$0 \overset{?}{=} \oint_{\Gamma} F(z)\,dz = \oint_{\Gamma} dz \int_{\sigma(\mu)} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z}$$

mit $\Gamma \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma(\mu)$

$$= \int d\mu(\lambda) \oint_{\Gamma} \frac{dz}{\lambda - z} = 0$$

zeigt Holomorphie von $F \Rightarrow F \in P(\sigma(\mu))$ (Pick) $\blacksquare$

$\lim_{\epsilon \to 0} F(E + i\epsilon) = ?$



Thm 3.2.6 (Verhalten von $F(E+i0)$ abseits von $\sigma(\mu)$)

Sei $\mu \geq 0$ Borelmaß mit $\int \frac{d\mu(\lambda)}{1+|\lambda|} < \infty$ mit $\operatorname{supp}\mu \subseteq [a, \infty)$, $a \in \mathbb{R}$.

a) $F(z)$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus [a, \infty)$

b) $F(z)$ ist auf $(-\infty, a)$ positiv und $\operatorname{Im} F(z) > 0$ falls $\operatorname{Im} z > 0$

c) $\lim\limits_{\gamma \to \infty} F(-\gamma) = 0$

d) $\lim\limits_{\gamma \to \infty} \gamma F(-\gamma) = \mu(\mathbb{R}) = \lim\limits_{\gamma \to \infty} \gamma^2 F'(-\gamma)$

e) $\lim\limits_{\gamma \to \infty} \frac{F'(-\gamma)}{F^2(-\gamma)} = \frac{1}{\mu(\mathbb{R})}$ ($\mu(\mathbb{R}) = \infty$ erlaubt)

Bew a) ✓ b) ✓ $\int \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda + \gamma} > 0$, $\gamma > 0$

c) Monotone Konv ✓

d) $\mu(\mathbb{R}) < \infty \Rightarrow$ folgt wieder aus monotoner Konvergenz

$$\gamma^2 F'(-\gamma) = \gamma^2 \int \frac{d\mu(\lambda)}{(\lambda+\gamma)^2}$$

$$\mu(\mathbb{R}) = \infty \qquad \frac{1}{\gamma F(-\gamma)} \xrightarrow[\gamma \to \infty]{} 0$$

e) $$\lim_{\gamma \to \infty} \frac{F'(\gamma)}{F(-\gamma)^2} = \lim_{\gamma \to \infty} \frac{\gamma^2 F'(-\gamma)}{\gamma^2 F(-\gamma)^2}$$

$$= \frac{\mu(\mathbb{R})}{\mu(\mathbb{R})^2} = \frac{1}{\mu(\mathbb{R})}, \quad \mu(\mathbb{R}) < \infty$$

$\mu(\mathbb{R}) = \infty$: $\frac{F'}{F^2} = -\left(\frac{1}{F}\right)'$

12

$$\left(\frac{1}{F}\right)'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-w|=|z|/2} \frac{w}{(w-z)^2} \frac{1}{w\cdot F(w)}\, dw$$

$\longrightarrow 0$ mit $\frac{1}{|wF(w)|} \xrightarrow{|z|\to\infty} 0$

$\square$

$$G(x) := \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{(\lambda-x)^2}$$

(tritt bei Aronszajn-Donoghue Theorie und Simon-Wolff Kriterien für Lokalisierung von Punktspektrum von

$\underset{\text{s.a.}}{A} + |\underset{y}{\varphi}\rangle\langle\varphi|$.

Thm 3.2.7 Sei μ ein Borelmaß mit $\int \frac{d\mu(\lambda)}{1+|\lambda|} < \infty$

(1) $G(x) < \infty \Rightarrow \int \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda-x|} \leq G(x) + (|x|+2)\int \frac{d\mu(\lambda)}{1+|\lambda|}$

(2) $\{x\in\mathbb{R} : G(x) = \infty\}$ ist eine dichte G_δ-Menge in $\operatorname{supp}\mu$

Abzählbarer Schnitt offener Mengen.

$G_m(x) = \int \frac{d\mu}{(x-\lambda)^2 + m^{-2}}$

(3) Falls $\int \frac{d\mu}{|\lambda-x|} < \infty$, dann existiert der Grenzwert

$\lim_{\epsilon\to 0} F(x+i\epsilon)$ und ist reell.

(4) $\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \operatorname{Im}(F(x+i\epsilon)) = G(x)$

(5) Falls $G(x) < \infty$, dann

$G(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{i\epsilon}\left(F(x+i\epsilon) - \underset{\text{existiert wg (3)}}{F(x+i0)}\right)$

Bew (2) → HA

(1) $\displaystyle\int \frac{d\mu(\lambda)}{|x-\lambda|} \left(\mathbb{1}_{|x-\lambda|<1} + \mathbb{1}_{|x-\lambda|>1} \right)$

$\downarrow$

$\displaystyle\frac{1}{|x-\lambda|} \leq \frac{1}{|x-\lambda|^2}$

$\checkmark$ (wg $G(x)<\infty$)

$$\frac{1}{|x-\lambda|} \lesssim_{|x|} \frac{1}{1+|\lambda|}$$

$|x-\lambda| \geq 1$

$$1+|\lambda| \leq |x-\lambda| + |\lambda - x| + |x| \cdot 1$$
$$\leq 2|x-\lambda| + |x| \cdot |x-\lambda| = |x-\lambda|(2+|x|)$$

→ falls $|x-\lambda|>1$ ist $\displaystyle\frac{1}{|x-\lambda|} \leq \frac{2+|x|}{1+|\lambda|}$

$$\int_{|x-\lambda|>1} \frac{d\mu(\lambda)}{|x-\lambda|} \leq (2+|x|) \int \frac{d\mu(\lambda)}{1+|\lambda|} < \infty$$

(3) Falls $\displaystyle\int \frac{d\mu(\lambda)}{|x-\lambda|} < \infty \rightarrow \lim F(x+i\epsilon) \in \mathbb{R}$ ex.

$$\operatorname{Im} F(x+i\epsilon) = \epsilon \int \frac{d\mu(\lambda)}{\epsilon^2+(x-\lambda)^2}$$

$\underline{\displaystyle\int \frac{d\mu}{|x-\lambda|} < \infty}$

$$= \underbrace{\epsilon \int_{|x-\lambda|\geq\delta} \frac{d\mu(\lambda)}{\epsilon^2+(x-\lambda)^2}}_{\xrightarrow{\epsilon\to 0}\, 0} + \underbrace{\epsilon \int_{|x-\lambda|<\delta} \frac{d\mu(\lambda)}{\epsilon^2+(x-\lambda)^2}}_{\xrightarrow{\delta\to 0}\, 0}$$

$$\operatorname{Re} F(x+i\epsilon) = \int \frac{x-\lambda}{\epsilon^2+(x-\lambda)^2}\, d\mu(\lambda) \xrightarrow[\text{majorisiert}]{\epsilon\to 0} \int \frac{d\mu}{|x-\lambda|} < \infty.$$

(4) $\frac{1}{\epsilon} \operatorname{Im} F(x+i\epsilon) = \int \frac{d\mu(\lambda)}{\epsilon^2 + (x-\lambda)^2} \xrightarrow{\epsilon \to 0} G(x)$ monoton

(5) $G(x) < \infty$ $\quad G(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \left(F(x+i\epsilon) - F(x+i0)\right) \cdot \frac{1}{i\epsilon}$

$$= \frac{1}{i\epsilon} \int d\mu(\lambda) \left(\frac{1}{\lambda - x - i\epsilon} - \frac{1}{\lambda - x} \right)$$

$$= \int \frac{d\mu(\lambda)}{(\lambda - x)(\lambda - x - i\epsilon)} \xrightarrow{\epsilon \to 0} G(x)$$

majorisiert

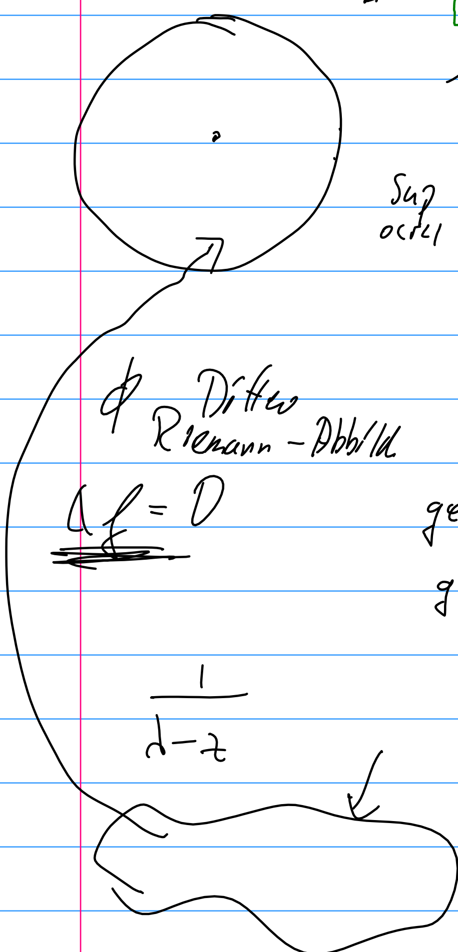
$|\lambda - x - i\epsilon| > |\lambda - x|$ $\quad \boxtimes$

$f(z) = \oint_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw$

$\updownarrow$

$\mathbb{D}$

f holomorph



$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \log_+ |f(re^{it})|\, dt < \infty \qquad dt = dt/2\pi$$

$$f(re^{it}) \xrightarrow{r \to 1} f^*(e^{it})$$

$\underline{\underline{\Delta f = 0}}$

gegeben stetige Fkt g auf $\partial\mathbb{D}$ $\to$ $\underline{\underline{(P_\epsilon + iQ_\epsilon)}}\, g$

gibt holomorphe f Fkt. in $\mathbb{D}$

$\frac{1}{\lambda - z}$

$\mathbb{D} \to \mathbb{C}_+$

$\frac{\epsilon}{(\lambda - x)^2 + \epsilon^2}$; $\frac{\lambda - x}{\epsilon^2 + (\lambda - x)^2}$

Thm 3.28 Angenommen μ ist ein Borelmaß mit $\int d\mu(\lambda)\, (1+|\lambda|)^{-1} < \infty$

sh. Kor 3.2.15

$\to$ $\lim_{\epsilon \to 0} F(x+i\epsilon)$ existiert Lebesgue-fast-überall und ist endlich

Eine <u>Beweisidee</u> $F(x+i\epsilon) = \mathrm{Re} + i\,\mathrm{Im}\; F(x+i\epsilon)$

$$= \underbrace{\int \frac{x-\lambda}{(x-\lambda)^2+\epsilon^2}\, d\mu(\lambda)}_{\text{konj. Poisson}} + i \underbrace{\int \frac{\epsilon}{(x-\lambda)^2+\epsilon^2}\, d\mu(\lambda)}_{\text{Poisson}}$$

<u>Im Geiste:</u> $\mathrm{Im}\, F(x+i\epsilon)$ harmlos, da Poisson kern eine Approximation der Eins

$(P_\epsilon * f)(x) \to f(x)$ pkt. weise f.ü.

falls $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $p \in [1,\infty)$

$\mathrm{Re}\, F(x+i\epsilon) \xrightarrow{\epsilon\to 0} H\mu$

└ Hilberttransformation!

<u>$d=1$</u> $(Hf)(x) = \text{p.v.} \underbrace{\int_{|x-y|>\epsilon} \frac{f(y)}{x-y}\, dy}_{\equiv H_\epsilon f}$ $f \in \mathcal{S}$:

- $\|Hf\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{L^p}$ $1<p<\infty$
- $\|Hf\|_{L^{1,\infty}} \lesssim \|f\|_1$

($(x-y)^{-1}$ kritisch in $d=1$

$|\nabla (x-y)^{-1}| \lesssim |x-y|^{-2}$

Regularität

bzw. $\sup_{x,z} \int_{|x-y|>2|x-z|} |K(x-y) - K(y-z)|\, dy \lesssim 1$; cancellation $\int_{|x|<1} \frac{dx}{x} = 0$

$\sup_{\epsilon>0} |(H_\epsilon f)(x)| \equiv (H^* f)(x)$; $H^* : L^p \to L^p$, $L^1 \to L^{1,\infty}$ bdd.

FAP II / Prinzip d. glm. Beschränktheit impliziert $H_\epsilon f(x) \to Hf(x)$ konv. pktweise f.ü.

<u>Bew</u> Später → Korollar 3.2.15

Thm 3.2.9 Ang. μ ist ein Borelmaß mit $\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu}{1+|\lambda|} < \infty$, dann gelten

(1) $\lim_{\epsilon \to 0} \int \operatorname{Im} F(E+i\epsilon) f(E) = \pi \int f(x)\, d\mu(x)$, $f \in C_c(\mathbb{R})$

$\mu_{sing} + \mu_{ac} = \mu$
$\mu_{sing} \perp \text{Leb}$

(2) (Vallée-Poussin) μ_{sing} ist auf

$\{E \in \mathbb{R} : \lim_{\epsilon \to 0} \operatorname{Im} F(E+i\epsilon) = \infty\}$ getragen

(3) $\mu(\{E_0\}) = \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \cdot \operatorname{Im}(F(E+i\epsilon))$ $= -i \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon F(E+i\epsilon)$, da Realteil verschwindet

(Insb. ist μ_{ac} auf $\{x \in \mathbb{R} : 0 < \operatorname{Im} F(x+i0) < \infty\}$ getragen.)

(4) $d\mu_{ac}(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} F(x+i\epsilon)\, dx$

im Sinne, dass $\lim_{\epsilon \to 0} \pi^{-1} \operatorname{Im} F(x+i\epsilon) = h(x)$ f.ü., wenn $d\mu_{ac}(x) = h(x)dx$

Bew (2) später (im Atemzug mit Thm 3.2.7)
↳ Korollar 3.2.11

(1) $\frac{1}{\pi} \int \operatorname{Im} F(E+i\epsilon) f(E)\, dE$

$$= \underbrace{\frac{1}{\pi} \int dE\, f(E) \int d\mu(\lambda)}\ \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + (\lambda - E)^2}$$

$$= \int d\mu(\lambda)\, (P_\epsilon * f)(\lambda) \longrightarrow \int d\mu(\lambda)\, f(\lambda),$$

$(P_\epsilon * f)(\lambda) \to f(\lambda)$ glm. auf Kompakta.

(3) $$\epsilon \operatorname{Im} F(E_0 + i\epsilon) = \int \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 + (E_0 - \lambda)^2}\, d\mu(\lambda)$$

$$\longrightarrow \mu(\{E_0\}), \quad \text{da}$$

$$\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 + (E_0 - \lambda)^2} \to \begin{cases} 0 & \lambda \neq E_0 \\ 1 & \lambda = E_0 \end{cases}$$

$$\epsilon \operatorname{Re} F(E_0 + i\epsilon) = \epsilon \int d\mu(\lambda) \frac{\lambda - E_0}{\epsilon^2 + (\lambda - E_0)^2} \left(1\!\!1_{|\lambda - E_0| < 1} + 1\!\!1_{|\lambda - E_0| > 1} \right)$$

erster Summand $\xrightarrow[\text{majorisiert}]{\epsilon \to 0} 0$ $\qquad \frac{\epsilon(\lambda - E_0)}{\epsilon^2 + (\lambda - E_0)^2} \leq 1/2$

zweiter Summand $\lesssim \epsilon \int_{|\lambda - E_0| > 1} d\mu(\lambda) \frac{1}{|\lambda - E_0|} \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0$

(4) $\underset{\parallel}{d\mu_{ac}}(E) \overset{?}{=} \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \operatorname{Im} F(E + i\epsilon)\, dE$

$h(E)\, dE$ für ein $h \in L^1$; Frage: $\lim_{\epsilon \to 0} \operatorname{Im} F(E + i\epsilon) = h(E)$ f.ü. ?

$$\operatorname{Im} F_{ac}(E + i\epsilon) = \epsilon \int \frac{h(\lambda)}{(\lambda - E)^2 + \epsilon^2} d\lambda \xrightarrow{\epsilon \to 0} h(E) \text{ f.ü.}$$

denn $h \in L^1$, d.h. das ist eine Konsequenz aus $P_\epsilon * h \to h$ punktweise f.ü.

$$\int \operatorname{Im} F(E + i0) \underset{0 \leq f \in C^0}{f}(E)\, dE \overset{\text{Fatou, da } F(E+i\epsilon) \to F(E+i0) \text{ f.ü. (Thm 3.2.7)}}{\leq} \lim_{\epsilon \to 0} \int \operatorname{Im} F(E + i\epsilon) f(E)\, dE$$

$$\overset{(1)}{=} \pi \int f(E)\, d\mu(E)$$

d.h. $\operatorname{Im} F(E + i0)\, dE \leq d\mu(E)$ d.h. für fast alle E

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} F(E + i0) \leq \frac{d\mu_{ac}(E)}{dE} = h(E) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} F_{ac}(E + i0) \leq \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} F(E + i0) \text{ f.ü.}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} F(E + i0) = h(E) \text{ f.ü.}$$

$\boxtimes$

4.2.2021

"klassische Maximalfkt" $(Mf)(x) = \sup_{R>0} \frac{1}{|B_x(R)|} \int_{B_x(R)} |f| \, dy$

$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$

Impliziert Lebesgue: $\lim_{R \to 0} \frac{1}{B_x(R)} \int_{B_x(R)} f = f(x)$ Lebesgue-f.ü.

Beweis v. Lebesgue folgt aus $|\{x \in \mathbb{R}^d : (Mf)(x) > \alpha\}| \lesssim_d \frac{\|f\|_{L^1}}{\alpha}$

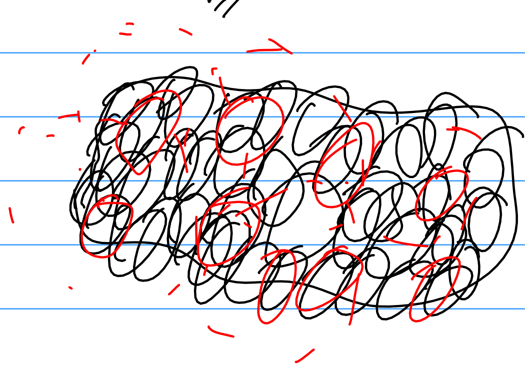
$\Leftrightarrow: \|Mf\|_{L^{1,\infty}} \lesssim \|f\|_{L^1}$

Jetzt: Maße statt Funktionen
Seien $\mu \geq 0$ Borelmaß, ν komplexes Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

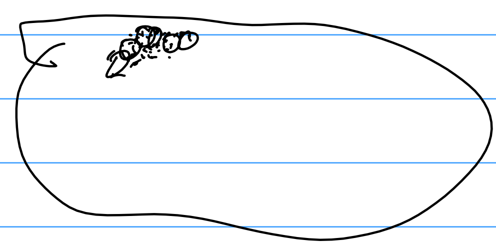
$$M_{\nu,\mu}(x) := \sup_{R>0} \frac{|\nu|(I(x,R))}{\mu(I(x,R))} \qquad I(x,R) = (x-R, x+R)$$

Mit Besicovitchs Überdeckungslemma erhält man analog

$$\mu\{x \in \mathbb{R} : M_{\nu,\mu}(x) > \alpha\} \lesssim \alpha^{-1} |\nu|(\mathbb{R})$$



Vitali (Wiener = Baby-Vitali)



Aus weak-type-Abschätzung folgt: wenn ν_j eine Folge komplexer Maße mit $|\nu_j|(\mathbb{R}) \to 0$, dann gilt

$$M_{\nu_j,\mu}(x) \xrightarrow{j \to \infty} 0 \text{ für } \mu\text{-f.a. } x \in \mathbb{R} \text{ bis auf}$$

Teilfolgen

Thm 3.2.10 (Klassisches Vallée-Poussin)

Sei $\mu \geq 0$ Borelmaß, $d\nu = \underset{L^1(\mathbb{R},\mu)}{\underline{\underline{f}}}\, d\mu + d\nu_s$ komplexes Borelmaß. Dann:

(1) $\dfrac{\nu(I(x,R))}{\mu(I(x,R))} \xrightarrow{R\to 0} f(x)$ für μ-f.a. x

Insbesondere folgt: $\nu \perp \mu \iff \dfrac{\nu(I(x,R))}{\mu(I(x,R))} \xrightarrow{R\to 0} 0$ μ-f.ü.

(2) Falls $\nu \geq 0$, dann $\dfrac{\nu(I(x,R))}{\mu(I(x,R))} \longrightarrow \infty$ für ν_s-f.a. x

Pf (1) a) Angenommen $\nu \ll \mu$, d.h. $\nu = f\mu$ mit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mu)$

$$\left| \frac{(f\mu)(I(x,R))}{\mu(I(x,R))} - f(x) \right| \leq \underbrace{\frac{|h_n|\mu(I(x,R))}{\mu(I(x,R))}}_{\leq M_{|h_n|\mu,\mu}(x)}$$

$f = \lim_{n\to\infty} g_n$, $g_n \in C_c(\mathbb{R})$ (Im L^1-Sinne)

$h_n = f - g_n$

$\xrightarrow{n\to\infty} 0$ für μ-f.a. x (bis auf Teilfolgen)

$$+ \underbrace{\left| \frac{(g_n\mu)(I(x,R))}{\mu(I(x,R))} - g_n(x) \right|}$$

$\xrightarrow{R\to\infty} 0$, da g stetig

$$+ \underbrace{|g_n(x) - f(x)|}$$

$\longrightarrow 0$ für μ-a.e. x bis auf TF.

b) Ang $\nu \perp \mu$; wir zeigen

$$\frac{\nu(I(x,R))}{\mu(I(x,R))} \xrightarrow{R\to 0} 0 \quad \text{für } \mu\text{-a.e. } x$$

$$\Uparrow$$

$$\frac{|\nu|(I(x,R))}{(\mu+|\nu|)(I(x,R))} \to 0 \quad \text{für } \mu\text{-a.e. } x$$

Sei $S \subseteq \mathbb{R}$ mit $\mu(S)=0$ und $\nu(\mathbb{R}\setminus S)=0$

$$\|$$

$$\frac{\mathbb{1}_S |\nu| (I(x,R))}{(\mu+|\nu|)(I(x,R))} = \frac{\mathbb{1}_S (|\nu|+\mu)(I(x,R))}{(|\nu|+\mu)(I(x,R))}$$

$$\xrightarrow[\text{Lebesgue-Differentiation}]{R\to 0} \mathbb{1}_S(x)$$

Da $\mathbb{1}_S(x)=0$ für μ-a.e. x, folgt Beh..

(2) Da $\nu \geq 0$, ist $\nu \geq \nu_s$, d.h. wlog $\mu \perp \nu$

$$\frac{\nu(I(x,R))}{\mu(I(x,R))+\nu(I(x,R))} \xrightarrow{\text{mit selben Argumenten wie eben}} 1 \quad \text{für } \nu\text{-a.e. } x.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mu(I(x,R))}{\nu(I(x,R))} \to 0 \quad \text{für } \nu\text{-a.e. } x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\nu(I(x,R))}{\mu(I(x,R))} \to \infty \quad \text{für } \nu\text{-a.e. } x \quad \boxed{}$$

<u>Reformulierung</u> für $\nu \geq 0$: $E = \left\{x\in\mathbb{R} : \frac{\nu(I(x,R))}{\mu(I(x,R))} \to \infty\right\}$

gilt $\mu(E)=0$ und $\nu_s(\mathbb{R}\setminus E)=0$

<u>Kor 3.2.11</u> Sei $0\leq \mu = \mu_{ac} + \mu_s$ mit $\mu_{ac} \ll Leb$, $\mu_s \perp Leb$

Für eine Menge $E \subseteq \mathbb{R}$ mit $\mathrm{Leb}\, E = 0 = \mu_s(\mathbb{R} \setminus E)$ gilt für alle $x \in E$, dass

$$\operatorname{Im} F(x+i0) = \infty.$$

Äquivalent formuliert: μ_s ist auf $\{x : \operatorname{Im} F(x+i0) = \infty\}$ getragen

Bew $\operatorname{Im} F(x+i\epsilon) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + (x-y)^2} \, d\mu(x) \geq \frac{\mu(I(x,\epsilon))}{2\epsilon}$

$\lim_{\epsilon \to 0} \operatorname{Im} F(x+i\epsilon)$ existiert Lebesgue-f.ü. und ist endlich nach Thm 3.2.8

$= \frac{\mu(I(x,\epsilon))}{\mathrm{Leb}(I(x,\epsilon))} \longrightarrow \infty$ für μ_s-a.e. x

wg Thm 3.2.10. $\square$

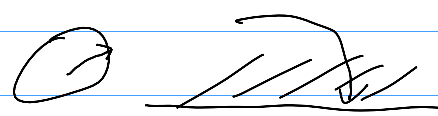
Jetzt noch zum Bew. v. Thm 3.2.8, d.h. $F(x+i0)$ ex. fast überall u. ist endlich.

Pick-Fkt. $\mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$ holomorph!

Idee $F(z) = \frac{R(z)}{G(z)}$ $\quad R, G$ holomorph und beschr! $\mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$

Hardy-räume **Def** $H^\infty(\mathbb{C}_+)$ besteht aus allen holomorphen $f : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$ mit $\sup_{z \in \mathbb{C}_+} |f(z)| \equiv \|f\|_{H^\infty} < \infty$.

Bem $H^\infty(\mathbb{C}_+)$ ist Banach.



Thm 3.2.12 Sei $V \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$, dann existiert

$$V(x) \equiv \lim_{\epsilon \to 0} V(x+i\epsilon) \quad (\text{„radialer Grenzwert"})$$

Lebesgue-f.ü. mit $V(x) \in L^\infty(\mathbb{R}, dx)$

Thm 3.2.13 Sei $0 \not\equiv V \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$ und $V(x) = \lim_{\epsilon \to 0} V(x+i\epsilon)$, dann gilt $\int_{\mathbb{R}} \frac{|\log|V(x)||}{1+x^2}\, dx < \infty$

d.h. insbesondere ist $V(x) \not\equiv 0$ f.ü.

Insbesondere gilt für alle $\alpha \in \mathbb{C}$, dass entweder

HP $\rightarrow$ (i) $V(z) \equiv \alpha$ oder

(ii) $|\{x \in \mathbb{R} : V(x) = \alpha\}| = 0$

Kor 3.2.14 Ang. F holomorph in $\mathbb{C}_+$ mit $\operatorname{Im} F > 0$, sprich F ist Pick.

$\Rightarrow$ (i) $F(x) := \lim\limits_{\epsilon \to 0} F(x+i\epsilon)$ existiert und ist endlich f.ü.

(ii) Für $\alpha \in \mathbb{C}$ ist entweder $F(z) \equiv \alpha$ oder $|\{x \in \mathbb{R} : F(x) = \alpha\}| = 0$

Pf (i) Wende Thm 3.2.12 auf $\underbrace{\frac{1}{F(z)+i}}_{\in H^\infty}$ an

(ii) Wende Thm 3.2.13 auf $\frac{1}{F(z)+i} - \frac{1}{\alpha+i}$ an.

Pf (3.2.12) Sei $d\nu_y(t) := V(t+iy)\,dt$

Dann gilt für $f \in L^1(\mathbb{R}, dt)$

$$\left|\int f(t)\, d\nu_y(t)\right| \leq \|V\|_{H^\infty} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}, dt)} \quad \forall y > 0$$

$\rightarrow$ Definiere Funktional Φ_y auf $L^1(\mathbb{R}, dt)$ durch

$$\Phi_y(f) := \int f(t)\, d\nu_y(t) \Rightarrow \|\Phi_y\| \leq \|V\|_{H^\infty}$$

glm. in $y > 0$ $\Rightarrow$ Banach-Alaoglu sagt, dass es eine Folge $y_n \to 0$ gibt, sodaß $\Phi = \lim_{n\to\infty} \Phi_{y_n}$ existiert $\left(\Phi(f) = \lim_{n\to\infty} \Phi_{y_n}(f) \right)$

Sei also $V \in L^\infty(\mathbb{R}, dt)$ so, dass $\Phi(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t) V(t) dt$

und nimm $f(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{y}{y^2 + (x-t)^2}$

$\Rightarrow \Phi_{y_n}(f) = \ldots = V(x + i(y+y_n))$

und für $n \to \infty$ konvergiert

$$\Phi_{y_n}(f) \to \underset{\int dt \frac{y}{y^2+(x-t)^2} V(x)}{\underset{\|}{\Phi(f)}} = V(x+iy)$$

$\Rightarrow V(x+iy) \to V(x)$ f.ü., da Poissonkern eine Approx. der Eins ist

Erinnere an Möbius-Transf. $T : \mathbb{D} \to \mathbb{C}_+$ $(S^1 = \partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{C}_+ = \mathbb{R})$

$$w \mapsto T(w) = \frac{w-1}{iw+1}$$

__Pf 3.2.13__ Sei $U(t) := V(\tan(t/2))$, dann

$$\int \frac{|\log|V(x)||}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |\log|U(e^{i\theta})|| d\theta < \infty \,?$$

(RHS erinnert an Jensen $\rightsquigarrow$ RHS $\sim \log|U(0)| + \sum \alpha_j^{-1}$, wobei α_j Nullstellen von $U(z)$ in $\mathbb{D}$ sind

Ideen: – Für $x \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien $f_+(x) = \max(f(x), 0)$ und $f_-(x) = -\min(f(x), 0)$, dann $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ und $\Leftrightarrow f + f_- = f_+$

$|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$

– betrachte zuerst $U(re^{i\theta})$ für $r < 1$ so, dass U keine NS auf $|z| = r$ hat, um Jensen anwenden zu können

Für gegebenes $U(e^{i\theta})$ auf $\partial\mathbb{D}$ bekommen wir (wie im Beweis von 3.2.12) $U(re^{i\theta})$ mit Hilfe des Poissonkerns durch

$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} U(e^{it})\,dt$$

Poissonkern auf $\mathbb{D}$ $= \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t} \equiv P_r(t)$

$\left(\begin{matrix} t \leftrightarrow x \\ r \leftrightarrow \epsilon \\ \mathbb{D} \quad \mathbb{C}_+ \end{matrix}\right)$

$$(= V(T(z)) \text{ mit } T:\mathbb{D}\to\mathbb{C}_+ \text{ obige Möbiustransf.})$$

Um Jensen anwenden zu dürfen, definiere $U_m(z) := z^{-m}U(z)$
$\hookrightarrow U(0)\neq 0$!

Was passiert für $r\to 1$? Sei dazu $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $r_j\to 1$, sodass $U(z)$ keine Nullstellen auf $|z|=r_j$ hat.

$$\mathcal{J}_{r_j} := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|U_m(r_j e^{i\theta})|\,d\theta$$

$$= -m\log r_j + \frac{1}{2\pi}\int \log|U(r_j e^{i\theta})|\,d\theta$$

$$\Rightarrow \mathcal{J}_{r_i} \leq \mathcal{J}_{r_j} \text{ für } r_i\leq r_j \text{ dank Jensen}$$

Mit Fatou und majorisierter Konvergenz folgt für $r_j\nearrow 1$,

$$\mathcal{J}_{r=1} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log_-|U(e^{i\theta})|\,d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\log_+|U(e^{i\theta})|}_{\leq \sup_\theta |U(e^{i\theta})| = \|V\|_{\infty}}\,d\theta$$

$\log_+ x = \max(0,\log x)$
$\log_- x = -\min(0,\log x)\geq 0$

$$\leq \|V\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \infty$$

$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |\log|U(e^{it})||\,dt < \infty$, was zu zeigen war (s. Beginn) $\boxtimes$

Erinnerung an Thm 3.2.8

Korollar 3.2.15

μ komplexes oder endliches Borelmaß

$\Rightarrow$ (1) $F_\mu(x+i0)$ existiert und ist endlich f.ü.

(2) $F_\mu\not\equiv 0 \Rightarrow \int (1+x^2)^{-1}|\log|F_\mu(x)|| < \infty$ und für alle $\alpha\in\mathbb{C}$ ist $|\{x\in\mathbb{R} : F_\mu(x)=\alpha\}| = 0$.

Bew Schreibe $F(z) = R(z)/G(z)$ für $R, G \in H^\infty$.

(Setze z.B. $G(z) = \frac{1}{i + F(z)}$ mit $G(z) \not\equiv 0$ holomorph, $|G(z)| < 1$)

$$\to \quad F(z) = \frac{1 - iG(z)}{G(z)}$$

$\to$ 3.2.13 + 3.2.14 sind für R, G anwendbar, d.h. die entsprechenden Aussagen gelten für R, G, R/G. $\boxed{=}$

Bem Es ist möglich, dass $\mu \neq 0$, aber $F_\mu \equiv 0$

(z.B. $d\mu = \frac{dx}{(x-i)(x-2i)}$)

10.2.21

Heute: topologische Träger von Borelmaßen

Prop 3.2.16 μ Borelmaß mit $\int \frac{d\mu(\lambda)}{1+|\lambda|} < \infty$

$M := \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{Im} F(x+i0) > 0\}$. Dann gilt $\sigma(\mu) = \overline{M}$.

Beweis "$\supseteq$" Ang. $z \notin \sigma(\mu)$. Dann ist $F(z) = \int \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z}$

holomorph mit $F(\bar{z}) = \overline{F(z)}$, d.h. $\operatorname{Im} F(\operatorname{Re}(z) + i0) = 0$ für solche z mit $\operatorname{Re}(z) \notin \sigma(\mu) \Rightarrow \overline{M \subseteq \sigma(\mu)}$

Da $\sigma(\mu)$ abgeschl., gilt auch $\overline{M} \subseteq \sigma(\mu)$.

"$\subseteq$": Aus Thm 3.2.9 wissen wir, dass M ein

Träger ist, d.h. für $\lambda \in \sigma(\mu)$ gilt

$$0 < \mu((\lambda-\epsilon, \lambda+\epsilon)) = \mu(M \cap (\lambda-\epsilon, \lambda+\epsilon)) \quad \forall \epsilon > 0.$$

$\rightarrow$ wir können eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(\lambda - \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n}) \cap M$ finden, die in M gegen λ konvergiert $\Rightarrow \sigma(\mu) \subseteq \overline{M}$. $\boxtimes$

Zu $\sigma(\mu_{pp})$: $\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon \cdot \operatorname{Im} F(E_0 + i\epsilon) = \mu(\{E_0\})$, d.h.

$M_{pp} = \{x : \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon \operatorname{Im} F(x+i\epsilon) > 0\}$ ist gerade die Menge aller Singletons von μ, d.h. $\sigma(\mu_{pp}) = \overline{M_{pp}}$.

Für $\sigma(\mu_{ac})$ erinnern wir an den wesentlichen Abschluß einer Borelmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$.

$$\overline{\Omega}^{ess} = \{\lambda \in \mathbb{R}^d : Leb((\lambda-\epsilon, \lambda+\epsilon) \cap \Omega) > 0 \ \forall \epsilon > 0\}.$$

<u>Bem</u> $\overline{\Omega}^{ess}$ ist zwar abgeschlossen, allerdings kann es passieren, dass $\Omega \not\subseteq \overline{\Omega}^{ess}$, z.B. dadurch, dass isolierte Punkte / Singletons verschwinden.
D.h. im Allgemeinen stimmen $\overline{\Omega}$ und $\overline{\Omega}^{ess}$ nicht miteinander überein.

<u>Prop 3.2.17</u> μ Borelmaß mit $\int \frac{d\mu(\lambda)}{1+|\lambda|} < \infty$, dann

$$\sigma(\mu_{ac}) = \overline{M_{ac}}^{ess}, \text{ wobei } M_{ac} = \{x \in \mathbb{R} : 0 < \operatorname{Im} F(x+i0) < \infty\}.$$

<u>Bew</u> Aussage äquivalent zu

$$0 < \mu_{ac}((\lambda-\epsilon, \lambda+\epsilon)) \overset{M_{ac} \text{ ein Träger von } \mu_{ac}}{=} \mu_{ac}(M_{ac} \cap (\lambda-\epsilon, \lambda+\epsilon))$$

$$\Leftrightarrow 0 < Leb(M_{ac} \cap (\lambda-\epsilon, \lambda+\epsilon))$$

<u>Dazu</u> "$\Rightarrow$" per Definition von absolut stetigem Maß

"$\Leftarrow$" M_{ac} ist ein minimaler Träger, d.h.

$\forall\ M_0 \subseteq M_{ac}$ mit $\mu_{ac}(M_0) = 0$, dann gilt $Leb(M_0) = 0$.

M_{ac} ist ein minimaler Träger: Sei dazu $M_0 \subseteq M_{ac}$ so, dass $\mu_{ac}(M_0) = 0$.

Sei dazu $M_\epsilon = \{x \in M_0 : D\mu(x) > \epsilon\}$ mit $M_\epsilon \nearrow M_0$

$D\mu(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\mu(I(x,\epsilon))}{2\epsilon}$

stimmt mit $d\mu_{ac}$ Lebesgue-f.ü. überein (Vallée-Poussin, Thm 3.2.10)

$$Leb(M_\epsilon) = \int_{M_\epsilon} \frac{\epsilon}{\epsilon}\, dx \overset{\text{Def. von } M_\epsilon}{\leq} \frac{1}{\epsilon} \int_{M_\epsilon} D\mu(x)\, dx$$

$$= \epsilon^{-1} \mu_{ac}(M_\epsilon) \leq \epsilon^{-1} \mu_{ac}(M_0) = 0$$

$$\Rightarrow Leb(M_0) = 0$$

$\square$

Jetzt noch Satz von Nevanlinna

(Blatin Thm IV. 4. 9)

<u>Thm 3.2.18 (Herglotz)</u> Sei $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}_+^0$ harmonisch und u sei auf $\partial\mathbb{D}$ stetig. Dann gibt es ein endliches Borelmaß $\mu \geq 0$ auf $[0, 2\pi]$, sodass

($\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$)

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} P_r(\theta - t)\, d\mu(t)$$

mit dem Poissonkern $P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta)}$

$$= Re \underbrace{\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}}}_{\text{"Cauchy-Kern"}}$$

<u>Lemma 3.2.19</u> Sei $F \in L^\infty(\mathbb{D})$ harmonisch und stetig auf $\partial\mathbb{D}$, dann gibt es ein $\tilde{F} \in L^\infty(0, 2\pi))$, sodass

$$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\, \tilde{F}(e^{it})\, dt$$

Außerdem konvergiert $F(re^{i\theta}) \xrightarrow{r\nearrow 1} \tilde{F}(e^{i\theta})$ f.ü. (analog zu Thm 3.2.12)

Beweis Sei dazu $r_n \nearrow 1$ und bezeichne $f_n(e^{i\theta}) \equiv F(r_n e^{i\theta})$, d.h. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Funktionenfolge in $L^\infty(0,2\pi)$ mit $\|f_n\|_{L^\infty(0,2\pi)} \leq 1 \ \forall n$.

$\to \exists$ Teilfolge f_n, die gegen $\tilde{F}(e^{i\theta})$ im schwach-$*$-Sinne konvergiert, d.h.

$$\frac{1}{2\pi}\int P_r(\theta - t)\, \tilde{F}(e^{it})\, dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int P_r(\theta - t)\, \overbrace{f_n(e^{it})}^{F(r_n e^{it})}\, dt$$

$$= \underset{\uparrow}{\ldots} = \lim_{n\to\infty} F(r \cdot r_n e^{i\theta}) = F(re^{i\theta}) \quad \square$$

aufwendig / verwendet $F(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{|z-w|=\epsilon} F(z)dz$ MVP für harmonische Fkt.en

Bew v. Thm 3.2.18 unter Annahme, dass u zusätzl. stetig.

$$u(re^{i\theta}) \underset{\text{Lemma 3.2.19}}{=} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\, \underbrace{\tilde{u}(e^{it})\frac{dt}{2\pi}}_{\equiv d\mu(t)} \quad \text{für ein } \tilde{u}(e^{it}) \in L^\infty([0,2\pi])$$

$\to \mu \geq 0$ Borelmaß auf $[0,2\pi]$ getragen mit Eigenschaft

$$\int d\mu(t) = \int u(e^{it})\frac{dt}{2\pi} \underset{\text{Mittelwertseigenschaft}}{=} u(0).$$

$\to$ ohne Stetigkeitsbedingung sh. z.B. Teschl, oder Bhatia. (Thm V. 4. 9) $\square$

Thm 3.2.20 (Nevanlinna auf $\mathbb{D}$) (Bhatia Thm V.4.10)

Sei $f(z) = u(z) + i\, v(z)$ holomorph auf $\mathbb{D}$ und stetig auf $\partial\mathbb{D}$. Falls $u \geq 0$, dann gibt es ein endliches Borelmaß $\mu \geq 0$ auf $[0, 2\pi]$, sodass

$$f(z) = iv(0) + \int \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\mu(t)$$

Bew Wg Thm 3.2.18 gibt es ein endliches Borelmaß $\mu \geq 0$, s.d.

$$u(\underbrace{re^{i\theta}}_{z}) = \int P_r(\theta - t)\, d\mu(t) = \mathrm{Re}\left(\int \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\mu(t)\right)$$

$\to f(z)$ unterscheidet sich von $\int \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\mu(t)$ nur durch eine imaginäre, additive Konstante, die wir durch Einsetzen von $z=0$ bekommen ($\mathrm{Im}(F(0)) = iv(0)$) $\square$

Thm 3.2.21 (Nevanlinna auf $\mathbb{C}_+$) (Bhatia Thm V.4.11)

Angenommen $F: \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$ holomorph, dann hat F die Darstellung

$z = iy$

$$F(z) = \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}z + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) d\mu(\lambda)$$

$\frac{F(iy)}{iy}$

$$= a + bz + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+\lambda z}{\lambda - z}\, \frac{d\mu(\lambda)}{1+\lambda^2} \quad (*),$$

wobei $a \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$ und $0 \leq \mu$ Borelmaß mit

$\int \frac{d\mu}{1+|\lambda|} < \infty$ $\quad \int (1+\lambda^2)^{-1}\, d\mu(\lambda) < \infty$.

$\downarrow$

$a \mapsto a - \int \frac{\lambda\, d\mu(\lambda)}{1+\lambda^2}$

Ist umgekehrt F durch die Darstellung $(*)$ gegeben mit $a \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$, $\mu \geq 0$ Borel mit $\int d\mu(\lambda)\, (1+\lambda^2)^{-1} < \infty$, dann ist $F: \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$ holomorph.

Bew "$\Leftarrow$" klar

"$\Rightarrow$" Erinnerung an Möbiustransf. $\quad z = \frac{\zeta - i}{\zeta + i} \in \mathbb{D}$ für $\zeta \in \mathbb{C}_+$

bzw. $\zeta = \frac{z+1}{i(z-1)} \in \mathbb{C}_+$ für $\zeta \in \mathbb{D}$.

$\to$ definiere damit $f(z) = -i F(\zeta(z)) \to f$ ist holomorph auf $\mathbb{D}$ und $\operatorname{Re} f \geq 0$ $\Rightarrow$ Thm 3.2.20 für f anwendbar, d.h. $\exists$ $\nu \geq 0$ Borelmaß auf $[0,2\pi]$,

sodass $$f(z) = i\nu(0) + \int_{[0,2\pi]} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\nu(t)$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Im} f(0) = \nu(0)$$

$$\parallel$$

$$-i \operatorname{Re}(\xi(0)) = -\operatorname{Re} F(i) \quad \Rightarrow \quad a = -\nu(0) \text{ in}$$

behaupteter Darstellung.

Falls $\nu(\{0\}) > 0$, dann setze $b = \nu(\{0\})$

$$\Rightarrow f(z) = \int_{(0,2\pi)} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\nu(t) - ia + b \cdot \frac{1+z}{1-z}$$

$\Rightarrow$ Möbiustransf. rückwärts gehen zeigt

$$F(\xi(z)) = +if(z) = a + b\xi + i \int_{(0,2\pi)} \frac{e^{it} + \frac{\xi - i}{\xi + i}}{e^{it} - \frac{\xi - i}{\xi + i}}\, d\nu(t)$$

mit Variablensubstitution $\lambda = -\cot(t/2) = -\frac{\cos(t/2)}{\sin(t/2)}$

$$\rightarrow F(\xi) = a + b\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\lambda\xi}{\lambda - \xi}\, \underbrace{d\rho(\lambda)}_{= \frac{d\mu(\lambda)}{1+\lambda^2}}$$

$\boxtimes$

Thm 3.2.22 (Stieltjes-Inversion)

Sei $F : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$ holomorph mit Darstellung aus Thm 3.2.21. $\Rightarrow$ $a = \operatorname{Re} F(i)$ (offensichtlich)

$$b = \lim_{y \to \infty} \frac{F(iy)}{iy}$$

Falls α, β keine Singletons von μ sind, dann

$$\mu((\alpha,\beta]) = \mu(\beta) - \mu(\alpha) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} F(x+i\epsilon)\, \mathbb{1}_{(\alpha,\beta)}(x)\, dx$$

Bew Bestimmung von a und b sind klar
mit majorisierter Konv.

Um Stieltjes-Formel für μ zu erhalten,

$$\frac{1}{\pi} \int_\alpha^\beta \operatorname{Im} F(x+i\epsilon)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_\alpha^\beta dx \left[b\epsilon + \int \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + (x-\lambda)^2}\, d\mu(\lambda) \right]$$

$$= \underbrace{\frac{b\epsilon(\beta-\alpha)}{\pi}}_{\xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 0} + \frac{1}{\pi} \int d\mu(\lambda) \int_\alpha^\beta dx\, \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + (x-\lambda)^2}$$

Teschl / Bhatia V.4.12

Thm 3.2.23 Eine Pickfunktion φ ist in $P(\alpha,\beta)$ genau dann, wenn $\mu|_{(\alpha,\beta)} = 0$.

Maß aus Thm 3.2.21

Beweis Bhatia Prop V.4.14