$(\Psi, H\Psi)$ $\quad \|H\Psi\|$ $\quad -\Delta$ $\qquad$ 18.11.2020

$\llcorner \Psi \in H^1$ $\quad \llcorner \Psi \in H^2$

2 Einige Klassen von linearen Operatoren und quadratische Formen

2.1 Multiplikationsoperatoren $\quad \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ statt auch möglich.

$$M_v : D(M_v) \to L^2(\mathbb{R}^d) \qquad v: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \text{ messbar}$$
$$f \mapsto v(x) \cdot f(x)$$

$$D(M_v) = \{ f \in L^2 : v \cdot f \in L^2 \}$$

Behauptung 2.1.1 a) $D(M_v)$ ist dicht in $L^2(\mathbb{R}^d)$

b) M_v ist genau dann beschränkt, wenn $v \in L^\infty$ mit $\|M_v\| = \|v\|_\infty$.

c) $(M_v^* f)(x) = \overline{v(x)} f(x)$, $D(M_v^*) = D(M_v)$

M_v ist normal und s.a., wenn v reellwertig

Beweis a) Seien $\Omega_n = \{ x \in \mathbb{R}^d : |v(x)| \leq n \} \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{R}^d$ und für gegebenes $f \in L^2$ sei $f_n = f \mathbb{1}_{\Omega_n}$

$\Rightarrow$ $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ in L^2 mit majorisierter Konvergenz

b) HA

c) Seien $f, h \in D(M_v) \subseteq D(M_v^*)$, dann gilt

$$(h, M_v f) = \int \overline{h(x)}\, \overline{\overline{v(x)}} f(x)\, dx$$

$$= (\tilde{M}_v h, f) \text{ mit } \tilde{M}_v h(x) = \overline{v(x)} h(x)$$

und mit $D(\tilde{M}_v) = \{ f \in L^2 : \overline{v} f \in L^2 \} = D(M_v)$

$\Rightarrow \tilde{M}_v \subseteq M_v^*$.

$(h, Af) = (g, f)$

Um Gleichheit $\tilde{M}_v = M_v^*$ zu bekommen, sei $h \in D(M_v^*)$, d.h. es gilt es $g \in L^2$, sodass

$$\int \overline{h(x)}\, v(x) f(x)\, dx = \int \overline{g(x)}\, f(x)\, dx, \quad f \in D(M_v)$$

$$\Rightarrow \int \overline{(h(x)\,\overline{v}(x) - g(x))}\, f(x)\, dx = 0 \quad \forall f \in D(M_v)$$

Insbesondere gilt mit $\Omega_n = \{x \in \mathbb{R}^d : |v(x)| \leq n\}$, dass

$$\int \mathbb{1}_{\Omega_n}(x)\, \overline{(h(x)\overline{v(x)} - g(x))}\, f(x)\, dx = 0, \quad f \in L^2$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{1}_{\Omega_n}(h(x)\overline{v(x)} - g(x)) \in L^2$ verschwindet in L^2 und pktweise fast überall.

Da aber n beliebig war, folgt $h\overline{v(x)} = g(x)$ d.h. M_v^* ist tatsächlich Multiplikation mit $\overline{v}$ auf $D(M_v)$

$\boxtimes$

Oftmals kann man Selbstadjungiertheit zeigen, wenn man Operatoren auf Funktionen in dichten Funktionenräumen (oft C_c^∞, $\mathcal{S}$, ...) wirken lässt und zeigt, dass sie auf diesen Räumen wesentlich selbstadjungiert sind. Abschließen in der Norm des maximalen Definitionsbereiches gibt Selbstadjungiertheit. (Technik insbesondere bei PDOs hilfreich)
(partielle Differential-operatoren)

Behauptung 2.12 Angenommen $v: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ messbar und sei
$M_v : D(M_v) \to \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$
(maximaler Def.-bereich

Sei $M_V^{(0)} : \mathcal{D}(M_V^{(0)}) \to \mathcal{H}$ mit

$$\mathcal{D}(M_V^{(0)}) = \{ f \in \mathcal{D}(M_V) : \operatorname{supp} f \text{ kompakt} \}.$$

Dann folgt $\overline{M_V^{(0)}} = M_V$.
Falls V reellwertig, dann ist $M_V^{(0)}$ wesentlich s.a. und insbesondere ist $\mathcal{D}(M_V^{(0)})$ ein determinierender Bereich.

<u>Beweis</u> Um $\overline{M_V^{(0)}} = M_V$ zu zeigen, sei $f \in \mathcal{D}(M_V)$ gegeben und setze $\underset{\substack{\cap\\ \mathcal{D}(M_V^{(0)})}}{f_n} = \mathbb{1}_{\Omega_n} f$ $\quad (\Omega_n = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < n\})$

Dann folgt mit majorisierter Konvergenz $f_n \to f$ und $Vf_n \to Vf$ in L^2, d.h. $\mathcal{D}(M_V) \subseteq \mathcal{D}(\overline{M_V^{(0)}})$

Da M_V abgeschlossen (HA!) folgt die Gleichheit. $\square$

<u>HA</u> $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ messbar $\cancel{\mathcal{H}}\ L^2(\mathbb{R}^d)$

a) $M_V : \mathcal{D}(M_V) \to \mathcal{H}$ abgeschlossen

b) $\sigma(M_V) = \operatorname{ess\,ran} V = \{ z \in \mathbb{C} : \forall \epsilon > 0$ ist $\operatorname{Leb}\{x \in \mathbb{R}^d : |V(x) - z| < \epsilon\} > 0 \}$

c) $M_V \in \mathcal{B}(L^2) \Leftrightarrow V \in L^\infty$, dann $\|M_V\| = \|V\|_\infty$.

d) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $V : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig, dann ist $C_c(\Omega)$ ein determinierender Bereich für M_V.

(e) evtl Spektralmaß ausrechnen.

V reell $\Rightarrow$ $\quad (\varphi, M_V \varphi) = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\mu_\varphi(\lambda)$

mit $\underline{\underline{d\mu_\varphi(\lambda)}} = \lim_{\epsilon \to 0} \underline{\operatorname{Im}\left(\varphi, (M_V - \lambda - i\epsilon)^{-1} \varphi\right)}$

(v reellwertig) $\quad (M_v - z)^{-1} f(x) = \dfrac{f(x)}{v(x) - z} \qquad z \in \rho(M_v)$

$$\operatorname{Im}(\varphi, (M_v - \lambda - i\epsilon)^{-1} \varphi) = \operatorname{Im} \int dx \, \frac{|\varphi(x)|^2}{v(x) - \lambda - i\epsilon}$$

$$= \int dx \, |\varphi(x)|^2 \frac{\epsilon}{(v(x) - \lambda)^2 + \epsilon^2} \quad \xrightarrow{\epsilon \to 0} \; ?$$

$$\int f(\lambda) \operatorname{Im}(\varphi, (M_v - \lambda - i\epsilon)^{-1} \varphi) \, d\lambda$$

$$f(\lambda) = \mathbb{1}_\Omega(\lambda), \text{ z.B. } \quad \Omega = (a, b) \to \mu_\varphi(\Omega)$$

HA Betrachte $v(x) = x$ in $L^2(\mathbb{R})$ $(d=1)$ mit
$M_v^{(0)}$ auf $\mathcal{D}(M_v^{(0)}) = \{ f \in \mathcal{D}(M_v) : \int f(x) dx = 0 \}$

Dann ist $\mathcal{D}(M_v^{(0)})$ kein determinierender Bereich.

2.2 Quadratische Formen und Friedrichs-Erweiterung

Motivation: "weniger" Regularität erforderlich, "leichter" rechnen.

(Vorsicht: manchmal muss man allerdings schon etwas aus dem Energiebereich heraus)

$(\varphi, -\Delta\varphi)$ ... kinetische En.
$\| -\Delta \varphi \| = (\varphi, (-\Delta)^2 \varphi)$

manchmal möchte man mehr als relative Beschränktheit zeigen, sondern

$M \gg 1 \qquad \| V^{\frac{1}{2}} (T + M)^{-1/2} \|_{\mathcal{J}^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^d} d\xi \, V(x) \, (T(\xi) + M)^{-1}$

$T \ldots$ PDO $\qquad T(\xi) = \sqrt{\xi^2+1} - 1 \sim |\xi|,\ |\xi| \to \infty$

$V \ldots$ reellwertiges Pot.

$V \in C_c^\infty.$

radiale V
$$\int_0^\infty dr\ V(r) \underline{\int_0^\infty dk\ (T(k)+M)^{-1}} = \infty$$
schlägt gerade logarithmisch fehl.

$$\|\ldots\|_{\gamma 2+\epsilon} \qquad \int dk\ (T(k)+M)^{-1-2\epsilon}$$

$$\| V^{\frac{1}{2}} (T(-i\nabla)+M)^{-\frac{1}{2}-\epsilon} \varphi \|$$

Definition 2.2.1 • Sei $A: D(A) \to \mathcal{H}$ dicht definiert. Dann heißt A nicht-negativ, geschrieben $A \geq 0$, wenn
$$(\psi, A\psi) \geq 0, \quad \psi \in D(A)$$

• Sei $(\varphi, \psi)_A := (\varphi, (A+1)\psi)$, $A \geq 0$, $\varphi, \psi \in D(A)$ und $\mathcal{H}_A$ = Vervollständigung von $D(A)$ unter der von $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ induzierten Norm.

$\mathcal{H}_A \equiv Q(A)$
$\hookrightarrow$ Formbereich

• $q_A[\psi] = (\psi, \psi)_A - \|\psi\|^2$, $\psi \in \mathcal{H}_A$.

• $q_A(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi)_A - (\varphi, \psi)$.

Lemma 2.2.2 Sei $A: D(A) \to \mathcal{H}$ dicht definiert. Dann ist A genau dann symmetrisch, wenn $q_A[\psi]$ reell für alle $\psi \in D(A)$.

25.11.2020

Beweis "$\Rightarrow$" ✓

"$\Leftarrow$" Betrachte Imaginärteil von

$$q_A[\psi + i\varphi] = q_A(\psi + i\varphi, \psi + i\varphi)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(A\varphi, \psi) = \operatorname{Re}(\varphi, A\psi)$$

$\to$ ersetzte φ durch $i\varphi$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}(A\varphi, \psi) = \operatorname{Im}(\varphi, A\psi) \qquad \varphi, \psi \in \mathcal{D}(A)$$

$$\Rightarrow (A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$$

$\blacksquare$

__Bemerkung 2.2.3__ $\mathcal{H}_A$ kann als Unterraum von $\mathcal{H}$ gesehen werden mit $\underline{\mathcal{D}(A)} \subseteq \underline{\mathcal{H}_A} \subseteq \underline{\mathcal{H}}$.

__Beweis__ Falls $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$ Cauchy, dann ist sie auch Cauchy in $\mathcal{H}$, da $\|\psi_n\|_{\mathcal{H}} \leq \|\psi_n\|_A$.

$\Rightarrow$ Wir können Grenzwerte in $\mathcal{H}_A$ mit jenen in $\mathcal{H}$ identifizieren und diese Identifikation ist eindeutig.
__Dazu__ Sei $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$ Cauchy in $\mathcal{H}_A$ mit $\|\psi_n\| \to 0$. Dann konvergiert auch $\|\psi_n\|_A \to 0$, denn

$$\|\psi_n\|_A^2 = (\psi_n, \psi_n - \psi_m)_A + \underline{\underline{(\psi_n, \psi_m)}}$$

$$\overset{CS}{\leq} \underbrace{\|\psi_n\|_A}_{<\infty} \underbrace{\|\psi_n - \psi_m\|_A}_{\underline{\underline{\to 0}}} + \|(A+1)\psi_n\| \underbrace{\|\psi_m\|}_{\to 0}$$

$\underline{\underline{\text{per Voraussetzung}}}$

__Bsp__ Sei $v(x) \geq 0$ mit zugehörigem Multiplikationsoperator M_v und zugehöriger quadratischer Form

$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$

$$q_{M_v}[\psi] = (\psi, (M_v+1)\psi) - \|\psi\|^2 = \int |\psi|^2 v(x)\,dx < \infty$$

$$Q(M_v) = \mathcal{D}(M_v^{1/2}) = \{ f \in L^2 : v^{\frac{1}{2}} f \in L^2 \} .$$

$$M_v = M_v^{\frac{1}{2}} |M_v|^{1/2}$$

$$|M_v| = \sqrt{M_v^* M_v}$$

$$A \geq -\gamma \qquad |A+\gamma| \qquad \operatorname{ran}(\tilde{A}+i) = \mathfrak{H}$$

Lemma 2.2.4 Sei $A \geq 0$ (dicht definiert). Dann gibt es eine Erweiterung $\tilde{A} : \mathcal{D}(\tilde{A}) \to \mathfrak{H}$, die durch die Restriktion $\tilde{A} = A^*|_{\mathfrak{H}_A}$ gegeben ist und $\operatorname{ran}(\tilde{A}+1) = \mathfrak{H}$

Beweis Wir konstruieren

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) = \{ \psi \in \mathfrak{H}_A : \exists\, \tilde{\psi} \in \mathfrak{H} : \underbrace{(\varphi, \psi)_A}_{(\varphi, (A+1)\psi)} = (\varphi, \tilde{\psi}) \;\; \forall\, \varphi \in \mathfrak{H}_A \}$$

$$\tilde{A}\psi = A^*\psi = \tilde{\psi} - \psi$$

Dann sind $\tilde{\psi}$ wohldefiniert, $\tilde{A} \geq 0$ und $\mathcal{D}(\tilde{A}) = \mathfrak{H}_A \cap \mathcal{D}(A^*)$.

Zu $\operatorname{ran}(\tilde{A}+i) = \mathfrak{H}$. Sei dazu $\tilde{\psi} \in \mathfrak{H}$ und betrachten

$\varphi \mapsto (\tilde{\psi}, \varphi)$, $\varphi \in \mathfrak{H}_A$. Dies ist ein lineares, beschränktes Funktional auf $\mathfrak{H}_A$, d.h. $\exists\, \psi \in \mathfrak{H}_A$, s.d.

$(\tilde{\psi}, \varphi) = (\psi, \varphi)_A \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}_A$. Per Definition von $\tilde{A}$ ist $\tilde{\psi} = (\tilde{A}+1)\psi$, d.h. $\tilde{A}+1$ ist surjektiv. $\boxtimes$

<u>Definition 2.2.5</u> Sei $A : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$ symmetrisch und dicht definiert. Dann heißt A nach unten halbbeschränkt mit Schranke $\gamma \in \mathbb{R}$, wenn $q_A[\psi] \geq \gamma \|\psi\|^2$, $\psi \in \mathcal{D}(A)$. Abgekürzt $A \geq \gamma$.

<u>Thm 2.2.6 (Friedrichs)</u> Sei $A : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$ mit $A \geq \gamma$,

dann gibt es eine selbstadjungierte Erweiterung $\tilde{A}$

mit $\tilde{A}\psi = A^*\psi$ für $\psi \in \mathcal{D}(A^*) \cap \mathcal{H}_{A-\gamma}$.

Weiter ist auch $\tilde{A} \geq \gamma$. Außerdem ist $\tilde{A}$ die einzige s.a. Erweiterung für die gilt $\mathcal{D}(\tilde{A}) \subseteq \mathcal{H}_{A-\gamma}$.

<u>Beweis</u> OBdA können wir $A \mapsto A-\gamma$ anschauen, d.h. unser neues $A \geq 0$ und damit folgt aus Lemma 2.2.4 die Existenz der s.a. Erweiterung $\tilde{A}$ die $\mathcal{D}(\tilde{A}) = \mathcal{D}(A^*) \cap \mathcal{H}_A$ und $\tilde{A}\psi = A^*\psi$.

Eindeutigkeit: Angenommen $\hat{A} : \mathcal{D}(\hat{A}) \to \mathcal{H}$ wäre eine weitere s.a. Erweiterung, die $\mathcal{D}(\hat{A}) \subseteq \mathcal{H}_A$ erfüllt.

Dann gilt für $\psi \in \mathcal{D}(\hat{A})$, $\varphi \in \mathcal{D}(A)$

$$(\varphi, (\hat{A}+1)\psi) = (\underbrace{(A+1)}_{\hat{A}}\varphi, \psi) = \overline{(\psi, \varphi)_A} = (\varphi, \psi)_A.$$

Wg Stetigkeit setzt sich die Gleichheit
$(\varphi, (\hat{A}+1)\psi) = (\varphi, \psi)_A$ auf $\varphi \in \mathcal{H}_A$ fort $(\psi \in \mathcal{D}(\hat{A}))$

$\Rightarrow$ das zeigt, dass $\psi \in \mathcal{D}(\tilde{A})$ per Konstruktion von $\tilde{A}$ und das bedeutet $\hat{A} \subseteq \tilde{A}$. Da aber selbstadjungierte Operatoren maximal sind, muss $\hat{A} = \tilde{A}$.

In der Anwendung ist auch die Umkehrung dieses Resultats wichtig. Das heißt, gegeben eine quadratische Form $q: Q \to \mathbb{C}$, können wir einen zugehörigen Operator A_q finden, der z.B. s.a. ist oder s.a. Erweiterungen zulässt und für den gilt $q = q_{A_q}$?

Sei also $q: Q \to \mathbb{C}$ eine dicht definierte quadratische Form, die zu einer Sesquilinearform $s: Q \times Q \to \mathbb{C}$ gehört, d.h. für die gilt $q[\psi] = s(\psi, \psi)$.

(Erinnerung: Polarisation erlaubt (Re)konstruktion von s aus q durch
$$s(\psi, \varphi) = \frac{1}{4}\big(q(\psi+\varphi) - q(\psi-\varphi) - i\, q(\psi + i\varphi) + i\, q(\psi - i\varphi)\big)$$

q reellwertig $\Leftrightarrow s(\varphi, \psi) = \overline{s(\psi, \varphi)}$; In dem Fall heißt q hermitesch.

Eine hermitische Form q heißt nicht-negativ, wenn $q(\psi) \geq 0$ und nach unten halbbeschränkt durch $\gamma \in \mathbb{R}$, wenn $q(\psi) \geq \gamma \|\psi\|^2$

q herm. $\Rightarrow$ Wie zuvor definieren wir ein zugehöriges Skalarprodukt

$$(\psi, \varphi)_q = s(\psi, \varphi) + (1-\gamma)(\psi, \varphi) \quad \text{mit}$$

zugehöriger Norm $\|\psi\|_q^2 = q(\psi) + (1-\gamma)\|\psi\|^2$

Zu jeder halbbeschränkten Form q assoziieren wir die Vervollständigung $\mathfrak{h}_q$ von Q unter der Norm $\|\cdot\|_q$.

Wir sagen q ist <u>abschließbar</u>, wenn für Cauchyfolgen $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Q$ mit $\|\psi_n\| \to 0$ es folgt, dass $\|\psi_n\|_q \to 0$.

In diesem gilt $\mathfrak{h}_q \subseteq \mathfrak{h}$ und wir bezeichnen die Erweiterung eines solchen q auf $\mathfrak{h}_q$ als den <u>Abschluß</u>.

Falls $\mathfrak{h}_q = Q$, dann heißt q <u>abgeschlossen</u>.

<u>Beispiel</u> Angenommen $T: D(T) \to \mathfrak{h}$ abgeschlossen. (+ dicht def)

Dann ist die zugehörige quadratische Form
$$t: D(T) \times D(T) \to \mathbb{C}$$
$$(\varphi,\psi) \mapsto (T\varphi, T\psi)$$
hermitesch, nach unten durch Null beschränkt und abgeschlossen.

Zugehörige Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_t : D(T) \times D(T) \to \mathbb{C}$ mit induzierter Norm $\|\psi\|_t^2 = ((T+1)\psi, (T+1)\psi)$
$$= \|(T+1)\psi\|^2$$

ist zur Graphennorm $\|\psi\|_T^2 = \|T\psi\|^2 + \|\psi\|^2$ äquivalent.

Da $(D(T), \|\cdot\|_T)$ vollständig ist (da T abgeschlossen), folgt dass auch $t: D(T)\times D(T) \to \mathbb{C}$ abgeschlossen.

Aus der obigen Diskussion ist klar, dass zu jedem nach unten halbbeschränkten und abschließbarem Operator $A : \mathcal{D}(A) \to \mathfrak{h}$ eine Form q_A gehört, die abschließbar ist und deren Abschluß mit einem s.a. Operator verbunden ist. Folgender Satz gibt eine Umkehrung.

Satz 2.2.8 ("Friedrichs umgekehrt")

Zu jeder abgeschlossenen, nach unten halbbeschränkten Form $q : Q \to \mathbb{C}$ gibt es einen eindeutigen selbstadjungierten Operator $A : \mathcal{D}(A) \to \mathfrak{h}$ mit $Q = Q(A)$ und $q = q_A$. Ist s die zugehörige Sesquilinearform, dann gilt

Domain von q

Formdomain von A

$$\mathcal{D}(A) = \{ \psi \in Q : \exists \tilde{\psi} \in \mathfrak{h} : s(\varphi, \psi) = (\varphi, \tilde{\psi}) \quad \forall \varphi \in Q \}$$

$$A\psi = \tilde{\psi}.$$

26.11.2020

Beweis OBdA sei $\gamma = 0$. Wg Dichtheit von Q sind $\tilde{\psi}$ und A wohldefiniert.

Sei $j : \mathfrak{h} \to Q^*$ eine konjugiert lineare, stetige
$\psi \mapsto (\psi, \cdot)$ Einbettung. Hierbei statten wir Q mit der Norm $\|\cdot\|_q$ aus.
Wir bemerken auch noch, dass $\operatorname{ran}(j)$ dicht.

Dazu: Angenommen, es gäbe $0 \neq \varphi \in Q^{**} \cong Q$, sodass $\varphi(j(\psi)) = j(\psi)[\varphi] = \langle \psi, \varphi \rangle = 0$ für alle $\psi \in \mathfrak{h}$.

Dann müsste aber $\varphi = 0$ sein, was der Annahme widerspricht $\Rightarrow$ $\operatorname{ran}(j)$ dicht.

Wir konstruieren nun einen konjugiert linearen, isometrischen Isomorphismus

$$\hat{A} : \mathfrak{Q} \to \mathfrak{Q}^*$$
$$\psi \mapsto s(\psi, \cdot) + (\psi, \cdot)$$

und unseren Operator A konstruieren wir durch

$$A = j^{-1} \hat{A} - 1 : D(A) \to \mathfrak{h}$$

mit $D(A) = \hat{A}^{-1} \operatorname{ran}(j)$, welcher dicht in $\mathfrak{Q}$ und damit dicht in $\mathfrak{h}$ liegt (da q dicht def.)

Per Konstruktion gilt, dass $q_A(\psi) = q(\psi)$, d.h. $A \geq 0$ und $\operatorname{ran}(A+1) = \mathfrak{h}$ (wie im Beweis von Lemma 2.2.4). Das zeigt, dass A s.a. ist mit $\mathfrak{h}_A = \mathfrak{Q}$ (wg Dichtheit von $D(A)$ in $\mathfrak{Q}$).

<u>Eindeutigkeit:</u> Angenommen $\tilde{A}$ wäre ein weiterer s.a. Operator mit obigen Eigenschaften ($\mathfrak{Q} = \mathfrak{h}_{\tilde{A}}$, $q = q_{\tilde{A}}$);

dann sind $q = q_{\tilde{A}}$, d.h. $(A\psi, \varphi) = (\psi, \tilde{A}\varphi)$ für $\varphi \in D(\tilde{A})$, $\psi \in D(A)$; das bedeutet aber, dass $\psi \in D(\tilde{A}^*) = D(\tilde{A})$, d.h. $\tilde{A}\psi = \tilde{A}^*\psi$ und umgekehrt $A\psi = \tilde{A}\psi$. $\square$

$$\|A\| = \sup_{\|\psi\|=1} \|A\psi\| = \sup_{\|\varphi\|,\|\psi\|=1} (\varphi, A\psi) \quad ;$$

wenn A symmetrisch, dann $\|A\| = \sup_{\|\psi\|=1} (\psi, A\psi)$

Definition 2.2.9 • Jeder Unterraum $\tilde{Q} \subseteq Q(A)$ der dicht bzgl. $\|\cdot\|_A$ ist, heißt <u>determinierender Formbereich</u> von A und bestimmt A eindeutig.

• Eine hermitesche Form $q: Q \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt, wenn $|q(\psi)| \leq c\|\psi\|^2$ für ein $c>0$. In dem Fall nennen wir

$$\|q\| = \sup_{\psi \in \mathcal{H},\, \|\psi\|=1} |q(\psi)| \text{ die Norm von } q.$$

q hermitesch $\qquad \|\psi\|_q^2 = q(\psi) + \|\psi\|^2$

Für beschränkte Formen sind $\|\cdot\|_q$ und $\|\cdot\|_q$ äquivalent zueinander. Der zu einer beschränkten Form zugehörende Operator (der symmetrisch ist) ist dann ebenfalls beschränkt (mit Hellinger-Toeplitz)

↳ symm. Operatoren, die auf ganz $\mathcal{H}$ definiert sind, sind beschränkt)

Quantifizierung!

Lemma 2.2.10 Eine halbbeschränkte Form $q: Q \to \mathbb{R}$ ist genau dann beschränkt, wenn es der zugehörige Operator A ist. In dem Fall gilt $\|q\| = \|A\|$.

Beweis $\|q\| \leq \|A\|$ klar

Zu $\|A\| \leq \|q\|$: mittels Polarisation

Sesquilinearform zu q

$$s(f,g) = \frac{1}{4}\big(q(f+g) - q(f-g) + i\,q(f-ig) - i\,q(f+ig)\big)$$

$$2\,\mathrm{Re}(\varphi, A\psi) = \frac{1}{2}\big(q(\psi+\varphi) - q(\psi-\varphi)\big)$$
$$\leq q(\psi) + q(\varphi) \leq \|q\|\big(\|\psi\| + \|\varphi\|\big)$$

Mit $\varphi = \frac{A\Psi}{\|A\Psi\|}$ mit $\|\Psi\| = 1$ folgt $\|A\| \le \|q\|$.

Aus dem Lemma folgt $\|A\| = \sup_{\|\Psi\|=1} (\Psi, A\Psi)$.

Schließlich noch etwas Störungstheorie. → KLMN

Um Operatoren sinnvoll addieren zu können, also, dass $A+B$ überhaupt definiert ist, müssen wir uns auf $D(A) \cap D(B)$ zurückziehen. $D(A) \subseteq D(B)$ und

(und Annahme $\|B\Psi\| \le a\|A\Psi\| + \|\Psi\| \cdot b$ mit $a<1$ zu zeigen, ist manchmal aufwendig.

→ Relaxation durch Umgang mit quadratische Formen.

Definition 2.2.11 Sei $A : D(A) \to \mathcal{H}$ s.a mit $A \ge \gamma$ und sei $q : Q \to \mathbb{R}$ eine hermitesche Form mit $Q(A) \subseteq Q$

Dann heißt q relativ formbeschränkt bzgl. q_A wenn es $a, b > 0$ gibt, sodass

$$|q(\Psi)| \le a\, q_A(\Psi) + b\|\Psi\|^2, \quad \Psi \in Q(A).$$

Die Formschranke von q bzgl. q_A ist definiert als das Infimum über all diese Zahlen a.

→ Jetzt zur Verallgemeinerung von Kato-Rellich für quad. Formen → Kato–Lax–Milgram–Nelson

Thm 2.2.12 (KLMN) Sei $q_A : Q(A) \to \mathbb{R}$ eine halbbeschränkte, hermitesche Form und $q: Q \to \mathbb{R}$ eine relativ zu q_A formbeschränkte Form mit Formschranke <1.

Dann ist die Formsumme auf $q_A + q : Q(A) \to \mathbb{R}$ wohldefiniert, abgeschlossen und halbbeschränkt und diese Formsumme "erzeugt" einen halbbeschränkten, s.a. Operator

$$q_A + q \geq (1-a)\, q_A - b \geq (1-a)\gamma - b, \quad \text{wenn } q_A \geq \gamma.$$

Beweis OBdA $\gamma = 0$. Und es ist klar, dass $q_A + q \geq (1-a)\gamma - b$, d.h. $q_A + q$ ist wieder halbbeschränkt.

Die Abgeschlossenheit von $q_A + q$ folgt aus

$$\|\cdot\|_{q_A} \sim \|\cdot\|_{q_A + q}, \text{ denn}$$

$q_A \geq 0$

$\|\psi\|^2_{q_A} = q_A(\psi) + \|\psi\|^2$

$\|\psi\|^2_{q+q_A} = q_A(\psi) + q(\psi) + (1+b)\|\psi\|^2$

$q + q_A \geq (1-a)\gamma - b$

$\|\cdot\|^2_q = q(\psi) + (1-b)\|\psi\|^2$

$$\|\psi\|^2_{q_A + q} = q_A(\psi) + q(\psi) + \|\psi\|^2(1+b)$$
$$\leq (1+a)\, q_A(\psi) + (1+2b)\|\psi\|^2$$
$$\overset{q_A \geq 0}{\leq} (a+1+2b)\left(\|\psi\|^2 + q_A(\psi)\right) = (a+1+2b)\|\psi\|^2_{q_A}$$

$$\|\psi\|^2_{q_A} = q_A(\psi) - \frac{1}{1-a} q(\psi) + \frac{1}{1-a} q(\psi) + \|\psi\|^2$$
$$\leq \frac{1}{1-a}\left(q_A(\psi) + q(\psi) + (1+b)\|\psi\|^2\right)$$
$$= \frac{1}{1-a}\|\psi\|^2_{q_A + q}$$

$\Rightarrow q_A + q$ abgeschlossen, da q_A abgeschlossen

$\Rightarrow$ Aussage folgt aus "Friedrichs umgekehrt" (Satz 2.2.8)

Stein Harmonic Analysis
Wolff Kap 1-5

2.3 Differentialoperatoren

2.3.1 Sobolevräume und Fouriertransformation

↳ L. Evans – Partial Differential Equations (Kap 5)

→ enzyklopädisch: · Adams-Fournier – Sobolev spaces
· H. Triebel

Zunächst eindimensional:

absolut-stetige Funktionen $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ Intervall

Vektorräume → $AC((a,b)) := \{ f \in C(a,b) : f(x) = f(c) + \int_c^x g(t)\,dt$

für ein $g \in L^1_{loc}(a,b)$, $c \in (a,b) \}$

Mit Lebesgueschem Differentiationssatz $\frac{1}{|B_x(r)|} \int_{B_x(r)} f \xrightarrow{r \to 0} f(x)$

pktweise Lebesgue-f.ü. für $f \in L^1_{loc}$, d.h. dass $g(t)$
↳ d.h. insb ist f fast überall diffbar

in der Def von $AC(a,b)$ zumindest fast überall mit $f'(t)$ übereinstimmt.

$$AC[a,b] := \{ f \in AC(a,b) : g \in L^1(a,b) \} \subseteq C(a,b)$$

Für $f, g \in AC[a,b]$ kann man partiell integrieren mit

$$\int_a^b f' g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f g'$$

→ Sobolevräume: $H^m(a,b) := \{ f \in L^2(a,b) : f^{(j)} \in AC(a,b),$
$j = 0,1,\dots,m-1,\ f^{(j+1)} \in L^2(a,b) \}$

$H^m(a,b)$ ist ein Hilbertraum mit

$$\|f\|^2_{H^m} = \sum_{j=0}^{m} \int_a^b |f^{(j)}(x)|^2 \, dx.$$

nur offenbar in $d=1$!
später höhere Dimension

Lemma 2.3.1 Sei $m \geq 1$, $f \in H^m(a,b)$. Dann ist f beschränkt mit $\lim_{x \searrow a} f^{(j)}(x)$ und $\lim_{x \nearrow b} f^{(j)}(x)$ existieren

für $j = 0, \dots, m-1$. Die Grenzwerte verschwinden, falls $|a| = \infty$ oder $|b| = \infty$.

Beweis Falls a oder b endlich, dann ist $f^{(j+1)}$ bei den Endpunkten integrierbar (wg $f^{(j)} \in AC$) und die Behauptung folgt.
Falls a oder $b = \infty$, dann zeigt die Identität
$$|f^{(j)}(x)|^2 = |f(c)|^2 + 2 \operatorname{Re} \int_c^x \overline{f^{(j)}(t)} f^{(j+1)}(t) \, dt$$
dass der Grenzwert existiert (mit majorisierter Konvergenz)
Da aber $f^{(j)} \in L^2$ muss $f^{(j)}$ im Unendlichen verschwinden

$\boxtimes$

Lemma erlaubt Setzen von $f^{(j)}(a) = \lim_{x \searrow a} f^{(j)}(x)$ und $f^{(j)}(b) = \lim_{x \nearrow b} f^{(j)}(x)$

$H_0^m(a,b) = \{ f \in H^m(a,b) : f^{(j)}(a) = f^{(j)}(b) = 0 \quad j = 0 \dots m-1 \}$

$\left(H_0^m(a,b) = \overline{C_c^\infty}^{\|\cdot\|_{H^m}} \right.$

Schließlich ist $H^m(a,b) = \{ f \in L^2(a,b) : f^{(j)} \in AC(a,b),\ j = 0 \dots m-1$
mit $f^{(m)} \in L^2(a,b) \}$

d.h. nur höchste Ableitung braucht quadratintegrierbar sein.

$U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. 2.12.2020

inhomogene $W^{k,p}(U) = \{ f \in L^1_{loc}(U) : \forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^d$ ist $D^\alpha f \in L^p \}$

homogene Sobolev. $\mathring{W}^{k,p}(U) = \{ f \in L^1_{loc}(U) : D^\alpha f \in L^p$ für $|\alpha| = k \}$

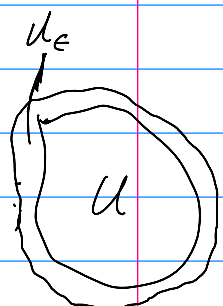
wobei $D^\alpha = -i\partial^\alpha$ die schwache Ableitung meint, d.h.

$$D^\alpha u = v \iff \int_U u\, D^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int v \phi \quad \forall\, \phi \in C_c^\infty(U)$$

mit Norm
$$\|f\|_{W^{k,p}(U)} = \begin{cases} \sum_{|\alpha| \leq k} \int |D^\alpha u|^p dx & 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \operatorname{ess-sup}_{x \in U} |D^\alpha u| & p = \infty \end{cases}$$

$$W_0^{k,p}(U) = \overline{C_c^\infty}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}}}$$ besteht aus allen C_c^∞-Folgen, die in $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$-Norm konv.

- $W^{k,p}(U)$ ist Banach
- Approximation von $W^{k,p}$-Funktionen



- lokale Approximation: für eine Approximation der Eins, η_ϵ ist für $u \in W^{k,p}(U)$ die Fkt. $u_\epsilon = \eta_\epsilon * u$ in $C^\infty(U_\epsilon)$ und wir haben

$$u_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \to 0} u \quad \text{in } W^{k,p}_{loc}(U) \quad (\text{Konv in } W^{k,p}(V) \ \forall\, V \subset\subset U)$$

- globale Approximation
  (i) $\exists\, (u^m)_{m \in \mathbb{N}} \subseteq C^\infty(U) \cap W^{k,p}(U)$ s.d. $u^m \xrightarrow{m \to \infty} u$ in $W^{k,p}$
  (ii) falls $\partial U \in C^1$, dann $\exists\, (u^m) \in C^\infty(\overline{U})$ s.d. $u^m \xrightarrow{m \to \infty} u$ in $W^{k,p}(U)$

Sobolewenbettungen $\quad p<d, \quad p=d, \quad p>d$

a) $p<d$

- Gagliardo–Nirenberg–Sobolev: $1 \le p < d$

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \qquad u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d), \quad p^* = \frac{dp}{d-p}.$$

<u>WR</u> $\quad u_\lambda(x) = u(\lambda x); \quad \|u_\lambda\|_{L^{p^*}} = \lambda^{-d/p^*} \quad (x \mapsto x/\lambda)$

$$\|Du_\lambda\|_{L^p} = \lambda^{1-d/p}$$

$$\frac{d}{p^*} = \frac{d}{p} - 1 \iff p^* = \frac{dp}{d-p}$$

$$\|u\|_{L^q(U)} \lesssim \|Du\|_{L^p(U)} \qquad 1 \le q \le p^*$$

Poincarée: $\quad p^* > p, \quad p^* \xrightarrow{p \nearrow d} \infty.$

$$\Rightarrow \|u\|_{L^p(U)} \lesssim \|Du\|_{L^p(U)} \qquad u \in W^{1,p}(U)$$

b) $p=d$; $\quad d=1 \to$ falls $\operatorname{supp} u \subseteq [a,b]$, dann

$$\|u\|_{L^\infty(a,b)} \le \frac{\|u\|_2^2}{b-a} + 2\|u\|_2 \|u'\|_2$$

$$u \in H^1(a,b)$$

$d \ge 2$; $\quad W^{1,d} \hookrightarrow BMO$. (bounded mean oscillation)

$$\begin{array}{c} BMO \\ \cup\!\! \mid \\ L^\infty \end{array}$$

$$\|u\|_{BMO} = \sup_{B_x(R)} \frac{1}{|B_x(R)|} \int_{B_x(R)} |u(x) - \bar{u}|\, dx < \infty, \quad \bar{u} = \fint_B u$$

(Sing Integraloperatoren $Tf(x) = \int_X K(x,y) f(y) \, d\mu(y)$

$T : L^p \to L^p \quad 1 < p < \infty$

$L^1 \to L^{1,\infty}$

$\Longrightarrow \quad T : L^\infty \to BMO$, bzw $T : BMO \to BMO$)

$d > p > d/2$

2) $p > d$ Morey-Abschätzungen

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}, \quad \gamma = 1 - d/p$$

Hölder/Lipschitz $\quad \sup_{\substack{x,y \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\gamma} < \infty$

$\Longrightarrow$ Bootstrappen für höhere Ableitungen

Satz 2.32 (Sobolew-Einbettung) $1 \leq p < q < \infty$, $k > l$

(GNS) $\quad W^{k,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow W^{l,q}(\mathbb{R}^d)$, $\quad \frac{1}{p} - \frac{k}{d} = \frac{1}{q} - \frac{l}{d}$

(Morrey) $\quad W^{k,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C^{r,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ $\quad p > d/k$ mit $\frac{1}{p} - \frac{k}{d} = -\frac{r+\alpha}{d}$

$\alpha \in (0,1]$

($p = 2$; $k > d/2$ interessant)

Kompakte Einbettungen

Satz 2.33 (Rellich-Kondrachov) $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt

$\Longrightarrow \quad W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U) \quad 1 \leq p < d, \quad 1 \leq q < p^*$

D.h. Folgen, die glm. in $W^{1,p}(U)$ beschränkt sind, haben konvergente Teilfolgen in $L^q(U)$.

Außerdem, wie bei Poincarée, $W^{1,p}(U) \subset\subset L^p(U)$
$1 \le p \le \infty$.

Einschub / Zusammenfassung zu Fouriertransf.

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$: $\quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x)\,dx \equiv \mathcal{F}[f](\xi)$

- $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$
- $(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$
- $(x^\alpha f)^\wedge(\xi) = (2\pi i)^{|\alpha|} \partial_\xi^\alpha \hat{f}(\xi)$

- $\mathcal{F}[f(\cdot - a)](\xi) = e^{-2\pi i a \cdot \xi} \hat{f}(\xi)$
  $\mathcal{F}[e^{2\pi i \langle \cdot, b \rangle} f](\xi) = \hat{f}(\xi - b)$

- $\mathcal{F} f(\lambda \cdot)(\xi) = \lambda^{-d} \hat{f}(\xi/\lambda)$

- $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ linear, invertierbar, dann

$$\widehat{f \circ T}(\xi) = \frac{1}{|\det(T)|} \hat{f} \circ T^{-t} \qquad (T^{-1})^t = T^{-t}$$

- $\mathcal{F} : L^1 \to L^\infty$ sogar $L^1 \to C_\infty$ (stetige Fkt.en, die im ∞ verschwinden)

mit $\|\hat{f}\|_\infty \le \|f\|_{L^1}$ und $\hat{u}(\xi) \xrightarrow{|\xi| \to \infty} 0$

- $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ bijektiv mit Inverser

$$(\mathcal{F}^{-1} g)(x) = \int g(\xi)\, e^{2\pi i x \cdot \xi}\, d\xi$$

$$(\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1} g))(\xi) = g(-\xi), \text{ d.h. } \mathcal{F}^4 = \mathbb{1}$$

- Plancherel: $\mathcal{F}$ lässt sich zu einer unitären Abbildung auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ fortsetzen, dh insb. $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$

falls $f \in L^1 \cap L^2$ ist $\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$.

- Faltungen: $\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$

$$\mathcal{F}(\psi \cdot \varphi)(\xi) = (\hat{\psi} * \hat{\varphi})(\xi)$$

$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1}$

- Young $\|f * g\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q$ $\quad 1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$

$1 \le p, q, r \le \infty$

(HA warum muss p' auf RHS sein? warum muss $p \geq 2$ sein?)

- Hausdorff-Young: $\|\hat{f}\|_p \le \|f\|_{p'}$ falls $p \geq 2$

- $m \in L^\infty$. $\Rightarrow$ $m(D_x)f = (m \cdot \hat{f})^\vee(x)$ ist in L^2, wenn $f \in L^2$ mit

$$\|m(D_x)f\|_2 \le \|m\|_{L^\infty} \|f\|_{L^2}.$$

Wolff, Stein (Harmonic Analysis), H. Abels (ΨDOs), Evans

Zurück zu Sobolevräumen:

Alternative Def von $H^k = W^{k,2}(\mathbb{R}^d)$.

Für $s \geq 0$ ist $H^s(\mathbb{R}^d) = \{ f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) : \langle \xi \rangle^s \hat{f} \in L^2 \}$
mit $\langle \xi \rangle^s = (1 + \xi^2)^{s/2}$

$$\dot{H}^s(\mathbb{R}^d) = \{ f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) : |\xi|^s \hat{f} \in L^2 \}.$$

$H^{-1}(U)$ ist Dualraum zu $H^1(U)$

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} = \sup \{ |(g, f)| : g \in H^1_0(U), \|g\|_{H^1_0} \le 1 \}$$

mit $H^1 \subseteq L^2 \subseteq H^{-1}$

dementsprechend definiert man $H^s(\mathbb{R}^d)$ für $s \in \mathbb{R}$.

$$f \in H^{-s} \quad |(f, g)| < \infty \quad \forall\, g \in H^s \quad s \geq 0$$

$\rightarrow$ $H^s(\mathbb{R}^d)$ Hilbertraum mit Innerem Produkt $(\cdot, \cdot)_{H^s}$

$$\|f\|_{H^s}^2 = (f, f)_{H^s} = \int |\hat{f}(\xi)|^2 \langle \xi \rangle^{2s} \, d\xi \, ;$$

$$(f, g)_{H^s} = \int d\xi \, \langle \xi \rangle^{2s} \, \overline{f(\xi)} \, g(\xi)$$

$$L_s^2(\mathbb{R}^d) = \{ f \in L^1_{loc} : \langle x \rangle^s f \in L^2 \}$$

$$\widehat{L_s^2}(\mathbb{R}^d) = H^s$$

<u>GNS</u> $\|u\|_{L^{p^*}} \lesssim \|Du\|_{L^1}$

$\hookrightarrow$ dazu duale Version

$\frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{p} +$

<u>Thm 2.3.4 (Hardy-Littlewood-Sobolev)</u>

$|x|^{-\gamma} \in L^{\frac{d}{\gamma}, \infty}$

Seien $0 < \gamma < d$, $1 < p < q < \infty$, $\frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{\gamma}{d}$

- $\| f * |\cdot|^{-\gamma} \|_q \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$

(**)

- $\left| \int \frac{f(x)\, h(y)}{|x-y|^\gamma} \, dx\, dy \right| = | \langle f, |\cdot|^{-\gamma} * h \rangle | \lesssim \|f\|_{L^p} \|h\|_{L^r}$

$$\frac{1}{r} + \underbrace{\left(\frac{1}{p} + \frac{\gamma}{d} - 1 \right)}_{1/q} = 1$$

<u>Beweis</u>: Zweite Ungleichung folgt aus erster Ungleichung per Dualität der L^p-Räume.

- $f * |\cdot|^{-\gamma} = \left(\int_{|y| < R} + \int_{|y| > R} \right) f(x-y)\, |y|^{-\gamma}$

$|y|>R$: $\| f * |\cdot|^{-\gamma} \mathbb{1}_{|y|>R} \|_\infty \le \|f\|_p \, \| |\cdot|^{-\gamma} \mathbb{1}_{|y|>R} \|_{p'}$

$= \text{const} \, \|f\|_p \, R^{(d-\gamma)/p'}$.

$|y|<R$:

Stein Singular Integrals

$\to$ <u>Lemma 1</u>: Sei $\varphi_\epsilon \equiv \epsilon^{-d} \varphi(x/\epsilon)$ radial abfallend, integrierbar mit $\int |\epsilon^{-d} \varphi(x/\epsilon)| dx \equiv A$

$\Rightarrow (f * \varphi_\epsilon)(x) \le A \, (Mf)(x)$ mit der

Maximalfunktion $(Mf)(x) = \sup\limits_{R>0} \frac{1}{|B_x(R)|} \int_{B_x(R)} |f|$

Hardy-Littlewood-Maximaloperator

<u>Lemma 2</u> $M: L^p \to L^p$ $1<p<\infty$ und $M: L^1 \to L^{1,\infty}$ beschränkt (Stein - Kapitel I)

$|(f * \underbrace{|\cdot|^{-\gamma} \mathbb{1}_{|y|<R}}_{\text{erfüllt Bed. von}})(x)| \le R^{d-\gamma} (Mf)(x)$

erfüllt Bed. von Lemma 1 mit $\| |\cdot|^{-\gamma} \mathbb{1}_{|y|<R} \|_{L^1} = R^{d-\gamma}$

$\to$ Optimiere in R: $R^{d-\gamma} (Mf)(x) + \|f\|_p R^{(d-\gamma)/p'}$
(also Summanden gleichsetzen)

$\Rightarrow |(f * |\cdot|^{-\gamma})(x)| \le \|f\|_p^{1-p/q} (Mf)(x)^{p/q}$

$\Rightarrow \int |\ldots|^q dx \le \|f\|_p^{q-p} \|Mf\|_p^p$

$\lesssim \|f\|_p^p$ ☒

Bem. 1) Hardy-Littlewood-Sobolev wird auch als fractional integration lemma bezeichnet, denn $|x-y|^{-\gamma} = |\xi|^{-d+\gamma}$ $(\gamma < d)$

Fouriermultiplikator

$$\int |\xi|^{-d+\gamma} e^{2\pi i x\cdot\xi} \underset{\xi \mapsto \xi/|x|}{=} \text{const } |x|^{-\gamma}$$

9.12.2020

2) Optimale Konstanten und Optimierer von (*) wurden von Lieb bestimmt für $p = r = 2d/(d-\gamma)$ bestimmt

$$\Rightarrow \quad h = \text{const} \cdot f, \quad f(x) = A \cdot \frac{1}{(\lambda^2 + |x-a|^2)^{(2d-\gamma)/2}}$$

Wenn $d=3$, $\gamma = 2$ $\Rightarrow$ $f(x)$ ist 3d-Poissonkern also der Kern von $e^{-\lambda|\xi|}$

3) HLS ist ein Spezialfall der schwachen Young-Ungl.

$d_f : \mathbb{R}_+^0 \to \mathbb{R}_+^0$

$\alpha \geq 0$ $\quad d_f(\alpha) = \text{Leb}\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| > \alpha\}$

$1 \leq p < \infty$ Schwache L^p-"Norm" $\|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup\{\gamma > 0 : \gamma\, d_f(\gamma)^{\frac{1}{p}}\}$

$$= \inf\{c > 0 : d_f(\alpha) \leq \frac{c^p}{\alpha^p}\}$$

Bsp $|x|^{-q}$ $\quad \displaystyle\int_{|x|^{-q} > \alpha} dx = |B_0(1)|\, \alpha^{-d/q}$

$|x|^{-q} > \alpha$

$|x| < \alpha^{-1/q}$ $\quad \Rightarrow \quad |x|^{-q} \in L^{d/q, \infty}(\mathbb{R}^d)$

Schwache Young: $\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^{p,\infty}} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}$

$1 + 1/r = 1/p + 1/q$

Andererseits folgt schwaches Young aus HLS + Rieszscher Umordnungsungleichung.

$$\left| \int f(x)\, g(x-y)\, h(y)\, dx\, dy \right| \leq \int f^*(x)\, g^*(x-y)\, h^*(y)$$

wobei $f^*(x) = \int_0^\infty \mathbb{1}^*_{\{|f|>\alpha\}}\, d\alpha \equiv \int \mathbb{1}_{\{|f|>\alpha\}^*}\, d\alpha$

wobei für $A \subset \mathbb{R}^d$ die sphärische Umordnung

$A^* = B_0(r)$ für die gilt $\mathrm{Leb}(A) = \mathrm{Leb}(A^*)$

$\rightarrow$ Details in Lieb-Loss (Analysis)

$$\|g\|_{L^p}^p = \int |g(x)|^p\, dx = p \int_0^\infty d_g(\alpha)\, \alpha^{p-1}\, d\alpha = \|g^*\|_{L^p}$$

$$g^*(x) \leq \underbrace{|x|^{-n/q}}_{\hookrightarrow HLS} \|g\|_{L^{q,\infty}}$$

Jetzt: HLS $\Rightarrow$ GNS

<u>Korollar</u> $\|f\|_{2^*} \lesssim \|\nabla f\|_2$, $2^* = \frac{2d}{d-2}$

<u>Beweis</u> Mit Dualität der L^p-Räume

$$\|f\|_q^2 = \sup\{ |(f,g)|^2 : \|g\|_{q'} \leq 1\}$$

$$= \sup\{ |(\xi \hat{f}, \tfrac{1}{\xi} \hat{g})|^2 : \|g\|_{q'} \leq 1\}$$

$$\leq \|\nabla f\|_2^2 \sup\{ |(\hat{g}, \tfrac{1}{\xi^2} \hat{g})| : \|g\|_{q'} \leq 1\}$$

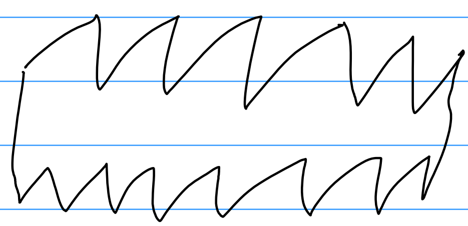
$$= \|\nabla f\|_2^2 \,\sup\Big\{ \Big|\Big(g, \underbrace{\frac{c}{|\cdot|^{d-2}} * g}_{\overset{?}{\in} L^q}\Big)\Big| : \|g\|_{q'} \Big\}$$

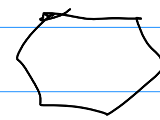
$$\overset{HLS}{\lesssim} \|\nabla f\|_2^2 \,\|g\|_{q'}^2$$

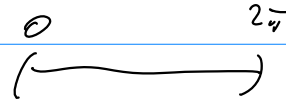
$|\cdot|^{-(d-2)}$

$\overset{?}{L^{d/(d-2)}}$

$$1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{q'} + \frac{d-2}{d} \Rightarrow \dots \Rightarrow q = 2^*$$







2.3.2 Differentialoperatoren und Selbstadjungiertheit

Beispiel 2.3.5 Impulsoperator in $L^2(0, 2\pi)$ mit periodischen und Dirichlet-Randbedingungen

$$\mathfrak{h} = L^2(0, 2\pi). \qquad A_0 : \mathcal{D}(A_0) \to \mathfrak{h}$$
$$f \mapsto -if'$$

$$\mathcal{D}(A_0) = \{ f \in C^1([0, 2\pi]) : f(0) = f(2\pi) \overset{!}{=} 0 \}$$

A_0 ist symmetrisch wg partieller Integration

$f, g \in \mathcal{D}(A_0)$ $$(f, A_0 g) = -i \int_0^{2\pi} \overline{f(x)}\, g'(x)\, dx = -i \bar{f} g \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \overline{-if'}\, g$$

$$= (A_0 f, g) \to A_0 \text{ symmetrisch.}$$

Wir bestimmen jetzt A_0^* und zeigen $\mathcal{D}(A_0^*) = H^1(0,2\pi)$

Zunächst: $\mathcal{D}(A_0^*) \subset H^1(0,2\pi)$

$f \in \mathcal{D}(A_0)$, $g \in \mathcal{D}(A_0^*)$

$$\int_0^{2\pi} \overline{g(x)}\, -i f'(x)\, dx = \int_0^{2\pi} \overline{\tilde{g}(x)}\, f(x) dx \quad \text{für ein } \tilde{g} \in L^2$$

Mittels partieller Integration:

$$\int_0^{2\pi} dx\, f'(x) \left(\overline{\int_0^x \tilde{g}(t)\,dt}\right) = \left.\begin{matrix} f(2\pi)\int_0^{2\pi} dt\, \overline{\tilde{g}(t)} \\ - f(0)\int_0^0 dt\, \overline{\tilde{g}(t)}dt \end{matrix}\right\} 0$$
$$- \int_0^{2\pi} dx\, f(x)\, \overline{\tilde{g}(x)}dx$$

$$\Rightarrow \int f'(x) \underbrace{\overline{\left(g(x) - i\int_0^x \tilde{g}(t)dt\right)}}_{\text{orthogonal zu } f',\ f \in \mathcal{D}(A_0)} dx = 0$$

$$\Rightarrow g(x) - i\int_0^x \tilde{g}(t)dt \in \{f' : f \in \mathcal{D}(A_0)\}^\perp$$

Da aber $\{f' : f \in \mathcal{D}(A_0)\} = \{h \in C^0(0,2\pi) : \int_0^{2\pi} h(t)dt = 0\}$

$\mathcal{D}(A_0) = \{f \in C^1(0,2\pi) : f(0) = f(2\pi) = 0\}$

und C^0 dicht in $L^2(0,2\pi)$ folgt

$$\overline{\{f' : f \in \mathcal{D}(A_0)\}} = \{h \in L^2(0,2\pi) : (h, 1)_{L^2} = 0\}$$
$$= \{1\}^\perp$$

$$\Rightarrow \underbrace{\{f' : f \in \mathcal{D}(A_0)\}^\perp}_{\ni\ g(x) - i\int_0^x \tilde{g}(t)dt} = \operatorname{span}\{1\} \Rightarrow g(x) - i\int_0^x \tilde{g}(t)dt \overset{!}{=} g(0)$$

$\Rightarrow g \in AC([0,2\pi])$

$\Rightarrow g \in H^1$

$\Rightarrow \quad \mathcal{D}(A_0^*) \subseteq H^1(0,2\pi), \qquad A_0^* g = \tilde{g} = -ig'$

Umgekehrt ist aber $H^1 \subseteq \mathcal{D}(A_0^*)$;

in dem Fall, für $g \in H^1$,

$$\int \overline{g(x)}\,(-if'(x)) = -i f g \Big|_0^{2\pi} + \int f(x)\,\overline{-ig'(x)}$$

$\Rightarrow \quad A_0^* f = -if'$ und $\mathcal{D}(A_0^*) = H^1(0,2\pi)$.

$\Rightarrow \quad A_0$ zwar symmetrisch, aber $\mathcal{D}(A_0) \subsetneq \mathcal{D}(A_0^*)$

$\Rightarrow A_0$ ist nicht s.a.

<u>Jetzt</u> A_0 ist nicht einmal wesentlich s.a $\subset A^*$

Da $\overline{A_0} = A_0^{**} \subseteq A_0^*$ können wir wieder

$\uparrow$ abgeschlossen

partiell integrieren, dh

$$0 = (g, \overline{A_0} f) - (A_0^* g, f) = i\left(f(0)g(0) - f(2\pi)g(2\pi)\right)$$

Da $g \in \mathcal{D}(A_0^*)$, sind Randwerte von $g(x)$ nicht festgelegt $\Rightarrow$ notwendigerweise $f(0) = f(2\pi) = 0$.

$\Rightarrow \quad \mathcal{D}(\overline{A_0}) = \{ f \in \mathcal{D}(A_0^*) : f(0) = f(2\pi) = 0 \} \subsetneq \mathcal{D}(A_0^*)$

$\Rightarrow \quad A_0$ ist nicht wesentlich s.a

<u>Beispiel 2.3.6</u> Sei nun $Af = -if'$ mit

$\alpha \in \mathbb{C}, \ |\alpha| = 1$

$$\mathcal{D}(A) = \{ f \in C^1([0,2\pi]) : f(0) = \alpha f(2\pi) \}.$$

$\Rightarrow \quad A_0 \subseteq A$, d.h. $A^* \subseteq A_0^*$ mit $D(A_0^*) = H^1(0,2\pi)$

$\Rightarrow$ mit p.I. $\quad 0 = (g, Af) - (A^* g, f) = i f(0)\left(\overline{g(0)} - \overline{g(2\pi)}\right)$
$(f \in D(A), g \in D(A^*))$

$\Rightarrow \quad g(0) = g(2\pi) \quad \Rightarrow \quad D(A^*) = \{ f \in H^1(0,2\pi) : f(0) = f(2\pi) \}$

$\rightarrow$ mit ähnlichen Argumenten wie zuvor erhält man

$\overline{A} = A^*$, d.h. A ist wesentlich s.a.

Bem Man könnte meinen, dass es zwischen zwei symmetrischen Operatoren A_0 und A keine großen Unterschied gibt, da sie auf einer dichten Teilmenge von Funktionen übereinstimmen; das Gegenteil ist der Fall!

Beispiel 2.3.7 Wir zeigen, dass 1) A_0 keine Eigenfunktionen hat
2) die Eigenfkt.en von A den Hilbertraum aufspannen.

zu 1) $A_0 f = -if' \quad D(A_0) = \{ f \in C^1[0,2\pi] : f(0) = f(2\pi) = 0 \}$

$$A_0 f = -if' = \lambda f; \quad f(x) = e^{-i\lambda x} f(0)$$

mit Randbedingung $f(0) = f(2\pi) = 0$, d.h. $f(x) = 0$.
$\rightarrow A_0$ hat keine Eigenvektoren.

zu 2) Lediglich die Randbed $f(0) = f(2\pi) = e^{2\pi i \lambda}$

$\Rightarrow \quad \lambda \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow$ die Eigenwerte sind die ganzen Zahlen

und Eigenfktionen sind $f_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$
Diese bilden eine ONB von $L^2(0,2\pi)$
(Damit ist insbesondere A wesentlich s.a. nach Satz 1.3.7)

Schließlich noch zur Resolvente:

($$(A-z)^{-1} = \int dE_A(\lambda)\,\frac{1}{\lambda - z} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|u_n\rangle\langle u_n|}{\lambda_n - z}$$

$$\Rightarrow (A-z)^{-1}(x,y) = \sum_n \frac{e^{in(x-y)}}{n-z}\,.$$ ($\to$ n-Summe in Weidmann)

hier per Hand: $(A-z)f = g \Leftrightarrow f = (A-z)^{-1}g$

$\to$ wir lösen dazu die ODE $-if' = zf + g$

$$f(x) = \underline{f(0)}\,e^{izx} + i\int_0^x e^{ix(z-t)} g(t)\,dt \stackrel{!}{=} (A-z)^{-1}g$$

mit Randbed. $f(2\pi) = f(0)$ ergibt sich

$$f(0) = f(0)\cdot e^{2\pi i z} + i\int_0^{2\pi} e^{i2\pi(z-t)} g(t)\,dt\,.$$

$$f(0) = \frac{i}{e^{-2\pi i z}-1}\int_0^{2\pi} e^{-izt} g(t)\,dt$$

$$\Rightarrow f(x) = ((A-z)^{-1}g)(x) \equiv \int_0^{2\pi} dt\; G(z,x,t)\,g(t)$$

$$G(z,x,t) = e^{iz(x-t)}\begin{cases} -\dfrac{i}{1-e^{-2\pi i z}} & t>x \\[2mm] \dfrac{i}{1-e^{2\pi i z}} & t<x \end{cases}$$

$z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}\,.$

| Sturm-Liouville-Probleme: wenn zusätzlich zweite Ableitungen vorkommen

$$\frac{u_1^{(2)}(x)\,u_2^{(2)}(t)}{W(x,t)}$$)

Beispiel 2.3.8 Laplace (mittels quadratischer Formen)

$A = -d_x^2 f = -f'' \quad D(A) = \{f \in C^2([0,2\pi]) : f(0) = f(2\pi) = 0\}$

(i) A ist symmetrisch und nicht-negativ (p.I)

(ii) $\mathcal{Y}_A = \{f \in H^1(0,2\pi) : f(0) = f(2\pi) = 0\}$
$\left(\overline{D(A)}^{\|\cdot\|_A} \right. \qquad \|f\|_A^2 = (f,(1+A)f)$

(iii) $\tilde{A} = A^*\big|_{\mathcal{Y}_A} \quad D(\tilde{A}) = \{f \in H^2(0,2\pi) : f(0) = f(2\pi) = 0\}$
$\tilde{A}f = -f''$

10.12.2020

Beweis (ii) $\quad (g,f)_A = \int_0^{2\pi} \left(\overline{g(x)} f(x) + \overline{g'(x)}\, f'(x) \right) dx.$

wir zeigen erst $\mathcal{Y}_A \subseteq \{f \in H^1(0,2\pi) : f(0) = f(2\pi) = 0\}$

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{Y}_A$ Cauchy $\Leftrightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (f_n')$ Cauchy in $L^2(0,2\pi)$

$\Rightarrow f_n \longrightarrow f$ und $f_n' \to g$ in $L^2(0,2\pi)$

Da $f_n(x) = \int_0^x dt\, f_n'(t)$ folgt $f(x) = \int_0^x dt\, g(t)$,

d.h. $f \in AC[0,2\pi]$, also insb. $f \in H^1(0,2\pi)$.
pktweise f.ü.

$0 = f_n(0) = 0 \Rightarrow \underset{= \int_0^0 g(t)dt}{f(0)} = 0. \quad f(2\pi) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f_n'(t)\,dt = 0.$

$\Rightarrow \mathcal{Y}_A \subseteq \{f \in H^1(0,2\pi) : f(0) = f(2\pi) = 0\}.$

Zur Umkehrung:

Dazu approximieren wir f' durch glatte g_n

Der Bequemlichkeit halber ersetzen wir g_n durch

$g_n - \frac{1}{2\pi}\underline{\int_0^{2\pi} g_n(t)dt}$. Durch diese Ersetzung können

wir annehmen, dass $\int_0^{2\pi} g_n(t) = 0$.

Definiert man nun $f_n(x) = \int_0^x g_n(t)\,dt$, dann ist $f_n \in \mathcal{D}(A)$ und

$f_n \to f$.

(iii) Wir bestimmen nun $\tilde{A} = A^*|_{\mathfrak{h}_A}$. Es gilt

$f \in \mathcal{D}(\tilde{A}) \Leftrightarrow \exists\, \tilde{f} \in \mathfrak{h}$ sodass für alle $g \in \mathfrak{h}_A$

(wie bei Lemma 2.2.4) $(g, f)_A = (g, \tilde{f})$ gilt.

$$\Leftrightarrow \int_0^{2\pi} \overline{g'} f' = \int_0^{2\pi} \bar{g}(\tilde{f} - f)$$

(keine Randterme, da $g \in \mathfrak{h}_A$)

$$\overset{\text{P.I.}}{=} -\int_0^{2\pi} \overline{g'} \int_0^x dt\, (\tilde{f} - f)(t)$$

(Erinnerung an Bsp 2.3.5)

$$\Leftrightarrow 0 = \int_0^{2\pi} \overline{g'(x)} \left[f'(x) + \int_0^x dt\, (\tilde{f}(t) - f(t)) \right]$$

$$\{g' : g \in \mathfrak{h}_A\} = \{h \in \mathfrak{h} : \int_0^{2\pi} h(t)\,dt = 0\}$$

$$= \{1\}^\perp.$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) + \int_0^x dt\, (\tilde{f}(t) - f(t)) \in \operatorname{span}\{1\}$$

$\Leftrightarrow \quad f' \in AC[0,2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad f \in H^2[0,2\pi]$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{D}(\tilde{A}) = \{ f \in H^2([0,2\pi]) : f(0) = f(2\pi) = 0 \}.$$

$$\left(\tilde{A} f = - f'' \right)$$

$\boxed{}$

$\rightarrow$ Jetzt: Freier Schrödinger $-\Delta$ in $L^2(\mathbb{R}^d)$

für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ist $-\Delta f = \mathcal{F}^{-1}(\xi^2 \hat{f})(x)$
und Gleichheit setzt sich fort für Funktionen aus dem „maximalen Definitionsbereich" $H^2(\mathbb{R}^d)$ (wenn die Ableitungen im schwachen Sinne verstanden werden)

$\rightarrow$ Der Operator $H_0 = -\Delta : \mathcal{D}(H_0) = H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$ ist unitär äquivalent zum Multiplikationsoperator

$$M_{\xi^2} : L^2_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$$
$$\psi \mapsto \xi^2 \psi(\xi)$$

$$L^2_\sigma(\mathbb{R}^d) = \{ f \in L^2 : \langle x \rangle^\sigma f \in L^2 \} \qquad \langle x \rangle^\sigma = (1+|x|^2)^{\frac{\sigma}{2}}$$

<u>Theorem 2.3.5</u> Der freie Operator

$$H_0 = -\Delta : H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d) \quad \text{ist selbstadjungiert}$$
$$f \mapsto -\Delta f$$

mit Spektrum $\sigma(H_0) = [0, \infty)$.

Für die Resolvente gilt:

$$(\psi, (H_0 - z)^{-1}\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu_\psi(h)}{h-z} \quad \text{, wobei}$$

$$d\mu_\psi(h) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(h)\, h^{\frac{d}{2}-1} \Big(\int_{S^{d-1}} |\hat{\psi}(\sqrt{h}\,\omega)|^2 d\omega \Big) dh .$$

("Spektralmaß"

$$\mu_\psi(A) = \int_A f(h)\, dh .$$

Bemerkung Durch Skalieren ($\omega \mapsto \omega/\sqrt{h}$) erhält man

$$d\mu_\psi(h) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(h)\, h^{-\frac{1}{2}} \Big(\int_{\sqrt{h}\, S^{d-1}} |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega \Big) dh$$

$d\omega$ ... euklid. Flächenmaß auf S^{d-1}

$\to \frac{d\omega}{2\sqrt{h}} = \frac{d\omega}{|\nabla \xi^2|}\Big|_{|\xi| = \sqrt{h}}$;

$|\nabla \xi^2| = 2|\xi| = 2h^{1/2}$

$\delta^{(d-1)}(|\xi| - \sqrt{h})$

Allgemein: für $P: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $|\nabla P| \neq 0$ gilt

$$\underbrace{P^* \delta_0(\xi)}_{\text{Leray-Maß}} = \frac{d\Sigma(\xi)}{|\nabla P(\xi)|}$$

(→ Hörmander I Thm 6.1.5)

$d\Sigma$ ... euklidisches Flächenmaß auf $\{\xi : P(\xi) = 0\}$

$(P(\xi) = \xi^2 - h)$

$P(\xi) = |\xi|^\alpha$; $P(\xi) = \xi_0^2 - \sum_{j=1}^{d+1} \xi_j^2$ ...

(Kegel)

Pf Selbstadjungiertheit folgt aus Behauptung 2.1.1 und der Tatsache, dass $-\Delta$ auf H^2 mittels Fouriertransf unitär äquivalent zum Multiplikations-

Operator $M_{\xi^2}: L^2_2 \to L^2$ ist. Insbesondere folgt
$\sigma(H_0) = \sigma(M_{\xi^2}) = [0,\infty)$.

$$(\Psi, (H_0 - z)^{-1}\Psi) = \int_{\mathbb{R}^d} d\xi \, |\hat{\Psi}(\xi)|^2 (\xi^2 - z)^{-1}$$

$$= \int_0^\infty dk \, \frac{k^{d-1}}{k^2 - z} \int_{S^{d-1}} d\Sigma(\omega) \, |\hat{\Psi}(k\omega)|^2$$

$h \mapsto h^{1/2}$
$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty dh \, \frac{h^{\frac{d}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}}{h - z} \int_{S^{d-1}} d\Sigma(\omega) |\hat{\Psi}(\sqrt{h}\omega)|^2$$

$\boxtimes$

Bemerkung Später zeigen wir, dass

$\sigma(H_0) = \sigma(\mu_\Psi) \leftarrow$ topologischer Träger / Menge aller Wachstumspunkte,

definiert durch $\sigma(\mu_\Psi) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \mu(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon) > 0 \; \forall \epsilon > 0\}$

Zur Erinnerung: Träger eines μ ist Komplement der Menge, wo μ verschwindet.

Def $\mu(\mathbb{R} \setminus A) = 0 \;:\Leftrightarrow\; A$ ist ein Träger vom Maß μ.

Warnung Träger von Borelmaßen nicht eindeutig

Bsp Lebesgue in $\mathbb{R}$: z.B. ist $\mathbb{R}$ ein Träger, aber auch $\mathbb{R} \setminus \mathcal{E}$ für $\mathcal{E}$ abzählbar, z.B. $\mathcal{E} = \mathbb{Q}$.

z.B. ist auch das Komplement der 3er-Cantormenge ein Träger von Lebesgue.

Lemma 2.3.7 $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sind determinierende Unterräume für Fouriermultiplikatoren $m(\xi)$, die polynomiell beschränkt sind, z.B. $m(\xi) = \xi^2,\ |\xi|^s,\ (1+|\xi|)^s, \dots$

Beweis Wenn $|m(\xi)| \lesssim 1+|\xi|^s$, dann ist der zugehörige maximale Domain $\mathcal{D} = H^s(\mathbb{R}^d)$. Da $C_c^\infty, \mathcal{S}$ dicht in H^s $\forall s \geq 0$, folgt die Aussage.

↳ Weidmann I, Satz 11.20. ☒

2.4 Selbstadjungiertheit von Schrödingeroperatoren $-\Delta+V$ in $L^2(\mathbb{R}^d)$

Bsp 2.4.1 Wasserstoff mittels GNS und Hardy

$Z>0$. $\quad -\Delta - \frac{Z}{|x|}$ in $L^2(\mathbb{R}^3)$.

→ Frage Definitionsbereich, sodass $-\Delta - Z/|x|$ selbstadjungiert realisiert.

Zunächst: Zugang über quadratische Formen + Friedrichs.

trickreich Domain auszurechnen → $-\Delta - \frac{\kappa}{|x|^2}$ oder $|p| - \gamma/|x|$ oder $-i\alpha\cdot\nabla + \beta - \nu/|x|$

↳ bei kritischen Kopplungskonstanten ist Charakterisierung schwierig; → für $\sqrt{-\Delta+1} - 1 - \gamma/|x|$ in $L^2(\mathbb{R}^3)$ durch Le Yaouanc, Oliver, Raynal

JMP (1997)

oder für $-i\alpha\nabla + \beta - \nu/|x|$ von

Morozov–Müller (2017) ↳ JMP

$$-\Delta - \frac{Z}{|x|} \overset{x \mapsto x/Z}{\cong} Z^2 \underline{\underline{(-\Delta - 1/|x|)}}$$

Wir zeigen nach Unten Beschränktheit der quad Form. $c + (f, -\Delta f) = \|\nabla f\|^2 + c$

$\|f\|_{2^*} \lesssim \|\nabla f\|_2$

$2^* = \frac{2d}{d-2} \overset{d=3}{=} 6$

$$\underline{\underline{\left(f, \frac{1}{|x|} f\right)}} = \int \frac{|f|^2}{|x|} dx = \min_{\alpha > 0} \left(\int_{|x| < \alpha} dx + \int_{|x| > \alpha} dx \right) \frac{|f|^2}{|x|}$$

$$\leq \min_{\alpha > 0} \left(\frac{1}{\alpha} \|f\|_2^2 + \|f\|_6^2 \left(\int_{|x| < \alpha} \frac{dx}{|x|^{3/2}} \right)^{2/3} \right)$$

$$\overset{GNS}{\leq} \min_{\alpha > 0} \left(\frac{1}{\alpha} \|f\|_2^2 + \text{const} \|\nabla f\|_2^2 \cdot \alpha \right)$$

$$= \underline{\text{const} \|\nabla f\|_2} \|f\|_2 .$$

minimal, wenn $\alpha = \frac{\|f\|_2}{\|\nabla f\|_2}$

$\Rightarrow$ für $f \in H^1$ erhalten wir

$$(f, (-\Delta - \frac{1}{|x|}) f) \geq \|\nabla f\|_2^2 - a \|\nabla f\|_2 \|f\|_2 \frac{\epsilon^{1/2}}{\epsilon^{1/2}}$$

$$\geq \|\nabla f\|_2^2 [1 - a\epsilon] - \frac{1}{\epsilon} \|f\|_2^2 > -\infty$$

$\Rightarrow \left(-\Delta - \frac{1}{|x|}\right) \geq -c$ für ein c und

$\frac{1}{|x|}$ ist infinitesimal $-\Delta$-Formbeschränkt,

d.h. $\forall \epsilon > 0 \ \exists a_\epsilon$ s.d.

$$(f, \tfrac{1}{|x|} f) \le \epsilon \|\nabla f\|^2 + a_\epsilon \|f\|_2^2$$

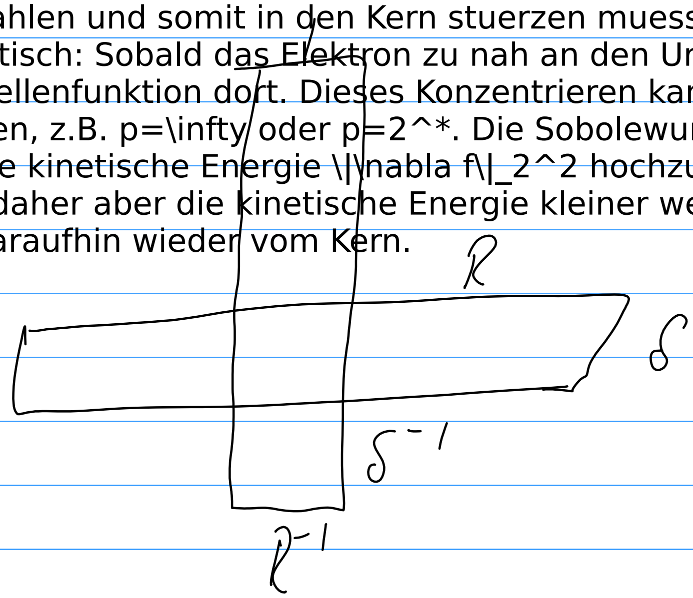
$\Rightarrow$ mit KLMN oder Friedrichs können wir eine s.a. Erweiterung konstruieren.

nächstes mal: $|x|^{-1}$ ist infinitesimal $-\Delta-$beschränkt (im Operatorsinne)

$\rightarrow$ Kato-Rellich anwendbar.

17.12.2020

Bemerkung: Bereits die GNS gibt uns ein erstes Beispiel fuer ein Unschaerfeprinzip, da es den Einsturz des Elektrons in den Kern verhindert. (Erinnerung: aus klassischer Elektrodynamik ist bekannt, dass beschleunigte Ladungen Energie in Form von Licht abstrahlen und somit in den Kern stuerzen muessten.)
Heuristisch: Sobald das Elektron zu nah an den Ursprung geraet, konzentriert sich die Wellenfunktion dort. Dieses Konzentrieren kann man in Skalen der L^p-Raeume messen, z.B. p=\infty oder p=2^*. Die Sobolewungleichung zwingt jedoch in diesem Fall die kinetische Energie \|\nabla f\|_2^2 hochzugehen. Wegen Energieerhaltung muss daher aber die kinetische Energie kleiner werden, d.h. das Elektron entfernt sich daraufhin wieder vom Kern.



heute: Selbstadjungiertheit von $-\Delta - 1/|x|$

$$\| |x|^{-1} f\|_2^2 = \int \frac{|f|^2}{|x|^2} \overset{\text{Hardy}}{\le} 4 \underbrace{\|\nabla f\|_2^2}_{(f, -\Delta f) \le \|f\|_2 \|-\Delta f\|_2}$$

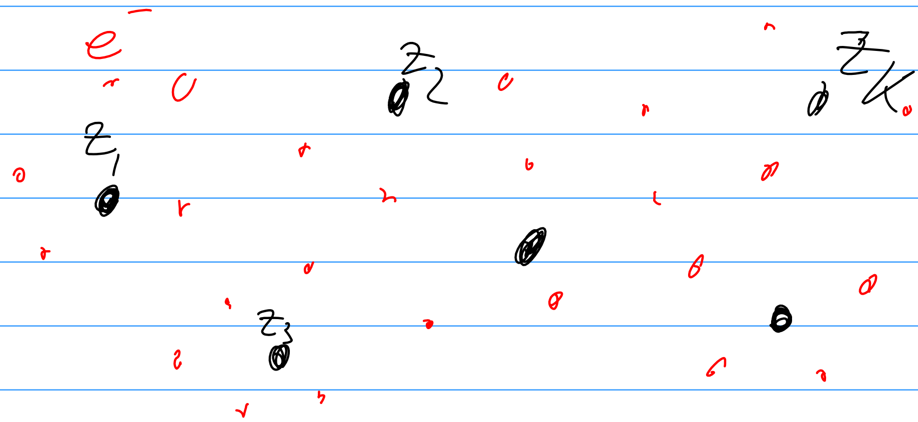
$$\le \epsilon \|-\Delta f\|^2 + \frac{4}{\epsilon} \|f\|^2$$

$\Rightarrow$ $|x|^{-1}$ ist infinitesimal operator-beschr. bzgl $-\Delta$

$\Rightarrow$ Insb. folgt aus Kato-Rellich, dass
$-\Delta - 1/|x|$ s.a. mit $\mathcal{D}(-\Delta - \frac{1}{|x|}) = \mathcal{D}(-\Delta) = H^2(\mathbb{R}^3)$

$\rightarrow$ verallgemeinerbar auf Moleküle in der Born-Oppenheimer-Approximation

$(Z_k)_{k=1}^K \in \mathbb{R}_+$



K Kerne sind fest mit Positionen $(R_k)_{k=1}^K \subseteq \mathbb{R}^3$

und N Elektronen sind frei beweglich.

$$H_{BO} = \sum_{\nu=1}^N -\Delta_\nu - \sum_{\nu=1}^N \sum_{k=1}^K \frac{Z_k}{|x_\nu - R_k|} + \sum_{1 \le \nu < \mu \le N} \frac{1}{|x_\nu - x_\mu|}$$

$$+ \sum_{1 \le k < k' \le K} \frac{1}{|R_k - R_{k'}|}$$

In $L^2(\mathbb{R}^{3N})$ ist. s.a. mit $\mathcal{D}(H_{BO}) = H^2(\mathbb{R}^{3N})$

$$\underbrace{-\Delta - \frac{a}{|x|^2}}_{\text{homogen vom Grad } -2} \geq 0 \quad \forall\, a \leq \left(\frac{d-2}{2}\right)^2$$

$f(x) = |x|^{-\alpha} g(x)$

$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^{-\alpha}$

Frage Was ist der GZ von $-\Delta - \frac{1}{|x|}$ und was ist $\inf \sigma(-\Delta - \frac{1}{|x|}) \equiv \mu_1(-\Delta - \frac{1}{|x|})$ (restl. EW $\mu_n(\dots)$)

(z.B. in Reed-Simon Thm XIII.1-2)

Min-max-Charakterisierung: $\mu_n = \sup_{\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}} \inf_{\psi \in [\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}]^\perp;\ \psi \in Q(H)} (\psi, H\psi)$

→ Idee: Grundzustandstransformation, da Operator aus homogenen Teilen besteht, nämlich $-\Delta$ und $1/|x|$.

→ Motiviert Potenzreihenansatz oder gleich

$$\psi(x) = \underline{e^{-\alpha|x|}}\varphi(x), \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ \varphi \in H^1.$$

wg min-max: $\mu_1(H) = \inf (\psi, H\psi)$

$$\nabla e^{-\alpha|x|} = -\alpha \cdot \frac{x}{|x|} e^{-\alpha|x|}; \quad -\Delta e^{-\alpha|x|} = \left(\frac{2\alpha}{|x|} - \alpha^2\right) e^{-\alpha|x|}$$

$$\left(-\Delta - \frac{1}{|x|}\right) e^{-\alpha|x|} = e^{-\alpha|x|}\left(-\alpha^2 + \frac{2\alpha-1}{|x|}\right); \quad \alpha = \frac{1}{2} \text{ scheint vernünftig.}$$

$-\Delta - V$ beschreibt qm. Bewegung

V hat singulären Teil (und fällt im ∞ ab)

$-\Delta$: $e^{ix\cdot\xi}$

$-\Delta e^{ix\cdot\xi} = \xi^2 e^{-ix\cdot\xi}$

1 angeregte Zst 0 Virialsatz

$\sigma(-\Delta) = \sigma_{ess}(-\Delta) = [0,\infty)$

→ keine eingebetteten EW

Eigenfkt, die zum $\inf \sigma_d(H)$ gehört heißt Grundzustand

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{pp} \oplus \mathcal{H}_{sc}$

Eigenfkt

$|(\psi, e^{itH}\psi)|^2 \xrightarrow{t\to\infty} 0$ ... Streuzst ... WS den Zst $\psi(t)$ wieder in ψ zu finden

$i\partial_t \psi = H\psi \qquad \psi = e^{itH}\psi_0$

$d\mu_\psi^{(A)} = (\psi, dE_A^{(\lambda)}\psi)$ $|\psi(x)|^2$ ... WS-Dichte Teilchen an Pkt x zu finden

↳ ac sc pp.

(Exkurs Ende)

φ oBdA reellwertig (ansonsten in Real- u. Im.-teil zerlegen)

$$\psi = \underbrace{e^{-\alpha|x|}}_{g(x)}\varphi(x), \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

$$|\nabla\psi|^2 = |\nabla g|^2|\varphi|^2 + |g|^2|\nabla\varphi|^2 + 2g(x)\nabla g \cdot \underbrace{\varphi\nabla\varphi}_{\nabla(\varphi^2)\cdot\frac{1}{2}}$$

$$\nabla g = \frac{1}{2}\frac{x}{|x|}e^{-|x|/2}$$

$$(\psi, (-\Delta - \tfrac{1}{|x|})\psi) = \int dx\, e^{-|x|}\left[\frac{1}{4}|\varphi|^2 + |\nabla\varphi|^2 - \frac{1}{2}\frac{x}{|x|}\nabla(\varphi^2) - \frac{|\varphi|^2}{|x|}\right]$$

$$= \int dx\, e^{-|x|}\left[|\nabla\varphi|^2 + \varphi^2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{|x|} - \frac{1}{2} + \frac{1}{|x|}\right)\right]$$

$$= \int dx\, e^{-|x|}\left[|\nabla\varphi|^2 - \frac{1}{4}|\varphi|^2\right] = (\psi, H\psi)$$

↳ jetzt $\inf_\varphi$ nehmen

$$\psi = e^{-|x|/2}\varphi \quad \geq -\frac{1}{4}\|\psi\|^2$$

↳ Gleichheit herrscht gdw $\varphi = \text{const.}$

$\rightarrow$ $\psi(x) = e^{-|x|/2}$ ist GZ.

Jetzt Hinreichende Bedingungen an V für Selbstadjungiertheit v. $-\Delta + V$

Lemma 2.4.3 Sei $\varphi \in D(-\Delta) = H^2(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 1$

a) $d \leq 3$; dann ist φ stetig und beschränkt und für alle $a > 0$ $\exists$ $b(a) > 0$, sodass

$$\|\varphi\|_\infty \leq a\|-\Delta\varphi\|_2 + b\|\varphi\|_2$$

b) $d \geq 4$ und $2 \leq q \leq \frac{2d}{d-4}$: dann ist $\varphi \in L^q$

und $\forall\, a > 0\ \exists\, b(a) > 0$ s.d.

$$\|\varphi\|_q \leq a\|-\Delta\varphi\|_2 + b\|\varphi\|_2.$$

$\|-\Delta\varphi\|^2 = \int |\xi|^4 |\hat\varphi|^2 d\xi$

Pf a) $\|\varphi\|_\infty^2 \leq \|\hat\varphi\|_1^2 = \left(\int |\hat\varphi(\xi)| \langle\xi\rangle^2 \langle\xi\rangle^{-2}\right)^2$

$\leq \|(1-\Delta)\varphi\|_2^2 \cdot \text{Zahl}$ $\qquad \int \frac{d\xi}{\langle\xi\rangle^4} < \infty$ $\Leftarrow$ $\underline{d<4}$

$\lesssim \|-\Delta\varphi\|_2^2 + \|\varphi\|_2^2$

$$\|\varphi\|_\infty \lesssim \|-\Delta\varphi\|_2 + \|\varphi\|_2$$

Skalierungstrick um infinitesimale Δ-Schranke zu bekommen.

z.z. $\|\hat\varphi\|_{L^1} < a\|-\Delta\varphi\|_2 + b\|\varphi\|_2\ \forall a$

$r^{+d}\int \hat\varphi(r\xi) e^{ix\xi} d\xi$

$\hat\varphi_r(\xi) = r^d \hat\varphi(r\xi) \Rightarrow \|\hat\varphi\|_{L^1} = \|\hat\varphi_r\|_{L^1}$

$\|$

$\varphi_r(x) = \varphi(\frac{x}{r})$ $\qquad \|\varphi_r\|_2 = r^{d/2}\|\varphi\|_2$

$\|-\Delta\varphi_r\|_2 = r^{d/2-2}\|-\Delta\varphi\|_2$

$\Rightarrow \|\hat\varphi\|_{L^1} \lesssim r^{\frac{d}{2}-2}\|-\Delta\varphi\|_2 + r^{d/2}\|\varphi\|_2\ \forall r>0$

$\rightarrow$ r so klein machen wie man will.

b) analog: $\|\varphi\|_q \leq \|\hat\varphi\|_{q'} = \int |\hat\varphi(\xi)|^{q'} \cdot \left(\frac{\langle\xi\rangle}{\langle\xi\rangle}\right)^\beta$
$q \geq 2$

$\to$ mit Hölder β so wählen, dass man auf

$\|-\Delta\varphi\|_2 + \|\varphi\|_2$ $\boxtimes$

Prop 2.4.4 Sei $d=3$ und $V \in L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$ oder $d \geq 4$ und $V \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $p > d/2$.

Dann ist $-\Delta + V$ s.a. mit $D(-\Delta+V) = D(-\Delta)$ und wesentlich s.a. auf $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Pf Folgt aus Kato-Rellich und

$d=3$ $\quad \|V\varphi\|_2 \leq \|V_1\|_2 \underbrace{\|\varphi\|_\infty}_{\ll \varepsilon\|-\Delta\varphi\|_2} + \|V_2\|_\infty \|\varphi\|_2$

$L^2 \ni V_1 + V_2 \in L^\infty$

$d \geq 4$ $\quad \|V\varphi\|_2 \leq \|V\|_{L^p} \underbrace{\|\varphi\|_{L^q}}_{\ll \|-\Delta\varphi\|_2}$

mit $\frac{1}{2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$; $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \overset{p=\frac{d}{2}}{=}$

$= \frac{1}{2} - \frac{2}{d} = \frac{d-4}{2d}$

Aussage folgt aus Lemma 2.4.3. $\boxtimes$

Definition 2.4.5 $V: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ messbar heißt Rollnik-Potential, falls

$$\|V\|_R^2 = \int \frac{V(x)V(y)}{|x-y|^2}\, dx\, dy < \infty;$$

Die Klasse aller Rollnik-Potentiale bezeichnen wir mit R

$|(f, |\cdot|^{-\gamma} * g)| \lesssim \|f\|_p \|g\|_q$

Bemerkungen 2.4.6 1) $(R, \|\cdot\|_R)$ ist ein vollständiger Vektorraum unter der Rollniknorm $\|\cdot\|_R$.

2) Wg der Hardy-Littlewood-Sobolewungleichung ist

$L^{3/2} \subseteq R$ und das bedeutet, $r^{-\alpha} \in R + L^\infty$ für alle $\alpha < 2$

3) $\underbrace{\left(|\cdot|^{-\alpha}\right)^\wedge = c\,|\xi|^{-d+\alpha}}_{\text{im } \mathcal{S}'\text{-Sinne}}$, $0<\alpha<d$ (HA)

$\|\cdot\|_R$ $\quad \|V\|_R^2 = \int \frac{V(x)V(y)}{|x-y|^2}\,dx\,dy = (V, |\cdot|^{-2} * V)$

$$\underset{\text{Plancherel}}{=} (\hat{V}, |p|^{-1}\hat{V}) \geq 0$$

$(-\Delta - V)\psi = -e\psi$ $\qquad V^{\frac{1}{2}} = |V|^{\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{sgn} V$

$\Leftrightarrow \quad (-\Delta+e)|V|^{-\frac{1}{2}}\phi = V\psi = V^{\frac{1}{2}}\underbrace{|V|^{\frac{1}{2}}\psi}_{\phi}$

$$= V^{\frac{1}{2}}\phi$$

$\Leftrightarrow \quad \phi = \underbrace{|V|^{\frac{1}{2}}(-\Delta+e)^{-1}V^{\frac{1}{2}}}_{\text{Birman-Schwinger-Operator}}\phi$

$\to$ typischerweise kompakt; z.B. $V \in L^p$, $p \geq 2$

Der Integralkern vom $\underset{\text{Birman-Schwinger}}{BS}$ ist

$$|V|^{\frac{1}{2}}(x)\,(-\Delta+e)^{-1}(x-y)\,V^{\frac{1}{2}}(y)$$

heißt Rollnikkern.

HA

$$(-\Delta+e)^{-1}(x-y) = \frac{\exp(-\sqrt{e}\,|x-y|)}{|x-y|} \cdot \text{const}$$

$(\xi^2+e)^{-1}$ holomorph im Streifen $|\operatorname{Im}\xi| < e^{+1/2}$

Singularität ist dem Abfall von $\frac{1}{\xi^2+e}$ geschuldet.

$\rightarrow$ Rollnikkern $|V|^{\frac{1}{2}}(x)\, \frac{e^{-\sqrt{e}|x-y|}}{|x-y|}\, V^{\frac{1}{2}}(y)$

$\rightarrow$ $e=0$ und quadrieren und integrieren liefert

$$\longrightarrow \iint dx\,dy\, \frac{|V(x)|\,|V(y)|}{|x-y|^2} = \|V\|_R^2$$

die Rollniknorm

$$\Rightarrow \quad \|V\|_R^2 = \|V^{\frac{1}{2}}(-\Delta)V^{\frac{1}{2}}\|_{HS}^2$$

Hilbert-Schmidt

(Hilbert-Schmidt $\ni A \Leftrightarrow \sum |s_j(A)|^2 < \infty$

$s_j(A)$ sind Singulärwerte von A, also die EW von $\sqrt{A^*A}$

$$\infty > \|A\|_{HS}^2 = \sum |s_j(A)|^2 = \int |A(x,y)|^2\,dx\,dy$$

$$V \in R \Leftrightarrow \quad V^{\frac{1}{2}}(-\Delta)^{-1}V^{\frac{1}{2}} \in \gamma^2 \subseteq \gamma^\infty$$

Hilbert-Schmidt

kompakt

man sagt $V^{\frac{1}{2}}$ ist relativ form-kompakt bzgl $-\Delta$

$$\Leftrightarrow \quad V^{\frac{1}{2}}\left[(-\Delta)^{-1/2}+i\right]^{-1/2} \in \gamma^\infty$$

$$(\varphi, V\varphi) < (\varphi, T\varphi)$$
$$\| V^{\frac{1}{2}} \varphi \| < \| T^{1/2} \varphi \|$$

$(\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(V))$

Bem 2.4.7 V rel. form-kompakt bzgl. T
$\Rightarrow$ V infinitesimal form-beschr. bzgl. T.

V rel kompakt bzgl T
$\Rightarrow$ V infinitesimal Operator-bdd

13.1.2021

Lemma 2.4.8 Sei $V \in L^1 \cap L^2 \Rightarrow V \in R$ mit
$$\|V\|_R \leq \sqrt{3} \cdot (2\pi)^{1/3} \|V\|_{L^1}^{1/3} \|V\|_{L^2}^{2/3}$$

Beweis Sei $r > 0$ beliebig $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_{|x-y|>r} \frac{|V(x)||V(y)|}{|x-y|^2} \, dx\, dy \leq \frac{\|V\|_1^2}{r^2}$

$$\int_{|x-y|<r} \frac{|V(x)||V(y)|}{|x-y|^2} \, dx\,dy \overset{CS \text{ in } dxdy}{\leq}$$

$$\int_{|x-y|<r} dx\,dy \, \frac{|V(x)|^2}{|x-y|^2} \leq 4\pi r \|V\|_2^2$$

$$\Rightarrow \int_{|x-y|<r} + \int_{|x-y|>r} \frac{V(x)V(y)}{|x-y|^2} \, dx\,dy < \min_{r>0} \left\{ \frac{\|V\|_1^2}{r^2} + 4\pi r \|V\|_2^2 \right\}$$

$$= \sqrt{3}\,(2\pi)^{1/3} \|V\|_1^{2/3} \|V\|_2^{4/3}$$

$$\left(\text{mit } r = \left(\frac{\|V\|_1^2}{2\pi \|V\|_2^2}\right)^{1/3}\right)$$ ☐

Lemma 2.4.9 Sei $V \in R + L^\infty$ kompakt getragen

$\Rightarrow$ $V \in R \cap L^1$, also insb. lokal integrierbar.

Beweis Da jede kompakt getragene L^∞-Fkt. auch in $L^{3/2}$ ist, folgt aus Hardy-Littlewood-Sobolev $V \in R$.
Da $V \in R$, folgt aus Fubini $\int dy \, |V(y)| \, |x-y|^{-2} < \infty$

(~pigeonholing) für ein $x \in \operatorname{supp} V$. Für $y \in \operatorname{supp} V \subseteq B_0(\rho)$ für $\rho > 0$ hinreichend groß, ist $|x-y| < |x| + \rho$, d.h.

$$\int dy \, |V(y)| \frac{|x-y|^2}{|x-y|^2} < 4\rho^2 \int \frac{|V(y)|}{|x-y|^2} dy < \infty \qquad \boxed{}$$

<u>Prop 2.4.10</u> a) $V \in L^1 \cap L^2 \Rightarrow \forall a > 0$ gilt

$$\int \frac{V(x) V(y)}{|x-y|^2 + a^2} dx dy = \pi \int \frac{|\hat{V}(\xi)|^2}{|\xi|} e^{-2\pi a |\xi|} d\xi$$

b) Sei $0 \leq V \in L^1(\mathbb{R}^3)$. Dann ist $V \in R$ genau dann, wenn $\int |\hat{V}(\xi)|^2 |\xi|^{-1} d\xi < \infty$

c) Falls $V \in R \cap L^1(\mathbb{R}^3)$, dann gilt

$$\int \frac{V(x) V(y)}{|x-y|^2} dx dy = \pi \int \frac{|\hat{V}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi,$$

selbst, wenn V nicht als positiv vorausgesetzt wird.

<u>Bew</u> a) Für $f, h \in L^2$ und $g \in L^1$ gilt $(\underbrace{f}_{L^2}, \underbrace{h * g}_{L^2}) = (\hat{f}, \hat{h}\hat{g})$,

d.h. für $f = g = V$ und $h(x) = (x^2 + a^2)^{-1}$ folgt die Aussage aus $\hat{h}(\xi) = \pi |\xi|^{-1} e^{-2\pi a |\xi|}$ (HA)

b) Mit einem Grenzwertargument kann man zeigen, dass

$$(*) \quad \int \frac{V(x) V(y)}{|x-y|^2 + a^2} dx dy = \pi \int \frac{|\hat{V}(\xi)|^2}{|\xi|} e^{-2\pi a |\xi|} d\xi \quad \text{für alle } V \in L^1$$

gilt. Falls $V \geq 0$, dann haben beide Seiten einen monotonen Grenzwert für $a \searrow 0$, d.h. beide Seiten sind simultan endlich oder unendlich.

c) Falls $V \in R$, dann ist $\int \frac{V(x)V(y)}{|x-y|^2} < \int \frac{|V(x)||V(y)|}{|x-y|^2} < \infty$, d.h. der Grenzwert $a \searrow 0$ kann immer noch durchgeführt werden. $\square$

<u>Prop 2.4.11</u> Sei $V \in R$, dann gilt $\int \frac{V(x)V(y)}{|x-y|^2}\,dxdy > 0$

<u>Bew</u> Sei $V_n = V \mathbb{1}_{|x|<n} \in L^1$, dann $V_n \xrightarrow{n\to\infty} V$ pktweise und $|V_n(x)| \leq |V(x)|$. Dann folgt aus Prop 2.4.10 c)

$$\int \frac{V(x)V(y)}{|x-y|^2}\,dxdy = \lim_{n\to\infty} \int \frac{|\hat{V}_n(\xi)|^2}{|\xi|}\,d\xi > 0. \quad \square$$

<u>Thm 2.4.12</u> Sei $V \in R$, dann gibt es für alle $a > 0$ ein $b(a) > 0$, sodass

$$(\psi, |V|\psi) \leq a(\psi, -\Delta\psi) + b\|\psi\|^2, \quad \psi \in C_c^\infty$$

<u>Bew</u> Da $V \in R$, ist V auch lokal integrierbar, dh $(\psi, V\psi) < \infty$ für $\psi \in C_c^\infty$. Unser Ziel ist es $\| |V|^{1/2}(-\Delta + b^2)^{-1/2} \|$ zu beschränken, was wegen $\|T\| = \|T^*\|$ äquivalent ist zu

$$\|(-\Delta + b^2)^{-1/2} |V|^{1/2}\|.$$

Wir haben (HA) $((-\Delta+b^2)^{-\frac{1}{2}}|V|^{\frac{1}{2}}\psi)(x)$

$$= \pi \int \frac{e^{-2\pi b|x-y|}}{|x-y|} |V(y)|^{1/2}\psi(y)\,dy$$

und RHS $\in \mathcal{D}(|V|^{1/2})$, da $V \in R$ (mit CS, denn

$$\int dx\, |V(x)| \underbrace{\left|\int dy\, |V(y)|^{\frac{1}{2}}\psi(y)\,|x-y|^{-1}\right|^2}_{\leq \|\psi\|_2^2 \int dy\, |x-y|^{-2}|V(y)|} \leq \|\psi\|_2^2\, \|V\|_R^2 \Big)$$

$\to$ insb $(\psi, |V|^{\frac{1}{2}}(-\Delta+b^2)^{-1}|V|^{1/2}\psi) \leq \pi \|\psi\|^2 \sqrt{\int \frac{|V(x)||V(y)|e^{-2\pi b|x-y|}}{|x-y|^2}}$

und für $b \to \infty$ konvergiert $\sqrt{\ldots}$ monoton gegen 0

$\Rightarrow$ für gegebenes $a>0$ können wir also $b = b(a)$ so groß wählen, dass $(\psi, |V|^{1/2}(-\Delta+b^2)^{-1}|V|^{1/2}\psi) < a^2\|\psi\|_2^2$

dh $\|(-\Delta+b)^{-1/2}|V|^{1/2}\psi\| \leq a\|\psi\|_2$ bzw

$$\| |V|^{1/2}\psi\| = (\psi, |V|\psi) \leq a^2(\psi, -\Delta\psi) + b^2$$