Themen der PDE

21.10.2020

Schrödingergl.

- $\Psi(x,t) \in \mathbb{C}$
- $|\Psi(x,t)|^2$ .. WS-Dichte Teilchen am Ort x zur Zeit t aufzufinden
- A .. s.a. Operatoren, die auf Ψ wirken.
- ↳ auf Hilbertraum z.B. $L^2(\mathbb{R}^3, dx)$
- Erwartungswert des Ortes des Teilchens durch $\int |\Psi(x,t)|^2 x \, dx$
- kinetische En. , $\int |\hat{\Psi}(\xi,t)|^2 |\xi|^2 d\xi$
- $$\begin{cases} i\partial_t \Psi = \underline{(-\Delta - V)}\Psi \\ \Psi(x,0) = f(x) \end{cases}$$

→ Wohlgestelltheit: Existenz, Eindeutigkeit, stetige Abhängigkeit von Anfangsdaten.

dazu: Verständnis von $-\Delta + V$ in Banachräumen.

bspw. in L^p: dort gibt es Multiplikatortheoreme

<u>Ziel der VL</u> Verständnis von $-\Delta + V$ in Hilberträumen.

Ein wichtiger Meilenstein: Spektralsatz für unbeschränkte s.a. Operatoren in Hilberträumen

Aussage $A : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$ s.a. $\Rightarrow \exists$ Projektorwertiges Maß $P(\Omega)$ $A = \int \lambda \, dP(\lambda)$

$\Omega \in \mathcal{B}$

$$\langle \psi, A\psi \rangle_{\mathcal{H}} = \int \lambda \, d\mu_\psi(\lambda)$$

$$f(A) = \int f(\lambda) \, dP(\lambda)$$

$(s=1)$ $\underline{(A+1)}^{-s} =_{c_s} \int \frac{dt}{t} \, \underline{\underline{e^{-t(A+1)}}} \cdot t^s$

$\sigma(A) = \sigma(P)$

$\hookrightarrow$ $\sigma(\mu_\psi) = \sigma_{pp}(\mu_\psi) \dot\cup \sigma_{ac}(\mu_\psi) \dot\cup \sigma_{sc}(\mu_\psi)$

geb. Zst.

Streuzst.

$\emptyset$?

Maßtheorie Rudin (Real & complex analysis) – Kap 6.

Teschl – Mathematical methods in qm. Anhang (online verfügbar)

Unbeschränkte Op.: Weidmann I (Lineare Op. in Hilberträumen)

Spektralsatz: Teschl (Kap. 3)

Streutheorie: Hörmander – Analysis of linear pdo II Kapitel XIV

1 Unbeschränkte Operatoren (Weidmann 1, Kap 4)

1.1 Adjungierte, abgeschlossene, abschließbare Operatoren

$\mathfrak{H}$ .. Hilbertraum (H)

$T : \mathcal{D}(T) \to \mathfrak{H}$ Operator / lineare Abbildung von einem linearen Unterraum $\underbrace{\mathcal{D}(T)}_{\text{Definitionsbereich}} \subseteq \mathfrak{H}$ in (eine Teilmenge) von $\mathfrak{H}$.

Definition 1.1.1 Sei $T : \mathcal{D}(T) \to \mathfrak{H}$ ein Operator in $\mathfrak{H}$.

- Dann heißt $\Gamma(T) = \{ (x, T[x]) : x \in \mathcal{D}(T) \}$ Graph von T
- Ein anderer Operator $S : \mathcal{D}(S) \to \mathfrak{H}$ heißt Restriktion von T, wenn $\Gamma(S) \subseteq \Gamma(T)$ (bzw. T heißt Erweiterung von S). Wir schreiben "$S \subseteq T$"
- $T : \mathcal{D}(T) \to \mathfrak{H}$ abgeschlossen, wenn $\Gamma(T)$ ein abgeschlossener Untervektorraum von $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ ist.
- $T : \mathcal{D}(T) \to \mathfrak{H}$ heißt abschließbar, wenn $\overline{\Gamma(T)}$ der Graph eines Operators $\overline{T}$ ist. In diesem Fall heißt $\overline{T}$ der Abschluß von T.
- $T : \mathcal{D}(T) \to \mathfrak{H}$ heißt dicht definiert, falls $\mathcal{D}(T)$ dicht in $\mathfrak{H}$ ist.

- $\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \{T : \mathcal{H} \to \mathcal{H} : T$ ist linear und stetig$\}$
- Eine Teilmenge $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}(T)$ von $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ heißt <u>determinierender Bereich</u> (engl. <u>core</u>), wenn:

   a) $\overline{T|_{\mathcal{D}}} \supseteq \overline{T}$, wenn T abschließbar

   b) $\overline{T|_{\mathcal{D}}} = T$, wenn T abgeschlossen

   (für abgeschlossene Operatoren ist $\mathcal{D}$ ein core für T, wenn $\mathcal{D}$ dicht in $\mathcal{D}(T)$)

<u>Bemerkungen 1.1.2</u>

a) Wir statten $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ mit dem kanonischen inneren Produkt aus, d.h.

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : (\mathcal{H} \times \mathcal{H}) \times (\mathcal{H} \times \mathcal{H}) \to \mathbb{C}$$

$$((\varphi_1, \varphi_2), (\psi_1, \psi_2)) \mapsto \langle \varphi_1, \psi_1 \rangle + \langle \varphi_2, \psi_2 \rangle$$

$\to$ induzierte Norm

$$\| \cdot \| : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to [0, \infty)$$
$$(\varphi_1, \varphi_2) \mapsto \left(\|\varphi_1\|^2 + \|\varphi_2\|_2^2 \right)^{1/2}$$

Charakterisierung abgeschlossener Operatoren. (i) - (iii) sind äquivalent

(i) $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ ist abgeschlossen

(ii) Für jede Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}(T)$ mit $\varphi_n \to \varphi$ und $T[\varphi_n] \to \psi$ gilt $\varphi \in \mathcal{D}(T)$ und $\psi = T[\varphi]$

$\hookrightarrow$ "Vorteil" vom closed graph: angenommen, man möchte Beschränktheit eines Operators A zeigen. Dann muss gezeigt werden, dass $x_n \to x \Rightarrow Ax_n \to Ax$; mit closed graph braucht man nur $x_n \to x \wedge Ax_n \to y \Rightarrow y = Ax$ zeigen

(iii) Versehen mit der Graphennorm

$$\|\cdot\|_T : \mathcal{D}(T) \to [0, \infty)$$
$$x \mapsto \left(\|x\|^2 + \|T[x]\|^2\right)^{1/2}$$

ist $(\mathcal{D}(T), \|\cdot\|_T)$ vollständig.

b) Ist $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ dicht definiert und stetig, dann hat T eine eindeutige Fortsetzung $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$

Weidmann $\to$ c) Satz vom abgeschlossenen Graphen: falls $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ abgeschlossen, dann ist T stetig auf $\mathcal{D}(T)$, sprich

$$\|T\varphi\| \le c\|\varphi\|_T, \quad c > 0, \quad \varphi \in \mathcal{D}(T).$$

$$\|\varphi\|_T \lesssim c_\varphi$$

$a, b > 0$

$a \lesssim b$

$\Leftrightarrow \exists\, c > 0$

s.d. $a \le c \cdot b$

$a \lesssim b \lesssim a$

$\Leftrightarrow a \sim b$

(Bsp: $T = M_V$ mit $V(x) = x$

$\mathcal{D}(T) = \{f \in L^2 : xf \in L^2\}$

oder $\tilde{\mathcal{D}}(T) = \{(1+x^2)f \in L^2\}$

$\|xf\|_2^2 = \int |x|^2 |f|^2$

$\le \int (1+|x|^2)|f|^2$

$= \|f\|_T^2$

$\le \|f\|_{\tilde{T}}^2 = \int (1+x^2)^2 |f|^2$

d) Kriterien für Abschließbarkeit: (i) – (iv) sind äquivalent

(i) $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ abschließbar

(ii) $\exists$ abgeschlossene Fortsetzung von T

(iii) Der Abschluß $\overline{\Gamma(T)}$ von $\Gamma(T)$ enthält kein Element der Form $(0, y)$, $y \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$.

etwas schwächer als Stetigkeit, da Konv. $T\varphi_n$ vorausgesetzt. $\to$ (iv) Für jede Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\varphi_n \to 0$ und $T[\varphi_n] \to \psi$ folgt $\psi = 0$.

In diesen Fällen ist der Abschluß $\overline{T}$ von T gegeben durch

$$\mathcal{D}(\overline{T}) = \{\varphi \in \mathcal{H} : \exists \text{ Folge } (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}(T), \text{ sodaß } \varphi_n \to \varphi \text{ und } (T\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert}\}$$

und für eine derartige Folge φ_n ist

$$\overline{T}\varphi := \lim_{n \to \infty} T\varphi_n.$$

[Bemerkung $\mathcal{D}(\overline{T}) = \{x \in \mathcal{H} : \exists\, y \in \mathcal{H}, \text{ sodass } \forall \text{ Folge } \underset{\mathcal{D}(T)}{x_n} \to x \text{ gilt, dass } Tx_n \to y\} \supseteq \mathcal{D}(T)$
(y ist in diesem Fall eindeutig durch x bestimmt)]

Beweis von d)

(i) $\Rightarrow$ (ii) Falls (i), dann ist $\overline{\Gamma(T)}$ der Graph eines abgeschlossenen Operators $\overline{T}$, der nach Definition eine Fortsetzung von T ist.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Ist $\overline{\Gamma(T)} = \Gamma(\overline{T})$ mit einem linearen Operator $\overline{T}$, dann ist wegen Linearität $\overline{T}[0] = 0$, d.h. $\nexists\, y \in \mathcal{G} \setminus \{0\}$, sodass $\overline{T}[y] = 0$. also mit $(0, y) \in \Gamma(\overline{T}) = \overline{\Gamma(T)}$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Ist $(\varphi_n) \in \mathcal{D}(T)$ eine Nullfolge, und angenommen $T\varphi_n \to \psi$, dann gilt $(0, y) \in \overline{\Gamma(T)}$ und nach Voraussetzung ist dann $\psi = 0$.

(iv) $\Rightarrow$ (ii): Definiere dazu

$$\mathcal{D}(\overline{T}) = \{\varphi \in \mathcal{G} : \exists\, (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}(T) \text{ mit } \varphi_n \to \varphi \text{ und } (T\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert}\}.$$

Ist $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{T})$ und sind $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathcal{D}(T)$ mit $\varphi_n \to \varphi$ und $\psi_n \to \varphi$, sodass auch $(T\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(T\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, dann ist auch $(\varphi_n - \psi_n) \in \mathcal{D}(T)$ und $\varphi_n - \psi_n \to 0$. Nach Voraussetzung folgt $T[\varphi_n - \psi_n] \to 0$ und damit ist $\overline{T}[\varphi]$ für $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{T})$ wohldefiniert (insbesondere unabhängig von der Wahl der approximierenden Folge. Offenbar ist $\overline{T}$ eine Erweiterung von T, die nach a).(ii) abgeschlossen ist. Dies zeigt (ii)

Es verbleibt (ii) ⇒ (i) zu zeigen.

Angenommen T hätte eine abgeschlossene Erweiterung B sodaß $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(B)$ und $Tx = Bx$, $x \in \mathcal{D}(T)$, sprich $\Gamma(T) \subseteq \Gamma(B)$.
Dann ist auch $\overline{\Gamma(T)} \subseteq \overline{\Gamma(B)} = \Gamma(B)$, da B abgeschlossen.
(*) Falls $(0,y) \in \overline{\Gamma(T)}$, dann ist auch $(0,y) \in \Gamma(B)$ und damit $y = B0 = 0$, d.h. $y = 0$. (Dies ist (iii).)

Wir definieren dann einen Operator $C : \mathcal{D}(C) \to \mathfrak{H}$ mit
$$\mathcal{D}(C) = \{x \in \mathfrak{H} : (x,y) \in \overline{\Gamma(T)} \text{ für ein } y \in \mathfrak{H}\}$$
$Cx = y$, wobei y der <u>eindeutige</u> Vektor, für den $(x,y) \in \overline{\Gamma(T)}$.

<u>Ziel</u> C ist eine abgeschlossene Erweiterung von T mit $\Gamma(C) = \overline{\Gamma(T)}$

Zur Eindeutigkeit: angenommen, $(x, y_1), (x, y_2) \in \overline{\Gamma(T)}$, dann gibt es Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(T)$, sodaß $(x_n, Tx_n) \to (x, y_1)$ und $(\tilde{x}_n, T\tilde{x}_n) \to (x, y_2)$ (in $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$).
Sei dann $z_n = x_n - \tilde{x}_n \in \mathcal{D}(T)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\Gamma(T) \ni (z_n, Tz_n) &= (x_n - \tilde{x}_n, Tx_n - T\tilde{x}_n) \\ &= (x_n, Tx_n) - (\tilde{x}_n, T\tilde{x}_n) \\ &\xrightarrow{n\to\infty} (x, y_1) - (x, y_2) = (0, y_1 - y_2)\end{aligned}$$
D.h. $(0, y_1 - y_2) \in \overline{\Gamma(T)} \implies y_1 \overset{!}{=} y_2$ mit Beobachtung (*)

Wir behaupten, dass C linear ist. Seien dazu $x, \tilde{x} \in \mathcal{D}(C)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gibt es $y, \tilde{y} \in \mathfrak{H}$, sodass $(x,y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \overline{\Gamma(T)}$.
$\Rightarrow \exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\tilde{x}_n) \subseteq \mathcal{D}(T)$, sodass $(x_n, Tx_n) \to (x,y)$
$(\tilde{x}_n, T\tilde{x}_n) \to (\tilde{x}, \tilde{y})$.

Sei dann $z_n = x_n + \lambda \tilde{x}_n \in \mathcal{D}(T)$. Dann gilt
$$\begin{aligned}\Gamma(T) \ni (z_n, Tz_n) &= (x_n + \lambda\tilde{x}_n, Tx_n + \lambda T\tilde{x}_n) \\ &= (x_n, Tx_n) + \lambda(\tilde{x}_n, T\tilde{x}_n) \xrightarrow{n\to\infty} (x,y) + \lambda(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ &= (x + \lambda\tilde{x}, y + \lambda\tilde{y}) \in \overline{\Gamma(T)}\end{aligned}$$
$\Rightarrow x + \lambda\tilde{x} \in \mathcal{D}(C)$ und $C(x + \lambda\tilde{x}) = y + \lambda\tilde{y} = Cx + \lambda C\tilde{x}$,
d.h. C ist linear.

Weiter gilt per Konstruktion

anfängliche Erweiterung

$$\Gamma(C) = \{(x, Cx) : x \in \mathcal{D}(C)\} = \overline{\Gamma(T)} \subseteq \Gamma(B)$$

und $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(C) \subseteq \mathcal{D}(B)$, $Cx = Tx$, $x \in \mathcal{D}(T)$

$\Rightarrow$ C ist eine abgeschlossene Erweiterung von T.
und $\Gamma(C) = \overline{\Gamma(T)}$

Da B eine beliebige abgeschlossene Erweiterung von T war, sehen wir, dass C sogar die kleinste abgeschlossene Erweiterung ist. Vergleicht man noch die Definitionen von $\overline{\Gamma(T)}$ und $\overline{T}$, sieht man in der Tat $C = \overline{T}$ ☒

Definition 1.1.3 Sind $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$, $S : \mathcal{D}(S) \to \mathcal{H}$ Operatoren

Dann definiert man auf

$$\mathcal{D}(T+S) = \mathcal{D}(T) \cap \mathcal{D}(S) \quad \text{und}$$
$$\mathcal{D}(ST) = \{x \in \mathcal{D}(T) : Tx \in \mathcal{D}(S)\}$$

die Addition $S+T : \mathcal{D}(S+T)$
$$x \mapsto Sx + Tx$$

und die Komposition $ST : \mathcal{D}(ST)$
$$x \mapsto S[T[x]].$$

$\langle y, Tx\rangle$
$= \langle T^* y, x\rangle$

Definition 1.1.4 Sei $T: \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ ein dicht definierter Operator.

$$\mathcal{D}(T^*) := \{ y \in \mathcal{H} : \tilde{\psi}_y : \mathcal{D}(T) \to \mathbb{C} \quad \text{stetig} \}.$$
$$x \mapsto \langle y, Tx\rangle$$

Dann gibt es wegen Hahn-Banach eine stetige Fortsetzung von $\tilde{\psi}_y$, die wir $\psi_y \in \mathcal{H}^*$ nennen
$\psi_y : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$
und diese Fortsetzung ist wegen Dichtheit sogar eindeutig. Dann gibt es mit dem Rieszschen Darstellungssatz ein eindeutiges $T^* y \in \mathcal{H}$ mit

$\psi_y = \langle T^* y, \cdot\rangle \in \mathcal{H}$. Den zu T adjungierten Operator T^* definiert man durch
$$T^* : \mathcal{D}(T^*) \to \mathcal{H}$$
$$y \mapsto T^* y.$$

22.10.20

Bemerkungen 1.1.5 $T: \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ dicht definiert

a) $\mathcal{D}(T^*) = \{ y \in \mathcal{H} : \exists\, y^* \text{ s.d. } \langle y^*, x\rangle = \langle y, Tx\rangle \; \forall x \in \mathcal{D}(T) \}$

und dieses y^* ist gerade $T^* y$

b) $\mathcal{D}(T^*) \subseteq \mathcal{H}$ ist ein linearer Unterraum und T^* ist linear

c) $\langle y, Tx\rangle = \langle T^* y, x\rangle \quad x \in \mathcal{D}(T),\ y \in \mathcal{D}(T^*)$

d) Angenommen $S: \mathcal{D}(S) \to \mathcal{H}$ sodaß

$\langle y, Tx \rangle = \langle Sy, x \rangle \quad \forall x \in \mathcal{D}(T),\ y \in \mathcal{D}(S)$

$\Rightarrow \quad \Gamma(S) \subseteq \Gamma(T^*)$ und in diesem Fall sagt man, dass T und S formal adjungiert zueinander sind

e) Falls $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, dann stimmt diese Definition mit der bekannten Definition von T^* überein und insb.

$$\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{H} \text{ und } T^* \text{ gegeben ist durch}$$
$$\langle y, Tx \rangle = \langle T^* y, x \rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Lemma 1.1.6. Sei $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ dicht definiert.

a) $\operatorname{Ker}(T^*) = (\operatorname{Ran} T)^\perp$

klar $\leftarrow$ b) $\operatorname{Ker}(T^*)^\perp = \overline{\operatorname{Ran} T}$

HA

$T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$

$T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

$\|T\| < \infty$

c) Falls T^* auch dicht definiert ist, dann ist T^{**} eine Fortsetzung von T

d) T beschränkt $\Leftrightarrow$ $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und in diesem Fall ist $\|T\| = \|T^*\|$

e) T beschränkt $\Rightarrow$ T^{**} ist eindeutige stetige Fortsetzung auf $\mathcal{H}$.

Beweis a) $y \in \operatorname{Ker} T^* \Leftrightarrow y \in \mathcal{D}(T^*)$ und $T^* y = 0$

$$\overset{\mathcal{D}(T) \text{ dicht}}{\Leftrightarrow} \quad \underbrace{\langle x, T^* y \rangle}_{= \langle Tx, y \rangle = 0} = 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}(T)$$

$$\Leftrightarrow \quad y \in (\operatorname{Ran} T)^\perp$$

$\boxtimes$

$$\langle y, STx\rangle = \langle T^*S^*y, x\rangle$$

Satz 1.1.7 $S: \mathcal{D}(S) \to \mathcal{H}$, $T: \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ und $ST: \mathcal{D}(ST) \to \mathcal{H}$ seien dicht definiert

a) $T^*S^* \subseteq (ST)^*$

b) Falls $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, dann gilt auch $T^*S^* = (ST)^*$

Beweis a) Genügt formale Adjungiertheit zu zeigen.

$x \in \mathcal{D}(ST)$ und $y \in \mathcal{D}(T^*S^*)$

d.h. insb. $x \in \mathcal{D}(T)$ d.h. $y \in \mathcal{D}(S^*)$, $S^*y \in \mathcal{D}(T^*)$

$$\langle y, STx\rangle = \langle S^*y, Tx\rangle = \langle T^*S^*y, x\rangle$$

$$\Rightarrow T^*S^* \subset (ST)^*$$

b) Wg a) zeigen wir noch $(ST)^* \subseteq T^*S^*$

Da $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \Rightarrow S^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Seien $y \in \mathcal{D}((ST)^*)$ und $x \in \mathcal{D}(ST) = \mathcal{D}(T)$

$$\langle y, STx\rangle = \langle (ST)^*y, x\rangle$$
$$\|$$
$$\langle S^*y, Tx\rangle \Rightarrow S^*y \in \mathcal{D}(T^*)$$
$$\Leftrightarrow y \in \mathcal{D}(T^*S^*)$$

$$\Rightarrow (ST)^* \subseteq T^*S^* \text{ für } S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \qquad \square$$

Satz 1.1.8 $S: \mathcal{D}(S) \to \mathcal{H}$, $T: \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ und $S+T: \mathcal{D}(S+T) \to \mathcal{H}$ seien dicht definiert

$\langle y, (T+S)x\rangle$
$= \langle (T^*+S^*)y, x\rangle$

a) $T^* + S^* \subseteq (S+T)^*$

b) Falls $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, dann gilt auch $S^* + T^* = (S+T)^*$

Beweis a) Genügt formale Adjungiertheit zu zeigen.

$x \in \mathcal{D}(T+S)$, $y \in \mathcal{D}(T^* + S^*)$

$$\Rightarrow \langle y, (T+S)x \rangle = \langle y, Tx \rangle + \langle y, Sx \rangle$$
$$= \langle T^* y, x \rangle + \langle S^* y, x \rangle$$
$$= \langle (T^* + S^*) y, x \rangle.$$

b) Wg a) genügt es noch $(T+S)^* \subseteq T^* + S^*$.

$x \in \mathcal{D}((T+S)^*)$, $y \in \mathcal{D}(S+T) = \mathcal{D}(T)$

$$\langle x, Ty \rangle = \langle x, (T+S)y \rangle - \langle x, Sy \rangle$$
$$= \langle (T+S)^* x, y \rangle - \langle S^* x, y \rangle$$
$$= \langle ((T+S)^* - S^*)x, y \rangle$$
$$\Rightarrow x \in \mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(T^* + S^*) \quad \boxtimes$$

Definition 1.1.9 • Ein Operator $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ heißt symmetrisch, wenn $\forall x, y \in \mathcal{D}(T)$ gilt

$$\langle y, Tx \rangle = \langle Ty, x \rangle.$$

• Ein dicht definierter Operator $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ heißt selbstadjungiert, wenn $T = T^*$, also insb.

$$\Gamma(T) = \Gamma(T^*)$$
$$\{(x, Tx) : x \in \mathcal{D}(T)\} = \{(x, T^* x) : x \in \mathcal{D}(T^*)\}.$$

Bemerkung 1.1.10 Ein dicht definierter Operator $S: \mathcal{D}(S) \to \mathcal{H}$ ist genau dann symmetrisch, wenn $S \subseteq S^*$ (wg Def. 1.1.9 und Bem. 1.1.5)

Bemerkungen 1.1.11 $V: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H} \times \mathcal{H}$

$$(\psi_1, \psi_2) \mapsto (-\psi_2, \psi_1)$$

V erfüllt offenbar $V \circ V = -\mathbb{1}_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}$, also ist V bijektiv und für $\psi_1, \psi_2, \varphi_1, \varphi_2$ gilt

$$\langle V(\psi_1, \psi_2), V(\varphi_1, \varphi_2)\rangle = \ldots \langle (\psi_1, \psi_2), (\varphi_1, \varphi_2)\rangle$$

$\Rightarrow$ V ist unitär.

Lemma 1.1.12 Sei $T: \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ dicht definiert, dann gilt

$$\Gamma(T^*) = \underbrace{V(\Gamma(T))^{\perp}}_{\text{orth. Komplement in } \mathcal{H}\times\mathcal{H}}$$

Beweis Wg. Def vom Adjungierten T^* ist

$(y, z) \in \Gamma(T^*)$, wenn $y \in \mathcal{D}(T^*)$ und $z = T^* y$
d.h. $\langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(T)$.

$$\Rightarrow \quad 0 = -\langle Tx, y\rangle + \langle x, z\rangle$$

$$= \langle (-T[x], x), (y, z)\rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}$$

$$= \langle V[x, T[x]], (y, z)\rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} \quad \forall x \in \mathcal{D}(T)$$

Das bedeutet $(y,z) \in \left(V(\Gamma(T)) \right)^{\perp}$

$\Rightarrow \Gamma(T^*) = \left(V(\Gamma(T)) \right)^{\perp}$ $\boxed{\equiv}$

Satz 1.1.13 $T: D(T) \to \mathcal{H}$ dicht definiert, dann ist

T abschließbar $\Longleftrightarrow$ T^* ist dicht definiert.

In diesem Fall ist $\overline{T} = T^{**}$.

Beweis Für eine beliebige Menge $M \subseteq \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ rechnen wir

$$\begin{aligned}(V(M))^{\perp} &= \{ \psi \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : \langle \psi, V[m] \rangle = 0,\ m \in M \} \\ &= \{ \psi = V(V^{-1}(\psi)) : \langle V^{-1}\psi, m \rangle = 0,\ m \in M \} \\ &= V(M^{\perp})\end{aligned}$$

Da $\overline{M} = (M^{\perp})^{\perp}$ folgt aus Lemma 1.1.12

$$\overline{\Gamma(T)} = (\Gamma(T)^{\perp})^{\perp} = \left(V\left((V(\Gamma(T)))^{\perp} \right) \right)^{\perp}$$

$$\overset{\text{Lemma}}{=} \left(V(\Gamma(T^*)) \right)^{\perp}$$

Nach Definition von V

$$\overline{\Gamma(T)} = \left(V(\Gamma(T^*)) \right)^{\perp}$$

$$= \{ (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : \langle (\varphi_1, \varphi_2), V[\psi, T^*[\psi]] \rangle = 0,\ \psi \in D(T^*) \}$$

$$= \{ (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : \langle (\varphi_1, \varphi_2), (-T^*[\psi], \psi) \rangle = 0,\ \psi \in D(T^*) \}$$

$$= \{ \text{—} \ \text{"} \ \text{—} : \langle \varphi_2, \psi \rangle - \langle \varphi_1, T^*\psi \rangle = 0,\ \psi \in D(T^*) \}$$

Somit ist $(0, \varphi_2) \in \overline{\Gamma(T)}$ genau dann, wenn

$\langle \varphi_2, \psi \rangle = 0 \quad \forall \psi \in D(T^*)$, d.h. genau dann, wenn $\varphi_2 \in (D(T^*))^\perp$ ist.

Nach Kriterium für Abschließbarkeit (Bem. 1.1.2) ist T^* genau dann abschließbar, wenn $\varphi_2 = 0$ d.h. $D(T^*)^\perp = \{0\}$, d.h. $D(T^*) \subseteq \mathcal{H}$ ist dicht.

<u>Korollar 1.1.14.</u> Sind $S: D(S) \to \mathcal{H}$, $T: D(T) \to \mathcal{H}$ dicht definiert.

symm. Op.

$S \subseteq S^*$ $\longrightarrow$ $\quad S \subseteq T \Rightarrow T^* \subseteq S^*$.

$S^{**} \subseteq S^*$

<u>Beweis</u> Für dicht definierte T und S existieren S^* und T^* und mit $\Gamma(S) \subseteq \Gamma(T)$ folgt

$$V(\Gamma(S)) \subseteq V(\Gamma(T)) \text{ und}$$

nach Komplement-nehmen gilt mit Lemma 1.1.12

$$\Gamma(S^*) = (V(\Gamma(S)))^\perp \supseteq (V(\Gamma(T)))^* = \Gamma(T^*) \quad \boxtimes$$

<u>Korollar 1.1.15</u> Sei $T: D(T) \to \mathcal{H}$ dicht definiert und injektiv und $\mathrm{Ran}(T)$ dicht, dann ist auch T^* injektiv und es gilt

$$(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}.$$

<u>Beweis</u> Für injektives $T: D(T) \to \mathcal{H}$ ist $T^{-1}: \mathrm{ran}(T) \to D(T)$ definiert und da $\mathrm{ran}(T)$ dicht ist, ist auch $(T^{-1})^*$ definiert.

Wg Lemma 1.1.6 ist $\ker T^* = (\mathrm{ran}(T))^\perp = \{0\}$ wg $\mathrm{ran}(T)$ dicht $\Rightarrow$ T^* injektiv.

Sei $W: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ mit $(\varphi, \psi) \mapsto (\psi, \varphi)$.

$$\Rightarrow \Gamma(T^{-1}) = W(\underbrace{\Gamma(T)}_{\{(x,T(x)) : x \in D(T)\}})$$

Mit Lemma 1.1.12 wie vorher erhält man

$$\begin{aligned}\Gamma((T^{-1})^*) &= V(\Gamma(T^{-1}))^{\perp}) \\ &= V((W(\Gamma(T)))^{\perp}) \\ &= V(W(\Gamma(T)^{\perp}))\end{aligned}$$

Da $V(W(\varphi,\psi)) = -W(V(\varphi,\psi))$ stimmen die Bilder der Untervektorräume bei $V \circ W$ und $W \circ V$ überein $\Rightarrow \Gamma((T^{-1})^*) = W(V(\Gamma(T))^{\perp})$

$$\overset{\text{Lemma 1.1.12}}{=} W(\Gamma(T^*)) = \Gamma((T^*)^{-1}) \quad \blacksquare$$

<u>Korollar 1.1.16</u> Sei $T: D(T) \to \mathcal{H}$ dicht definiert, dann ist T^* abgeschlossen.

Insbesondere ist jeder selbstadjungierte Operator abgeschlossen und jeder dicht definierte symmetrische Operator abschließbar.

<u>Beweis</u> Orthogonale Komplemente von Teilmengen von Hilberträumen sind abgeschlossen.

Da $\Gamma(T^*) = V(\Gamma(T))^{\perp}$ (Lemma 1.1.12) ist T^* per Definition abgeschlossen.

Für $A: D(A) \to \mathcal{H}$ selbstadjungiert
$A^* \to A$ abgeschlossen

Für $S: D(S) \to \mathcal{H}$ dicht definiert, symmetrisch gilt $S \subseteq S^*$, d.h. per Definition ist S abschließbar.

Korollar 1.1.17 Ist $T: \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ abschließbar, dann ist $(\overline{T})^* = T^*$.

Beweis Für jedes $M \subseteq \mathcal{H}$ ist $M^\perp = (\overline{M})^\perp$. Mit Lemma 1.1.12 folgt

$$\Gamma(T^*) \overset{\text{Lemma}}{=} (V(\Gamma(T)))^\perp = V(\Gamma(T)^\perp)$$

$$= V\left((\overline{\Gamma(T)})^\perp \right) = V\left(\Gamma(\overline{T})^\perp \right)$$

$$= (V(\Gamma(\overline{T})))^\perp \underset{\text{Lemma}}{=} V((\overline{T})^*)$$ $\square$

28.10.2020

Definition 1.1.18 $S: \mathcal{D}(S) \to \mathcal{H}$, $T: \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$.

Dann heißt S <u>T-beschränkt</u>, wenn
- $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(S)$
- $\exists\, a, b > 0$ s.d. $\|S\psi\| \leq \underline{\underline{a}}\,\|T\psi\| + b\|\psi\|$, $\psi \in \mathcal{D}(T)$

In diesem Fall heißt $\inf\{ a > 0 : \exists\, b \geq 0$ sodass $\|S\psi\| \leq a\|T\psi\| + b\|\psi\|, \psi \in \mathcal{D}(T)\}$
<u>T-Schranke von S.</u>

Bemerkung Schranken wie $\|S\psi\| \leq a\|T\psi\| + b\|\psi\|$ (1) sind im Wesentlichen äquivalent zu $\|S\psi\|^2 \leq a^2\|T\psi\|^2 + b^2\|\psi\|^2$. (2)

$(2) \Rightarrow (1)$: $\sqrt{\text{RHS}\,(2)} = \left\| \begin{pmatrix} a\|T\psi\| \\ b\|\psi\| \end{pmatrix} \right\|_{\ell^2} \leq \| \ldots \|_{\ell^1}$
$= a\|T\psi\| + b\|\psi\|$

$(1) \overset{\text{"}}{\Rightarrow}\text{"} (2)$ $\quad \|S\psi\|^2 \leq a^2(1+\epsilon)\|T\psi\|^2 + b^2(1+\frac{1}{\epsilon})\|\psi\|^2$

$ab\|T\psi\|\|\psi\|$

$\leq a^2\epsilon\|T\psi\|^2 + b^2\|\psi\|^2 \cdot \frac{1}{\epsilon}$

$\left(2\frac{a}{\sqrt{\epsilon}} b\sqrt{\epsilon} \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{\epsilon}\right)$

Für T-beschränktheit reicht oft $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(S)$.

Lemma 1.119. $S: \mathcal{D}(S) \to \mathcal{H}$, $\quad T: \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ mit S abschließbar und T abgeschlossen. Dann folgt aus $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(S)$, dass S relativ T-beschränkt.

Beweis Definiere $\tilde{S}: (\mathcal{D}(T), \|\cdot\|_T) \to \mathcal{H}$, $\psi \mapsto S\psi$ ist wohldefiniert.

Genügt zu zeigen, dass $\tilde{S}$ abgeschlossen ist, denn mit closed graph ist $\|\tilde{S}\psi\| \leq \|\psi\|_T \lesssim \|T\psi\| + \|\psi\|$ (wg voriger Bemerkung).

Da $\tilde{S}$ bereits auf dem ganzen $(\mathcal{D}(T), \|\cdot\|_T)$ definiert und T abgeschlossen ist, genügt es zu zeigen, dass $\tilde{S}$ in $(\mathcal{D}(T), \|\cdot\|_T)$ abschließbar.

Dazu: Sei $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(T)$ mit $\|\psi_n\|_T \to 0$, dann $\|\psi_n\| \to 0$, da $\|\psi_n\| \leq \|\psi_n\|_T$. Da S abschließbar ist, konvergiert $\underbrace{S\psi_n}_{\tilde{S}\psi_n} \to 0$

$\Rightarrow \tilde{S}$ abschließbar. $\square$

Satz 1.1.20 $S: \mathcal{D}(S) \to \mathcal{H}$, $T: \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$

Angenommen S ist T-beschränkt mit T-Schranke < 1. Dann gilt

T abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $T+S$ abgeschlossen

Beweis Zu zeigen $(\mathcal{D}(T), \|\cdot\|_T)$ vollständig

$$\Updownarrow$$

$\mathcal{D}(S+T) = \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T)$ $\quad (\mathcal{D}(T), \|\cdot\|_{T+S})$ vollständig.

Wg Bem. 1.1.2 genügt es zu zeigen, dass

$$\|\psi\|_T \sim \|\psi\|_{S+T}, \quad \psi \in \mathcal{D}(T)$$

$\|x\|_T^2 = \|Tx\|^2 + \|x\|^2$ "offset"

"$\gtrsim$": $\|\psi\|_{S+T} \lesssim \|\psi\| + \|(T+S)\psi\| \lesssim \|\psi\| + \|T\psi\| \lesssim \|\psi\|_T$.

"$\lesssim$": $\|T\psi\| \leq \|(T+S)\psi\| + \|S\psi\|$
$\leq \|(T+S)\psi\| + b\|\psi\| + a\|T\psi\|$, $a<1$

$$\|T\psi\| \leq (1-a)^{-1} \left(\|(T+S)\psi\| + b\|\psi\| \right)$$

$\Rightarrow \|\psi\|_T \lesssim_{a,b} \|\psi\|_{S+T}$ $\blacksquare$

1.2 Resolvente $\quad (T - \overset{\in \mathbb{C}}{z})\psi = \varphi$

→ wünschenswert für Lösungen der Gleichungen.

1) Gleichung für jedes φ lösbar? $\longleftrightarrow$ $T-z$ surjektiv?
2) Ist die Lsg ψ eindeutig $\longleftrightarrow$ $T-z$ injektiv?

$\psi = \underline{(T-z)^{-1}}\varphi$

$\varphi_n \to \varphi$

$\Rightarrow \psi_n \to \psi$

$\neq (T-z)\varphi$

3) Stetige Abhängigkeit der Lsg von der Inhomogenität φ $\longleftrightarrow$ $(T-z)^{-1}$ stetig?

4) Im Bereich der $z \in \mathbb{C}$ für die (1)–(3) gilt, haben wir Stetigkeit (oder mehr, z.B. komplexe Analytizität)

<u>Definition 1.2.1</u> Sei $T: \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ abgeschlossen

$$\rho(T) := \{ z \in \mathbb{C} : \begin{array}{l} T - z : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H} \\ \psi \mapsto (T-z)\psi \end{array} \text{ ist bijektiv} \}$$

Resolventenmenge

~~und $(T-z)^{-1}$ ist stetig $\}$~~

$\sigma(T) = \operatorname{spec}(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ .. Spektrum

$$R_T : \begin{array}{l} \rho(T) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}) \\ z \mapsto (T-z)^{-1} \end{array} \quad \ldots \text{Resolvente.}$$

<u>Bemerkungen 1.2.2</u> : 1) (Falls T nicht abgeschlossen, dann ist $\rho(T) = \emptyset$.)

Angenommen T wäre nicht abgeschlossen + alte Def. gälte
$\Rightarrow$ $\rho(T) = \emptyset$; denn entweder ist $T - z$ nicht bijektiv, d.h. $z \notin \rho(T)$ oder $T - z$ ist bijektiv, d.h $(T-z)^{-1}$ ist auf ganz $\mathcal{H}$ definiert, aber nicht abgeschlossen $\Rightarrow$ $(T-z)^{-1}$ kann nicht stetig sein.

2) $\sigma(T)$ besteht aus den z für die (1)–(3) aus der Einleitung verletzt ist.
Bspw. solche z für die $\ker T - z \neq \{0\}$, also Eigenwerte.

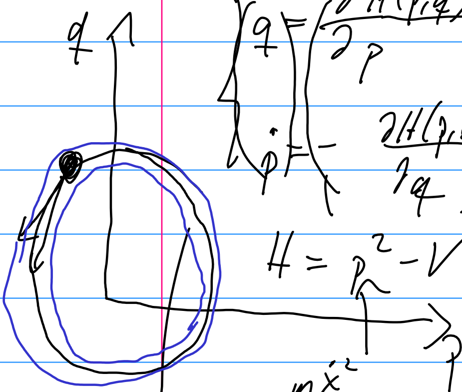
$(\psi, -\Delta\psi) = (\hat\psi, \xi^2 \hat\psi)$ (Plancherel)

$\sigma(-\Delta) = [0,\infty)$

V messbar auf $\mathbb{R}^d$: $\sigma(M_V) \sim \operatorname{ran} V$

Multiplikationsoperator

0 ———— $\mathbb{R}$



$$\begin{cases} \dot q = \dfrac{\partial H(p,q)}{\partial p} \\ \dot p = -\dfrac{\partial H(p,q)}{\partial q} \end{cases}$$

$\dot X = I \cdot \nabla H$

symplektische Struktur auf $\mathbb{R}^{2d}$ $\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$

$-\Delta + V$; wenn $V \in L^p$ $(p > d/2)$

$H = p^2 - V(q)$

$\Rightarrow$ typisch

$\times \times \times \times |$————$\to$

$p^2 + q^2 = 1$

$m\dot x^2$

$\ddot x = -\nabla V = \frac{1}{|x|^2}$ $\quad V = \frac{1}{|x|}$

$\dot x$

$\sigma(-\Delta + V) = [0,\infty) \cup \{\lambda_j\}$

abzählbar

p.. Impuls

q.. Ort

$\sigma = \sigma_{disc} \dot\cup \sigma_{ess}$

σ

$H = \underbrace{p^2 - V}$ quantisiere

$\in S^2_{10}(\mathbb{R}^{2d})$ Symbol

$$\boxed{(-\Delta - V)\, u(x)} = \iint (\xi^2 - V(x))\, e^{\frac{i\xi}{\hbar}(x-y)}\, u(y)\, dy\, d\xi$$

$\underline{i\partial_t e^{itH}\psi = (H)\psi}$

$\hbar \to 0$

FBI

$\langle \psi_{pq}(\cdot - y), u \rangle$

$\psi = \underbrace{P_{pp}}\psi + P_{cont}\psi$

$= |\psi_\lambda\rangle\langle\psi_\lambda|$ $\quad \ldots$

$H\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$ $\quad \lambda \in \sigma(H)$

$-\Delta + V$

$[0,\infty)$

$\times \times \times \times |$————$\to$

$V \in L^p$

$|\times$ $\times \times \times \to$

$\frac{1}{-\Delta^2 + x^2 - z} \in \mathcal{S}^\infty$

Für <u>selbstadjungierte</u> Operatoren (für nicht-s.a. Operatoren gibt es 5 unterschiedliche Definitionen für $\sigma_{ess,j}$ ($j=1..5$), die nur für s.a. Operatoren übereinstimmen)

$$\sigma = \underset{\text{discrete}}{\sigma_{disc}} \;\dot\cup\; \underset{\text{essential spec}}{\sigma_{ess}}$$

σ_{disc} = Menge aller <u>isolierten</u> Eigenwerte mit endlicher Multiplizität.

σ_{ess} = der Rest, also $\overbrace{\text{Häufungspunkte des Spektrums und}}^{\text{also insb. nicht-isolierte EW}}$ EW mit ∞ Multiplizität

<u>Beispiel</u> $-\Delta+V$ hat EW, die eingebettet sind, wenn $V(x) \sim \frac{\sin x}{|x|}$ (in $d=1$)

→ Wigner-von Neumann

→ $d>1$ $\quad \dfrac{\sin(x_d)}{(x')^2 + x_d + 1}$ $\quad$ Ionescu-Jerison

$x' = x_1 \dots x_{d-1}$

$\lambda \notin \sigma_{disc}$ aber $\lambda \in \sigma_{pp}$

pure point (später)

$\sigma_{ess}(-\Delta) = \mathbb{R}_+^0$

$\| \quad \sigma_{ess}(-\Delta+V)$

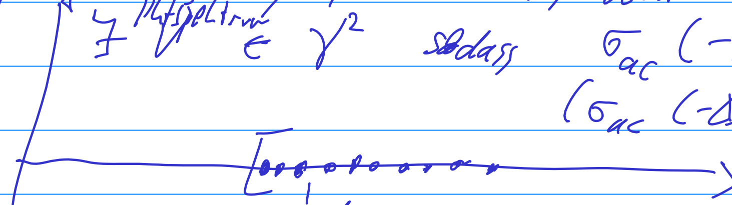
— σ_{ess} typischerweise stabil., wenn $V(-\Delta+1)^{-1}$ kompakt.

kalligraphisches

γ^2 ... Schattenklasse — Bsp. für ~~diese~~ Weyl, Neumann, Kuroda: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists V \in \gamma^2$ sodass $\sigma_{ac}(-\Delta+V) = \emptyset$

Punktspektrum

$(\sigma_{ac}(-\Delta) = \sigma_{ess}(-\Delta) = [0,\infty))$



— D. Damanik, J. Fillman → IAMP Juli 2020 (Link auf homepage)

$\boxed{\gamma^p}$ $\quad 0<p<\infty \qquad p=\infty \quad \gamma^\infty =$ Menge d kompakten Operatoren

haben, $\sigma(T)=\sigma_{disc}(T)$

$T\in\gamma^p$ kompakte Operatoren für die gilt, dass

die Eigenwerte von $\underbrace{\sqrt{T^*T}}_{\text{kompakt}}$ in ℓ^p liegen

$(\psi, T^*T\psi) = \|T\psi\|^2 \geq 0$

γ^1 .. Spurklassenoperatoren

$\gamma^p \cong \ell^p$

γ^2 ... Hilbert-Schmidt $\quad tr\, A^*A = \|A\|_{HS}^2 = \|A\|_2^2$

$\iint |a(x,y)|^2\,dx\,dy < \infty.$

$V^{\frac12}(-\Delta+1)^{-1}V^{\frac12}(x,y) = \qquad \in \gamma^2$ wenn $V\in L^2$ z.B.

$$V^{\frac12}\underbrace{(-\Delta+1)^{-1}}_{\frac{e^{-|x-y|}}{|x-y|}}\underline{V^{\frac12}}\psi(x) = \int dy\ \overbrace{V^{\frac12}(x)\frac{e^{-|x-y|}}{|x-y|}V^{\frac12}(y)}\ \psi(y)$$

Referenzen

Spurideale: Simon – Trace Ideals and their Applications (AMS, 2005)

Weidmann – Lineare Op. in $\mathcal{H}$: Kapitel 3

Reed – Simon II: Appendix zu $\underline{\text{IX}}.4$ (ab Thm $\underline{\text{IX}}.21$)

$$\underbrace{(-\Delta - V)\psi = -E\psi}_{\substack{(-\Delta+E)\psi = V\psi \\ V^{-\frac12}\varphi \quad V^{\frac12}\varphi}} \underset{BS}{\Leftrightarrow} V^{\frac12}(-\Delta+E)^{-1}V^{\frac12}\varphi = +\varphi \qquad V>0,\ E>0,\ E\notin\sigma(\Delta)$$

Birman-Schwinger: Reed – Simon IV: Abschnitt C in Kapitel $\underline{\text{XIII}}.3$, insb. Theorem $\underline{\text{XIII}}.10$

(im Zshg mit Eigenwertschranken)

neu Hansmann – Krejcirik (arxiv 2010.15102)

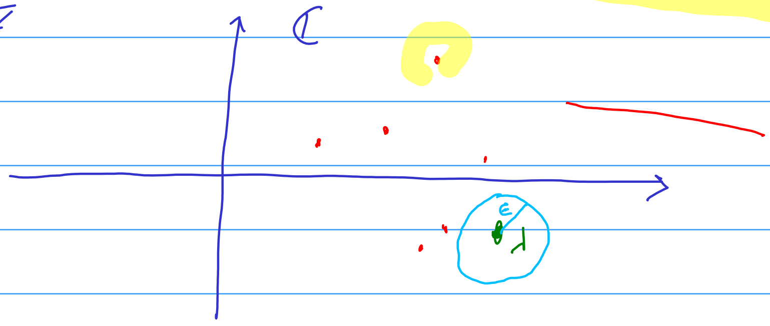
Ausblick

Sei $T: D(T) \to \mathcal{H}$ abgeschlossen:

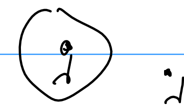
wie für normale Funktionen auf $\mathbb{C}$ (Cauchy-Integral !!) $\oint \frac{dz}{\lambda - z} = \begin{cases} 1 & \lambda \text{ in Kontur} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Projektionen auf isolierte EW λ: $-\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda - z| = \epsilon} \frac{dz}{T - z}$ für $\epsilon > 0$ hinreichend klein

z.B. Reed-Simon IV Abschnitt $\underline{XII}$. 2

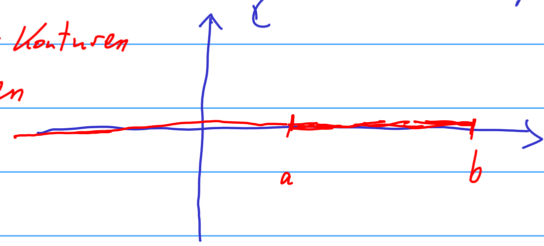


$\oint \frac{dz}{\lambda - z} = \begin{cases} 1 & \text{(?)} \\ 0 & \text{(?)} \end{cases}$



Projektionen auf nicht-isoliertes Spektrum (zumindest für s.-a. Operatoren)

schwierig, da $\mathbb{C}$-Konturen Spektrum schneiden



$p \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\int p = 1$

$p_\epsilon(x) = \epsilon^{-d} p(x/\epsilon)$

$p_\epsilon * f \to f$, $\epsilon \to 0$,

$$\frac{1}{2}\left(1\!\!1_{(a,b)}(\lambda) + 1\!\!1_{[a,b]}(\lambda)\right) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2}\left(1\!\!1_{[a,b]} + 1\!\!1_{(a,b)}\right) * p_\epsilon(\lambda)$$

Approximation der Eins

mit dem Poissonkern ($d = 1$) $\quad p_\epsilon(x-y) = \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + (x-y)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \frac{1}{x - y - i\epsilon}$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x-y-i\epsilon} - \frac{1}{x-y+i\epsilon}\right)$$

$x \mapsto T$ s.a.

$\to$ "quantisieren" gibt $\underline{\text{Stonesche Formel}}$

$$\frac{1}{2}\left(\varphi, \left(P_{[a,b]} + P_{(a,b)}\right)\varphi\right) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(1\!\!1_{[a,b]}(E) + 1\!\!1_{(a,b)}(E)\right)}_{= 1\!\!1_{[a,b]}(E) \text{ wg Lebesgue-Integral}} \cdot \operatorname{Im}\left((\varphi, (T - E - i\epsilon)^{-1}\varphi)\right) dE$$

Spektralprojektionen auf $[a,b]$, $(a,b) \subseteq \sigma(T)$

dE: eindim. Lebesguemaß

(Formel wird später hergeleitet)

Alternative für $P_{(a,b)}$ mittels Hilberttransformation

$$(Hf)(x) = \underline{\text{p.v.}\ \frac{1}{x} * f(x)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{f(y)}{x-y}\, dy \qquad \square$$

mit $(Hf)^\wedge(\xi) = -i\,\mathrm{sgn}(\xi)\,\hat{f}(\xi)$

$\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) = \frac{1}{2}\big(1 + \underbrace{\mathrm{sgn}(x)}_{= x/|x|}\big)$ zum Beispiel

$\Rightarrow (\varphi, P_{[0,\infty)}\varphi) = \frac{1}{2}\|\varphi\|^2 + \frac{1}{2}\left(\varphi, \frac{A}{|A|}\varphi\right)$, wenn $\ker A = \{0\}$

($\frac{1}{2}\left(1 + \frac{A}{|A|}\right)$ nennt man manchmal "Gradierung".)

$\to$ Vorkommen z.B. beim massiven Dirac-Operator

4x4 matrix-wertiger Operator $\to$ $-i\underset{\sim}{\alpha}\nabla + m\beta \equiv D_m$; $\alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \alpha_1\partial_1 + \alpha_2\partial_2 + \alpha_3\partial_3$ $\qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

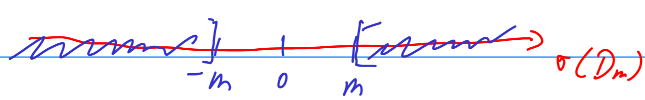
$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix}$ $\qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\uparrow$ Paulimatrizen

$\exists$ unitäre Transf $U : L^2(\mathbb{R}^3 : \mathbb{C}^4) \to L^2(\mathbb{R}^3 : \mathbb{C}^4)$
(Foldy-Wouthuysen)

$$U D_m U^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{-\Delta + m^2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-\Delta + m^2} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad \mathrm{spec}(D_m) = (-\infty, -m] \cup [m, \infty)$



$\Rightarrow \quad 1 + \frac{D_m}{|D_m|}$ wohldefiniert und projeziert auf positiven Spektralbereich von D_m ($\to$ Brown-Ravenhall-Operator)

$\to$ mehr zum Dirac-Operator z.B. in Büchern
Thaller - The Dirac Equation

Balinsky-Evans - Spectral Analysis of Relativistic Operators.

Zurück zum $\operatorname{sgn}(D_m) = \frac{D_m}{|D_m|}$

Wie beim Poissonkern (und der Stoneschen Formel) erhält man eine alternative Integral-Darstellung

$$(\varphi, \frac{D_m}{|D_m|} \varphi) = i \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|t|>\varepsilon} \frac{dt}{t} (\varphi, e^{itD_m} \varphi)$$

Zeit-Evolution

$f(x) = \lim f * p_\varepsilon(x) = \lim \langle f, p_\varepsilon(x-\cdot)\rangle$

$$\operatorname{sgn}(x) = i \cdot \lim \int_{|\xi|>\varepsilon} \frac{e^{ix\cdot\xi}}{\xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}} d\eta\, (x-i\eta)^{-1} \qquad = \int_{\mathbb{R}} d\eta\, (\varphi, (D_m - i\eta)^{-1} \varphi)$$

siehe z.B. Kato, Lemma VI - 5.6

(→ allgemeinere Formel für Polarzerlegung eines abgeschlossenen Operators $T = |T| \cdot U$ mit $U = \int_{\mathbb{R}} d\eta\, (T - i\eta)^{-1}$)

$$\rightarrow 2\mathbb{1}_{[0,\infty)}(D_m) = \text{"}\operatorname{sgn}(D_m) - \operatorname{sgn}(D_m - \infty\text{"}) = i \lim_{b\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau}{\tau} e^{i\tau D_m}(1 - e^{-i\tau b}) = i \int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau}{\tau - i} e^{iD_m(\tau - i)} \cdot (\underbrace{1 - e^{-i\tau b - b}}_{\to 0})$$

$$= i \int_{\mathbb{R}} d\tau\, \frac{e^{iD_m(\tau - i)}}{\tau - i}$$

Upshot: Analysis in euklidischen Räumen wie $\mathbb{R}^1$ auf selbstadjungierte Operatoren übertragbar.

29.10.2020

Satz 1.2.3 $T: D(T) \to \mathcal{H}$ abgeschlossen.

$$\rho(T^*) = \{\bar{z} \in \mathbb{C} : z \in \rho(T)\}$$
$$\sigma(T^*) = \{\bar{z} \in \mathbb{C} : z \in \sigma(T)\}$$

Beweis HA

Satz 1.2.4 $T: D(T) \to \mathcal{H}$, $S: D(S) \to \mathcal{H}$ bijektiv

a) Falls $D(S) \subseteq D(T)$: $T^{-1} - S^{-1} = T^{-1}(S-T)S^{-1}$

b) Falls $D(T) \subseteq D(S)$: $T^{-1} - S^{-1} = S^{-1}(S-T)T^{-1}$

c) Falls $D(T) = D(S)$: $T^{-1} - S^{-1} = S^{-1}(S-T)T^{-1} = T^{-1}(S-T)S^{-1}$

Beweis HA

Korollar 1.2.5 Seien $T: D(T) \to \mathfrak{H}$, $S: D(S) \to \mathfrak{H}$ abgeschlossen

a) Seien $w, z \in \rho(T)$, dann gilt die erste Resolventenformel

$$R_T(z) - R_T(w) = (z-w)\, R_T(w) R_T(z)$$

b) Falls $D(S) = D(T)$ und $z \in \rho(T) \cap \rho(S)$, dann gilt die zweite Resolventenformel

$$\begin{aligned} R_T(z) - R_S(z) &= R_T(z)\,(S-T)\,R_S(z) \\ &= R_S(z)\,(S-T)\,R_T(z) \end{aligned}$$

Typisch: $S = -\Delta$, $T = -\Delta + V$

$$(-\Delta+E)^{-1}\, V\, (-\Delta+E-V)^{-1}$$

$$(-\Delta+E)^{-1}(-\Delta+E) \qquad \underbrace{(-\Delta+E)(-\Delta+E-V)^{-1}}_{\in \mathcal{L}}$$

$(-\Delta+E)^{-1/2}\, V\, (-\Delta+E)^{-1/2} \in \gamma^p \Leftrightarrow$

$$\|(-\Delta+E)^{-1/2} V (-\Delta+E)^{-1/2}\|_{\gamma^p} \le \|V^{\frac{1}{2}}(-\Delta+E)^{-1/2}\|^2_{\gamma^{2p}}$$

$$\overset{\text{Kato-Seiler-Simon}}{\le} \left(\int dx\, |V|^p\right) \cdot \left(\int (\xi^2+E)^{-p}\, d\xi\right)$$

$p > d/2$ ✓

Satz 1.2.6 Seien $T: D(T) \to \mathfrak{H}$ abgeschlossen und bijektiv
$S: D(S) \to \mathfrak{H}$ mit $D(T) \subseteq D(S)$ und
$\|S T^{-1}\| < 1$.

Dann ist $T + S$ abgeschlossen und invertierbar mit

$$(T+S)^{-1} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n T^{-1}(ST^{-1})^n$$ und die Reihe

$$= \sum_{n\geq 0} (-1)^n (T^{-1}S)^n T^{-1}$$ konvergiert in Operatornorm.

$T^{-1}(1+\underbrace{ST^{-1}}_{<1})^{-1}$

$= T^{-1} \sum_{n\geq 0} (-1)^n (ST^{-1})^n$

(wie für Zahlen)

Beweis: Per Voraussetzung ist S relativ T-beschränkt mit T-Schranke <1 $\Rightarrow$ $T+S: D(T) \to \mathcal{H}$ ist nach Satz 1.1.20 wieder abgeschlossen.
Für Resolvente brauchen wir noch, dass $T+S$ bijektiv ist:

Zur Injektivität: $\varphi \in D(T)$

$$\|(T+S)\varphi\| \geq \|T\varphi\| - \underbrace{\|S\varphi\|}_{=\|ST^{-1}T\varphi\|} \geq \|T\varphi\|\left(1-\|ST^{-1}\|\right) > 0$$

$\Rightarrow T+S$ injektiv.

Schauen wir uns nun die geometrische Reihe näher an.

$\sup_{\varphi} \frac{\|A_N \varphi\|}{\|\varphi\|}$

Zur Konvergenz der Reihe:

Definiere $A_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n T^{-1}(ST^{-1})^n$.

$$= \sum_{n=0}^{N} (-1)^n (T^{-1}S)^n T^{-1}.$$

Wir zeigen jetzt, dass $(A_N)_{N\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine Cauchyfolge ist $\Rightarrow$ wg. Vollständigkeit des Banachraums $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ folgt Konvergenz.

Seien also $M, N \in \mathbb{N}$. $(M > N)$

$$\|A_M - A_N\| = \left\| \sum_{n=N+1}^{M} (-1)^n T^{-1} (ST^{-1})^n \right\|$$

$$\leq \|T^{-1}\| \, \|ST^{-1}\|^{N+1} \sum_{n=0}^{M-N-1} \underbrace{\|ST^{-1}\|^n}_{<1}$$

$$= \underbrace{\|T^{-1}\|}_{\lesssim 1} \underbrace{\|ST^{-1}\|^{N+1}}_{<1} \cdot \underbrace{\frac{1 - \|ST^{-1}\|^{M-N}}{1 - \|ST^{-1}\|}}_{\lesssim 1} \xrightarrow[M\to\infty]{N\to\infty} 0$$

$\Rightarrow$ A_N Cauchy, d.h. wir haben Konvergenz

$$A_N \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{n\geq 0} (-1)^n T^{-1} (ST^{-1})^n \quad \text{in } \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

<u>Beh</u> $\lim A_N$ ist Rechts-Inverse von $S+T$

$$(S+T) A_N = (1 + ST^{-1}) \sum_{n=0}^{N} (-1)^n (ST^{-1})^n$$

$$= 1 + (-1)^N (ST^{-1})^{N+1}$$

$\Rightarrow$ $\operatorname{ran}(A_N) \subseteq D(S+T)$ und außerdem konvergiert

$$(S+T) A_N \to \mathbb{1}$$

Für $\psi \in \mathcal{H}$ erhalten wir $A_N \psi \to A\psi$
und $(S+T) A_N \psi \to \psi$

Wg Abgeschlossenheit von $S+T$ wissen wir, dass $A\psi \in D(S+T)$ und, dass $(S+T)A\psi = \psi$ $\forall \psi \in \mathcal{H}$

$(S+T)x = y$ $\Rightarrow$ $(S+T)A = \mathbb{1}$.

$\Rightarrow$ $S+T$ ist surjektiv, d.h. zusammen mit Injektivität ist $S+T$ bijektiv mit Resolvente $A = \sum_{n\geq 0} (-1)^n T^{-1} (ST^{-1})^n$. ▨

Satz 1.2.7 Sei $T: \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ abgeschlossen. Dann gelten

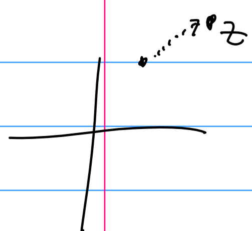
a) $\rho(T) \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\sigma(T) \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen

HA ← b) Für $z \in \rho(T)$ gilt $\|(T-z)^{-1}\| \geq \frac{1}{dist(z, \sigma(T))}$

c) $R_T : \rho(T) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist komplex analytisch, d.h., wir haben eine Potenzreihenentwicklung.

D.h. für $w \in \rho(T)$ und $r_w = \frac{1}{\|(T-z)^{-1}\|}$ konvergiert

$$\sum_{n \geq 0} (z-w)^n \left((T-w)^{-1}\right)^{n+1} = (T-z)^{-1} \text{ in } \mathcal{L}(\mathcal{H})$$



für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-w| < r_w$

d) Für $z, w \in \rho(T)$ gilt $\|(T-z)^{-1} - (T-w)^{-1}\| \to 0$ für $w \to z$, d.h. R_T ist auf $\rho(T)$ norm-stetig.

Beweis a) Zu $w \in \rho(T)$ ist $r_w = \frac{1}{\|(T-w)^{-1}\|} \in (0, \infty)$, d.h.

$\|\underbrace{(z-w)}_{S}\underbrace{(T-z)^{-1}}_{T}\| < 1$, wenn $|z-w| < r_w$. D.h. wegen

aus Satz 1.2.6

$(T-z) - (T-w) = w - z$ ist $T - z : D(T) \to \mathcal{H}$ wieder

bijektiv und abgeschlossen (Satz 1.2.6), d.h.

$\{z \in \mathbb{C} : |z-w| < r_w\} \subseteq \rho(T)$. $\Rightarrow$ $\rho(T)$ offen
$\sigma(T)$ abgeschlossen

c) Falls $w \in \rho(T)$, dann $r_w = \frac{1}{\|(T-w)^{-1}\|} \in (0,\infty)$

und für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-w| < r_w$ ist

$$(T-z)^{-1} = \left((T-w)-(z-w)\right)^{-1}$$

$$= \sum_{n \geq 0} (-1)^n (T-w)^{-1} \left((z-w)(T-w)^{-1}\right)^n$$

$$= \sum_{n \geq 0} (-1)^n (z-w)^n (T-w)^{-n-1} = (T-z)^{-1}$$

ist eine konvergete Potenzreihenentwicklung, falls $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-w| < r_w$ mit Koeffizienten $(-1)^n (T-w)^{-n-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

d) Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-w| < r_w = \frac{1}{\|(T-w)^{-1}\|}$, $w \in \rho(T)$

gilt $\|(T-z)^{-1} - (T-w)^{-1}\|$

$$= \left\| \sum_{n \geq 1} (-1)^n (z-w)^n (T-w)^{-n-1} \right\|$$

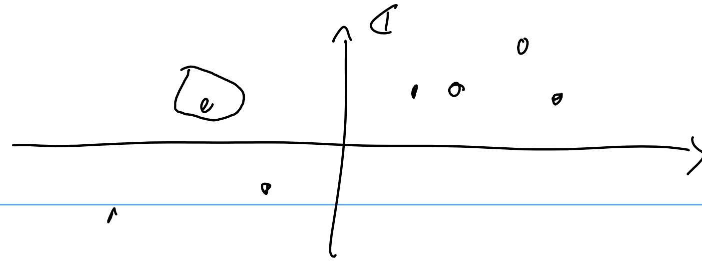
$$\overset{n \mapsto n+1}{=} \left\| \sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} (z-w)^{n+1} (T-w)^{-n-2} \right\|$$

$$\leq |z-w| \underbrace{\|(T-w)^{-1}\|^2}_{\lesssim 1} \sum_{n \geq 0} \underbrace{|z-w|^n \|(T-w)^{-1}\|^n}_{<1}$$

$$\xrightarrow{z \to w} 0$$

Bemerkung Lokalisierung von diskretem Spektrum.

$$\Longrightarrow \underbrace{\oint_{|\lambda - z| = \epsilon} \frac{dz}{T-z}}_{\text{Riesz-Projektion}} = P_\lambda = |\psi_\lambda \rangle\langle \psi_\lambda|$$



Was passiert mit Eigenwerten von T, wenn gestört wird

Theorem (Kato, Algazin). Angenommen $T : D(T) \to \mathcal{H}$ abgeschl. und $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Angenommen Γ ist eine rektifizierbare Kontur, die m Eigenwerte von T umkreist (gezählt gemäß geometrischer Vielfachheit).

Angenommen, dass $\sup_{z \in \Gamma} \| (T-z)^{-1} (S-z) \| < 1$

$\Rightarrow$ Dann gibt es genau m Eigenwerte von $T+S$ innerhalb der Kontur Γ

Beweisskizze (für Bequemlichkeit: $S \mapsto S - T$.)

$T(\kappa) = T + \kappa \tilde{T} \qquad \tilde{T} = S - T, \quad \kappa \in \mathbb{C}$

$T(1) = S$

$P^{(\kappa)} = \oint_\Gamma \frac{dz}{T(\kappa) - z}$; Ziel: $\exists\, \kappa_* > 1$ sodass $P^{(\kappa)}$ hängt stetig von κ ab für alle $|\kappa| < \kappa_*$

$\rightarrow$ in dem Fall sind $\operatorname{ran} P^{(\kappa)}$ isomorph zu $\operatorname{ran} P^{(0)}$

Und insbesondere $\dim \operatorname{ran} P^{(0)} = \dim \operatorname{ran} P^{(1)}$.

H. Siedentop – Generalization of Rouché's thm

Dyatlov – Zworski – Mathematical theory of scattering resonances Anhang C (Thm C.12)

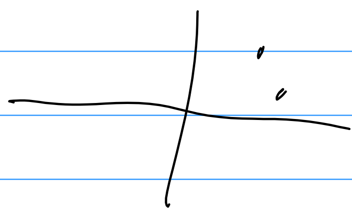
$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, \underbrace{dP(\lambda)}_{\text{PVM}} \qquad B = \int b(\lambda)\, dP(\lambda)$$

$A \; B \; C$

$$\boxed{(A+1)^{-1} = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\, e^{-t(A+1)}} \Leftarrow (A+1)^{-1} = \int_{\mathbb{R}} (\lambda+1)^{-1}\, dP(\lambda)$$

A, B s.a., $\quad D(A) = D(B) \quad (f, (A-B)f) \geq 0 \quad f \in D(A)$

$$A \geq B$$
$$\Downarrow$$
$$g(A) \geq g(B)$$



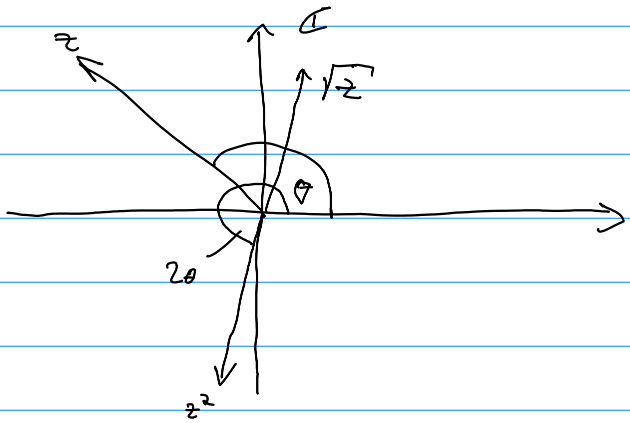
$g = \sqrt{\cdot}$ $\quad$ nicht, wenn $g = x^2$

g operatormonoton $\Leftrightarrow$ g Pick (Nevanlinna)

$\Updownarrow$ Herglotz

g bildet $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ holomorph in sich selbst ab

(z.B. $\sqrt{z} = |z|^{1/2} e^{i\theta/2}$ ok, aber $z^2 = |z|^2 e^{i2\theta}$ nicht



Disjunkte, mengentheoretische (nicht maßtheoretische) Zerlegung vom Spektrum abgeschlossener Operatoren. $T: D(T) \to \mathcal{H}$

$\sigma_p = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(T-\lambda) \neq \{0\}\}$. "Punktspektrum" (Injektivität schlägt fehl)

hier schlägt Surjektivität fehl

$\sigma_c = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T) : \overline{\operatorname{ran}(T-\lambda)} = \mathcal{H}\}$ "stetiges Spektrum"

$\sigma_r = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T) : \overline{\operatorname{ran}(T-\lambda)} \neq \mathcal{H}\}$ "residuales Spektrum"

$\rightarrow \quad \sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$

Wir hatten gesehen: $\forall \lambda \in \mathbb{C}: \lambda \in \sigma(T) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(T^*)$
$\rightarrow$ gilt i.A. nicht für $\sigma_p, \sigma_c, \sigma_r$.

HA $\rightarrow$ Behauptung $T: D(T) \to \mathcal{H}$ dicht definiert, abgeschlossen.

$$\lambda \in \sigma_p(T) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*) \cup \sigma_r(T^*)$$
$$\lambda \in \sigma_r(T) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$$
$$\lambda \in \sigma_c(T) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_c(T^*)$$

Insbesondere gilt

$$\sigma_r(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T) : \bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*) \}$$

und insbesondere ist $\sigma_r(A) = \emptyset$ falls A s.a. ist.

Weitere Bemerkung: oft ist $\sigma(T)$ nicht exakt bestimmbar
$\rightarrow$ man kann sich stattdessen bspw.

$$\Theta(T) := \{ (\psi, T\psi) : \psi \in D(T), \|\psi\| = 1 \}$$
$\hookrightarrow$ "numerisches Bild".

Im Allgemeinen ist $\Theta(T)$ weder offen noch abgeschlossen (selbst, wenn T abgeschlossen), aber konvex.

Behauptung Angenommen $T: D(T) \to \mathcal{H}$ abgeschlossen und $\rho(T) \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{\Theta(T)}) \neq \emptyset$.

Dann gilt $\sigma(T) \subseteq \overline{\Theta(T)}$ und

$$\|(T-\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \overline{\Theta(T)})}, \quad \lambda \in \rho(T).$$

$(A-\lambda)\psi = 0$. $\quad (A-\lambda)\psi_n \to 0$

Lemma 1.2.8 $T: \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ abgeschlosse (dicht definiert).

Dann gilt: $\lambda \in \sigma(T)$, wenn es eine Folge $(\psi_n) \subseteq \mathcal{D}(T)$ mit $\|\psi_n\| = 1$ und $\|(A-\lambda)\psi_n\| \to 0$

Falls λ ein Randpunkt, d.h. $\lambda \in \partial\sigma(T)$, dann gilt auch die Umkehrung.

Solche Folgen $(\psi_n) \subseteq \mathcal{D}(T)$, $\|\psi_n\|=1$, $\|(A-\lambda)\psi_n\| \to 0$ heißen <u>Weyl-Folgen</u>

<u>Beweis</u> "$\Rightarrow$" Angenommen, $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Weyl-Folge, dann kann λ nicht in $\rho(T)$ liegen. Denn, angenommen λ wäre in $\rho(T)$

$$1 = \|\psi_n\| = \|(T-\lambda)^{-1}(T-\lambda)\psi_n\|$$
$$\leq \|(T-\lambda)^{-1}\| \underbrace{\|(T-\lambda)\psi_n\|}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} \quad \lightning$$

"$\Leftarrow$" <u>HA</u> $\quad \boxtimes$

Lemma 1.2.9 ("Einfacher Spektralabbildungssatz")

Angenommen $A: \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$ ist injektiv und abgeschlossen

$$\Rightarrow \sigma(A^{-1}) \setminus \{0\} = \underbrace{(\sigma(A)\setminus\{0\})^{-1}}_{=\{\lambda^{-1}:\ \lambda\in\sigma\setminus\{0\}\}}$$

<u>Beweis</u> Angenommen $z \in \rho(A)\setminus\{0\}$. Dann behaupten wir

$$(A^{-1} - z^{-1})^{-1} \overset{!}{=} -z \underset{-z+z}{A}(A-z)^{-1} = -z - z^2(A-z)^{-1}$$

Linksinverse: Die RHS bildet $\mathcal{H} \to \operatorname{ran}(A) = D(A^{-1})$ beschränkt ab ($(A-z)^{-1} : \mathcal{H} \to D(A)$; $A : D(A) \to \operatorname{ran}(A) = D(A^{-1})$)
und für $\varphi \in \mathcal{H}$ gilt

$$(A^{-1} - z^{-1})(-zA(A-z)^{-1})\varphi = -z(A-z)^{-1}\varphi + A(A-z)^{-1}\varphi = \varphi$$

Rechtsinverse: Für $\psi \in D(A^{-1}) = \operatorname{ran}(A)$ gibt es $\varphi \in D(A)$ sodass $\psi = A\varphi$ und

$$(-zA(A-z)^{-1})(A^{-1} - z^{-1})\psi = A(A-z)^{-1}((A-z)\varphi)) = A\varphi = \psi$$

$\Rightarrow z^{-1} \in \rho(A^{-1})$. Durch Rückwärtsgehen folgt die umgekehrte Behauptung.

Was hat QM mit klassischer Mechanik zu tun und warum sind s.a. Operatoren wichtig? $m\ddot{x} = F(t)$, $F = -\nabla V$
$x(0), \dot{x}(0)$
→ Semiklassische Analysis
(z.B Buch von A. Martinez – Introduction to semiclassical and microlocal analysis)

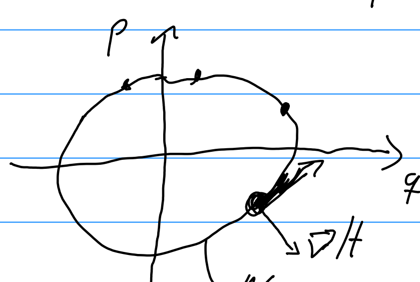
Hamiltonscher Mechanik: Bewegung von Punktteilchen durch Hamiltonsche Gleichung

$q(t)$ ... Ort d. Teilchens
$p(t)$ ... "kanonischer" Impuls

$$\rightarrow \quad \dot{q}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

$H(t)$ ... Hamiltonfunktion
oft von der Form
$H(t,p,q) = H(p,q) = p^2 - V(q)$
$\mathbb{R}^{2d}$ ... unser Phasenraum
$q \in \mathbb{R}^d$, $p \in \mathbb{R}^d$
$(q,p) \in \mathbb{R}^{2d}$
$T(p) - V(q)$



Niveaumenge von H, z.B. $M_\lambda = \{(q,p) \in \mathbb{R}^{2d} : H(q,p) = \lambda\}$

$$\dot q = \partial H/\partial p \qquad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \underline{\underline{J}}\, \nabla H \equiv X_H$$
$$\dot p = -\partial H/\partial q \qquad = \begin{pmatrix} 0 & 1\!\!1 \\ -1\!\!1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial H/\partial q \\ \partial H/\partial p \end{pmatrix}$$

Die Abbildung $(t, q, p) \mapsto (q(t), p(t)) \equiv \exp(t X_H)(x, \xi)$

heißt Hamilton'scher Fluß.

QM $\quad i\partial_t \Psi = \hat H \Psi \Rightarrow \Psi(t) = e^{it\hat H}\Psi_0, \quad \hat H = -\hbar^2\Delta - V(x)$

$\Psi(t=0) = \Psi_0$

Falls Ψ_0 Eigenfkt von H mit $H\Psi_0 = \lambda \Psi_0$

$\Psi(t) = e^{i\lambda t}\Psi(0)$.

Mikroträger: definiert man mittels FBI-Transformation

$\hbar > 0 \qquad T_\hbar : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$

$$f_{pq}^{(\hbar)}(x) = e^{ixp/\hbar} \exp\left(-\frac{(x-q)^2}{\hbar}\right)$$

$\llcorner \sqrt{(f_{pq}, x^2 f_{pq}) - (f_{pq}, x f_{pq})^2} \cdot \sqrt{x \mapsto -i\nabla}$ ist minimal

$$\hat f_{pq}^{\hbar}(\xi) = c_\hbar e^{i\xi\cdot q/\hbar} \exp\left(-\frac{(\xi-p)^2}{\hbar}\right)$$

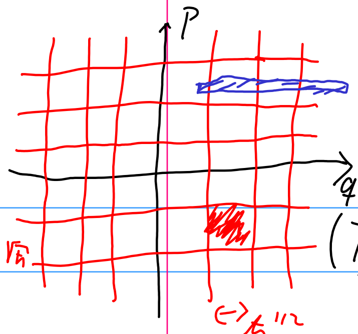
$$(T_\hbar u)(x,p) = \hbar^{-3d/4}\int dy\, e^{i(x-y)p/\hbar} e^{-\frac{(x-y)^2}{\hbar}} u(y)$$

$$= \hbar^{-3d/4}\left\langle u, e^{i(\cdot-x)p/\hbar} e^{-\frac{(\cdot-x)^2}{\hbar}}\right\rangle$$

misst wie viel kohärenter Zst steckt in u; $\|T_\hbar u\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$

$(MS)(u) \subseteq \mathbb{R}^{2d}$. Komplement aller Punkte, wo $T_\hbar u$

$(u \in L^2(\mathbb{R}^d))$ "mikrolokal exponentiell klein" ist.



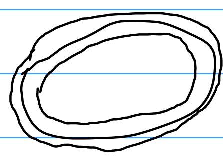
$T_\hbar u$ heißt $\overset{\text{mikrolokal}}{\vee}$ exponentiell klein bei $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2d}$, falls es eine Umgebung $U^{\subseteq \mathbb{R}^{2d}}$ von (x_0, ξ_0) gibt, wo

$$(T_\hbar u)(x, \xi) = O(e^{-1/\hbar}) \quad \forall (x, \xi) \in U$$

Thm 1 Angenommen $H(q,p)$ ist eine Hamiltonfkt. wie $H(p,q)_\lambda = p^2 - V(q) - \lambda$ $\quad Char(H) := \{(q,p) : H(p,q)_\lambda = 0\}$

Angenommen $u \in L^2$ löst $\begin{cases} \hat{H}u = (-\hbar^2\Delta - V - \lambda)u = 0 \\ \|u\|_2 = 1 \end{cases}$

Dann gilt $MS(u) \subseteq Char(P)$.



($\hat{H}$ geht durch Quantisierungsvorschrift

$$\hat{H}u = \iint \underbrace{H(x,\xi)}_{\text{reell, } C^\infty,\ (S'_{10})} e^{i(x-y)\xi/\hbar} u(y)\, dy\, d\xi$$

s.d.

Thm 2 Angenommen $u \in L^2$ löst $(-\hbar^2\Delta - V - \lambda)u = 0$ und angenommen der Hamiltonsche Fluß $\exp(tX_H)(q,p)$ existiert für $t \in [0,T]$ für ein $T > 0$.

$\downarrow$ Propagation von $MS(u)$

$$(x_0, \xi_0) \in MS(u) \Rightarrow \forall t \in [0,T] \text{ ist } \exp(tX_H)(x_0, \xi_0) \text{ wieder in } MS(u)$$

Anders ausgedrückt: $MS(u)$ ist invariant unter dem Hamiltonschen Fluß.

s- Orbitale, p- Orbitale $\quad \left(-\Delta - \frac{1}{|x|}\right)\psi = 0$

$$-\Delta = \bigoplus_{\ell \geq 0} -\Delta_\ell$$

$$\psi_{n\ell m}(x) = R_{n\ell}(|x|) \cdot Y_{\ell m}\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

Hauptquantenzahl, Drehimpuls, Magnetquantenzahl, Laguerrefunktionen

$$-\Delta_\ell = -d_r^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}$$

$$-\Delta\left(\frac{u(r)}{r}Y_{\ell m}\right)=\left(-u''(r)+\frac{\ell(\ell+1)u}{r^2}\right)Y_{\ell m}(\omega)$$

$\forall m \in \{-\ell,-\ell+1,\dots,\ell-1,\ell\}$

10^{-10} m weit weg vom Kern

$\hbar = 1$ $\hbar = 10^{-34}$ $-\hbar^2\Delta - \frac{1}{|x|}$ $x \mapsto \hbar^{-1}x$

$-\Delta$

$-\Delta - \frac{1}{|x|}$ $\rightarrow$ gibt nur Wellen

$-\Delta - \frac{Z}{|x|}$ oder $-\hbar^2\Delta - \frac{1}{|x|}$

und $Z \to \infty$ oder $\hbar \to 0$ dann sehen Wellen wie klassische Bahnen aus.

11.11.2020

1.3. Selbstadjungierte Operatoren

$A \subseteq A^{**}$

$$(\Psi, A\Psi) = (A\Psi, \Psi), \quad \Psi \in D(A) = D(A^*)$$

Definition 1.3.1 $T: D(T) \to \mathfrak{h}$ dicht definiert und abschließbar heißt wesentlich selbstadjungiert, genau dann wenn T^* s.a. ist, sprich $T^* = T^{**}$.

Bemerkung 1.3.2 $T: D(T) \to \mathfrak{h}$ wesentlich s.a. $\Rightarrow$ T ist symm.

denn $\overline{T} \underset{\text{Satz 1.1.13}}{=} T^{**} = T^*$, d.h. $T \subseteq \overline{T} = T^*$,

d.h. T symmetrisch (Bemerkung 1.1.10)

Lemma 1.3.3 (Kriterien für wesentliche S.A. I)

$T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ dicht definiert. Dann sind äquivalent

a) T ist wesentlich s.a

b) $\overline{T} = T^*$

c) $\overline{T}$ s.a.

In diesen Fällen ist $\overline{T}$ die eindeutige s.a. Erweiterung von T.

<u>Bemerkung</u> Lemma zeigt, dass s.a. Operatoren "maximal" sind in dem Sinne, dass es keine symmetrischen Erweiterunge.

Angenomme A ist s.a. und B wäre eine Erweiterung

$$A \subseteq B \subseteq B^* \subseteq A^* = A \quad, \text{d.h. } A = B.$$

<u>Beweis</u> a) $\Rightarrow$ b) folgt aus Satz 1.1.13, $\overline{T} = T^{**} = T^*$

b) $\Rightarrow$ c) Wenn $\overline{T} = T^*$, dann ist T^* dicht definiert. Wg Satz 1.1.13 gilt

$$\overline{T} = T^{**} = (\overline{T})^* \quad, \text{d.h. } \overline{T} \text{ s.a.}$$

c) $\Rightarrow$ a) $\underbrace{\overline{T}}_{= T^{**}} = (\overline{T})^* \underset{\text{Kor } 1.1.17}{=} T^* \Rightarrow T^*$ s.a., d.h. T wesentlich s.a

Zur Eindeutigkeit d s.a Fortsetzung. Angenommen, $A : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$ wäre eine weitere s.a Erweiterung

$$T \subseteq A = A^* \subseteq T^* = \overline{T} \subseteq \overline{A} = A \qquad \square$$

Lemma 1.3.4 Angenommen $S: \mathcal{D}(S) \to \mathcal{H}$ symmetrisch (nicht notwendigerweise abgeschlossen)

a) Für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist $S - z$ injektiv und stetig invertierbar auf $\mathrm{ran}(S-z)$

T abgeschl.

$\|(T-z)^{-1}\| \geq \frac{1}{\mathrm{dist}(z, \sigma(T))}$

- $\|(S-z)\psi\| \geq |\mathrm{Im}\, z| \, \|\psi\|, \quad \psi \in \mathcal{D}(S)$
- $\left\| (S-z)^{-1}\big|_{\mathrm{ran}(S-z)} \right\| \leq \frac{1}{|\mathrm{Im}\, z|}$

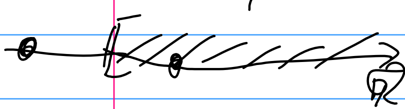
b) S abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $\mathrm{ran}(S-z)$ abgeschlossen für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$S \geq 0 \Rightarrow S$ s.a. (später); $\mathrm{ran}(S-z) = \mathcal{H}$

$z \in \rho(S)$

c) $S \geq 0$, sprich $(\psi, S\psi) \geq 0$, $\psi \in \mathcal{D}(S)$

0



$\left\| (S+\lambda)^{-1}\big|_{\mathrm{ran}(S+\lambda)} \right\| < \frac{1}{\lambda}$ für $\lambda > 0$

(unnötig)

$(S-z) \quad z = -1$

Beweis a) $\|(S-z)\overset{\mathcal{D}(S)}{\psi}\| \overset{CSU}{\geq} |(\psi, (S-z)\psi)|$

$$= |\underbrace{(\psi, (S - \mathrm{Re}\, z)\psi)}_{\text{reell}} - i\, \mathrm{Im}(z) \|\psi\|^2|$$

$$\geq |\mathrm{Im}\, z| \, \|\psi\|.$$

Zur Injektivität: Angenommen $0 \neq \varphi \in \mathrm{Ker}(S-z)$, dann

$$0 = \|(S-z)\varphi\| \geq |\mathrm{Im}(z)| \, \|\varphi\|, \text{ d.h. } \varphi = 0.$$

$\Rightarrow$ auf $\mathrm{ran}(S-z)$ können wir invertieren

$$\left\|(S-z)^{-1}\big|_{\mathrm{ran}\, S-z}\right\| = \sup_{\phi \in \mathrm{ran}\, S-z} \frac{\|(S-z)^{-1}\phi\|}{\|\phi\|} \qquad \phi = (S-z)\overset{\mathcal{D}(S)}{\psi}$$

$$= \sup_{\psi \in \mathcal{D}(S)} \frac{\|\psi\|}{\|(S-z)\psi\|} \leq \frac{1}{|\mathrm{Im}(z)|}$$

b) "$\Rightarrow$" also angenommen, S ist abgeschlossen, dann sind auch $S-z$ und $(S-z)^{-1}$ abgeschlossen.

Angenommen $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{ran}(S-z) = D((S-z)^{-1})$ mit $\psi_n \to \psi \in \mathcal{H}$. Dann ist $((S-z)^{-1}\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy, denn

$$\|(S-z)^{-1}(\psi_n-\psi_m)\| \le \frac{1}{|\mathrm{Im}\, z|}\,\|\psi_n-\psi_m\| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$$

d.h. $(S-z)^{-1}\psi_n$ ist Cauchy in $D((S-z)^{-1})$
d.h. $(S-z)^{-1}\psi_n \longrightarrow \phi$ in $\mathcal{H}$. Wg Abgeschlossenheit ist $\phi = (S-z)^{-1}\psi$, d.h. $D((S-z)^{-1}) = \operatorname{ran} S-z$ abgeschlossen

"$\Leftarrow$" analog.

c) für $S \geq 0$, also $(\psi, S\psi) \geq 0$, d.h. für $\lambda > 0$

$$\lambda\|\psi\|^2 \le (\psi,(S+\lambda)\psi) \overset{CSU}{\le} \|\psi\|\,\|\underbrace{(S+\lambda)\psi}_{\phi}\|$$

$$\Rightarrow \|(S+\lambda)^{-1}\| \le \frac{1}{\lambda}$$

$\square$

$$(1+M_{x^2})\psi = \phi \qquad M_{\frac{1}{1+x^2}}$$

Bemerkung O. Bandtlow (Math. Nachr. 2004)

$0 < p < \infty$, $A \in \gamma^p$ (d.h. bedeutet, dass die Eigenwerte von A^*A in $\ell^{p/2}$ liegen.)

$$\|(A-z)^{-1}\| \le \frac{1}{\operatorname{dist}(z,\sigma(A))} \exp\left(a_p \frac{\nu_p(A)^p}{\operatorname{dist}(z,\sigma(A))^p} + b_p\right)$$

wobei a_p, b_p, ν_p durch den quasinilpotenten Teil von A bestimmt sind.

$\gamma^p \ni A = D + N$, wobei D normal, d.h. $\|D\psi\| = \|D^*\psi\|$ $\forall \psi \in \mathcal{H}$

und N ist quasinilpotent, d.h. $\sigma(N) = \{0\}$

- Für Matrizen ist Quasinilpotenz gleichbedeutend mit Nilpotenz, d.h $\exists h \in \mathbb{N}$ $N^h = 0$
- quasinilpotente Operatoren lassen sich durch nilpotente Op. approximieren

a_p und b_p sind die Konstanten, die in

$$\|(N-z)^{-1}\| \leq \frac{1}{|z|} \exp\left(a_p \frac{\|T\|_p^p}{|z|^p} + b_p \right)$$ auftreten

$A = D + N$
$a \vee b = \max(a,b)$

$\nu_p(A) := \inf \{ \|N\|_p : N \text{ ist quasinilpotenter Teil} \} \leq (2 \vee 2^{\frac{1}{p}}) \|A\|_p$

$\Rightarrow$ Anwendung: Störung von Spektren.

Angenommen $A, B \in \gamma^p$ mit $\|A - B\| <$ Zahl.

$\Rightarrow$ Was kann man über Distanz von $\sigma(A)$ und $\sigma(B)$ sagen.

$$\hat{d}(\sigma_1, \sigma_2) = \sup_{\lambda \in \sigma_1} d(\lambda, \sigma_2)$$

Hausdorff-Distanz $\hat{h}(\sigma_1, \sigma_2) = \max\{ \hat{d}(\sigma_1, \sigma_2), \hat{d}(\sigma_2, \sigma_1) \}$

$\Rightarrow$ Bandtlow: $$\hat{h}(\sigma(A), \sigma(B)) \leq \frac{\nu_p(A) \vee \nu_p(B)}{f_p\left(\frac{\nu_p(A) \vee \nu_p(B)}{\|A - B\|} \right)}$$

wobei $f_p : \mathbb{R}_+^0 \to \mathbb{R}_+^0$ ist die Umkehrfunktion von $g_p : \mathbb{R}_+^0 \to \mathbb{R}_+^0$ $g_p(\lambda) = \exp(a_p \lambda^p + b_p)$ ist.

Satz 1.3.5 (Kriterien für Selbstadjungiertheit)

Angenommen $S: \mathcal{D}(S) \to \mathcal{H}$ ist dicht definiert, symmetrisch. Dann sind äquivalent.

a) S ist selbstadjungiert.

b) Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist $\operatorname{ran}(S-z) = \mathcal{H}$

c) $\exists \; z_\pm \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im} z_\pm \gtrless 0$ mit $\operatorname{ran}(S-z) = \mathcal{H}$

d) $\sigma(S) \subseteq \mathbb{R}$

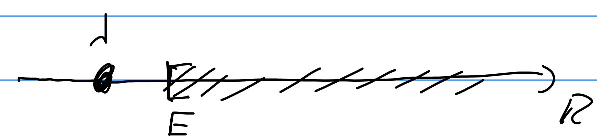
$S - E \geq 0$
$\Updownarrow$
$(\psi, (S-E)\psi) \geq 0$
$\psi \in \mathcal{D}(S)$

Außerdem sind dann äquivalent

α) $S - E \geq 0$, $E \in \mathbb{R}$ und $\sigma(S) \subseteq \mathbb{R}$

β) $\sigma(S) \subseteq [E, \infty)$

In diesen Fällen gilt $\|(S-\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{E-\lambda}$, $\lambda < E$



Beweis a) ⇒ b) b) ⇒ a), b) ⇒ c) ✓, c) ⇒ d), d) ⇒ b) ✓

b) ⇒ c) klar

d) ⇒ b) Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, dann ist $z \in \rho(S)$, d.h.
$(S-z)^{-1} : \underbrace{\mathcal{D}((S-z)^{-1})}_{\operatorname{ran} S-z} \to \mathcal{H}$ stetig ab

Da $S-z$ bijektiv ist, folgt $\operatorname{ran} S-z = \mathcal{H}$

12.11.20

a) ⇒ b) Angenommen, $\operatorname{ran}(S-z) \neq \mathcal{H}$.
Da S ist s. a (insb. abgeschlossen), dann ist $\operatorname{ran}(S-z)$ abgeschlossen (Lemma 1.3.4)
Mit Lemma 1.1.6 ist
$$\ker(S-z)^* = \ker S - \bar{z} \overset{\text{Lemma}}{=} \operatorname{ran}(S-z)^\perp \neq \{0\}$$
→ $\bar{z} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ wäre EW von S ↯ Lemma 1.3.4

da für symmetrische Operatoren $S-z$ injektiv, wenn $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

b) $\Rightarrow$ a) Per Voraussetzung ist $S\subseteq S^*$ (da S symmetrisch und dicht definiert), d.h. wir brauchen nur noch $S^*\subseteq S$ zeigen.
Per Voraussetzung sind $S-z$ und $S-\bar z$ surjektiv und, wg Lemma 1.3.4 injektiv, also bijektiv, d.h. $(S-z)^{-1}:\mathcal{H}\to D(S)$ und $(S-\bar z):\mathcal{H}\to D(S)$ existieren.

Sei $\psi\in D(S^*)$, dann ist

$$\phi=\underline{(S-z)^{-1}(S^*-z)\psi}\in D(S)\subseteq D(S^*).$$

$\Rightarrow$ wir sehen $(S-z)\phi=(S^*-z)\phi$

$$S\phi=S^*\phi$$

$$(S^*-z)(\psi-\phi)=(S-z)\phi-(S-z)\phi=0$$

$\Rightarrow\ \psi-\phi\in\ker S^*-z=\operatorname{ran}(S-\bar z)^{\perp}=\{0\}$

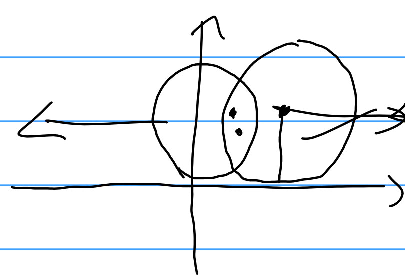
$\Leftrightarrow\ \psi=\phi\in D(S)\quad\Rightarrow\quad D(S^*)\subseteq D(S)$

$D(S^*)$

c)

$(S-z)^{-1}$

$z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$



$$\frac{1}{\|(S-z_\pm)^{-1}\|}$$

$|\operatorname{Im} z_\pm|<r_\pm$

$\Rightarrow\ \mathbb{C}^\pm\setminus\mathbb{R}\subseteq\rho(S)$

$\Rightarrow\ \sigma(S)\subseteq\mathbb{R}$

Wg Lemma 1.3.4 sind $S-z_\pm$ injektiv und per Voraussetzung surjektiv, also bijektiv
$\Rightarrow\ (S-z_\pm)^{-1}:\mathcal{H}\to D(S)$ existieren und die Neumann-Reihe

$$(S-z)^{-1} = \sum_{n\geq 0} (z-z_\pm)^n \left((S-z_\pm)^{-1}\right)^{n+1} \quad \text{existiert für}$$

$$\|(S-z)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} z|} \qquad |z-z_\pm| < \frac{1}{\|(S-z_\pm)^{-1}\|} \equiv r_\pm$$

$$\Rightarrow \quad \{z \in \mathbb{C} : |z-z_\pm| < r_\pm\} \subseteq \rho(S)$$

Wg Lemma 1.3.4. ist auch

$$\{z \in \mathbb{C} : |z-z_\pm| < |\operatorname{Im} z_\pm| \leq r_\pm\} \subseteq \rho(S)$$

$\rightarrow$ Iteriere so lange bis $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \neq 0\} \subseteq \rho(S)$
d.h. $\sigma(S) \subseteq \mathbb{R}$.

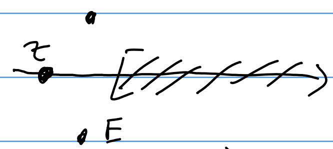
Jetzt zu α und β:

$\alpha)$ $S - E \geq 0$, $\underline{\sigma(S) \subseteq \mathbb{R}}$

$\beta)$ $\sigma(S) \subseteq [E, \infty)$

$\|(S-\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{E-\lambda}$

$\lambda < E$



$\alpha) \Rightarrow S$ ist s.a.

$\alpha) \Rightarrow \beta)$ Wenn $S - E \geq 0$, dann existiert für $z \in \mathbb{C} \setminus [E, \infty)$ die Resolvente $(S-z)^{-1}$

$\Rightarrow \quad \sigma(S) \subseteq [E, \infty)$.

Die Schranke $\|(S-\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{E-\lambda}$ folgt wie in Lemma 1.3.4 (mit $S \mapsto S-E$ ersetzt)

$\beta) \Rightarrow \alpha)$ z.z. $(\psi, \underbrace{(S-E+\lambda)\psi}_{\phi}) > 0$, $\lambda > 0$, $\psi \in \mathcal{D}(S)$

$\Updownarrow$ $E - \lambda \in \rho(S)$ für $\lambda > 0$.

$$\infty > f(\lambda) \equiv (\phi, (S-E+\lambda)^{-1}\phi) > 0$$
$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$

Zu zeigen: Positivität von $(S-E+\lambda)^{-1}$.

Angenommen, $f(\lambda)$ wäre nicht positiv, sprich es gäbe $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$ sodass $f(\lambda_0) \leq 0$.

Wir beobachten, dass $f(\lambda)$ monoton fällt.

<u>Intuition</u>

$$\left(\left((S-E+\lambda)^{-1} - (S-E+\tilde\lambda)^{-1} \right) \frac{1}{\lambda-\tilde\lambda} \right.$$

$$= (S-E+\lambda)^{-1} \frac{\cancel{(\lambda-\tilde\lambda)}}{\cancel{\lambda-\tilde\lambda}} (S-E+\tilde\lambda)^{-1}$$

$$\left. \longrightarrow \left((S-E+\lambda)^{-1}\phi, (S-E+\lambda)^{-1}\phi \right) \right)$$

$$\underline{f(\lambda)} = \underbrace{(\phi, (S-E+\lambda)^{-1}\phi)}_{\leq \cancel{\|\phi\|}\, \|(S-E+\lambda)^{-1}\phi\|^2} \qquad \|(S-E+\lambda)^{-1}\phi\|^2 \geq$$

$$f'(\lambda) = -\|(S-E+\lambda)^{-1}\phi\|^2 \leq -f(\lambda)^2$$

$\Rightarrow$ 1) $f' < 0$, d.h. $f(\lambda)$ fällt.

2) $$\int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{f'(\tilde\lambda)}{f(\tilde\lambda)^2} d\tilde\lambda \leq \lambda_0 - \lambda$$

$$\int_{f(\lambda_0)}^{f(\lambda)} \frac{df}{f^2} =$$

$$\frac{1}{f(\lambda_0)} - \frac{1}{f(\lambda)}$$

$$\Rightarrow f(\lambda) \leq \frac{f(\lambda_0)}{1 + f(\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)}$$

$$\lambda \to \underbrace{\lambda_0 - \frac{1}{f(\lambda_0)}}_{\equiv \Lambda_0 > \lambda_0 \text{ (da } f(\lambda_0)<0)} \Rightarrow f(\lambda) \xrightarrow{\lambda\to\Lambda_0} -\infty.$$

$\Rightarrow$ $f(\lambda)$ wäre unbeschränkt

↯ Existenz der Resolvente $(S-E+\lambda)^{-1}$, $\lambda \geq 0$ ▭

Korollar 1.3.6 $S: D(S) \to \mathcal{H}$ dicht definiert, symmetrisch. Dann sind äquivalent

a) S wesentlich s.a

b) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ $\overline{\operatorname{ran}(S-z)} = \mathcal{H}$

c) $\exists z_\pm \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ $\overline{\operatorname{ran}(S-z)} = \mathcal{H}$

d) $\sigma(\overline{S}) \subseteq \mathbb{R}$.

Aus α) und β) von Satz 1.3.5 bekommt man eine Baby-Version vom min-max-Prinzip.

$$\inf \sigma(A) = \inf_{\substack{\psi \in \mathcal{D}(A) \\ \|\psi\|=1}} (\psi, A\psi), \qquad \sup \sigma(A) = \sup_{\substack{\psi \in \mathcal{D}(A) \\ \|\psi\|=1}} (\psi, A\psi)$$

$$\left(\inf_{\psi} (\psi, A\psi) = \mu_1(A) \qquad \mu_2(A) = \inf_{\psi \perp \psi_1} (\psi, A\psi) \right)$$

Aus linearer Algebra ist bekannt, dass Eigenvektoren von hermiteschen Matrizen in $\mathbb{C}^d$ eine ONB liefern.
Im ∞-dimensionalen Fall ist dies im Allgemeinen nicht der Fall. Aber falls doch, bekommt man wesentliche SA.

Thm 1.3.7 Sei $S: D(S) \to \mathcal{H}$ symmetrisch mit orthonormaler Basis von Eigenvektoren $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ separabel. Dann ist S wesentlich selbstadjungiert.

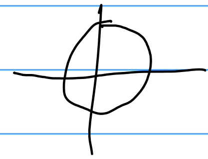
Beweis Die Menge aller endlichen Linearkombinationen $\psi = \sum_j c_j \varphi_j$ ist dicht in $\mathcal{H}$.
Dann ist für $\{\lambda_j\}$ Menge der zugehörigen Eigenwerte

$$\phi = \sum_j \frac{c_j}{\lambda_j \pm i} \varphi_j \in \mathcal{D}(S) \quad \text{und es gilt}$$

$(S\pm i)\phi = \psi$; d.h. $\operatorname{ran}(S\pm i)$ ist dicht und mit vorigem Korollar folgt, dass S wesentlich s.a.

∎

e^{itH}



Eine Bijektion $U:\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}$ heißt unitär, falls

$$(U\psi, U\psi) = (\psi, U^*U\psi) = (\psi,\psi)$$

d.h. U ist genau dann unitär, wenn $U^* = U^{-1}$.

<u>Thm 1.3.8</u> Sei $U:\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}$ unitär. Dann gilt

- $\sigma(U)\subseteq\{z\in\mathbb{C}: |z|=1\}$
- alle Eigenwerte haben Betrag 1
- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal zueinander.

<u>Beweis</u> Da $\|U\|\le 1$ ist $\sigma(U)\subseteq\{z\in\mathbb{C}: |z|\le 1\}$. Da aber auch U^{-1} unitär ist, gilt mit Lemma 1.2.9 (einfacher Spektralabbildungssatz), dass

$$\sigma(U)\subseteq\{z\in\mathbb{C}: |z|\ge 1\},$$ d.h.

$$\sigma(U)\subseteq\{z\in\mathbb{C}: |z|=1\}.$$

Zu Eigenvektoren: $U\psi_j = z_j\psi_j \quad (j=1,2)$

$$(z_1-z_2)(\psi_1,\psi_2) = (U^*\psi_1,\psi_2)-(\psi_1,U\psi_2) = 0$$

$U\psi = z\psi$

$\Rightarrow U^*\psi = U^{-1}\psi = z^{-1}\psi$, $U^*\psi = \bar{z}\psi$

$$\Rightarrow (\psi_1,\psi_2) = 0$$

∎

$\underbrace{A^*A}_{\text{s.a.}} \geq 0 \qquad (\psi, A^*A\psi) = \|A\psi\|^2.$

<u>Thm 1.3.9</u> Angenommen $A: \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$ dicht definiert und abgeschlossen. Dann gilt

- $A^*A \geq 0$
- A^*A ist s.a
- $\mathcal{D}(A^*A)$ ist ein determinierender Bereich von A.

<u>Beweis</u> Nichtnegativität ist klar. Jetzt schauen wir $1 + A^*A$ an und zeigen Bijektivität + Selbstadjungiertheit der Resolvente.

Für $x \in \mathcal{D}(A^*A)$ gilt

$$(x, (1+A^*A)x) = \|x\|^2 + \|Ax\|^2 \geq \|x\|^2$$

und $\|(1+A^*A)x\|^2 \geq \|x\|^2 \to A^*A+1$ ist injektiv.

außerdem ist $1+A^*A$ symmetrisch

$\to$ mit Lemma 1.3.4. können wir auf ran $1+A^*A$ stetig invertieren.

$\to$ jetzt zur Surjektivität (ran $1+A^*A = \mathcal{H}$)

<u>$V: (x,y) \mapsto (-y,x)$</u> Mit $\Gamma(T^*) = (V\Gamma(T))^\perp$ d.h. $V^{-1}\Gamma(T^*) = \Gamma(T)^\perp$

$$\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} = \Gamma(T) \oplus V^{-1}\Gamma(T^*), \text{ d.h.}$$

$\forall z \in \mathcal{H} \quad \exists\, x \in \mathcal{D}(A),\ y \in \mathcal{D}(A^*)$, sodass

$\langle z, 0 \rangle = \langle x, Ax \rangle + V^{-1} \langle y, A^* y \rangle = \langle x - A^* y, Ax + y \rangle$

Tupel

d.h. $\quad z = x - A^* y \quad$ und $\quad y = -Ax \quad$ und somit

$$z = x + A^* A x = (1 + A^* A)\, x$$

$\Rightarrow \quad 1 + A^* A$ ist surjektiv $\Rightarrow$ $1 + A^* A$ bijektiv.

$T \equiv (1 + A^* A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und wieder symm.

$\Rightarrow$ T ist. sa, da $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*) = \mathcal{H}$.

$\Rightarrow$ mit HA 1.2.3) sind auch $1 + A^* A$ und $A^* A$ s.a.

Zum det. Bereich. $\mathcal{D}(A^* A)$

Zu zeigen: $\Gamma(A) = \overline{\Gamma(A)|_{\mathcal{D}(A^* A)}}$

Das ist gleichbedeutend mit

"$\langle x, Ax \rangle \perp \langle y, Ay \rangle \ \forall y \in \mathcal{D}(A^* A) \Rightarrow x = 0$"

$0 = \big(\langle x, Ax \rangle, \langle y, Ay \rangle \big)_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}} = (x, y) + (Ax, Ay)$

$= \big(x, (1 + A^* A) y \big)_{\mathcal{H}}$. Da aber $1 + A^* A$ injektiv,

folgt, dass $x = 0$ sein muss, wie behauptet. $\boxed{}$

18.11.2020

Lemma 1.3.10 $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ s.a. und $V : \mathcal{D}(V) \to \mathcal{H}$ mit $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(V)$. Dann sind äquivalent:

a) V ist T-beschränkt
b) $\lim_{\eta \to \infty} \| V(T \pm i\eta)^{-1} \| < \infty$

In diesem Fall ist die T-Schranke von V gerade
$c = \lim_{\eta \to \infty} \| V(T \pm i\eta)^{-1} \|$

(!)

Beweis a) $\Rightarrow$ b) $\| V\psi \|^2 \leq a^2 \| T\psi \|^2 + b^2 \| \psi \|^2, \ \psi \in \mathcal{D}(T)$

$$\| V \underbrace{(T+i\alpha)^{-1} \phi}_{\mathcal{D}(T)} \|^2 \leq a^2 \| T(T+i\alpha)^{-1} \phi \|^2 + b^2 \| (T+i\alpha)^{-1} \phi \|^2$$

$$= a^2 \left[\| T(T+i\alpha)^{-1} \phi \|^2 + \frac{b^2}{a^2} \| (T+i\alpha)^{-1} \phi \|^2 \right]$$

$$= a^2 \| (T + ib/a)(T+i\alpha)^{-1} \phi \|^2$$

Mit $\alpha = b/a$ folgt nach $\sup_{\|\phi\|=1}$, dass

$\| V(T + ib/a)^{-1} \| \leq a$. Jetzt $\lim_{b \to 0}$ nehmen zeigt

$\overline{\lim_{\eta \to \infty}} \| V(T+i\eta)^{-1} \| \leq a$.

b) $\Rightarrow$ a) Falls $\| V(T+i\alpha)^{-1} \| \leq a$ für ein $\alpha > 0$,

$\psi \in \mathcal{D}(T)$ dann $\| V\psi \| = \| V(T+i\alpha)^{-1} (T+i\alpha)\psi \|$
$\leq a\alpha \| \psi \| + a \| T\psi \|$, d.h. V ist T-beschränkt mit Schranke $\leq a$.

In diesem Fall ist die T-Schranke von V höchstens

$\lim_{\eta\to\infty} \|V(T-i\eta)^{-1}\|$, d.h. der Grenzwert existiert $\blacksquare$

<u>Satz 1.3.11</u> (Kato-Rellich) Angenommen $T: \mathcal{D}(T) \to \mathfrak{H}$ (wesentlich) selbstadjungiert und $V: \mathcal{D}(V) \to \mathfrak{H}$ ist symmetrisch und T-beschränkt mit T-Schranke < 1

$\Rightarrow T+V$ (wesentlich) s.a (mit $\overline{T+V} = \overline{T} + \overline{V}$)

<u>Beweis</u> Wg Lemma 1.3.10 $\exists \eta$ hinreichend groß, sodass

$\|V(T+i\eta)^{-1}\| < 1 \Rightarrow$ Mit Satz 1.2.6 existiert neben $(T+i\eta)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ auch $(T+V+i\eta)^{-1}$, d.h. $T+V+i\eta$ bijektiv $\Rightarrow \operatorname{ran} T+V+i\eta = \mathfrak{H}$
$\Rightarrow T+V$ s.a mit Thm 1.3.5 $\boxtimes$