

# Spektraltheorie von Schrödinger-Operatoren

Konstantin Merz

15. Februar 2021

ZUSAMMENFASSUNG. Im Folgenden werden wir einige wichtige Ergebnisse aus der Spektraltheorie von Schrödinger-Operatoren zusammenfassen. Wir beginnen mit einer Zusammenfassung von wichtigen Definitionen und Resultaten aus der Störungstheorie selbstadjungierter Operatoren. Im Anschluss widmen wir uns der Störung von Punktspektren. Insbesondere werden wir die analytische Störungstheorie einführen. Anschließend werden wir Schranken an die Zahl von Eigenwerten geben, die Stabilität des wesentlichen Spektrums untersuchen und versuchen Bedingungen zu finden, unter denen es kein singulär stetiges Spektrum gibt.

## Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Definitionen und bekannte Resultate	1
1. Allgemeine Operatortheorie	1
2. Quadratische Formen	4
Kapitel 2. Störung von Punktspektren	15
1. Endlichdimensionale Störungstheorie	15
2. Reguläre Störungstheorie	25
3. Lokalisierung von diskretem Spektrum	29
4. Analytische Familien von Operatoren und Formen	36
5. Asymptotische Störungstheorie	44
6. Summierungsmethoden in der Störungstheorie	55
7. Spektrale Konzentration	60
8. Resonanzen und Fermis goldene Regel	65
Kapitel 3. Spektraltheorie	75
1. Min-Max-Prinzip	75
2. Gebundene Zustände von Schrödinger-Operatoren: Quantitative Methoden	76
3. Gebundene Zustände von Schrödinger-Operatoren: Qualitative Methoden	79
4. Bestimmung des wesentlichen Spektrums I: Weyls Satz	92
5. Bestimmung des wesentlichen Spektrums II: Der HVZ-Satz	101
6. Bestimmung des wesentlichen Spektrums III: Geometrische Methoden	101
7. Die Abwesenheit des singular-stetigen Spektrums I: allgemeine Theorie	108
8. Die Abwesenheit des singular-stetigen Spektrums II: glatte Störungen	112
9. Die Abwesenheit des singular-stetigen Spektrums III: gewichtete $L^2$ -Räume	125
10. Die Abwesenheit des singular-stetigen Spektrums IV: dilatationsanalytische Potentiale	129
11. Aronszajn–Donoghue-Theorie und das Simon–Wolff-Kriterium zur Abwesenheit von singular-stetigem Spektrum	133
12. Eigenschaften von Eigenfunktionen	137
13. Die Einfachheit des Grundzustandes	146
14. Die Abwesenheit positiver Eigenwerte und $\sigma_{pp}(H) = \sigma_{disc}(H)$	151
15. Kriterien für Kompaktheit und Operatoren mit kompakter Resolvente	167
16. Die asymptotische Verteilung von Eigenwerten	180
17. Grundlagen der Streutheorie	195
18. Einführung zur Spektraltheorie nicht-selbstadjungierter Operatoren	209
Kapitel 4. Schrödingeroperatoren mit komplexen Potentialen	229

1. Basics	229
2. More advanced notions and tools in the quest of eigenvalue estimates for Schrödinger operators with complex potentials	235
3. Some results on complex eigenvalues of Schrödinger operators with complex potentials	239
Kapitel A. Werkzeuge aus der Funktionalanalysis	245
1. Topologien auf beschränkten Operatoren	245
2. Konvergenz unbeschränkter Operatoren	246
3. Trottersche Produktformel	254
4. Kompakte Operatoren und Schatten-Klassen	257
5. Fredholm-Theorie	264
6. Beurling–Deny-Kriterien	266
7. Unique continuation Sätze für Schrödinger-Operatoren	268
Kapitel B. Spektralsatz für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren	273
1. Stieltjes-Maße	273
2. Borel-Transformationen	283
3. Herglotz–Nevanlinna–Pick-Funktionen	290
4. Der Spektralsatz	301
5. Spektralteile selbstadjungierter Operatoren	316
6. Spektralprojektionen	318
Literaturverzeichnis	321

## Definitionen und bekannte Resultate

$\mathcal{H}$  bezeichnet immer einen separablen Hilbertraum.

### 1. Allgemeine Operatortheorie

DEFINITION 1.1 (Relativ beschränkter Operator). Es seien  $A$  und  $B$  dicht definierte, lineare Operatoren auf  $\mathcal{H}$ . Unter den Annahmen

- (i)  $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$  und
- (ii) für  $a, b \in \mathbb{R}$  und alle  $\varphi \in \mathcal{D}(A)$  ist

$$\|B\varphi\| \leq a\|A\varphi\| + b\|\varphi\|, \quad (1.1)$$

heißt der Operator  $B$  *bezüglich  $A$  beschränkt*, oder einfach  *$B$  ist  $A$ -beschränkt*. Das Infimum all dieser  $a$  heißt relative Schranke von  $B$  bezüglich  $A$ . Ist die relative Schranke Null, so sagt man, dass  $B$  infinitesimal klein bezüglich  $A$  ist und schreibt  $B \ll A$ .

- BEMERKUNG 1.2. (1) Sobald  $a$  kleiner gewählt wird, wird  $b$  im Allgemeinen wachsen müssen.
- (2) Die zweite Bedingung ist äquivalent zur Existenz von  $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R}$  und für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(A)$  gilt

$$\|B\varphi\|^2 \leq \tilde{a}^2 \|A\varphi\|^2 + \tilde{b}^2 \|\varphi\|^2. \quad (1.2)$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so gilt die ursprüngliche Bedingung mit  $a = \tilde{a}$  und  $b = \tilde{b}$ . Gilt die ursprüngliche Bedingung, so gilt auch die Neue mit  $\tilde{a}^2 = (1 + \epsilon)a^2$  und  $\tilde{b}^2 = (1 + \epsilon^{-1})b^2$  für alle  $\epsilon > 0$ . Somit sind auch die relativen Schranken in beiden Bedingungen gleich.

- (3) Um diese Abschätzungen zu zeigen, genügt es sie auf einem determinierenden Bereich von  $A$  zu zeigen und dann die Dichtheit bezüglich der Graphennorm zu verwenden.

SATZ 1.3. Sei  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$  selbstadjungiert und  $B$  ein Operator mit  $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$ . Dann ist  $B$  genau dann relativ  $A$ -beschränkt, wenn  $c := \limsup_{\eta \rightarrow \infty} \left\| \|B(A \pm i\eta)^{-1}\| \right\|$  endlich ist.  $c$  ist dann die  $A$ -Schranke von  $B$  und der Limes superior ist tatsächlich der Limes. Ist zudem  $A$  von unten beschränkt, so kann  $\pm i\lambda$  durch  $-\lambda$  ersetzt werden.

- BEWEIS. • „ $\Rightarrow$ “: Angenommen es gibt  $a, b \geq 0$ , sodass für alle  $\phi \in \mathcal{D}(A)$

$$\|B\phi\|^2 \leq a^2 \|A\phi\|^2 + b^2 \|\phi\|^2 \quad (1.3)$$

gilt. Dann gilt für alle  $\alpha > 0$  und  $\psi \in \mathcal{H}$  (mit  $\phi = (A \pm i\alpha)^{-1}\psi \in \mathcal{D}(A)$ )

$$\begin{aligned} \|B(A \pm i\alpha)^{-1}\psi\|^2 &\leq a^2 \|A(A \pm i\alpha)^{-1}\psi\|^2 + b^2 \|(A \pm i\alpha)^{-1}\psi\|^2 \\ &= a^2 \left[ \|A(A \pm i\alpha)^{-1}\psi\|^2 + \frac{b^2}{a^2} \|(A \pm i\alpha)^{-1}\psi\|^2 \right] \\ &= a^2 \left\| \left( A \pm i\frac{b}{a} \right) (A \pm i\alpha)^{-1}\psi \right\|^2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Wählt man nun speziell  $\alpha = b/a$ , so folgt

$$\left\| \left\| B \left( A \pm i\frac{b}{a} \right)^{-1} \right\| \right\| \leq a. \quad (1.5)$$

Da die rechte Seite von  $b$  unabhängig ist, kann man auch  $b$  gegen Unendlich schicken und erhält

$$\limsup_{\eta \rightarrow \pm\infty} \left\| \left\| B(A - i\eta)^{-1} \right\| \right\| \leq a, \quad (1.6)$$

das heißt  $\limsup_{\eta \rightarrow \pm\infty} \left\| \left\| B(A - i\eta)^{-1} \right\| \right\|$  ist höchstens gleich der  $A$ -Schranke von  $B$ .

- „ $\Leftarrow$ “: Sei nun umgekehrt  $\left\| \left\| B(A \pm i\alpha)^{-1} \right\| \right\| \leq a$  für ein  $\alpha > 0$ , so gilt für alle  $\phi \in \mathcal{D}(A)$

$$\|B\phi\| = \|B(A \pm i\alpha)^{-1}(A \pm i\alpha)\phi\| \leq a\alpha\|\phi\| + a\|A\phi\|, \quad (1.7)$$

das heißt  $B$  ist  $A$ -beschränkt mit  $A$ -Schranke kleiner oder gleich  $a$ . Damit ist die  $A$ -Schranke von  $B$  höchstens gleich  $\liminf_{\eta \rightarrow \pm\infty} \left\| \left\| B(A - i\eta)^{-1} \right\| \right\|$ , womit insbesondere die Existenz des Limes folgt.  $\square$

**SATZ 1.4 (Kato–Rellich).** *Sei  $A$  selbstadjungiert,  $B$  symmetrisch und  $B$  sei  $A$ -beschränkt mit relativer Schranke  $a < 1$ . Dann ist  $A + B$  auf  $\mathcal{D}(A)$  selbstadjungiert und auf jedem determinierenden Bereich von  $A$  wesentlich selbstadjungiert.*

*Ist zudem  $A$  von unten durch eine Konstante  $M$  beschränkt, so ist  $A + B$  nach unten durch  $M - \max\left\{\frac{b}{1-a}, a|M| + b\right\}$  beschränkt, wobei  $a$  und  $b$  aus der Definition von relativer Beschränktheit sind.*

**SATZ 1.5.** *Sei  $A$  selbstadjungiert,  $V$  symmetrisch mit  $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$ . Ist darüberhinaus  $A + \mu B$  abgeschlossen für alle  $\mu \in [0, 1]$ , so ist  $A + B$  selbstadjungiert.*

**SATZ 1.6 (Wüst).** *Sei  $A$  selbst-adjungiert,  $B$  symmetrisch mit  $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$ . Angenommen es gäbe  $b \in \mathbb{R}$ , sodass für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(A)$  die Schranke*

$$\|B\varphi\| \leq \|A\varphi\| + b\|\varphi\| \quad (1.8)$$

*erfüllt ist, dann ist  $A + B$  wesentlich selbst-adjungiert auf  $\mathcal{D}(A)$  und jedem determinierenden Bereich von  $A$ .*

**lemma:1.9**

**LEMMA 1.7 (Riemann-Lebesgue-Lemma).**  *$C_b(\mathbb{R}^n)$  sei der Raum der stetigen Funktionen, die im Unendlichen verschwinden. Die Fourier-Transformation lässt sich zu einer eindeutigen beschränkten Abbildung*

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_b(\mathbb{R}^n)$$

*fortsetzen.*

LEMMA 1.8 (Hausdorff–Young Ungleichung). Sei  $1 \leq q \leq 2$ ,  $p^{-1} + q^{-1} = 1$  und  $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ , dann ist

$$\|\hat{f}\|_p \lesssim \|f\|_q. \quad (1.9)$$

LEMMA 1.9 (Sobolews Lemma). Sei  $\varphi \in \mathcal{D}(-\Delta) = H^2(\mathbb{R}^n)$ . Dann:

(i) Ist  $n \leq 3$ , so ist  $\varphi$  stetig und beschränkt und für alle  $a > 0$  gibt es  $b = b(a)$ , sodass

$$\|\varphi\|_\infty \leq a \|-\Delta\varphi\|_2 + b \|\varphi\|_2. \quad (1.10)$$

(ii) Ist  $n \geq 4$  und  $2 \leq q < 2n/(n-4)$ , so ist  $\varphi \in L^q(\mathbb{R}^n)$  und für alle  $a > 0$  gibt es  $b = b(q, n, a)$ , sodass

$$\|\varphi\|_q \leq a \|-\Delta\varphi\|_2 + b \|\varphi\|_2. \quad (1.11)$$

BEWEIS. (i) Die erste Behauptung folgt mit dem Riemann–Lebesgue-Lemma Lemma: 1.9 und Plancherel, denn

$$\|\varphi\|_\infty \leq \|\hat{\varphi}\|_1 \leq a \|\xi^2 \hat{\varphi}\|_2 + b \|\hat{\varphi}\|_2 = a \|-\Delta\varphi\|_2 + b \|\varphi\|_2. \quad (1.12)$$

Wir zeigen die zweite Ungleichung für den Fall  $n = 3$ . Sei also  $\varphi \in \mathcal{D}(-\Delta)$ , dann sind  $(1 + \xi^2)\hat{\varphi}$  und  $(1 + \xi^2)^{-1}$  in  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . Mit Cauchy-Schwarz ist daher  $\hat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}^3)$  und

$$\|\hat{\varphi}\|_1 \lesssim \|(1 + \xi^2)\hat{\varphi}\|_2 \lesssim \|\xi^2 \hat{\varphi}\|_2 + \|\hat{\varphi}\|_2, \quad (1.13)$$

wobei die implizite Konstante gerade  $\int (1 + \xi^2)^{-2} d\xi$  ist.

Für  $r > 0$  definieren wir  $\hat{\varphi}_r(\xi) = r^3 \hat{\varphi}(r\xi)$ . Dann sind  $\|\hat{\varphi}_r\|_1 = \|\hat{\varphi}\|_1$ ,  $\|\hat{\varphi}_r\|_2 = r^{3/2} \|\hat{\varphi}\|_2$  und  $\|\xi^2 \hat{\varphi}_r\|_2 = r^{-1/2} \|\xi^2 \hat{\varphi}\|_2$ . Die Ungleichung für  $\hat{\varphi}_r$  lautet daher

$$\|\hat{\varphi}_r\|_1 \lesssim r^{-1/2} \|\xi^2 \hat{\varphi}\|_2 + r^{3/2} \|\hat{\varphi}\|_2 \quad (1.14)$$

für alle  $r > 0$ . Wählt man nun  $r$  entsprechend groß, so folgt die erste Behauptung.

(ii) Mit der Hausdorff–Young-Ungleichung und Plancherel müssen wir lediglich die zweite Ungleichung in

$$\|\varphi\|_q \leq \|\hat{\varphi}\|_p \leq a \|\xi^2 \hat{\varphi}\|_2 + b \|\hat{\varphi}\|_2 = a \|-\Delta\varphi\|_2 + b \|\varphi\|_2 \quad (1.15)$$

für  $2 \leq q < \frac{2n}{n-4}$ , also für  $\frac{2n}{n+4} < p \leq 2$  beweisen. Mit der Hölder Ungleichung ist

$$\|\hat{\varphi}\|_p^p \leq \|(1 + \xi^2)^{-p}\|_r \|(1 + \xi^2)^p |\hat{\varphi}|^p\|_s \quad (1.16)$$

für  $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ . Wählt man nun  $s = 2/p$ , so ist mit der Dreiecksungleichung

$$\|(1 + \xi^2)^p |\hat{\varphi}|^p\|_s = (\|(1 + \xi^2) |\hat{\varphi}\|_2\|_2)^p \leq (\|\hat{\varphi}\|_2 + \|\xi^2 \hat{\varphi}\|_2)^p. \quad (1.17)$$

Wir bestimmen nun noch die Norm  $\|(1 + \xi^2)^{-p}\|_r$  mit  $r = 2(2-p)^{-1}$ :

$$c_1^p \equiv \|(1 + \xi^2)^{-p}\|_{2(2-p)^{-1}}^{2(2-p)^{-1}} = \int \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^{2(2-p)^{-1}}} \quad (1.18)$$

Der Ausdruck ist genau dann endlich, wenn  $4p(2-p)^{-1} > n$ , das heißt  $p > \frac{2n}{n+4}$ . Damit ist

$$\|\hat{\varphi}\|_p \leq c_1 (\|\hat{\varphi}\|_2 + \|\xi^2 \hat{\varphi}\|_2). \quad (1.19)$$

Mit demselben Skalierungstrick kann der Koeffizient von  $\|\xi^2 \hat{\varphi}\|_2$  wieder beliebig klein gemacht werden.  $\square$

**theorem:1.10**

SATZ 1.10. Sei  $V \in L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$  reell. Dann ist  $-\Delta + V(x)$  wesentlich selbst-adjungiert auf  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  und selbst-adjungiert auf  $\mathcal{D}(-\Delta) = H^2(\mathbb{R}^3)$ .

BEWEIS. Da  $V$  reellwertig ist, ist der Multiplikationsoperator mit  $V$  auf dem maximalen Definitionsbereich

$$\mathcal{D}(V) = \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3) : V\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3)\}$$

selbst-adjungiert. Sei nun  $V = V_1 + V_2$  mit  $V_1 \in L^2(\mathbb{R}^3)$  und  $V_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ . Dann ist

$$\|V\varphi\|_2 \leq \|V_1\|_2 \|\varphi\|_\infty + \|V_2\|_\infty \|\varphi\|_2, \quad (1.20)$$

das heißt es ist  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \subseteq \mathcal{D}(V)$ . Nach vorigem Lemma gibt es für alle  $a > 0$  ein  $b > 0$ , sodass

$$\|\varphi\|_\infty \leq a \|\Delta\varphi\|_2 + b \|\varphi\|_2 \quad (1.21)$$

für alle  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ . Diese und vorige Ungleichung zusammen geben

$$\|V\varphi\|_2 \leq a \|V_1\|_2 \|\Delta\varphi\|_2 + (b + \|V_2\|_\infty) \|\varphi\|_2 \quad (1.22)$$

für alle  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ . Daher ist  $V$  relativ  $-\Delta$ -beschränkt mit beliebig kleiner relativer Schranke  $a > 0$  auf  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ . Da  $-\Delta$  wesentlich selbst-adjungiert auf  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  ist, ist wegen des Kato–Rellich-Satzes  $-\Delta + V$  ebenfalls wesentlich selbst-adjungiert auf  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ .  $\square$

**theorem:1.13**

SATZ 1.11 (Kato). Sei  $\{V_k\}_{k=1}^n$  eine Sammlung von reellwertigen, messbaren Funktionen, die alle in  $L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$  sind. Sei  $V_k(y_k)$  der Multiplikationsoperator auf  $L^2(\mathbb{R}^{3n})$ , dann ist  $-\Delta + \sum_{k=1}^n V_k(y_k)$  wesentlich selbst-adjungiert auf  $C_0^\infty(\mathbb{R}^{3n})$ , wobei  $\Delta$  der Laplace-Operator auf  $\mathbb{R}^{3n}$  sein soll.

## 2. Quadratische Formen

DEFINITION 2.1. Es sei  $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{H}$  dicht und  $s : \mathcal{Q}(s) \times \mathcal{Q}(s) \rightarrow \mathbb{C}$  eine hermitesche Sesquilinearform, die nach unten halbbeschränkt mit unterer Schranke  $\gamma$  ist, das heißt es gilt

$$s[\varphi, \varphi] \geq \gamma \|\varphi\|^2$$

für alle  $\varphi \in \mathcal{Q}(s)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} (\cdot, \cdot)_s : \mathcal{Q}(s) \times \mathcal{Q}(s) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\varphi, \psi) &\mapsto s[\varphi, \psi] + (1 - \gamma)(\varphi, \psi) \end{aligned} \quad (2.1)$$

auch sesquilinear und hermitesch und wegen

$$\|\varphi\|_s^2 = s[\varphi, \varphi] + (1 - \gamma)(\varphi, \varphi) \geq \|\varphi\|^2$$

positiv definit, weshalb  $(\cdot, \cdot)_s$  ein Skalarprodukt auf  $\mathcal{Q}(s)$  definiert. Hierbei sei  $\|\cdot\|_s$  die von diesem Skalarprodukt induzierte Norm und für  $\varphi \in \mathcal{Q}(s)$  ist  $\|\varphi\|_s^2 = (\varphi, \varphi)_s = s[\varphi, \varphi] + (1 - \gamma)(\varphi, \varphi)$ .

- $s$  heißt *abgeschlossen*, wenn  $(\mathcal{Q}(s), \|\cdot\|_s)$  ein Hilbertraum ist.
- $s$  heißt *abschließbar*, wenn es eine abgeschlossene, nach unten halbbeschränkte Erweiterung  $t : \mathcal{Q}(t) \times \mathcal{Q}(t) \rightarrow \mathbb{C}$  von  $s$  gibt.

- $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{Q}(s)$  heißt *determinierender Formbereich* für  $s$ , wenn  $\mathcal{Q}$  in  $(\mathcal{Q}(s), \|\cdot\|_s)$  dicht ist.

LEMMA 2.2 (Quadratische Form selbstadjungierter Operatoren I). *Sei  $A$  ein selbstadjungierter Operator in  $\mathcal{H}$ . Der Definitionsbereich  $\mathcal{D}(A)$  ist in der Spektraldarstellung durch*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ \varphi \in \mathcal{H} : \int_{\mathbb{R}} |x|^2 d\mu_{\varphi, \varphi}(x) < \infty \right\} \quad (2.2)$$

gegeben. Hierbei sei  $E_A : \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{L}(\mathcal{H})$  das Spektralmaß zu  $A$  ist und für  $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$  sei  $\mu_{\varphi, \psi} : \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\mathfrak{B} \ni B \mapsto \mu_{\varphi, \psi}(B) = (\varphi, E_A(B)\psi)$ . Insbesondere ist für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  messbar

$$\mathcal{D}(f(A)) = \left\{ \varphi \in \mathcal{H} : \int_{\mathbb{R}} |f|^2 d\mu_{\varphi, \varphi} < \infty \right\}. \quad (2.3)$$

Es sei

$$\mathcal{Q}(A) := \mathcal{D}(|A|^{1/2}) = \left\{ \varphi \in \mathcal{H} : \int_{\mathbb{R}} |t| d\mu_{\varphi, \varphi}(t) < \infty \right\}, \quad (2.4)$$

dann definiert

$$q_A[\cdot, \cdot] : \mathcal{Q}(A) \times \mathcal{Q}(A) \rightarrow \mathbb{C} \quad (2.5)$$

$$(\varphi, \psi) \mapsto q_A[\varphi, \psi] := \int_{\mathbb{R}} t d\mu_{\varphi, \psi}(t)$$

eine dicht definierte hermitesche Sesquilinearform. In diesem Fall ist  $q_A$  die zum selbstadjungierten Operator  $A$  zugehörige Form.

LEMMA 2.3 (Quadratische Form selbstadjungierter Operatoren II). *Sei  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$  selbstadjungiert, dann gelten für die zugehörige Form  $q_A$  folgende Aussagen.*

(i) Für alle  $\varphi, \psi \in \mathcal{Q}(A)$  gilt

$$q_A[\varphi, \psi] = (U_A \sqrt{|A|}\varphi, \sqrt{|A|}\psi), \quad (2.6)$$

wobei  $A = U_A |A|$  die Polarzerlegung von  $A$  ist.

(ii) Der Definitionsbereich  $\mathcal{D}(A)$  ergibt sich aus der Form  $q_A$  als

$$\mathcal{D}(A) = \{ \varphi \in \mathcal{Q}(A) : \text{Es gibt } \psi_\varphi \in \mathcal{H} \text{ mit } q_A[\phi, \varphi] = (\phi, \psi_\varphi) \text{ für alle } \phi \in \mathcal{Q}(A) \}. \quad (2.7)$$

Sind  $q_A[\phi, \varphi] = (\phi, \psi_\varphi)$  für alle  $\phi \in \mathcal{Q}(A)$ , dann ist  $\varphi \in \mathcal{D}(A)$  und es ist  $A\varphi = \psi_\varphi$ .

(iii)  $A$  ist genau dann nach unten halbbeschränkt, wenn  $q_A$  nach unten halbbeschränkt ist. In diesem Fall gilt

$$m_A := \sup\{\gamma \in \mathbb{R} : \gamma \text{ ist untere Schranke von } A\} = m := \inf(\sigma(A)) \quad (2.8)$$

$$= \sup\{\gamma \in \mathbb{R} : \gamma \text{ ist untere Schranke von } q_A\} =: m_{q_A}.$$

LEMMA 2.4 (Quadratische Form selbstadjungierter Operatoren III). *Es sei  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$  ein selbstadjungierter, nach unten halbbeschränkter Operator mit unterer Schranke  $m$ . Dann gilt*

(i) Für  $\varphi, \psi \in \mathcal{Q}(A) = \mathcal{D}(\sqrt{A - m})$  gilt

$$q_A[\varphi, \psi] = \left( \sqrt{A - m}\varphi, \sqrt{A - m}\psi \right) + m(\varphi, \psi). \quad (2.9)$$

- (ii)  $q_A$  ist eine abgeschlossene, nach unten halbbeschränkte Form mit unterer Schranke  $m$ .
- (iii) Ein Unterraum  $X \subseteq \mathcal{Q}(A)$  ist genau dann ein determinierender Formbereich für  $q_A$ , wenn  $X$  ein determinierender Bereich für den Operator  $\sqrt{A - m}$  ist.
- (iv)  $\mathcal{D}(A)$  ist ein determinierender Formbereich für  $q_A$ .
- (v) Ist  $\mathcal{D}$  ein determinierender Formbereich für  $q_A$  und  $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow \mathcal{H}$  ein Operator mit  $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{Q}(A)$  und  $q_A[\varphi, \psi] = (\varphi, T\psi)$  für alle  $\varphi \in \mathcal{D}$  und  $\psi \in \mathcal{D}(T)$ , so gilt  $T \subseteq A$ .

LEMMA 2.5. Es sei  $t : \mathcal{Q}(t) \times \mathcal{Q}(t) \rightarrow \mathbb{C}$  eine dicht definierte Form in  $\mathcal{H}$ . Dann wird auf

$$\mathcal{D}(A_t) := \{\varphi \in \mathcal{Q}(t) : \text{Es gibt } \psi_\varphi \in \mathcal{H}, \text{ sodass } t[\phi, \varphi] = (\phi, A_t \psi_\varphi) \text{ für alle } \phi \in \mathcal{Q}(t) \text{ gilt}\} \quad (2.10)$$

durch

$$\begin{aligned} A_t : \mathcal{D}(A_t) &\rightarrow \mathcal{H} \\ \varphi &\mapsto A_t \varphi := \psi_\varphi \end{aligned} \quad (2.11)$$

ein Operator in  $\mathcal{H}$  definiert. Es gilt

$$t[\phi, \varphi] = (\phi, \psi_\varphi) \quad (2.12)$$

für alle  $\phi \in \mathcal{Q}(t)$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}(A_t)$  und

$$A_{t+\lambda} = A_t + \lambda \quad (2.13)$$

für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

LEMMA 2.6. Sei  $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow \mathcal{H}$  ein dicht definierter, nach unten halbbeschränkter, symmetrischer Operator. Dann ist die zugehörige Form

$$\begin{aligned} s_T : \mathcal{D}(T) \times \mathcal{D}(T) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\varphi, \psi) &\mapsto (\varphi, T\psi) \end{aligned} \quad (2.14)$$

abschließbar.

LEMMA 2.7 (Quadratische Form selbstadjungierter Operatoren IV). Es sei  $q : \mathcal{Q}(q) \times \mathcal{Q}(q) \rightarrow \mathbb{C}$  eine dicht definierte, nach unten halbbeschränkte, abgeschlossene hermitesche Form auf  $\mathcal{H}$  mit unterer Schranke  $\gamma$ . Dann ist der Operator  $A_q$  zu  $q$  selbstadjungiert und  $q$  stimmt mit der zu  $A_q$  zugehörigen Form  $q_{A_q}$  überein. Zudem ist  $\mathcal{D}(A_q)$  ein determinierender Formbereich für  $q$  und es gilt  $\mathcal{Q}(q) = \mathcal{D}(\sqrt{A - \gamma})$ . Für alle  $\varphi, \psi \in \mathcal{Q}(q)$  gilt

$$q[\varphi, \psi] = (\sqrt{A - \gamma}\varphi, \sqrt{A - \gamma}\psi) + \gamma(\varphi, \psi). \quad (2.15)$$

SATZ 2.8 (Stabilität der Halbbeschränktheit). Sei  $A$  ein selbstadjungierter, nach unten halbbeschränkter Operator mit unterer Schranke  $\gamma$ . Sei  $B$  symmetrisch und  $A$ -beschränkt mit  $A$ -Schranke echt kleiner als Eins. Dann ist auch  $A + B$  nach unten halbbeschränkt.

Genauer gesagt: Gilt

$$\|B\phi\| \leq a \|A\phi\| + b \|\phi\| \quad (2.16)$$

für  $\phi \in \mathcal{D}(A)$  mit  $a < 1$ , so ist

$$\gamma' := \gamma - \max \left\{ \frac{b}{1-a}, b + a|\gamma| \right\} \quad (2.17)$$

eine untere Schranke von  $A + B$ , welche im Allgemeinen nicht optimal ist.

**KOROLLAR 2.9.** Sei  $A$  selbstadjungiert und halbbeschränkt nach unten,  $B$  symmetrisch mit  $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$  und  $A + \mu B$  abgeschlossen für alle  $\mu \in [0, 1]$ . Dann ist auch  $A + B$  nach unten halbbeschränkt. (Die Selbstadjungiertheit von  $A + B$  wurde bereits früher bewiesen).

**SATZ 2.10 (Friedrichs).** Sei  $A$  ein nach unten halbbeschränkter, symmetrischer Operator mit unterer Schranke  $\gamma$  und

$$q[\varphi, \psi] = (\varphi, A\psi)$$

die zugehörige, nach unten halbbeschränkte Form mit  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(A)$  für alle  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(T)$  und unterer Schranke  $\gamma$ . Dann ist  $q$  abschließbar und  $\hat{q}$  ist die quadratische Form eines eindeutig bestimmten selbstadjungierten Operators  $\hat{A}$ . Der Operator  $\hat{A}$  ist eine nach unten halbbeschränkte Erweiterung von  $A$  mit unterer Schranke  $\gamma$ . Weiterhin ist  $\hat{A}$  die einzige selbstadjungierte Erweiterung von  $A$ , deren Definitionsbereich im Formbereich von  $\hat{q}$  enthalten ist.

**BEISPIEL 2.11 (Wasserstoffatom I).** Wir betrachten den Operator  $-\Delta - \frac{Z}{|x|}$  mit zugehöriger quadratischer Form

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left( |\nabla \phi|^2 - \frac{Z}{|x|} |\phi(x)|^2 \right) dx.$$

Die Form ist wegen der Gagliardo–Nierenberg–Sobolew-Ungleichung  $\|u\|_q \leq \text{const} \|Du\|_p$  (mit dem Sobolew-Konjugierten  $q = \frac{np}{n-2}$ ) nach unten beschränkt. Dies sieht man, indem man das Coulomb-Potential bei  $|x| = \alpha$  aufteilt. Mit  $\|\phi\|_2 = 1$  und der Hölder-Ungleichung ist

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leq \alpha} \frac{|\phi(x)|^2}{|x|} dx + \int_{|x| \geq \alpha} \frac{|\phi(x)|^2}{|x|} dx &\leq \left( \int_{|x| \leq \alpha} |x|^{-3/2} dx \right)^{2/3} \left( \int_{|x| \leq \alpha} |\phi(x)|^6 dx \right)^{1/3} + \frac{1}{\alpha} \\ &\leq \text{const } \alpha \|\nabla \phi\|_2^2 + \frac{1}{\alpha}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Die kinetische Energie verhindert also den Sturz des Elektrons in den Kern und zeigt damit insbesondere, dass das Wasserstoffatom stabil ist. Die Form ist damit sogar für  $\phi \in H^1(\mathbb{R}^3)$  nach unten beschränkt, was den Formbereich etwas vergrößert. Daher existiert die Friedrichs-Erweiterung. Zwar können wir hier keine Aussage über ihren Definitionsbereich machen, es sei jedoch gesagt, dass er  $H^2(\mathbb{R}^3)$  ist.

**DEFINITION 2.12 (Relativ beschränkte Form).** Sei  $A$  ein nach unten halbbeschränkter, selbstadjungierter Operator. Nehme an, dass  $B$  ein weiterer selbstadjungierter Operator ist, der

- (i)  $\mathcal{Q}(A) \subseteq \mathcal{Q}(B)$ ,
- (ii)  $|(\varphi, B\varphi)| \leq a(\varphi, A\varphi) + b(\varphi, \varphi)$  für alle  $\varphi \in \mathcal{Q}(A)$

für ein  $a > 0$  und  $b \in \mathbb{R}$  erfüllt. Dann heißt  $B$  *relativ formbeschränkt bezüglich*  $A$ . Kann  $a$  beliebig klein gewählt werden, so heißt  $B$  *infinitesimal formbeschränkt bezüglich*  $A$  und man schreibt  $A \ll B$ .

BEISPIEL 2.13 (Delta-Distribution in einer Dimension). Sei  $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ ,  $\mathcal{D}(A) = \{f \in H^2[0, 1] : f(0) = f(1) = 0\}$ . Dann ist die durch  $q[f] = |f(c)|^2$ ,  $f \in H^1[0, 1]$ ,  $c \in (0, 1)$  definierte Form eine wohldefinierte, nicht-negative Form. Formal kann man  $q$  als die quadratische Form des Multiplikationsoperators mit der Delta-Distribution am Punkt  $x = c$  interpretieren. Für  $f \in \mathcal{Q}(A) = \{f \in H^1[0, 1] : f(0) = f(1) = 0\}$  ist mit partieller Integration und der Youngschen und Schwarzschen Ungleichung

$$|f(c)|^2 = 2\operatorname{Re} \int_0^c \overline{f(t)} f'(t) dt \leq 2 \int_0^1 |\overline{f(t)} f'(t)| dt \leq \epsilon \|f'\|_2^2 + \epsilon^{-1} \|f\|_2^2. \quad (2.19)$$

das heißt  $q$  ist eine infinitesimal  $-\frac{d^2}{dx^2}$ -beschränkte Form. Mit dem nächsten Satz folgt daraus, dass  $q_A + q$  einen halbbeschränkten, selbstadjungierten Operator definiert.

**theorem: 1.26**

SATZ 2.14 (Kato, Lax, Milgram, Nelson – KLMN). Sei  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$  ein positiver, selbstadjungierter Operator mit Formbereich  $\mathcal{Q}(A)$  und zugehöriger Form  $q_A$ . Ferner sei  $\beta : \mathcal{Q}(A) \times \mathcal{Q}(A) \rightarrow \mathbb{C}$  eine hermitesche Sesquilinearform für die es  $a < 1$  und  $b \in \mathbb{R}$  gibt, sodass

$$\beta[\varphi, \varphi] \leq a(q_A, \varphi) + b(\varphi, \varphi) \quad (2.20)$$

für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(A)$  gilt. Dann existiert ein eindeutig bestimmter, selbstadjungierter Operator  $C$  mit zugehöriger Sesquilinearform  $q_C : \mathcal{Q}(C) \times \mathcal{Q}(C) \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\mathcal{Q}(C) = \mathcal{Q}(A)$ . Die zugehörige Form erfüllt

$$q_C[\varphi, \psi] = q_A[\varphi, \psi] + \beta[\varphi, \psi] \quad (2.21)$$

für alle  $\varphi, \psi \in \mathcal{Q}(A)$ . Weiter ist  $C$  nach unten durch  $-b$  beschränkt und jeder determinierender Bereich von  $A$  ist auch ein determinierender Bereich von  $C$ , das heißt auch, dass jeder determinierende Bereich von  $A$  ein determinierender Formbereich für  $C$  ist.

BEISPIEL 2.15 (Wasserstoffatom II). Sei

$$\beta[\phi, \phi] = \int_{\mathbb{R}^3} |V(x)| |\phi(x)|^2 dx \leq \int_{|x| \leq \alpha} \frac{|\phi(x)|^2}{|x|} dx + \frac{1}{\alpha}. \quad (2.22)$$

Es reicht also zu zeigen, dass es  $a < 1$  gibt, sodass für alle  $\phi \in H^1(\mathbb{R}^3)$

$$\int_{|x| \leq \alpha} \frac{|\phi(x)|^2}{|x|} dx \leq a \|\nabla \phi\|_2^2 + b \quad (2.23)$$

gilt. Mit der Sobolew-Ungleichung haben wir dies bereits oben gezeigt, in diesem Fall war  $a = \operatorname{const} \alpha$ . Man kann dies aber auch durch eine explizite Rechnung zeigen. Mit  $V_{<}(x) = -\frac{1}{|x|} \chi_{\{|x| \leq \alpha\}}$  und  $\lambda > 0$  ist zunächst

$$\begin{aligned} (\phi, V_{<}\phi) &= (\phi, (-\Delta + \lambda)^{1/2} (-\Delta + \lambda)^{-1/2} V_{<} (-\Delta + \lambda)^{-1/2} (-\Delta + \lambda)^{1/2} \phi) \\ &\leq \left\| (-\Delta + \lambda)^{-1/2} V_{<} (-\Delta + \lambda)^{-1/2} \right\| \left\| (-\Delta + \lambda)^{1/2} \phi \right\|^2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Die Behauptung ist also gezeigt, wenn die Operatornorm von

$$R := (-\Delta + \lambda)^{-1/2} V_{<} (-\Delta + \lambda)^{-1/2} \quad (2.25)$$

echt kleiner als Eins ist. Der Operator  $R$  heißt Rollnik-Operator oder Birman-Schwinger-Kern. Wir zeigen die Behauptung, indem wir sogar zeigen, dass  $R$  ein

Hilbert–Schmidt-Operator ist und verwenden schließlich  $\|R\| \leq \|R\|_2$ . Im Fourierraum lässt sich die Hilbert–Schmidt-Norm des Kerns durch zweimaliges Anwenden der Schwarzischen Ungleichung abschätzen.

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^6} |(\lambda + \xi^2)^{-1/2} \widehat{V}_<(\xi - \xi') (\lambda + \xi'^2)^{-1/2}|^2 d\xi d\xi' \\ &= \int_{\mathbb{R}^6} (\lambda + \xi^2)^{-1} |\widehat{V}_<(\xi - \xi')| |\widehat{V}_<(\xi - \xi')| (\lambda + \xi'^2)^{-1} d\xi d\xi' \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^3} (\lambda + \xi^2)^{-2} d\xi \right) \left( \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{V}_<(\xi')|^2 d\xi' \right) = \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}} \int_{|x| \leq \alpha} \frac{1}{|x|^2} dx = \frac{\pi^2 \alpha}{\sqrt{\lambda}}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Man sieht, dass der Term beliebig klein gemacht werden kann, wenn man  $\alpha$  klein oder  $\lambda$  groß genug wählt.

Der Beweis lässt sich für eine größere Klasse von Potentialen genauso führen, nämlich für  $V \in L^{3/2} + L^\infty(\mathbb{R}^3)$ .

Ist  $B$  selbstadjungiert und relativ formbeschränkt mit Formschranke  $a < 1$  bezüglich des positiven, selbstadjungierten Operators  $A$ , so gibt der KLMN-Satz der Summe  $A+B$  eine weitere Bedeutung neben der Operatorsumme. Es gibt Beispiele, in denen  $B$  relativ formbeschränkt bezüglich  $A$  ist, obwohl  $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \emptyset$ . Insbesondere muss die Form  $\beta$  im KLMN-Satz nicht von einem Operator oder einer abschliessbaren Form herrühren.

**BEISPIEL 2.16.** Sei  $A = -d_x^2$  auf  $\mathbb{R}$  und definiere  $\beta[\varphi, \psi] = \overline{\varphi}(0)\psi(0)$  für  $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Nach Sobolews Lemma gibt es für jedes  $a > 0$  ein  $b$ , sodass

$$\|\varphi\|_\infty^2 \leq a(\varphi, -\varphi'') + b\|\varphi\|_2^2. \quad (2.27)$$

Wir können nun mit Hilfe des KLMN-Satzes dem Operator  $-d_x^2 + \delta$  einen Sinn geben, denn  $\mathcal{Q}(-\Delta) = H^1(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{Q}(\delta) \subseteq L^2(\mathbb{R})$ ! Eine Funktion  $\psi \in \mathcal{Q}(-d_x^2) = H^1(\mathbb{R}) \subseteq C_b(\mathbb{R})$  ist im Definitionsbereich von  $-d_x^2 + \delta$  genau dann, wenn  $-\psi'' + \delta(x)\psi(0) \in L^2(\mathbb{R})$  ist, wobei die Ableitung im schwachen Sinne zu verstehen ist. Geht beispielsweise  $\psi(x)$  wie  $1 + |x|/2$  bei Null und ist glatt weg vom Ursprung mit kompaktem Träger, so ist  $\psi \in \mathcal{D}(-d_x^2 + \delta(x))$ , denn  $\delta(x)\psi(0)$  wird gerade den  $-\delta(x)\psi(x)$ , der in  $-\psi''(x)$  auftaucht, wegheben. Daher beinhaltet  $\mathcal{D}(A+B)$  Vektoren, die weder in  $\mathcal{D}(A)$  noch in  $\mathcal{D}(B)$  sind, für die es aber Auslöschungen in  $A\psi + B\psi$  gibt.

**SATZ 2.17.** *Sei  $A$  ein positiver, selbstadjungierter Operator und  $B$  selbstadjungiert. Dann gilt:*

- (i) *Ist  $B$  relativ  $A$ -beschränkt mit  $A$ -Schranke  $a$ , so ist  $B$  auch relativ formbeschränkt bezüglich  $A$  mit Formschranke  $a$ .*
- (ii)  *$B \ll A$  impliziert  $B \prec\prec A$ .*

Der KLMN-Satz kann verwendet werden, um Hamilton-Operatoren zu definieren (über Formen), die nicht über Kato–Rellichs Satz definiert werden können. Der Grund ist, dass  $L^2 + L^\infty$  nicht alle physikalisch interessanten Potentiale abdeckt. Potentiale der Form  $V_\alpha = -r^{-\alpha}$  mit  $\alpha < 2$  erzeugen sinnvolle Quantendynamik. Damit aber  $V_\alpha \in L^2 + L^\infty$  ist, muss  $\alpha < 3/2$  sein, weshalb wir Kato–Rellich für den Parameterbereich  $3/2 \leq \alpha < 2$  nicht verwenden können. Abhilfe schafft der KLMN-Satz.

SATZ 2.18. Ist  $\alpha < 2$ , so ist  $-r^{-\alpha} \prec\prec -\Delta$ .

BEWEIS. Sei  $\varphi \in C_0^\infty$  und  $a > 0$  beliebig. Wähle dann  $\epsilon > 0$ , sodass  $\frac{1}{r^\alpha} \leq \frac{a}{4r^2}$  für alle  $r \leq \epsilon$ . Dann ist mit der Hardy-Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leq \epsilon} \frac{|\varphi(x)|^2}{r^\alpha} dx + \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{|\varphi(x)|^2}{r^\alpha} dx &\leq a \int_{|x| \leq \epsilon} |\nabla \varphi(x)|^2 dx + \frac{1}{\epsilon^\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(x)|^2 dx \\ &\leq a(\varphi, -\Delta \varphi) + \epsilon^{-\alpha}(\varphi, \varphi). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Da  $a$  beliebig war und  $H^1 \subseteq L^2 + L^\infty$  ist, folgt die Behauptung.  $\square$

Dies zeigt, dass man das KLMN-Theorem verwenden kann, um den Hamilton-Operator  $-\Delta - r^{-\alpha}$  für  $3/2 \leq \alpha < 2$  zu definieren.

DEFINITION 2.19 (Rollnik-Potential). Eine messbare Funktion  $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Rollnik-Potential*, wenn

$$\|V\|_R^2 := \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|V(x)||V(y)|}{|x-y|^2} dx dy < \infty \quad (2.29)$$

ist. Die Menge aller Rollnik-Potentiale wird mit  $R$  bezeichnet.

DEFINITION 2.20 (Rollnik Klasse). Die Rollnik Klasse  $R$  ist als die Menge aller Äquivalenzklassen von Funktionen  $f$  definiert mit der Eigenschaft, dass es für jedes  $\epsilon > 0$  eine Zerlegung  $f = f_R + f_\infty$  mit  $\|f_\infty\|_\infty < \epsilon$  gibt. Letztere Eigenschaft wird als  $f \in (L^\infty)_\epsilon$  geschrieben.

DEFINITION 2.21 (Schwache  $L^p$ -Räume). Sei  $\langle M, \mu \rangle$  ein Maßraum,  $\mu$  ein  $\sigma$ -endliches Maß. Eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  ist schwach- $L^p$ ,  $f \in L_w^p(M, d\mu)$ , wenn es eine Konstante  $c < \infty$  gibt, sodass

$$\mu\{x : |f(x)| > t\} \leq ct^{-p} \quad (2.30)$$

für alle  $t > 0$ . Ist  $f \in L_w^p$ , so definieren wir

$$\|f\|_{p,w} := \sup_{t>0} [t^p \mu\{x : |f(x)| > t\}]^{1/p}. \quad (2.31)$$

$\|\cdot\|_{p,w}$  ist keine Norm, da sie die Dreiecksungleichung nicht erfüllt.  $L_w^p$  ist „schwächer“ als  $L^p$ , da  $L^p \subseteq L_w^p$  und  $\|f\|_{p,w} \leq \|f\|_p$ . Zudem ist  $f \in L^p$  genau dann, wenn

$$\int_0^\infty \mu\{x : |f(x)| > t\} t^{p-1} dt < \infty.$$

Dieses Integral divergiert im schlimmsten Fall logarithmisch, wenn  $f \in L_w^p$ .

BEISPIEL 2.22.  $|x|^{-n/p}$  als Funktion auf  $\mathbb{R}^n$  hat Maß  $\mu\{x : |x|^{-n/p} > t\} = c_n t^{-p}$ , wobei  $c_n$  das Volumen der Einheitskugel im  $\mathbb{R}^n$  ist. Daher ist  $f \in L_w^p(\mathbb{R}^n, dx)$  aber nicht in  $L^q(\mathbb{R}^n, dx)$  für alle  $q$ .

LEMMA 2.23 (Verallgemeinerte Youngsche Ungleichung). Sind  $1 < p, r, s < \infty$ ,  $1/p + 1/r = 1 + 1/s$ ,  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $g \in L_w^r(\mathbb{R}^n)$ , so ist  $f * g \in L^s(\mathbb{R}^n)$  und

$$\|f * g\|_s \lesssim \|f\|_p \|g\|_{r,w}. \quad (2.32)$$

LEMMA 2.24 (Hardy–Littlewood–Sobolev Ungleichung). Sei  $0 < \lambda < n$ ,  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$  mit  $1/p + 1/r + \lambda/n = 2$ , sowie  $1 < p, r < \infty$ . Dann ist

$$\int \frac{|f(x)||h(y)|}{|x-y|^\lambda} dx dy \leq C(p, r, \lambda, n) \|f\|_p \cdot \|h\|_r. \quad (2.33)$$

BEWEIS. Folgt direkt aus der verallgemeinerten Youngschen Ungleichung.  $\square$

BEMERKUNG 2.25. Es stellt sich heraus, dass  $R$  ein unter der Rollnik Norm  $\|\cdot\|_R$  vollständiger Vektorraum ist. Darüberhinaus ist mit der Sobolew Ungleichung  $L^{3/2} \subseteq R$ . Insbesondere ist  $r^{-\alpha} \in R + L^\infty$  für  $\alpha < 2$ .

Das Analogon zu Katos Satz ist Folgender.

SATZ 2.26. (i) Ist  $V \in R + L^\infty(\mathbb{R}^3)$ , so ist  $V \prec\prec -\Delta$ .  
(ii) Sind  $V_i(x)$  und  $V_{ij}(x)$  alle in  $R + L^\infty$  und

$$V = \sum_i V_i(x_i) + \sum_{i,j=1}^N V_{ij}(x_i - x_j)$$

auf  $\mathbb{R}^{3N}$ , so ist ebenfalls  $V \prec\prec -\Delta$ .

BEWEIS. Siehe <sup>Simon1971</sup> [Sim71].  $\square$

Um die notwendigen Bedingungen an das Potential zu finden, sodass  $-\Delta + V$  wesentlich selbstadjungiert ist, benötigt man oft  $L^p$ -Abschätzungen. Diese hängen im Allgemeinen von der Dimension  $s$  ab. Wir geben abschließend ein Beispiel.

SATZ 2.27. Sei  $s \geq 4$ . Ist  $V \in L^p(\mathbb{R}^s)$  für ein  $p > \frac{s}{2}$ , so ist  $V \ll -\Delta$ .

BEWEIS. Ist  $u \in \mathcal{D}(-\Delta)$ , so ist

$$(1 + \xi^2)\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^s).$$

Da  $p > s/2$  ist, ist  $(1 + \xi^2)^{-1} \in L^p(\mathbb{R}^s)$ , weshalb man mit der Hölder-Ungleichung

$$\|\hat{u}\|_q \leq \|(1 + \xi^2)^{-1}\|_p \|(1 + \xi^2)\hat{u}\|_2 \quad (2.34)$$

gilt, womit  $\hat{u} \in L^q$  mit  $1/q = 1/p + 1/2$ . Mit der Hausdorff-Young-Ungleichung ist  $\|\hat{u}\|_q \leq \|u\|_r$ , wobei  $1/r = 1 - 1/q = 1/2 - 1/p$  ist. Da  $V \in L^p(\mathbb{R}^s)$ , folgt mit der Hölder-Ungleichung, dass  $Vu \in L^2(\mathbb{R}^s)$ , womit  $\mathcal{D}(-\Delta) \subseteq \mathcal{D}(V)$  und

$$\begin{aligned} \|Vu\|_2 &\leq \|V\|_p \|u\|_r \leq \|V\|_p \|\hat{u}\|_q = \|V\|_p \|(1 + t\xi^2)^{-1}(1 + t\xi^2)\hat{u}\|_q \\ &\leq \|V\|_p \|(1 + t\xi^2)^{-1}\|_p \|(1 + t\xi^2)\hat{u}\|_2 \\ &\leq \left[ \|V\|_p \|(1 + t\xi^2)^{-1}\|_p \right] t^{-\frac{s}{2p}} [\|u\|_2 + t\|-\Delta u\|_2], \end{aligned} \quad (2.35)$$

da  $p > s/2$ . Dies zeigt  $V \ll -\Delta$ .  $\square$

Dieser Satz kann sogar bis zum Grenzfall  $p = s/2$  erweitert werden, wenn  $s \geq 5$  ist. Jedoch gilt eine sogar noch stärkere Aussage.

SATZ 2.28 (Strichartz). Sei  $s \geq 5$  und  $V \in L_w^{s/2}$ . Dann ist  $V$  relativ  $-\Delta$ -beschränkt mit  $-\Delta$ -Schranke  $a \leq c(s)\|V\|_{\frac{s}{2},w}$ .

BEWEIS.  $\square$

KOROLLAR 2.29. Sei  $\mu$  das Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}^s$  mit  $s \geq 5$ . Ist  $V : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$  messbar und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{s/2} \mu\{x : |V(x)| \geq t\} = 0,$$

so ist  $V \ll -\Delta$ . Ist insbesondere  $V \in L^{s/2}(\mathbb{R}^s)$ , so ist auch hier  $V \ll -\Delta$ .

**SATZ 2.30.** *Sei  $V$  stetig und positiv nahe dem Ursprung. Ist  $V(x) \geq \frac{3}{4x^2}$  nahe dem Ursprung, dann ist  $-\mathbf{d}_x^2 + V(x)$  im Grenzfunktfall bei Null. Ist für ein  $\epsilon > 0$  das Potential  $V(x) \leq (\frac{3}{4} - \epsilon)x^{-2}$  nahe des Ursprungs, so ist  $-\mathbf{d}_x^2 + V(x)$  im Grenzkreisfall.*

**BEISPIEL 2.31.** Wir betrachten  $-\Delta + V$  auf  $D := C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ , wobei  $V$  sphärisch symmetrisch sein soll. Sei  $\tilde{D}$  die Menge aller Funktionen aus  $D$ , die sich als Produkt  $f(r)g(\omega)$  schreiben lassen ( $r > 0$  und  $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ ). Dann ist  $\tilde{D}$  dicht in  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , denn  $L^2(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^+, r^{n-1}dr) \otimes L^2(\mathbb{S}^{n-1}, d\Omega)$ . Der Hamilton-Operator wirkt dann auf Funktionen aus  $\tilde{D}$  durch

$$(-\Delta + V(r))f(r)g(\omega) = \left( -\frac{\mathbf{d}^2}{\mathbf{d}r^2} - \frac{n-1}{r} \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}r} + V(r) \right) f(r)g(\omega) - \frac{1}{r^2} f(r) \Delta_\Omega g(\omega), \quad (2.36)$$

wobei  $\Delta_\Omega$  der Laplace-Beltrami-Operator auf  $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$  ist. Es stellt sich heraus, dass  $\Delta_\Omega$  wesentlich selbstadjungiert und negativ auf  $C^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$  ist [**Referenz einfügen**] und nur diskretes Punktspektrum endlicher Multiplizität besitzt. Die zugehörigen Eigenfunktionen sind ebenfalls glatt. Wir nennen  $K_\ell$  den Eigenraum der zum  $\ell$ -ten Eigenwert  $\kappa_\ell$  gehört. Wir ordnen die Eigenwerte dabei absteigend an und beginnen mit  $\kappa_0 = 0$ . Dann ist

$$L^2(\mathbb{R}^+, r^{n-1}dr) \otimes L^2(\mathbb{S}^{n-1}, d\Omega) = \bigoplus_{\ell=0}^{\infty} L_\ell, \quad (2.37)$$

wobei

$$L_\ell = L^2(\mathbb{R}^+, r^{n-1}dr) \otimes K_\ell. \quad (2.38)$$

Definiert man nun  $D_\ell := \tilde{D} \cap L_\ell$ , so ist die Einschränkung des Hamilton-Operators auf  $D_\ell$

$$(-\Delta + V(r)) \upharpoonright D_\ell = \left( -\frac{\mathbf{d}^2}{\mathbf{d}r^2} - \frac{n-1}{r} \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}r} + V(r) - \frac{\kappa_\ell}{r^2} \right) \otimes \text{id}. \quad (2.39)$$

Um zu zeigen, dass  $-\Delta + V$  auf  $\tilde{D}$  (und daher auch auf  $D$ ) wesentlich selbstadjungiert ist, genügt es also zu zeigen, dass für jedes  $\ell$  der Operator

$$-\frac{\mathbf{d}^2}{\mathbf{d}r^2} - \frac{n-1}{r} \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}r} + V(r) - \frac{\kappa_\ell}{r^2} \quad (2.40)$$

auf  $C_0^\infty(\mathbb{R}^+) \subseteq L^2(\mathbb{R}^+, r^{n-1}dr)$  wesentlich selbstadjungiert ist. Sei dazu  $U : L^2(\mathbb{R}^+, r^{n-1}dr) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^+, dr)$  der unitäre Operator  $U : \varphi(r) \mapsto r^{(n-1)/2} \varphi(r)$ . Dann bildet  $U$  den Raum  $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$  in sich selbst ab und es gilt

$$U \left( -\frac{\mathbf{d}^2}{\mathbf{d}r^2} - \frac{n-1}{r} \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}r} + V(r) - \frac{\kappa_\ell}{r^2} \right) U^{-1} = -\frac{\mathbf{d}^2}{\mathbf{d}r^2} + \left( \frac{(n-1)(n-3)}{4} - \kappa_\ell \right) \frac{1}{r^2} + V(r). \quad (2.41)$$

Da alle  $\kappa_\ell \leq 0$  sind, ist jeder dieser Operatoren nach obigem Satz wesentlich selbstadjungiert, wenn

$$V(r) + \frac{(n-1)(n-3)}{4} \frac{1}{r^2} \geq \frac{3}{4r^2}. \quad (2.42)$$

Ist auf der anderen Seite

$$0 \leq V(r) + \frac{(n-1)(n-3)}{4} \frac{1}{r^2} \leq \frac{c}{r^2} \quad (2.43)$$

für ein  $c < \frac{3}{4}$ , so werden ein oder mehrere der Operatoren nicht wesentlich selbstadjungiert auf  $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$  sein.

Wir haben damit folgenden Satz bewiesen:

**SATZ 2.32.** *Sei  $V(r)$  ein stetiges, sphärisch symmetrisches Potential auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Erfüllt  $V(r)$*

$$V(r) + \frac{(n-1)(n-3)}{4} \frac{1}{r^2} \geq \frac{3}{4r^2}, \quad (2.44)$$

so ist  $-\Delta + V(r)$  wesentlich selbstadjungiert auf  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ . Erfüllt  $V(r)$

$$0 \leq V(r) + \frac{(n-1)(n-3)}{4} \frac{1}{r^2} \leq \frac{c}{r^2} \quad (2.45)$$

mit  $c < \frac{3}{4}$ , so ist  $-\Delta + V(r)$  nicht wesentlich selbstadjungiert auf  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ .

**BEISPIEL 2.33.** Sei  $s = 5$ .  $-\Delta + \frac{\alpha}{r^2}$  ist wesentlich selbstadjungiert auf  $C_0^\infty(\mathbb{R}^5 \setminus \{0\})$  genau dann, wenn  $\alpha \geq -1,25$ . Zudem ist  $-\Delta$  wesentlich selbstadjungiert auf  $C_0^\infty(\mathbb{R}^5 \setminus \{0\})$ . Da  $r^{-2} \in L_w^{5/2}(\mathbb{R}^5)$ , ist mit dem Satz von Strichartz  $\frac{\alpha}{r^2}$  relativ  $-\Delta$ -beschränkt. Der Abschluß von  $-\Delta + \frac{\alpha}{r^2}$  eingeschränkt auf  $C_0^\infty(\mathbb{R}^5 \setminus \{0\})$  enthält daher  $-\Delta + \frac{\alpha}{r^2}$  eingeschränkt auf  $C_0^\infty(\mathbb{R}^5)$ . Daher ist  $-\Delta + \frac{\alpha}{r^2}$  nicht einmal wesentlich selbstadjungiert auf  $C_0^\infty(\mathbb{R}^5)$  für  $\alpha < -1,25$ .

**SATZ 2.34 (Strichartz).** *Sei  $s \geq 5$  und  $V \in L_w^{s/2}(\mathbb{R}^s)$ . Dann ist  $V$  relativ  $-\Delta$ -beschränkt mit  $-\Delta$ -Schranke  $\leq c_s \|V\|_{s/2,w}$ .*

**BEWEIS.** Es genügt  $\|V(-\Delta + 1)^{-1}\varphi\|_2 \leq c_s \|V\|_{s/2,w} \|\varphi\|_2$  für alle  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^s)$  zu zeigen. Da  $(-\Delta + 1)^{-1}\varphi = G * \varphi$  ist, wobei  $G$  die Fouriertransformierte von  $(1 + \xi^2)^{-1}$  auf  $\mathbb{R}^s$  ist, brauchen wir wegen Plancherel nur Kenntnisse von Eigenschaften von  $G$ . Da  $G$  im Unendlichen exponentiell abfällt und  $\limsup_{|x| \rightarrow 0} |x|^{s-2} |G(x)| < \infty$ , sieht man leicht, dass  $\mu\{x : |G(x)| \geq t\}$  durch  $c_2 t^{s/s-2}$  für ein  $c_2 > 0$  beschränkt ist, wobei  $\mu$  das Lebesgue-Maß ist. Mit der Ungleichung

$$\|f(g * h)\|_q \leq c_{p,q} \|f\|_{p,w} \|g\|_{p',w} \|h\|_q$$

für  $f \in L_w^p$ ,  $g \in L_w^{p'}$ ,  $p^{-1} + p'^{-1} = 1$  und solche  $q$  mit  $q^{-1} + p^{-1} < 1$  und  $h \in L^q$  folgt mit  $p = s/2$  und  $q = 2$ , dass

$$\|V(G * \varphi)\|_2 \leq c_3 \|V\|_{s/2,w} \|G\|_{s/s-2,w} \|\varphi\|_2. \quad (2.46)$$

□

**theorem:1.47**

**SATZ 2.35 (Strichartz für Formen).** *Sei  $s \geq 3$ , dann haben wir folgende Aussagen für einen Multiplikationsoperatoren  $V$  auf  $L^2(\mathbb{R}^s)$ :*

a) *Ist  $V \in L_w^s$ , so ist*

$$\left\| V(-\Delta + 1)^{-1/2} \varphi \right\|_2 \leq \text{const} \|V\|_{s/2,w} \|\varphi\|_2. \quad (2.47)$$

b) *Ist  $V \in L_w^{s/2}$ , so ist  $V$  eine Form-beschränkte Störung von  $-\Delta$ .*

c) *Ist  $V \in L^{s/2}$ , so ist die relative Form-Schranke gleich Null.*



## Störung von Punktspektren

In diesem Abschnitt betrachten wir einen Operator  $H_0$ , der einen Eigenwert  $E_0$  haben soll und im diskreten Spektrum liegen soll. Wir stören dann  $H_0$  ein wenig, indem wir  $H_0 + \beta V$  mit  $|\beta| \ll 1$  betrachten und untersuchen, welche Eigenwerte dieser Operator in der Nähe von  $E_0$  hat und in welcher Beziehung sie zur Störung  $V$  stehen. Das Hauptresultat wird die Kato–Rellich-Theorie von regulären Störungen sein. Diese gibt einfache Kriterien, unter denen man beweisen kann, dass die formale Reihe der Störungstheorie einen von Null verschiedenen Konvergenzradius hat.

DEFINITION 0.1 (Analytizität von operatorwertigen Funktionen). (i) Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $X$  ein Banachraum und  $f : G \rightarrow X$  eine Funktion auf diesem Banachraum.  $f$  heißt genau dann *analytisch in*  $\lambda \in G$ , wenn es eine Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z - \lambda)^n A_n \quad (0.1)$$

gibt, wobei  $A_n \in X$ , die positiven Konvergenzradius

$$\exists \epsilon > 0 \text{ sodass } \forall z \in \mathbb{C} : |z - \lambda| < \epsilon \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |z - \lambda|^n \|A_n\|_X < \infty \quad (0.2a)$$

besitzt und

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z - \lambda)^n A_n = f(z) \quad (0.2b)$$

gilt.

- (ii) Ist  $f$  analytisch in jedem  $\lambda \in G$ , so nennt man  $f$  *analytisch* (oder *holomorph*) *in*  $G$ .
- (iii) Ist  $f$  analytisch in  $G$  und  $G = \mathbb{C}$ , so nennt man  $f$  *ganz*.

DEFINITION 0.2. a) Konvergiert die Potenzreihe in der  $\|\cdot\|_X$ -Norm, so ist die Reihe *stark analytisch*.

- b) Wenn die Funktion  $F_L(\lambda) := \langle L, f(\lambda) \rangle_X$  für alle linearen Funktionale  $L \in X'$  analytisch ist, heißt  $f$  *schwach analytisch*.

In der Quantenmechanik wird der Banachraum  $X$  der Raum der linearen, beschränkten Operatoren auf  $\mathcal{H}$  sein.

### 1. Endlichdimensionale Störungstheorie

2.1

Wir beginnen mit endlichdimensionalen Matrizen, da sich entartete Störungstheorie auf diesen Fall zurückführen lässt. Des Weiteren tritt bereits im endlichdimensionalen Fall die große Hürde auf zu zeigen, dass die Theorie analytisch in  $\beta$  ist, wenn

wir einen entarteten Eigenwert haben. Man erinnere sich in diesem Kontext an die Jordansche Normalform.

Wir beginnen mit der Untersuchung eines elementaren Beispiels. Sei

$$T(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

dann ist  $T(\beta)$  eine matrixwertige analytische Funktion in  $\beta$ . Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, also

$$\lambda_{\pm}(\beta) = \pm\sqrt{1 + \beta^2}. \quad (1.2)$$

Wir erkennen bereits hier einige charakteristische Eigenschaften solcher matrixwertiger Funktionen.

- (i) Obwohl  $T(\beta)$  eine auf der gesamten komplexen Ebene holomorphe (also ganze bzw. analytische) Funktion ist, so gilt dies nicht für die Eigenwerte  $\lambda_{\pm}(\beta)$ , da sie Singularitäten in  $\beta$  haben.
- (ii) Diese Singularitäten befinden sich nicht auf der reellen Achse, wo  $T(\beta)$  selbstadjungiert ist, sondern treten für nicht-reelle  $\beta$ , nämlich  $\beta = \pm i$  auf. Obwohl es also keine Singularitäten bei physikalischen Werten gibt, so hat die Störungsreihe von  $\lambda_{\pm}(\beta)$  bei  $\beta = 0$  endlichen Konvergenzradius aufgrund dieser komplexen Singularitäten.
- (iii) Die Zahl der Eigenwerte von  $T(\beta)$  ist unabhängig von  $\beta$  außer an sogenannten Ausnahmepunkten (hier  $\beta_{\pm} = \pm i$ ). Für  $\beta = \pm i$  reduziert sich die Zahl der Eigenwerte von zwei zu eins.
- (iv) An diesen singulären Punkten von  $\beta$  ist  $T(\beta)$  nicht diagonalisierbar. Nimmt man beispielsweise die Basis bestehend aus den Vektoren  $(2, 2i)$  und  $(1, -i)$ , so ist  $T(i)$  in dieser Basis durch

$$T(i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

das heißt  $T(i)$  ist in einer Art Jordan-Normalform.

- (v) Die analytische Fortsetzung eines Eigenwertes ist wieder ein Eigenwert.

Für den Rest dieser Diskussion sei  $T(\beta)$  eine matrixwertige Funktion auf einem zusammenhängenden Gebiet  $R$  in der komplexen Ebene. Man bemerkt, dass wir hier nicht verlangen, dass  $T(\beta)$  linear in  $\beta$  ist. Wir werden insbesondere später das unendlichdimensionale, lineare, endlich entartete Störungsproblem auf das endlichdimensionale, *nicht* notwendigerweise lineare Problem zurückführen. Um die Eigenwerte von  $T(\beta)$  zu finden, müssen wir die sekulare Gleichung

$$\det(T(\beta) - \lambda) = (-1)^n [\lambda^n + a_1(\beta)\lambda^{n-1} + \dots + a_n(\beta)] = 0 \quad (1.4)$$

lösen. Hierzu werden wir einen Spezialfall des Satzes über implizite Funktionen verwenden.

**SATZ 1.1.** *Sei  $F(\beta, \lambda) = \lambda^n + a_1(\beta)\lambda^{n-1} + \dots + a_n(\beta)$  ein Polynom  $n$ -ten Grades in  $\lambda$  mit führendem Koeffizienten gleich Eins. Die restlichen Koeffizienten  $a_i$  seien alle analytische Funktionen in  $\beta$ . Angenommen  $\lambda = \lambda_0$  ist eine einfache Nullstelle von  $F(\beta_0, \lambda)$ . Dann gibt es für  $\beta$  nahe  $\beta_0$  genau eine einfache Nullstelle  $\lambda(\beta)$  von  $F(\beta, \lambda)$ , die nahe  $\lambda_0$  liegt. Des Weiteren ist  $\lambda(\beta)$  analytisch in  $\beta$  für  $\beta$  nahe  $\beta_0$ .*

BEWEIS. Dies ist ein Spezialfall des Satzes über implizite Funktionen. Da  $F(\beta, \lambda)$  analytisch nahe  $(\beta_0, \lambda_0)$  ist, kann man

$$F(\beta, \lambda) = \sum_{m=0}^n f_m(\beta)(\lambda - \lambda_0)^m$$

schreiben, wobei  $f_0(\beta_0) \equiv F(\beta_0, \lambda_0) = 0$  und  $f_1(\beta_0) \equiv \frac{\partial F}{\partial \lambda}(\beta_0, \lambda_0) \neq 0$  sind, da  $\lambda_0$  eine einfache Nullstelle ist. Um also Lösungen von  $F(\beta, \lambda) = 0$  nahe  $\beta_0$  zu finden, muss man nur die äquivalente Gleichung

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{f_0(\beta)}{f_1(\beta)} - \sum_{m=2}^n \frac{f_m(\beta)}{f_1(\beta)}(\lambda - \lambda_0)^m \quad (1.5)$$

lösen. Da  $f_1(\beta_0) \neq 0$  ist, sind alle Koeffizienten  $\frac{f_m(\beta)}{f_1(\beta)}$  analytisch in  $\beta$  nahe  $\beta_0$ . Um die letzte Gleichung zu lösen, setzen wir  $\lambda(\beta) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\beta - \beta_0)^k$  an. Die  $\alpha_k$  sind durch obige Gleichung durch rekursives Einsetzen gegeben, z. B.

$$\alpha_1 = - \left( \frac{f_0(\beta)}{f_1(\beta)} \right)' \Big|_{\beta=\beta_0} \quad (1.6a)$$

und

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2} \left( \frac{f_0(\beta)}{f_1(\beta)} \right)'' \Big|_{\beta=\beta_0} - \alpha_1^2 \frac{f_2(\beta_0)}{f_1(\beta_0)}. \quad (1.6b)$$

Die erhaltenen  $\alpha_k$  ergeben somit eine eindeutige Potenzreihe für die Lösung  $\lambda(\beta)$ , die nicht-verschwindenden Konvergenzradius besitzt.  $\square$

Bevor wir fortfahren, machen wir einen kleinen Exkurs über die Jordansche Normalform, algebraische und geometrische Vielfachheit von Eigenwerten.

- BEMERKUNG 1.2. (1) Sei  $\mu(\lambda)$  die algebraische Vielfachheit eines Eigenwerts  $\lambda$  einer  $n \times n$ -Matrix  $T$ . Dann folgt aus dem Fundamentalsatz der Algebra, dass  $\sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \mu(\lambda) = n$ , wobei über alle Eigenwerte von  $T$  summiert wird.
- (2) Sei  $m(\lambda) := \dim\{v : Tv = \lambda v\}$  die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts  $\lambda$  von  $T$ . Dann ist  $m(\lambda) \leq \mu(\lambda)$ .
- (3) Ist  $T$  selbstadjungiert, so ist  $m(\lambda) = \mu(\lambda)$ .
- (4) Im Allgemeinen ist  $\mu(\lambda) = \dim\{v : (T - \lambda)^k v = 0 \text{ für ein } k\}$ . Dieser Raum heißt *allgemeiner* oder *geometrischer Eigenraum* für  $\lambda$ .

Jede Matrix kann in Jordan'scher Normalform geschrieben werden, das heißt es gibt eine Basis, in der

$$T = \begin{pmatrix} T_{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{\lambda_n} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

mit

$$T_{\lambda_j} = \begin{pmatrix} \lambda_j & \kappa & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_j & \kappa & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j & \kappa & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \lambda_j & \kappa \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

und  $\kappa \in \{0, 1\}$ . Der geometrische Eigenraum  $\{v : (T - \lambda_j)^k = 0\}$  wird durch die  $\mu(\lambda_j)$  Basiselemente, die mit dem Jordanblock  $T_{\lambda_j}$  assoziiert sind aufgespannt.  $\mu(\lambda_j)$  besagt wie oft  $\lambda_j$  als Nullstelle des Polynoms  $\det(T - \lambda_j)$  auftaucht. Da jede Matrix  $T$  in Jordan Normalform transformiert werden kann, ist klar, dass, wenn man  $\epsilon > 0$  klein genug wählt

$$P_{\lambda_j} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda_i - \lambda| = \epsilon} (T - \lambda)^{-1} d\lambda \quad (1.9)$$

die Projektion auf den geometrischen Eigenraum von  $\lambda_j$  ist.

LEMMA 1.3. *Sei  $A = (a_{ij})_{ij}$  mit Einträgen  $a_{ij} = (\mu - \lambda)\delta_{ij} + \delta_{i+1,j}$ . Dann ist die Inverse durch*

$$a_{jk}^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (\mu - \lambda)^{-1-m} \delta_{j+m,k} \quad (1.10)$$

gegeben.

BEWEIS. Wir untersuchen zunächst den Fall  $i \neq k$ .

$$a_{ij} a_{jk}^{-1} = \sum_{j,m} (-1)^m (\mu - \lambda)^{-1-m} [(\mu - \lambda)\delta_{ij}\delta_{j+m,k} + \delta_{i+1,j}\delta_{j+m,k}] \quad (1.11a)$$

$$= \sum_m [(-1)^m (\mu - \lambda)^{-m} \delta_{i,k-m} + (-1)^m (\mu - \lambda)^{-1-m} \delta_{i+1,k-m}] \quad (1.11b)$$

$$= (-1)^{k-i} (\mu - \lambda)^{-i+k} - (-1)^{k-i} (\mu - \lambda)^{-i+k} = 0 \quad (1.11c)$$

Sei nun  $i = k$ .

$$a_{ij} a_{jk}^{-1} = \sum_{j,m} (-1)^m (\mu - \lambda)^{-1-m} [(\mu - \lambda)\delta_{ij}\delta_{j+m,k} + \delta_{i+1,j}\delta_{j+m,k}] \quad (1.12a)$$

$$= \sum_m [(-1)^m (\mu - \lambda)^{-m} \delta_{i,i-m} + (-1)^m (\mu - \lambda)^{-1-m} \delta_{i+1,i-m}] \quad (1.12b)$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{für } m = 0 \\ -1 & \text{für } m = -1 \text{ aber } m \in \mathbb{N}_0 \end{cases} = 1 \quad (1.12c)$$

□

KOROLLAR 1.4. *Sei  $T(\beta)$  eine matrixwertige analytische Funktion in  $\beta$  nahe  $\beta_0$  und sei  $\lambda_0$  ein einfacher Eigenwert von  $T(\beta_0)$ . Dann gilt:*

- (i) Für  $\beta$  nahe  $\beta_0$  hat  $T(\beta)$  genau einen Eigenwert  $\lambda_0(\beta)$  nahe  $\lambda_0$ .
- (ii)  $\lambda_0(\beta)$  ist ebenfalls ein einfacher Eigenwert für  $\beta$  nahe  $\beta_0$ .
- (iii)  $\lambda_0(\beta)$  ist analytisch in  $\beta$  nahe  $\beta_0$ .

Hat man es nun mit entarteten Eigenwerten zu tun, verwendet man folgenden allgemeineren Satz.

**SATZ 1.5.** *Sei  $F(\beta, \lambda) = \lambda^n + a_1(\beta)\lambda^{n-1} + \dots + a_n(\beta)$  ein Polynom  $n$ -ten Grades in  $\lambda$  mit führendem Koeffizienten gleich Eins. Die restlichen Koeffizienten  $a_i$  seien alle analytische Funktionen in  $\beta$ . Angenommen  $\lambda = \lambda_0$  sei eine  $m$ -fache Nullstelle von  $F(\beta_0, \lambda)$ . Dann gibt es für  $\beta$  nahe  $\beta_0$  genau  $m$  Nullstellen (Multiplizität eingerechnet) von  $F(\beta, \lambda)$  in der Nähe von  $\lambda_0$ . Diese Nullstellen sind Zweige einer oder mehrerer mengenwertiger analytischer Funktionen (Funktionen, die ein Element auf mehrere Elemente in der Zielmenge abbilden), die im schlimmsten Fall algebraische Zweigstellen bei  $\beta_0$  haben. Genauer gesagt gibt es also  $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{N}$  mit  $\sum_{i=1}^k p_i = m$  und mengenwertige, analytische Funktionen  $\lambda_i(\beta)$  ( $i = 1, \dots, k$ ), die nicht unbedingt verschieden voneinander sind. Diese lassen sich als Puiseux-Reihe*

$$\lambda_i(\beta) = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^{(i)} \cdot (\beta - \beta_0)^{j/p_i} \quad (1.13)$$

darstellen. Daher sind die  $m$  Nullstellen nahe  $\lambda_0$  durch die  $p_1$  Werte von  $\lambda_1$ ,  $p_2$  Werte von  $\lambda_2$ , etc. gegeben.

**KOROLLAR 1.6.** *Sei  $T(\beta)$  eine matrixwertige, analytische Funktion in  $\beta$  nahe  $\beta_0$ . Sei  $\lambda_0$  ein Eigenwert von  $T(\beta_0)$  mit algebraischer Multiplizität  $m$ . Dann hat  $T(\beta)$  für  $\beta$  nahe  $\beta_0$  genau  $m$  Eigenwerte (Multiplizität eingerechnet) nahe  $\lambda_0$ . Diese Eigenwerte sind Zweige einer oder mehrerer mengenwertiger Funktionen, die analytisch nahe  $\beta_0$  sind und im schlimmsten Fall algebraische Singularitäten bei  $\beta_0$  haben. Genauer gesagt gibt es also  $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{N}$  mit  $\sum_{i=1}^k p_i = m$  und die Eigenwerte  $\lambda_j(\beta)$  ( $j = 1, \dots, k$ ) sind  $p_j$ -fach entartet und analytisch nahe  $\beta_0$ .*

Sind  $A$  und  $B$  selbstadjungiert, so sind die gestörten Eigenwerte von  $A + \beta B$  analytisch bei  $\beta = 0$ , auch wenn  $A$  entartete Eigenwerte hat. Rellichs Satz besagt nun, dass die im Korollar angesprochenen Zweigstellen lediglich für nicht-reelle  $\beta$  auftreten. Wir erinnern uns an das eingangs diskutierte Beispiel, wo die Zweigstellen bei  $\beta = \pm i$  aufgetreten sind.

**SATZ 1.7 (Rellich).** *Sei  $T(\beta)$  eine matrixwertige analytische Funktion auf einem Gebiet  $R$  mit  $R \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ . Sei zudem  $T(\beta)$  selbstadjungiert für reelle  $\beta \in R$ . Sei weiterhin  $\lambda_0$  ein Eigenwert von  $T(\beta_0)$  mit Multiplizität  $m$ . Ist  $\beta_0 \in R \cap \mathbb{R}$ , so gibt es  $p \leq m$  voneinander verschiedene übliche (also keine mengenwertige) Funktionen  $\lambda_i(\beta)$  ( $i = 1, \dots, p$ ), die analytisch nahe  $\beta_0$  sind. Dies sind alle Eigenwerte, die von  $\lambda_0$  herrühren.*

**BEWEIS.** Wir betrachten eine der Funktionen  $\lambda_i(\beta) \equiv \lambda(\beta)$  mit  $p_i \equiv p$  aus dem vorherigen Satz. Gemäß der allgemeinen Situation lassen sich die gestörten Eigenwerte als

$$\lambda(\beta) = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j (\beta - \beta_0)^{j/p} \quad (1.14)$$

schreiben. Als Nächstes verwenden wir, dass jeder Zweig  $\lambda(\beta)$  wieder ein Eigenwert nahe  $\lambda_0 = \lambda(\beta_0)$  ist und für  $\beta \in \mathbb{R}$  nahe  $\beta_0 \in \mathbb{R}$  ebenfalls reell sein muss.

Insbesondere müssen daher sowohl der Koeffizient

$$\alpha_1 = \lim_{\beta \searrow \beta_0} \frac{|\lambda(\beta) - \lambda_0|}{|\beta - \beta_0|^{1/p}} \quad (1.15)$$

als auch

$$e^{i\pi/p} \alpha_1 = \lim_{\beta \nearrow \beta_0} \frac{|\lambda(\beta) - \lambda_0|}{|\beta - \beta_0|^{1/p}} \quad (1.16)$$

reell sein. Ist also  $p \neq 1$ , so ist  $\alpha_1 = 0$ . Iteriert man dieses Argument, erhält man, dass  $\alpha_k = 0$  ist, wenn  $k/p$  keine ganze Zahl ist. Somit ist  $\lambda(\beta)$  analytisch bei  $\beta_0$ , da sich dann  $\lambda(\beta)$  als Laurent-Reihe schreiben lässt. Dies zeigt insbesondere, dass es keine Zweigstellen gibt.  $\square$

Wir wollen nun den Spezialfall  $H(\beta) = H_0 + \beta V$  untersuchen. Sei dazu  $E_0$  ein nicht-entarteter Eigenwert von  $H_0$ . Dann wissen wir nach obigem Satz, dass es für kleine  $\beta$  der Operator  $H(\beta)$  genau einen Eigenwert  $E(\beta)$  nahe  $E_0$  besitzt und dieser analytisch in  $\beta$  ist. Die zugehörigen Koeffizienten der Laurent-Reihe von  $E(\beta)$  heißen *Rayleigh-Schrödinger Koeffizienten* und die Laurent-Reihe heißt in diesem Fall *Rayleigh-Schrödinger Reihe*.

Wir beschränken uns von nun an auf den einfacheren Fall, dass  $H_0$  selbstadjungiert ist. Wir betrachten nun eine Kreisscheibe vom Radius  $\epsilon$  um  $E_0$ , sodass  $E(\beta) \equiv E$  der einzige Eigenwert von  $H(\beta)$  ist, der darin enthalten ist. Die Projektion  $P(\beta)$  auf  $E(\beta)$  ist dann gemäß dem Funktionalkalkül durch die Riesz-Projektion

$$P(\beta) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|E_0 - E| = \epsilon} (H_0 + \beta V - E)^{-1} dE \quad (1.17)$$

eq:rieszproj

gegeben. Wir wiederholen noch einmal, dass jede Matrix in Jordan Normalform gebracht werden kann, wodurch wir die Projektion auf einen Eigenwert im Falle von Matrizen, einfach bestimmen können.

LEMMA 1.8. *Gegeben sei eine endlichdimensionale Matrix  $A = (a_{ij})_{ij}$  in Jordan Normalform und  $\lambda_1$  sei ein beliebiger Eigenwert von  $A$ . Sei  $\epsilon > 0$  so klein, dass  $\lambda_1$  der einzige Eigenwert von  $A$  in einer Kreisscheibe vom Radius  $\epsilon$  um  $\lambda_1$  ist. Dann ist durch*

$$P := -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda - \lambda_1| = \epsilon} (A - \lambda)^{-1} d\lambda \quad (1.18)$$

eine Projektion definiert, die auf den geometrischen Eigenraum

$$\{v : \exists k > 0 \text{ sodass } (A - \lambda_1)^k v = 0\} \quad (1.19)$$

projiziert. (Diese  $n$  geben also die Entartung  $\mu_1$  und  $\mu_1 + \mathbb{N}$  von  $\lambda_1$ ).

BEWEIS. Wir erinnern uns zunächst an Cauchys Integralsatz, welcher für ein Gebiet  $R \subseteq \mathbb{C}$  besagt, dass

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial R} \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \begin{cases} \delta_{n,1} & \text{, falls } z_0 \in R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (1.20)$$

wobei  $\partial R$  der Rand von  $R$  ist.



0 oder 1 annehmen kann, je nachdem, auf welchen Eigenvektor er wirkt. Betrachten wir die Matrix

$$A - \lambda_1 \text{id}_q = \begin{pmatrix} N_1 & & & \\ & J_2 - \lambda_1 \text{id}_{\mu_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k - \lambda_1 \text{id}_{\mu_k} \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

und den Eigenvektor von  $J_1$

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

wobei  $v_{1,1} = \sum_{\nu_1=1}^{\mu_1} \beta_{\nu_1} \hat{e}_{\nu_1}$ , dann ist klar, dass

$$(A - \lambda_1 \text{id}_q)^{\mu_1} v_1 = 0 \quad \text{und} \quad (1.28a)$$

$$(A - \lambda_1 \text{id}_q)^{\mu_1+m} v_1 = 0 \quad (1.28b)$$

( $m \in \mathbb{N}_0$ ), da  $N_1^{\mu_1+m} = 0$  und der Rest der Matrix auf lediglich auf einen Nullvektor wirkt.  $\square$

Wir werden später zeigen, dass die Resolvente  $(H_0 + \beta V - E)^{-1}$  analytisch in  $\beta$  nahe  $\beta = 0$  ist, womit dann auch die Projektion  $P(\beta)$  analytisch in  $\beta$  nahe  $\beta = 0$  ist.

Wir untersuchen abschliessend die Rayleigh-Schrödinger Reihe etwas genauer. Sei dazu  $\Omega_0$  ein ungestörter Eigenvektor, so ist  $P(\beta)\Omega_0 \neq 0$  für  $\beta$  nahe 0, da  $P(\beta)\Omega_0 \rightarrow \Omega_0$  für  $\beta \rightarrow 0$ . Da  $P(\beta)\Omega_0$  ein unnormierter Eigenvektor von  $H(\beta)$  ist, ist

$$E(\beta) = \frac{(\Omega_0, H(\beta)P(\beta)\Omega_0)}{(\Omega_0, P(\beta)\Omega_0)} = E_0 + \beta \frac{(\Omega_0, VP(\beta)\Omega_0)}{(\Omega_0, P(\beta)\Omega_0)}. \quad (1.29)$$

Um also die Entwicklung von  $E(\beta)$  aufzuschreiben, müssen wir die Entwicklung der gestörten Projektion  $P(\beta)$  kennen. Hierfür brauchen wir die Entwicklung der Resolventen  $(H_0 + \beta V - E)^{-1}$ , welche eine geometrische Reihe ist:

$$\begin{aligned} (H_0 + \beta V - E)^{-1} &= (H_0 - E)^{-1} - \beta(H_0 - E)^{-1}V(H_0 - E)^{-1} + \dots \\ &\quad + (-1)^n \beta^n (H_0 - E)^{-1}[V(H_0 - E)^{-1}]^n + \dots \end{aligned} \quad (1.30)$$

Die Rayleigh-Schrödinger Reihe für  $E(\beta)$  ist daher

$$E(\beta) = E_0 + \beta \frac{\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \beta^n}{\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n \beta^n} \quad (1.31)$$

mit den Koeffizienten

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i} \oint_{|E-E_0|=\epsilon} (\Omega_0, [V(H_0 - E)^{-1}]^{n+1}) dE, \quad (1.32a)$$

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i} \oint_{|E-E_0|=\epsilon} (\Omega_0, (H_0 - E)^{-1}[V(H_0 - E)^{-1}]^n) dE. \quad (1.32b)$$

Die schwierigste Aufgabe besteht also darin die Rayleigh-Schrödinger Koeffizienten zu bestimmen. Wir bestimmen im Folgenden  $E(\beta)$  bis zur Ordnung  $\beta^4$ . Da  $H_0$

selbstadjungiert ist, wählen eine Basis von Eigenvektoren  $\Omega_j$  ( $j = 0, \dots, n-1$ ), sodass  $H_0\Omega_j = E_j\Omega_j$ . Weiter definieren wir  $V_{ij} := (\Omega_i, V\Omega_j)$ .

$$b_0 = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|E-E_0|=\epsilon} (\Omega_0, (H_0 - E)^{-1}\Omega_0)dE = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|E-E_0|=\epsilon} (E_0 - E)^{-1}dE = 1 \quad (1.33a)$$

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|E-E_0|=\epsilon} V_{00}(E_0 - E)^{-2}dE = 0 \quad (1.33b)$$

$$b_2 = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|E-E_0|=\epsilon} (E_0 - E)^{-2} \sum_{i=0}^n (E_i - E)^{-1} V_{0i} V_{i0} dE \quad (1.33c)$$

Der  $i = 0$ -Term in der letzten Summe hat eine besondere Bedeutung gegenüber den anderen Summanden, da er nach Cauchys Integralsatz verschwindet.

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|E-E_0|=\epsilon} (E_0 - E)^{-3}dE = 0, \quad (1.34)$$

wohingegen

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|E-E_0|=\epsilon} (E_0 - E)^{-2}(E_i - E)^{-1}dE = (E_i - E_0)^{-2}. \quad (1.35)$$

Daher ist

$$b_2 = -\sum_{i \neq 0} (E_i - E_0)^{-2} V_{0i} V_{i0}. \quad (1.36)$$

In derselben Manier erhält man die restlichen Koeffizienten.

$$\begin{aligned} b_3 &= \sum_{i \neq 0 \neq j} [(E_i - E_0)^{-1}(E_j - E_0)^{-2} + (E_i - E_0)^{-2}(E_j - E_0)^{-1}] V_{0i} V_{ij} V_{j0} \\ &\quad - \sum_{i \neq 0} (E_i - E_0)^{-3} V_{0i} V_{i0} V_{00} \end{aligned} \quad (1.37a)$$

$$a_0 = V_{00} \quad (1.37b)$$

$$a_1 = -\sum_{i \neq 0} (E_i - E_0)^{-1} V_{0i} V_{i0} \quad (1.37c)$$

$$a_2 = \sum_{i \neq 0 \neq j} (E_j - E_0)^{-1}(E_i - E_0)^{-1} V_{0i} V_{ij} V_{j0} - 2 \sum_{i \neq 0} (E_i - E_0)^{-2} V_{0i} V_{i0} V_{00} \quad (1.37d)$$

$$\begin{aligned}
a_3 = & - \sum_{i \neq 0 \neq j, k \neq 0} (E_i - E_0)^{-1} (E_j - E_0)^{-1} (E_k - E_0)^{-1} V_{0i} V_{ij} V_{jk} V_{k0} \\
& + 2 \sum_{i \neq 0 \neq j} [(E_i - E_0)^{-1} + (E_j - E_0)^{-2} + (E_j - E_0)^{-1} (E_i - E_0)^{-2}] V_{00} V_{0i} V_{ij} V_{j0} \\
& + 2 \sum_{i \neq 0 \neq j} (E_i - E_0)^{-2} (E_j - E_0)^{-1} V_{0i} V_{i0} V_{0j} V_{j0} \\
& - 3 \sum_{i \neq 0} (E_i - E_0)^{-3} V_{0i} V_{i0} V_{00}
\end{aligned} \tag{1.37e}$$

Schreibt man  $E(\beta) = E_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \beta^n$ , so sind die Koeffizienten durch

$$\alpha_1 = a_0 = V_{00} \tag{1.38a}$$

$$\alpha_2 = a_1 = - \sum_{i \neq 0} (E_i - E_0)^{-1} V_{0i} V_{i0} \tag{1.38b}$$

$$\alpha_3 = a_2 - b_2 a_0 = \sum_{i \neq 0 \neq j} (E_j - E_0)^{-1} (E_i - E_0)^{-1} V_{0i} V_{ij} V_{j0} - \sum_{i \neq 0} (E_i - E_0)^{-2} V_{0i} V_{i0} V_{00} \tag{1.38c}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_4 = & a_3 - b_3 a_0 - b_2 a_1 \\
= & - \sum_{i \neq 0 \neq j, k \neq 0} (E_i - E_0)^{-1} (E_j - E_0)^{-1} (E_k - E_0)^{-1} V_{0i} V_{ij} V_{jk} V_{k0} \\
& + \sum_{i \neq 0 \neq j} [(E_i - E_0)^{-1} + (E_j - E_0)^{-2} + (E_j - E_0)^{-1} (E_i - E_0)^{-2}] V_{00} V_{0i} V_{ij} V_{j0} \\
& + \sum_{i \neq 0 \neq j} (E_i - E_0)^{-2} (E_j - E_0)^{-1} V_{0i} V_{i0} V_{0j} V_{j0} \\
& - 3 \sum_{i \neq 0} (E_i - E_0)^{-3} V_{0i} V_{i0} V_{00} \\
& + \sum_{i \neq 0} (E_i - E_0)^{-3} V_{0i} V_{i0} V_{00}^2
\end{aligned} \tag{1.38d}$$

bestimmt. Aus diesen aufwendigen Rechnungen können wir diverse Schlüsse ziehen.

- (i) Der  $n$ -te Rayleigh-Schrödinger Koeffizient ist deutlich komplizierter als der führende Term

$$(-1)^{n+1} \sum_{i_1 \neq 0, i_2 \neq 0, \dots, i_{n-1} \neq 0} \prod_{j=1}^{n-1} (E_{i_j} - E_0)^{-1} V_{0, i_1} V_{i_1 i_2} \cdots V_{i_{n-1} 0}, \tag{1.39}$$

den man aus Quantenmechanikbüchern kennt.

- (ii) Der Nenner von  $\frac{(\Omega_0, VP(\beta)\Omega_0)}{(\Omega_0, P(\beta)\Omega_0)}$  macht die Entwicklung nicht komplizierter, sondern eliminiert Terme, die bereits im Zähler auftauchen. Man erinnere sich hierbei beispielsweise an die Störungsreihe aus der Quantenelektrodynamik, bei der nicht-zusammenhängende Feynman-Diagramme durch den Nenner eliminiert werden.

Wir schließen den Abschnitt über endlichdimensionale Störungstheorie mit folgendem Resultat.

**SATZ 1.9.** *Sei  $T(\beta)$  eine matrixwertige analytische Funktion in  $\beta$  und  $\Omega_0$  ein nicht-entarteter Eigenvektor von  $T_0 = T(0)$ , der  $T_0\Omega_0 = E_0\Omega_0$  erfüllt. Dann gibt es für  $\beta$  nahe  $\beta = 0$  eine vektorwertige analytische Funktion  $\Omega(\beta)$ , die  $T(\beta)\Omega(\beta) = E(\beta)\Omega(\beta)$  erfüllt, wobei  $E(\beta)$  der Eigenwert von  $T(\beta)$  nahe  $E_0$  ist.*

*Darüberhinaus ist  $T(\beta)$  selbstadjungiert für  $\beta \in \mathbb{R}$  und  $\Omega(\beta)$  kann in diesem Fall auf Eins normiert werden.*

**BEWEIS.** Betrachte den Vektor

$$\psi(\beta) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|E-E_0|=\epsilon} (T(\beta) - E)^{-1} \Omega_0 dE \equiv P(\beta)\Omega_0. \quad (1.40)$$

Dann ist  $\psi(\beta)$  analytisch und, wegen der Projektion, ein Eigenvektor von  $T(\beta)$ . Da  $\psi(\beta) \rightarrow \Omega_0$  für  $\beta \rightarrow 0$ , ist der Überlapp  $(\Omega_0, \psi(\beta)) \neq 0$  für kleine  $\beta$ . Definiert man  $\Omega(\beta) := \frac{\psi(\beta)}{\sqrt{(\Omega_0, \psi(\beta))}}$ , so ist  $\Omega(\beta)$  auf Eins normiert, wenn  $T(\beta)$  für  $\beta \in \mathbb{R}$  selbstadjungiert ist, da dann  $(\Omega_0, \psi(\beta)) = (\Omega_0, P(\beta)\Omega_0) = \|\psi(\beta)\|^2$ .  $\square$

Mit diesem Resultat ist es möglich analytische Eigenvektoren im Falle von Rellichs Satz zu konstruieren.

## 2. Reguläre Störungstheorie

Das Hauptresultat dieses Abschnitts wird sein, dass unter sehr allgemeinen Umständen die Rayleigh-Schrödinger Reihe für Störungen durch unbeschränkte Operatoren in einem unendlichdimensionalen Hilbertraum einen nicht-verschwindenden Konvergenzradius besitzt. Dieses Resultat lässt sich beispielsweise auf den Operator  $H(\beta) = -\Delta + \beta V$  auf  $\mathbb{R}^3$ , wobei  $V \in L^2(\mathbb{R}^3)$  und  $\beta \in \mathbb{R}^+$  sind, anwenden. Wir werden später sehen, dass  $\sigma_{ess}(H(\beta)) = [0, \infty)$  und  $\inf \sigma(H(\beta)) \equiv E(\beta)$  eine monoton fallende Funktion von  $\beta$  ist. Ist insbesondere  $V$  in einem Gebiet von  $\mathbb{R}^3$  negativ, so wird sich herausstellen, dass  $E(\beta) < 0$  für hinreichend großes  $\beta$  und somit ein Eigenwert von  $H(\beta)$  ist. Die natürliche Frage lautet, ob die Grundzustandsenergie  $E(\beta)$  analytisch in  $\beta$  (zumindest in einem Intervall von  $(\beta_0, \infty)$ ) ist.

Dieser Abschnitt ist in vier Teile unterteilt. Wir werden zunächst das diskrete Spektrum von nicht notwendigerweise selbstadjungierten Operatoren diskutieren. Im Anschluss zeigen wir die Analytizität von diskreten, nicht-entarteten Eigenwerten für „analytische Familien von Operatoren“. Wir werden dann zwei einfache Kriterien (Typ A und Typ B) geben, sodass  $H_0 + \beta V$  eine analytische Familie von Operatoren ist. Schließlich werden wir kurz die Störungstheorie entarteter Eigenwerte erörtern.

### 2.1. Diskretes Spektrum.

theorem:2.12

**SATZ 2.1** (Spektrum selbstadjungierter Operatoren). *Sei  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$  selbstadjungiert. Die folgenden Eigenschaften (i), ..., (iii) bzw. (iv) sind jeweils äquivalent.*

- a) (i)  $\lambda \in \sigma(A)$   
(ii)  $E_A((\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)) \neq 0$  für alle  $\epsilon > 0$

- (iii) Es gibt eine Folge  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}(A)$  mit  $\varphi_n \rightharpoonup 0$  und  $(A - \lambda)\varphi_n \rightarrow 0$   
 (iv)  $(\lambda - z)^{-1} \in \sigma((A - z)^{-1})$  für ein/alle  $z \in \rho(A)$
- b) (i)  $\lambda$  ist Eigenwert von  $A$   
 (ii) Es gibt eine Cauchyfolge  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$  mit  $\varphi_n \rightharpoonup 0$  und  $(A - \lambda)\varphi_n \rightarrow 0$   
 (iii)  $E_A(\lambda, \lambda_-) \neq 0$ , das heißt  $\lambda$  ist eine Sprungstelle
- c) (i)  $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$   
 (ii)  $E_A((\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon))$  ist unendlichdimensional (Abkürzung für  $\text{Ran}(E)$  ist unendlichdimensional) für alle  $\epsilon > 0$   
 (iii) Es gibt eine Folge  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$  mit  $\varphi_n \rightharpoonup 0$ ,  $\varphi_n \rightarrow 0$  und  $(A - \lambda)\varphi_n \rightarrow 0$   
 (iv)  $\lambda$  ist ein Eigenwert unendlicher Multiplizität  
 (v)  $\lambda$  ist ein Häufungspunkt des Spektrums
- d) (i)  $\lambda \in \sigma_{disc}(A)$   
 (ii)  $\lambda$  ist ein isolierter Punkt von  $\sigma(A)$ , das heißt für beliebiges  $\epsilon > 0$  ist  $(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon) \cap \sigma(A) = \{\lambda\}$   
 (iii)  $\lambda$  ist ein Eigenwert endlicher Multiplizität, das heißt der Raum  $\{\psi : A\psi = \lambda\psi\}$  ist endlichdimensional  
 (iv) Es gibt eine Folge  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$  mit  $\varphi_n \rightharpoonup 0$  und  $(A - \lambda)\varphi_n \rightarrow 0$  und jede Folge dieser Art enthält eine konvergente Teilfolge.  
 (v) Sei  $\epsilon > 0$ , dann ist  $E_A((\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon))$  endlichdimensional. Außerdem gibt es ein besonderes  $\epsilon_0$ , sodass  $E_A((\lambda - \epsilon_0, \lambda + \epsilon_0)) = E_A((\lambda, \lambda))$ .
- e) In allen Fällen a) bis d) gilt:  
 (A) Ist  $D$  ein determinierender Bereich von  $A$ , so kann die Folge  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $D$  gewählt werden.  
 (B) Ist  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Folge aus dem jeweiligen Fall und  $\delta > 0$ , so hat auch die Folge  $\psi_n := E_A(\lambda - \delta, \lambda + \delta)\varphi_n$  die gewünschte Eigenschaft.

BEWEIS. Siehe [ReedSimon1972](#) [Weidmann2003](#) [RS72](#) und [Wei03](#), Satz 8.24].  $\square$

BEMERKUNG 2.2.  $\sigma_{ess}(A)$  ist immer abgeschlossen. Dies trifft für  $\sigma_{disc}(A)$  im Allgemeinen nicht zu.

Bei der Charakterisierung des diskreten Spektrums allgemeiner Operatoren sollten wir in jedem Fall die Eigenschaft der Isoliertheit beibehalten. Die Spektralprojektion wird durch die Projektion

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda - \lambda_j| = \epsilon} (T - \lambda)^{-1} d\lambda$$

auf das Element  $\lambda_j$  ersetzt.

**theorem:2.14**

SATZ 2.3 (Diskretes Spektrum abgeschlossener Operatoren). Sei  $A$  ein abgeschlossener Operator und  $\lambda \in \sigma(A)$  ein isolierter Punkt. Sei  $\epsilon > 0$  so klein, dass  $\{\mu : |\mu - \lambda| < \epsilon\} \cap \sigma(A) = \{\lambda\}$ . Dann gilt:

- (i) Für beliebiges  $0 < r < \epsilon$  existiert

$$P_\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\mu - \lambda| = r} (A - \mu)^{-1} d\mu \quad (2.1)$$

und ist von  $r$  unabhängig.

- (ii)  $P_\lambda$  ist eine (nicht notwendigerweise orthogonale!) Projektion, das heißt  $P_\lambda = P_\lambda^2$ .
- (iii) Sei  $G_\lambda = \text{Ran}(P_\lambda)$  und  $F_\lambda = \text{Ker}(P_\lambda)$ , dann ist  $G_\lambda + F_\lambda = \mathcal{H}$  und  $G_\lambda \cap F_\lambda = \{0\}$ , wobei die Räume nicht notwendigerweise orthogonal aufeinander sind. Darüberhinaus lässt  $A$  die Räume  $G_\lambda$  und  $F_\lambda$  invariant im folgenden Sinne:
- a)  $G_\lambda \subseteq \mathcal{D}(A)$  und  $AG_\lambda \subseteq G_\lambda$
- b)  $F_\lambda \cap \mathcal{D}(A)$  ist dicht in  $F_\lambda$  und  $A[F_\lambda \cap \mathcal{D}(A)] \subseteq F_\lambda$ .
- (iv) Sei  $\psi \in G_\lambda$ . Ist  $G_\lambda$  endlichdimensional, dann gibt es  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass  $(A - \lambda)^n \psi = 0$  für alle natürlichen Zahlen  $n \geq n_0$ . Im schlimmsten Fall ist  $n_0 \geq \dim(G_\lambda)$ .  $P_\lambda$  projiziert also auf den geometrischen Eigenraum von  $A$ .
- (v)  $\lambda \notin \sigma(A \upharpoonright F_\lambda)$ .

BEMERKUNG 2.4. Sei  $F$  ein lineares Funktional auf  $L(\mathcal{H})$ , dann definiert das innere Produkt

$$\langle F, P_\lambda \rangle_{L(\mathcal{H})} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\mu-\lambda|=\epsilon} \langle F, (A - \mu)^{-1} \rangle d\mu \quad (2.2)$$

die Projektion  $P_\lambda$  eindeutig. Man erinnere sich hierbei an den Rieszschen Darstellungssatz.

BEWEIS. Wir lassen lediglich den Beweis der dritten Aussage aus.

- (i) Wir wissen bereits, dass  $(A - \mu)^{-1}$  analytisch auf  $\rho(A)$  ist. Das Konturintegral existiert daher als Banachraumwertiges Riemannintegral und ist nach Cauchys Integralsatz von  $r$  unabhängig.
- (ii) Sei  $r < R < \epsilon$ . Dann folgt aus der Resolventengleichung, dass

$$\begin{aligned} P_\lambda^2 &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{|\mu-\lambda|=r} \oint_{|\nu-\lambda|=R} (A - \mu)^{-1} (A - \nu)^{-1} d\mu d\nu \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{|\mu-\lambda|=r} \oint_{|\nu-\lambda|=R} (\nu - \mu)^{-1} [(A - \nu)^{-1} - (A - \mu)^{-1}] d\mu d\nu \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \left[ \oint_{|\nu-\lambda|=R} d\nu (A - \nu)^{-1} \oint_{|\mu-\lambda|=r} d\mu (\nu - \mu)^{-1} \right. \\ &\quad \left. - \oint_{|\mu-\lambda|=r} d\mu (A - \mu)^{-1} \oint_{|\nu-\lambda|=R} d\nu (\nu - \mu)^{-1} \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \left[ \oint_{|\nu-\lambda|=R} d\nu (A - \nu)^{-1} \cdot 0 - (2\pi i) \oint_{|\mu-\lambda|=r} d\mu (A - \mu)^{-1} \right] = P_\lambda. \end{aligned} \quad (2.3)$$

- (iii) Siehe [ReedSimon1978](#) [RS78].

(iv) Sei  $\psi \in G_\lambda$  und insbesondere  $A\psi = \nu\psi$ . Dann ist

$$P_\lambda\psi = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\mu-\lambda|=r} (A-\mu)^{-1}\psi d\mu = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\mu-\lambda|=r} (\nu-\mu)^{-1}\psi d\mu = \begin{cases} \psi & \text{falls } \nu = \lambda \\ 0 & \text{falls } \nu \neq \lambda \end{cases}. \quad (2.4)$$

Da aber  $\psi \notin F_\lambda$  ist, kann  $P_\lambda\psi$  nicht Null sein. Somit ist  $\lambda$  der einzige Eigenwert des Operators  $C \equiv A \upharpoonright G_\lambda$ . Ist  $G_\lambda$  endlichdimensional, so hat die Jordan Normalform von  $C$  nur  $\lambda$ s auf der Diagonale ein ein paar Einser oberhalb der Diagonalen. Daraus folgt, dass  $(C-\lambda)^{\dim(G_\lambda)} = 0$  ist, woraus  $(A-\lambda)^n\psi = 0$  für  $n \geq \dim(G_\lambda)$  für alle  $\psi \in G_\lambda$  folgt.

(v) Schließlich zeigen wir, dass  $\lambda \notin \sigma(A \upharpoonright F_\lambda)$  ist. Sei dazu  $B \equiv A \upharpoonright F_\lambda$  und

$$R_\lambda := -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\mu-\lambda|=r} (\lambda-\mu)^{-1}(A-\mu)^{-1}d\mu. \quad (2.5)$$

Mit einer analogen Rechnung wie im zweiten Teil findet man, dass

$$R_\lambda P_\lambda = P_\lambda R_\lambda \quad (2.6a)$$

und

$$(A-\lambda)R_\lambda = R_\lambda(A-\lambda) = 1 - P_\lambda. \quad (2.6b)$$

Die letzte Gleichung ist als Operatorgleichung auf  $\mathcal{D}(A)$  zu verstehen. Daraus folgt, dass  $R_\lambda$  den Raum  $F_\lambda$  in sich selbst abbildet, denn für  $\phi \in F_\lambda$  ist

$$R_\lambda P_\lambda \phi = P_\lambda R_\lambda \phi = 0. \quad (2.7)$$

Damit und obiger Operatorgleichung auf  $\mathcal{D}(A)$  ist aber  $(B-\lambda)R_\lambda = R_\lambda(B-\lambda) = \text{id} \upharpoonright F_\lambda$ , womit  $(B-\lambda)\psi \neq 0$  für alle  $\psi \in F_\lambda$ . □

Wir können damit das diskrete Spektrum definieren.

**DEFINITION 2.5** (Diskretes Spektrum).  $\lambda \in \sigma(A)$  heißt *diskret*, wenn  $\lambda$  ein isolierter Punkt und  $P_\lambda$  endlichdimensional ist.

Man nennt  $\lambda$  einen *nicht-entarteten Eigenwert von  $A$* , wenn  $P_\lambda$  eindimensional ist.

Wenn man dies mit der Definition des diskreten Spektrums im Falle selbstadjungierter Operatoren vergleicht, sieht man, dass diese übereinstimmen. Wir bemerken weiterhin, dass alle  $\psi \in \text{Ran}(P_\lambda)$  die Eigenwertgleichung  $A\psi = \lambda\psi$  erfüllen. Wir schließen die Diskussion über das diskrete Spektrum mit folgender Umkehrung.

**theorem:2.17**

**SATZ 2.6.** Sei  $A$  ein Operator und  $\{\mu : |\mu - \lambda| = r\} \subseteq \rho(A)$ . Dann ist

$$P(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\mu-\lambda|=r} (A-\mu)^{-1}d\mu$$

eine Projektion. Ist  $n := \dim(\text{Ran}(P)) < \infty$ , dann hat  $A$  höchstens  $n$  Elemente aus seinem Spektrum in  $\{\mu : |\mu - \lambda| < r\}$ . Darüberhinaus sind all diese Elemente diskrete Eigenwerte. Ist  $n = 1$ , so gibt es genau einen Punkt aus dem Spektrum in  $\{\mu : |\mu - \lambda| < r\}$  und dieser ist nicht entartet.

BEWEIS. Obiger Beweis verrät uns bereits, dass  $P$  eine Projektion, und  $G = \text{Ran}(P)$  und  $F = \text{Ker}(P)$  abgeschlossene, komplementäre, invariante Unterräume sind. Definiert man nun  $A_1 \equiv A \upharpoonright G$  und  $A_2 \equiv A \upharpoonright F$ , so folgt wieder aus obigem Beweis, dass  $\nu \notin \sigma(A_2)$ , wenn  $|\nu - \lambda| < r$  ist. Daher existiert  $(A - \nu)^{-1}$  für solche  $\nu$  nur, wenn  $(A_1 - \nu)^{-1}$  existiert.

Ist  $G$  endlichdimensional, so hat  $A_1$  Eigenwerte  $\nu_1, \dots, \nu_k$  ( $k \leq n$ ), sodass  $\sigma(A_1) \cap \{\nu : |\nu - \lambda| < r\}$  eine endliche Menge ist. Sei nun  $P_\nu$  die Projektion aus obigem Satz. Ist  $\nu \in \{\mu : |\lambda - \mu| < r\}$ , dann ist  $P_\nu P = P P_\nu = P_\nu$ , woraus  $\text{Ran}(P_\nu) \subseteq \text{Ran}(P)$  folgt. Daher ist jeder Punkt aus  $\{\nu : |\nu - \lambda| < r\}$  ebenfalls diskret.  $\square$

### 3. Lokalisierung von diskretem Spektrum

Im Folgenden untersuchen wir Störungen des Spektrums von kompakten Operatoren. In der Quantenmechanik ist der Birman–Schwinger-Operator ein Paradebeispiel, für den die Theoreme hier interessant sein könnten. Wir beginnen mit klassischer Störungstheorie nach Kato [\[Kat66\]](#) und werden dann eine Verallgemeinerung des Satzes von Rouché von Siedentop [\[Sie89b, Sie89a\]](#) diskutieren (siehe auch Dyatlov–Zworski [\[DZ19, Anhang C.4\]](#)).

Die Ergebnisse in diesem Abschnitt werden von folgender Form sein. *Angenommen,  $\{\lambda_j\}_{j=1}^m$  ist eine Folge von Eigenwerten eines gegebenen Operators  $A$ , der von einer Kurve  $\Gamma$  (in der komplexen Ebene) umkreist wird und  $B$  ist eine „kleine Störung“ von  $A$ . Dann hat  $A + B$  ebenfalls genau  $m$  Eigenwerte innerhalb der Kurve  $\Gamma$ .*

**3.1. Klassische Störungstheorie von diskretem Spektrum.** Wir folgen hier der vereinfachten Darstellung von Algazin [\[Alg83, Theorem 1.1\]](#), der Kato [\[Kat76a, Abschnitte IV.3.4–5\]](#) zitiert. Wir erinnern daran, dass der Spektralradius  $\text{Spr}(A)$  für einen abgeschlossenen, beschränkten Operator  $A$  durch

$$\text{Spr}(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n}$$

definiert ist. Falls  $A$  rein diskretes Spektrum  $\sigma(A) = \{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$  hat, dann ist

$$\text{Spr}(A) = \max\{|\lambda_j|\}_{j \in \mathbb{N}}.$$

Im Allgemeinen gilt lediglich die Schranke

$$\text{Spr}(A) \leq \|A\| \tag{3.1}$$

eq:boundspecradius

mit Gleichheit, wenn beispielsweise  $A$  normal ist, sprich, wenn  $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$  und  $\|A\psi\| = \|A^*\psi\|$  für alle  $\psi \in \mathcal{D}(A)$ <sup>1</sup>.

algazin

**SATZ 3.1.** *Sei  $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow \mathcal{B}$  ein abgeschlossener Operator in einem Banachraum  $\mathcal{B}$  und sei  $S$  ein beschränkter Operator. Sei weiter  $\Gamma$  eine rektifizierbare Kurve (oder eine endliche Menge von paarweise nicht-schneidenden Kurven dieser Art) in der komplexen Ebene, die  $m$  Eigenwerte von  $T$  umkreist. (Die Eigenwerte werden gemäß ihrer algebraischen Vielfachheit gezählt.) Angenommen, es gilt*

$$\sup_{z \in \Gamma} \text{Spr}((T - z)^{-1}(S - z) - 1) < 1. \tag{3.2}$$

eq:condalgazin

<sup>1</sup>Dies ist äquivalent zur Forderung, dass  $A$  mit seinem Adjungierten  $A^*$  kommutiert, also  $AA^* = A^*A$  ist.

Dann gibt es genau  $m$  Eigenwerte des Operators  $S$  innerhalb der Kurve  $\Gamma$ , wobei die Eigenwerte wieder gemäß ihrer algebraischen Vielfachheit gezählt werden.

Wir machen einige elementare aber wichtige Beobachtungen zu diesem Satz.

BEMERKUNGEN 3.2. (1) Wegen  $\text{\eqref{boundspecradius}}$  kann die Bedingung  $\text{\eqref{condalgazin}}$  durch

$$\sup_{z \in \Gamma} \|(T - z)^{-1}(S - z) - 1\| < 1 \quad (3.3) \quad \text{\eqref{condalgazinalt}}$$

ersetzt werden. Falls auch  $T$  beschränkt ist, gelten  $\text{\eqref{condalgazin}}$  und  $\text{\eqref{condalgazinalt}}$ , falls

$$\|(T - z)^{-1}\| \cdot \|T - S\| < 1 \quad \text{für alle } z \in \Gamma$$

(2) Falls  $z \in \rho(T)$  und  $\text{Spr}((T - z)^{-1}(S - z) - 1) < 1$ , dann ist auch  $z \in \rho(S)$ .

(3) Wenn wir zusätzlich annehmen, dass  $T$  beschränkt ist, können die Rollen von  $T$  und  $S$  vertauscht werden.

(4) Der Beweis kann auch in leicht abgewandelter Form in Kato  $\text{\cite{Kato1976}}$   $\text{\cite{Kat76a}}$ , Abschnitt II-1.4] gefunden werden.

Für den Beweis erinnern wir an das folgende

LEMMA 3.3. Sei  $\mathcal{B}$  ein Banachraum und  $P(t) : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  eine Projektion, die stetig von einem Parameter  $t$ , welcher ein (zusammenhängendes) Gebiet in  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  durchläuft, abhängt. Dann sind die Bilder  $P(t)\mathcal{B}$  für unterschiedliche  $t$  isomorph zueinander. Insbesondere ist  $\dim(P(t)\mathcal{B}) = \dim(\text{ran}(P(t)))$  konstant.

BEWEIS. Siehe Kato  $\text{\cite{Kato1976}}$   $\text{\cite{Kat76a}}$ , Abschnitt I-4.6, Lemma 4.10] oder Reed–Simon  $\text{\cite{RS78}}$ , S. 14].  $\square$

BEWEIS VON SATZ 3.1.  $\text{\eqref{algazin}}$  Für  $\kappa \in \mathbb{C}$  sei  $T(\kappa) = T + \kappa T^{(1)}$ , wobei  $T^{(1)} = S - T$ . Für  $z \in \rho(T)$  gilt dann

$$T(\kappa) - z = (T - z)(1 + \kappa(T - z)^{-1}T^{(1)}).$$

Offensichtlich ist

$$(T - z)^{-1}T^{(1)} = (T - z)^{-1}(S - z) - 1$$

beschränkt, weshalb wir

$$r_0 := \left[ \sup_{z \in \Gamma} \text{Spr} \left( (T - z)^{-1}(S - z) - 1 \right) \right]^{-1}$$

definieren können. Wegen Annahme  $\text{\eqref{condalgazin}}$  ist  $r_0 > 1$ . Wir führen nun eine Neumann-Reihenentwicklung durch. Für  $|\kappa| < r_0$  erhalten wir zunächst

$$(T(\kappa) - z)^{-1} = (T - z)^{-1} + \sum_{k=1}^n \kappa^k R^{(k)}(z), \quad (3.4) \quad \text{\eqref{algazinneumann}}$$

wobei

$$R^{(k)}(z) := (-1)^k ((T - z)^{-1}(S - T))^k (T - z)^{-1}.$$

Dies zeigt  $z \in \rho(T(\kappa))$  und, dass  $(T(\kappa) - z)^{-1}$  durch die gleichmäßig in  $z \in \Gamma$  konvergente Neumann-Reihe  $\text{\eqref{algazinneumann}}$   $\text{\eqref{algazin}}$  dargestellt werden kann (wegen Annahme  $\text{\eqref{condalgazin}}$ ).

Da die Koeffizienten der Reihe beschränkt sind, ist auch  $(T(\kappa) - z)^{-1}$  beschränkt und auf ganz  $\mathcal{B}$  definiert. Integriert man nun  $\text{\eqref{algazinneumann}}$   $\text{\eqref{algazin}}$  Term für Term, folgt, dass die

Eigenprojektion  $P(\kappa)$  des Operators  $T(\kappa)$  durch die entsprechende Reihe definiert ist, die für  $|\kappa| < r_0$  konvergiert, nämlich

$$P(\kappa) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (T(\kappa) - z)^{-1} dz \equiv P + \sum_{k=1}^{\infty} \kappa^k P^{(k)},$$

wobei

$$P^{(k)} := -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} R^{(k)}(z) dz, \quad \text{und} \quad P := -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (T - z)^{-1} dz.$$

Insbesondere ist ersichtlich, dass  $P(\kappa)$  stetig in  $\kappa$  ist, weshalb es nach vorigem Lemma genau  $m$  Eigenwerte  $\lambda_1(\kappa), \dots, \lambda_m(\kappa)$  von  $T(\kappa)$  innerhalb  $\Gamma$  für  $|\kappa| < r_0$  gibt. Da aber  $r_0 > 1$  ist, folgt die Behauptung für  $\kappa = 1$ .  $\square$

**3.2. Verallgemeinerte Rouché-Theoreme.** Wir wiederholen zunächst einige Tatsachen aus der Funktionentheorie.

DEFINITION 3.4. Eine Funktion  $f$  auf einer offenen Menge  $\Omega$  heißt genau dann *meromorph*, wenn es eine Folge von Punkten  $\{z_0, z_1, \dots\}$ , die keinen Häufungspunkt in  $\Omega$  hat, sodass

- (1) die Funktion  $f$  holomorph in  $\Omega \setminus \{z_0, z_1, \dots\}$  und
- (2)  $f$  Pole an den Punkten  $\{z_0, z_1, \dots\}$  hat.

argumentprinciple

SATZ 3.5 (Argumentenprinzip). *Sei  $f$  meromorph in einer offenen Menge, die einen Kreis  $\Gamma$  und sein Inneres enthält. Sei  $Z_f$  die Zahl der Nullstellen und  $P_f$  die Zahl der Pole von  $f$  im Inneren von  $\Gamma$ . Wenn  $f$  weder Pole noch Nullstellen auf  $\Gamma$  hat, dann gilt*

$$Z_f - P_f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \quad (3.5)$$

eq:argumentprinciple

wobei die Nullstellen und Pole gemäß ihrer Vielfachheit gezählt werden.

Dieser Satz lässt sich einfach für Kurven  $\Gamma$  verallgemeinern, die homotop zu einem Punkt sind (z.B. Dreiecke, Rechtecke, Schlüsselochkonturen,...).

BEWEIS. Siehe Stein–Shakarchi [SS03, Theorem 4.1] oder Marsden–Hoffman [MH87, Abschnitt 6.2, Theorem 6].  $\square$

Aus dem Argumentenprinzip lässt sich Rouchés Satz ableiten, der im Wesentlichen ein Stetigkeitsaussage ist. Sie besagt, dass die Zahl der Nullstellen einer holomorphen Funktion nicht geändert wird, wenn sie nur „leicht gestört“ wird.

rouche1

SATZ 3.6 (Rouché-Theorem 1). *Angenommen  $f$  und  $g$  sind holomorph in einer offenen Menge, die einen Kreis  $\Gamma$  und sein Inneres enthält. Falls  $f$  und  $g$  keine Nullstellen auf  $\Gamma$  haben und*

$$|g(z)| < |f(z)| \quad \text{für alle } z \in \Gamma,$$

*dann haben  $f$  und  $f + g$  gleich viele Nullstellen im Inneren des Kreises  $\Gamma$ , sprich  $Z_f = Z_{f+g}$ . Wie oben werden die Zahl der Nullstellen gemäß ihrer Vielfachheit gezählt.*

Lässt man zu, dass  $f$  und  $g$  auch (einfache) Pole haben können, kann man folgende Verallgemeinerung zeigen. (In der Formulierung unten wurde  $g$  durch  $g - f$  ersetzt.)

rouche2

SATZ 3.7 (Rouché-Theorem 2). *Angenommen  $f$  und  $g$  sind meromorph in einer offenen Menge, die einen Kreis  $\Gamma$  und sein Inneres enthält. Falls  $f$  und  $g$  weder Pole noch Nullstellen auf  $\Gamma$  haben und*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|, \quad (3.6)$$

eq:rouchecond

dann gilt  $Z_f - P_f = Z_g - P_g$ , wobei die Nullstellen und Pole gemäß ihrer Vielfachheit gezählt werden.

BEWEIS. Siehe Stein–Shakarchi [\[SS03, Theorem 4.3\]](#) oder Marsden–Hoffman [\[MH87, Abschnitt 6.2, Theorem 7\]](#).  $\square$

Oftmals ist man an der Lokalisierung von Eigenwerten von Schrödinger-Operatoren wie  $H = T(-i\nabla) - V(x)$  interessiert. Wegen des Birman–Schwinger-Prinzips ist  $-e < 0$  genau dann ein Eigenwert von  $H$ , wenn 1 ein Eigenwert von  $BS(e) := |V|^{1/2}(T+e)^{-1}V^{1/2}$  ist. Typischerweise ist  $BS(e)$  in einem Spurideal  $\mathcal{J}^p$  enthalten, das heißt insbesondere ist  $\text{spec}(BS(e))$  rein diskret. Damit könnte bereits Theorem [3.1](#) angewandt werden. In diesem Abschnitt verallgemeinern wir die obigen Rouché-Theoreme, um etwas über die Zahl der *Null-Eigenwerte* (statt Nullstellen von holomorphen Funktionen) des Operators  $BS(e) - 1$  zu sagen. Solche Verallgemeinerungen sind erwartbar, da die Resolvente  $(T+e)^{-1}$  für  $e > 0$  und elliptische, nichtnegative  $\Psi$ DOs  $T(-i\nabla)$  holomorph ist. Natürlich muss man nicht den Birman–Schwinger-Operator betrachten und kann stattdessen mit der Resolvente  $(H-z)^{-1}$  arbeiten und die Zahl der Pole mittels eines Rouché-Theorems bestimmen. Im Folgenden verwenden wir einige Resultate aus abstrakter Fredholm-Theorie, die wir in Anhang [5](#) [a:fredholm](#) zusammenfassen. Im Folgenden halten wir uns an Dyatlov–Zworski [\[DZ19, Anhang C.3\]](#).

DEFINITION 3.8. Sei  $\Omega \subset \mathbb{C}$  offen und  $X$  und  $Y$  Banachräume. Wir sagen, dass  $z \mapsto B(z)$  eine *meromorphe Familie von Operatoren in  $\Omega$*  ist, wenn es für alle  $z_0 \in \Omega$  Operatoren  $\{B_j\}_{j=1}^J$  endlichen Ranges und eine nahe  $z_0$  holomorphe Familie  $z \mapsto B_0(z)$  von Operatoren gibt, sodass

$$B(z) = B_0(z) + \sum_{j=1}^J \frac{B_j}{(z - z_0)^j} \quad \text{für alle } z \text{ nahe } z_0. \quad (3.7)$$

Wir sagen, dass  $B(z)$  eine *meromorphe Familie von Fredholm-Operatoren* ist, wenn für alle  $z_0 \in \Omega$  die Familie  $z \mapsto B_0(z)$  Fredholm für alle  $z$  nahe  $z_0$  ist. Falls  $z_0$  nicht-singulär ist, ist  $B_0(z) = B(z)$ .

BEMERKUNG 3.9. Wir erinnern daran, dass die Cauchy-Formel

$$B(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{B(z)}{\lambda - z} dz$$

für holomorphe Familien von Operatoren gilt. (Wie üblich ist  $\Gamma$  hier eine Kontur, die  $\lambda$  umkreist.) Konsequenterweise gelten die Cauchy-Abschätzungen

$$\|\partial_\lambda B(\lambda)\| \leq \frac{1}{R} \sup_{|z-\lambda| \leq R} \|B(z)\|.$$

Das folgende Faktorisierungs-Resultat ist der Schlüssel zum Beweis der allgemeinsten Version vom Satz von Rouché für Operatoren in Schattenidealen.

factorizationfredholm

SATZ 3.10. Sei  $\Omega \subset \mathbb{C}$  offen und  $X$  ein Banachraum. Angenommen  $A(\lambda) : X \rightarrow X$  (mit  $\lambda \in \Omega$ ) ist eine meromorphe Familie von Fredholm-Operatoren mit Polen endlichen Ranges, sprich, für alle  $\mu \in \Omega$  gibt es Operatoren  $\{A_j\}_{j=1}^J$  endlichen Ranges und  $z \mapsto A_0(z)$  holomorph nahe  $\mu$ , sodass

$$A(\lambda) = A_0(\lambda) + \sum_{j=1}^J \frac{A_j}{(\lambda - \mu)^j} \quad \text{für alle } \lambda \text{ nahe } \mu.$$

Angenommen, es gilt  $\text{ind}(A_0(\lambda)) = 0$ . Dann gibt es Familien von Operatoren  $\lambda \mapsto U_j(\lambda)$  ( $j = 1, 2$ ), die holomorph und invertierbar für  $\lambda$  nahe  $\mu$  sind sowie Operatoren  $\{P_m\}_{m=1}^M$ , sodass für  $\lambda$  nahe  $\mu$

$$A(\lambda) = U_1(\lambda) \left( P_0 + \sum_{m=1}^M (\lambda - \mu)^{k_m} P_m \right) U_2(\lambda), \quad k_\ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad (3.8)$$

$$P_\ell P_m = P_m \delta_{\ell m}, \quad \text{rank}(P_\ell) = 1, \quad \ell > 0, \quad \text{rank}(1 - P_0) < \infty.$$

gilt. In diesem Fall heißt  $\mu$  Eigenwert endlichen Typs von  $A$  und die Summe  $\sum_{m=1}^M k_m$  bezeichnet man als algebraische Multiplizität von  $\mu$ .

[Kann  $M$  als geometrische Vielfachheit, sprich, die Dimension des zum Eigenwert  $\mu$  gehörenden Eigenraums interpretiert werden?]

BEWEIS. Siehe Dyatlov–Zworski <sup>DyatlovZworski2019</sup> [DZ19, Theorem C.10].  $\square$

Zu diesem Resultat lassen sich einige Bemerkungen und Interpretationen formulieren.

BEMERKUNGEN 3.11. (1) Die Inverse  $A(\lambda)^{-1}$  existiert für  $\lambda$  nahe  $\mu$  genau dann als meromorphe Familie von Operatoren, wenn  $P_0 + \sum_{m=1}^M P_m = 1$ . In diesem Fall gilt

$$A(\lambda)^{-1} = U_2(\lambda)^{-1} \left( P_0 + \sum_{m=1}^M (\lambda - \mu)^{-k_m} P_m \right) U_1(\lambda)^{-1}. \quad (3.9)$$

Dies zeigt, dass, wenn  $A(\lambda_0)^{-1}$  an einem Punkt  $\lambda_0 \in \Omega$  existiert und  $\Omega$  zusammenhängend ist, dann ist  $A(\lambda)^{-1}$  wieder eine meromorphe Familie von Operatoren in  $\Omega$ . Dies kann als Verstärkung des klassischen analytischen Fredholm-Satzes (Theorem <sup>theorem:4.45</sup> 4.17) gesehen werden, siehe auch <sup>theorem:3.32</sup> Theorem 4.2 <sup>eq:factorizationfredholm</sup> [Theorem 4.2].

(2) Die behauptete Faktorisierung in (3.8) erlaubt es eine „natürliche“ Definition von *Null-Multiplizität* von  $A(\lambda)$  bei  $\mu$  zu geben. In der Notation von (3.8) sei <sup>eq:factorizationfredholm</sup> Def- <sup>eq:factorizationfredholm</sup>

$$N_\mu(A) := \begin{cases} \sum_{k_\ell > 0} k_\ell, & \text{falls } M = \text{rank}(1 - P_0), \\ \infty, & \text{falls } M < \text{rank}(1 - P_0). \end{cases} \quad (3.10)$$

eq:defnullmultiplicity

Offenbar tritt der erste Fall genau dann ein, wenn  $A(\lambda)^{-1}$  invertierbar ist, da dann  $P_0 + \sum_m P_m = 1$  und die  $P_m$  paarweise orthogonal sind sowie Rang Eins haben.

Im Umkehrschluss folgt, dass, wenn  $N_\mu(A) < \infty$ , dann ist  $A(\lambda)$  invertierbar und meromorph mit Null-Multiplizität

$$N_\mu(A^{-1}) = - \sum_{k_\ell < 0} k_\ell$$

bei  $\mu$ . Diese Zahl entspricht gerade der Ordnung des Pols von  $A(\lambda)$  bei  $\lambda = \mu$ .

Aus Satz [3.10](#) und der Definition [\(3.10\)](#) ergibt sich folgendes Resultat über die Multiplizität der Nullstellen und Pole von meromorphen Fredholm-Operatoren, welches mit dem Argumentenprinzip aus Theorem [3.5](#) verglichen werden sollte.

**SATZ 3.12** (Argumentenprinzip für operatorwertige Funktionen). *Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen. Angenommen,  $\lambda \mapsto A(\lambda)$  und  $\lambda \mapsto A(\lambda)^{-1}$  sind meromorphe Familien von Fredholm-Operatoren auf einem Hilbertraum  $X$ . Sei  $\mu \in \Omega$  und  $\Gamma$  eine geschlossene, zu einem Punkt homotope Kurve, (z.B. ein Kreis), die  $\mu$  umkreist. Dann hat der Operator  $\oint_{\Gamma} (\partial_{\lambda} A(\lambda)) A(\lambda)^{-1} d\lambda$  endlichen Rang und es gilt<sup>2</sup>*

$$\frac{1}{2\pi i} \operatorname{Tr} \oint_{\Gamma} (\partial_{\lambda} A(\lambda)) A(\lambda)^{-1} d\lambda = N_{\mu}(A) - N_{\mu}(A^{-1}). \quad (3.11)$$

**BEMERKUNGEN 3.13.**

Analog zu Rouchés Satz [3.7](#) erhalten wir folgende Verallgemeinerung für Fredholmoperatoren bei der die Störung eine relative Spurklasse-Bedingung (anstatt einer punktweisen Schranke) erfüllen muss.

**SATZ 3.14** (Rouchés Satz für operatorwertige Funktionen). *Angenommen,  $A(\lambda)$  und  $B(\lambda)$  erfüllen beide die Annahmen von Satz [3.12](#). Sei weiter  $U \Subset \Omega$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit einem  $C^1$ -Rand  $\partial U$ , auf dem  $A$  und  $B$  weder Null-Eigenwerte, noch Pole haben. Falls*

$$A(\lambda)^{-1}(A(\lambda) - B(\lambda)) \in \mathcal{J}^1$$

und<sup>3</sup> [Folgt folgende Bedingung nicht direkt aus der relativen Spurklasse-Bedingung, siehe Reed--Simon [\[RS78, S. 113-114\]](#) bzw. den Beweis von Korollar [4.16?](#)]

$$\|A(\lambda)^{-1}(A(\lambda) - B(\lambda))\|_{X \rightarrow X} < 1, \quad \lambda \in U, \quad (3.12)$$

dann gilt

$$\sum_{\mu \in U} (N_{\mu}(A) - N_{\mu}(A^{-1})) = \sum_{\mu \in U} (N_{\mu}(B) - N_{\mu}(B^{-1})). \quad (3.13)$$

**BEISPIEL 3.15.**

**BEWEIS VON SATZ [3.14](#) MITTELS SATZ [3.12](#).** Aus Satz [3.12](#) folgt, dass wir nur

$$\operatorname{Tr} \oint_{\partial U} \partial_{\lambda} B(\lambda) B(\lambda)^{-1} d\lambda = \operatorname{Tr} \oint_{\partial U} \partial_{\lambda} A(\lambda) A(\lambda)^{-1} d\lambda \quad (3.14)$$

zeigen brauchen. Setzen wir  $C(\lambda) = A(\lambda)^{-1}(A(\lambda) - B(\lambda))$ , dann folgt aus der Annahme [\(3.12\)](#), dass

$$C(\lambda) \in \mathcal{S}^1(X), \quad \|C(\lambda)\| < 1, \quad B(\lambda) = A(\lambda)(1 - C(\lambda)).$$

Darüberhinaus erfüllt  $1 - C(\lambda)$  die Annahmen des Argumentenprinzips (Satz [3.12](#)). Wir schreiben nun die linke Seite der Behauptung [\(3.14\)](#) als

$$(\partial_{\lambda} B) B^{-1} = (\partial_{\lambda} A) A^{-1} - A(\partial_{\lambda} C)(1 - C)^{-1} A^{-1}.$$

Der Beweis wäre vollendet, wenn wir

$$\operatorname{Tr} \oint_{\partial U} A(\partial_{\lambda} C)(1 - C)^{-1} A^{-1} d\lambda = 0$$

<sup>2</sup>Vergleiche mit [\(3.5\)](#).  
<sup>3</sup>Vergleiche mit [\(3.6\)](#).

zeigen könnten. Dazu schreiben wir

$$A(\partial_\lambda C)(1 - C)^{-1}A^{-1} = A(\partial_\lambda C)A^{-1} + \sum_{k \geq 1} A(\partial_\lambda C)C^k A^{-1}. \quad (3.15) \quad \boxed{\text{eq:rouchefredholmaux2}}$$

Die Reihe auf der rechten Seite konvergiert, da

$$\|A(\partial_\lambda C)C^k A^{-1}\|_{S^1} \leq \|A\| \|\partial_\lambda C\| \|A^{-1}\| \|C\|_{S^1}^k$$

und da  $\|C\| < 1$  per Voraussetzung. Gleichzeitig garantiert das Argumentenprinzip (Satz [3.12](#)), dass das Integral der Reihe über  $\partial U$  Spurklasse ist.

Wir zeigen nun, dass  $\text{Tr} \oint_{\partial U}$  des ersten Terms auf der rechten Seite von [\(3.15\)](#) verschwindet. Dazu schreiben wir wiederum [eq:rouchefredholmaux2](#)

$$A(\partial_\lambda C)A^{-1} = \partial_\lambda(ACA^{-1}) - (\partial_\lambda A)CA^{-1} + ACA^{-1}(\partial_\lambda A)A^{-1}.$$

Die letzten beiden Terme der rechten Seite sind per Voraussetzung Spurklasse, sprich mit Zyklizität der Spur folgt, dass

$$\text{Tr}[(\partial_\lambda A)CA^{-1}] - \text{Tr}[ACA^{-1}(\partial_\lambda A)A^{-1}] = 0.$$

Daraus [und der Holomorphie von  $\partial_\lambda(ACA^{-1})$ ?] folgt

$$\text{Tr} \oint_{\partial U} A(\partial_\lambda C)A^{-1} = \text{Tr} \oint_{\partial U} \partial_\lambda(ACA^{-1}) = 0.$$

Es verbleibt also noch die Reihe auf der rechten Seite von [\(3.15\)](#) zu behandeln. Für  $k \geq 1$  ist die Abbildung [eq:rouchefredholmaux2](#)

$$\lambda \mapsto \partial_\lambda(C^{k+1}) = \sum_{\ell=0}^k C^\ell (\partial_\lambda C) C^{k-\ell}$$

eine stetige Familie von Spurklasseoperatoren. Wir können daher die Zyklizität der Spur anwenden und erhalten [wegen Holomorphie von  $\partial_\lambda(C^{k+1})$ ?]

$$\begin{aligned} \text{Tr} \oint_{\partial U} \sum_{k \geq 1} A(\partial_\lambda C)C^k A^{-1} d\lambda &= \sum_{k \geq 1} \oint_{\partial U} \text{Tr} (A(\partial_\lambda C)C^k A^{-1}) d\lambda \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k+1} \text{Tr} \oint_{\partial U} \partial_\lambda(C^{k+1}) d\lambda = 0. \end{aligned}$$

Dies schließt den Beweis.  $\square$

Schließlich geben wir noch folgendes Ergebnis von Siedentop [\[Sie89b\]](#) wieder, welches die relative Spurklasse-Bedingung abmildert.

**rouchetraceideal**

**SATZ 3.16.** *Sei  $\Omega$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet, das von einer Kurve  $\Gamma$  umschlossen wird. Seien  $F$  und  $G$  meromorphe,  $\mathcal{J}^p$ -wertige Funktionen auf  $\Omega$ , die analytisch auf dem Rand  $\Gamma$  sind. Für  $f(z) := 1 + F(z)$  und  $g(z) := 1 + G(z)$  nehmen wir an, dass<sup>4</sup>*

$$\max_{z \in \Gamma} \|f(z)g(z) - 1\|_{\mathcal{J}^p} < 1. \quad (3.16) \quad \boxed{\text{eq:rouchetracecond}}$$

Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \text{Tr} \oint_{\Gamma} f'(z)f(z)^{-1} dz = -\frac{1}{2\pi i} \text{Tr} \oint_{\Gamma} g'(z)g(z)^{-1} dz \quad (3.17) \quad \boxed{\text{eq:rouchetraceideal}}$$

<sup>4</sup>Vergleiche diese Bedingung mit [\(3.6\)](#). [eq:rouchecond](#)

Wenn  $F$  darüberhinaus analytisch in  $\Omega$  ist, dann ist

$$\begin{aligned} Z_\Omega(F) &= \text{Zahl der } -1\text{-Eigenwerte von } F(z) \text{ für } z \in \Omega \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \operatorname{Tr} \oint_\Gamma g'(z)g(z)^{-1} dz. \end{aligned}$$

Wie üblich werden die untersuchten Eigenwerte gemäß ihrer algebraischen Vielfachheit gezählt.

**BEMERKUNGEN 3.17.** (1) In diesem Satz denken wir uns  $F(z)$  als einen Birman–Schwinger-Operator (von dem wir erfahren wollen, für welche  $z$  er einen  $-1$ -Eigenwert hat) und  $g(z)$  als eine Resolvente (von der die Zahl der Pole in  $\Omega$  bekannt sind). Dies ist auch „natürlich“ in Anbetracht der Bedingung (3.16), zumindest, wenn man es schafft  $g$  so zu konstruieren, dass „der führende Term“ von  $f(z)g(z)$  gleich Eins ist und der „nächstführende Term“ in einem Spurideal liegt.

(2) In der Situation, wo  $F(z)$  der Birman–Schwinger-Operator eines Schrödinger-Operators  $T - V$  ist, sagt das Theorem, wie viele Eigenwerte  $z$  von  $T - V$  es im vorgegebenen Gebiet  $\Omega$  gibt.

Zum Beweis erinnern wir, dass für  $A \in \mathcal{J}^1$  die Fredholm-Determinante durch

$$\det(1 + \mu A) := \exp [\operatorname{Tr} (\log(1 + \mu A))] \quad (3.18)$$

eq:deffredholmdet

für hinreichend kleines  $\mu$  definiert werden kann. Durch analytische Fortsetzung in  $\mu$  ist die linke Seite für alle  $\mu$  definiert.

Für  $A \in \mathcal{J}^p$  mit  $p > 1$  könnten lediglich die Spuren der ersten  $p - 1$  Terme der Potenzreihenentwicklung von  $\log(1 + \mu A)$  in (3.18) divergieren. Dies suggeriert die folgende Definition für eine regularisierte Determinante (Simon [Sim77]), nämlich

$$\det_p(1 + A) := \det(1 + R_p(A)), \quad (3.19)$$

eq:defreguldet

wobei

$$R_p(A) := (1 + A) \exp \left[ \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^j j^{-1} A^j \right] - 1. \quad (3.20)$$

eq:defreguldetaux

Beweis von Satz 3.16. □

#### 4. Analytische Familien von Operatoren und Formen

Wir können nun endlich die Analytizität der Resolventen und damit die Analytizität der Projektion auf einen Eigenwert überprüfen.

**DEFINITION 4.1** (Analytische Familie im Sinne Katos). Eine (möglicherweise unbeschränkte) operatorwertige Funktion  $T(\beta)$  auf  $R \subseteq \mathbb{C}$  heißt *analytische Familie* oder *analytische Familie im Sinne Katos* genau dann, wenn:

- Für alle  $\beta \in R$  ist  $T(\beta)$  ein abgeschlossener Operator mit  $\rho(T(\beta)) \neq \emptyset$ .
- Für alle  $\beta_0 \in R$  gibt es  $\lambda_0 \in \rho(T(\beta_0))$ , sodass  $\lambda_0 \in \rho(T(\beta))$ , wenn  $\beta$  nahe an  $\beta_0$  ist. Zudem ist  $(T(\beta) - \lambda_0)^{-1}$  eine analytische operatorwertige Funktion in  $\beta$  für  $\beta$  nahe  $\beta_0$ .

**BEMERKUNG 4.2.** Ist  $T(\beta)$  eine familie beschränkter Operatoren, so ist diese Definition äquivalent zur Definition von beschränkten operatorwertigen analytischen Funktionen.

Folgender Satz besagt, dass die Zahl  $\lambda_0$  in obiger Definition keine entscheidende Rolle spielt.

SATZ 4.3. *Sei  $T(\beta)$  eine analytische Familie auf einem Gebiet  $R$ . Dann gilt:*

- (i)  $\Gamma := \{(\beta, \lambda) : \beta \in R, \lambda \in \rho(T(\beta))\}$  ist offen.
- (ii)  $(T(\beta) - \lambda)^{-1}$  ist eine analytische Funktion in  $\beta$  und  $\lambda$  auf  $\Gamma$ .

BEWEIS. □

Um den Satz von Kato–Rellich zu beweisen, benötigen wir nun nur noch ein technisches Hilfsmittel.

LEMMA 4.4. *Sind  $P$  und  $Q$  zwei (nicht notwendigerweise orthogonale) Projektionen mit  $\dim(\text{Ran}(P)) \neq \dim(\text{Ran}(Q))$ . Dann ist  $\|P - Q\| \geq 1$ . Ist weiterhin  $P(x)$  eine stetige projektorwertige Funktion von  $x$  auf einem zusammenhängenden topologischen Raum, so ist  $\dim(\text{Ran}(P(x)))$  konstant in  $x$ .*

BEWEIS. □

**theorem:2.22**

SATZ 4.5 (Kato–Rellich). *Sei  $T(\beta)$  eine analytische Familie im Sinne Katos und  $E_0$  ein nicht-entarteter diskreter Eigenwert von  $T(\beta_0)$ . Dann gibt es für  $\beta$  nahe  $\beta_0$  genau einen Punkt  $E(\beta) \in \sigma(T(\beta))$  nahe  $E(\beta_0)$  und dieser Punkt ist ebenfalls nicht entartet und isoliert. Des Weiteren ist  $E(\beta)$  analytisch in  $\beta$  nahe  $\beta_0$  und es gibt einen analytischen Eigenvektor  $\Omega(\beta)$  für  $\beta$  nahe  $\beta_0$ . Ist  $T(\beta)$  für  $\beta - \beta_0 \in \mathbb{R}$  selbstadjungiert, so kann  $\Omega(\beta)$  für  $\beta - \beta_0 \in \mathbb{R}$  normiert werden.*

BEWEIS. Wir wählen  $\epsilon > 0$  so klein, dass  $\{E : |E - E_0| \leq \epsilon\} \cap \sigma(T(\beta_0)) = \{E_0\}$ . Da  $\{E : |E - E_0| = \epsilon\}$  kompakt und  $\Gamma$  aus obigem Satz offen ist, gibt es  $\delta > 0$ , sodass  $E \notin \sigma(T(\beta))$ , wenn  $|E - E_0| = \epsilon$  und  $|\beta - \beta_0| \leq \delta$ . Wir definieren  $N := \{\beta : |\beta - \beta_0| \leq \delta\}$ . Dann existiert die Projektion

$$P(\beta) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|E-E_0|=\epsilon} (T(\beta) - E)^{-1} dE \quad (4.1)$$

und ist analytisch für  $\beta \in N$ . Da  $E_0$  ein nicht-entarteter Eigenwert von  $T(\beta_0)$  ist, ist  $P(\beta_0)$  eindimensional. Aus dem letzten Lemma folgt, dass auch  $P(\beta)$  für alle  $\beta \in N$  eindimensional ist. Wegen Satz 2.6 hat  $T(\beta)$  genau einen diskreten Eigenwert  $E(\beta)$  für  $\beta \in N$  und  $E(\beta) - E_0 < \epsilon$ . Dieser ist außerdem nicht entartet. Die Analytizität von  $E(\beta)$  folgt aus der Formel

$$(E(\beta) - E_0 - \epsilon)^{-1} = \frac{(\Omega_0, (T(\beta) - E_0 - \epsilon)^{-1} P(\beta) \Omega_0)}{(\Omega_0, P(\beta) \Omega_0)} \quad (4.2)$$

und wir erhalten einen analytischen Eigenvektor von  $T(\beta)$  zum Eigenwert  $E(\beta)$ , wenn wir

$$\Omega(\beta) = P(\beta) \Omega_0 \quad (4.3)$$

wählen, wobei  $\Omega_0$  der ungestörte Eigenvektor von  $T(\beta_0)$  zum Eigenwert  $E_0$  ist. Im reellen Fall können wir auch einen normierten Eigenvektor wählen, nämlich

$$\Omega(\beta) = \frac{P(\beta) \Omega_0}{\sqrt{(\Omega_0, P(\beta) \Omega_0)}}. \quad (4.4)$$

□

Man erhält also die Analytizität der Energien der gebundenen Zustände in der Kopplungskonstante  $\beta$ , sobald man weiss, dass man es mit einer analytischen Operatorfamilie zu tun hat.

Im Folgenden werden wir Kriterien für Operatoren bzw. Formen finden, sodass diese analytische Familien im Sinne Katos sind. Wir sprechen dann von *analytischen Familien vom Typ (A) bzw. Typ (B)*.

DEFINITION 4.6 (Analytische Familie vom Typ (A)). Sei  $R \subseteq \mathbb{C}$  zusammenhängend und  $T(\beta)$  ein abgeschlossener Operator mit  $\rho(T(\beta)) \neq \emptyset$  für alle  $\beta \in R$ .  $T(\beta)$  heißt *analytischen Familie vom Typ (A)* genau dann, wenn:

- a)  $\mathcal{D}(T(\beta))$  ist unabhängig von  $\beta$ . In diesem Fall ist  $D := \mathcal{D}(T(\beta))$ .
- b) Für alle  $\psi \in D$  ist  $T(\beta)\psi$  eine vektorwertige analytische Funktion in  $\beta$ .

Das Ziel ist es zu zeigen, dass jede Familie vom Typ (A) auch eine analytische Familie im Sinne von Kato ist. Wir beschränken uns hier auf den linearen Fall  $T(\beta) = H_0 + \beta V$  und geben im ersten Schritt ein interessantes Kriterium für analytische Familien vom Typ (A).

LEMMA 4.7. Sei  $H_0$  ein abgeschlossener Operator mit  $\rho(H_0) \neq \emptyset$  und wir definieren  $T(\beta) = H_0 + \beta V$  auf  $\mathcal{D}(H_0) \cap \mathcal{D}(V)$ . Dann ist  $T(\beta)$  eine analytische Familie vom Typ (A) für  $\beta$  nahe  $\beta = 0$  genau dann, wenn

- a)  $\mathcal{D}(H_0) \subseteq \mathcal{D}(V)$ .
- b) Es gibt  $a, b \in \mathbb{R}$ , sodass für alle  $\psi \in \mathcal{D}(H_0)$  gilt:

$$\|V\psi\| \leq a \|H_0\psi\| + b \|\psi\| \quad (4.5)$$

Anders ausgedrückt:

$T(\beta)$  ist eine analytische Familie vom Typ (A) für  $\beta$  nahe  $\beta = 0 \Leftrightarrow V$  ist relativ  $H_0$ -beschränkt.

corollary:2.25

KOROLLAR 4.8. Ist  $V$  infinitesimal  $H_0$ -beschränkt ( $V \ll H_0$ ), das heißt  $a$  kann beliebig klein werden, so ist  $T(\beta)$  nicht nur eine analytische, sondern sogar eine ganze Familie vom Typ (A).

BEWEIS. „ $\Rightarrow$ “: Sei also  $H_0 + \beta V$  eine analytische Familie vom Typ (A). Dann ist  $\mathcal{D}(H_0) = \mathcal{D}(H_0 + \beta V) = \mathcal{D}(H_0) \cap \mathcal{D}(V)$ , woraus  $\mathcal{D}(H_0) \subseteq \mathcal{D}(V)$ . Da  $H_0$  abgeschlossen ist, ist  $\hat{D} := (\mathcal{D}(H_0), \|\cdot\|_{H_0})$  mit der Graphennorm  $\|\psi\|_{H_0} := \|H_0\psi\| + \|\psi\|$  ein Banachraum. Wir wählen nun  $\beta \in R$  so klein und positiv, sodass auch  $-\beta \in R$ . Der Graph des Operators  $H_0 + \beta V : \hat{D} \rightarrow \mathcal{H}$  ist abgeschlossen in  $\hat{D} \times \mathcal{H}$ , da der Graph in  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$  bezüglich einer schwächeren Topologie abgeschlossen ist. Wegen des Satzes vom abgeschlossenen Graphen gibt es daher Konstanten  $a_1$  und  $a_2$ , sodass

$$\|(H_0 + \beta V)\psi\| \leq a_1 \|\psi\|_{H_0} \quad (4.6a)$$

$$\|(H_0 - \beta V)\psi\| \leq a_2 \|\psi\|_{H_0}. \quad (4.6b)$$

Damit ist aber mit der Dreiecksungleichung

$$\|V\psi\| \leq \frac{\|(H_0 + \beta V)\psi\| + \|(H_0 - \beta V)\psi\|}{2\beta} \leq \frac{(a_1 + a_2) \|\psi\|_{H_0}}{2\beta}, \quad (4.7)$$

woraus folgt, dass  $V$  relativ  $H_0$ -beschränkt ist.

„ $\Leftarrow$ “: Sei nun  $V$  relativ  $H_0$ -beschränkt, das heißt der Operator ist auf  $\mathcal{D}(H_0)$  definiert. Dann gibt es für  $\psi \in \mathcal{D}(H_0)$  Konstanten  $a$  und  $b$ , sodass

$$\|H_0\psi\| \leq \|(H_0 + \beta V)\psi\| + |\beta| \|V\psi\| \leq \|(H_0 + \beta V)\psi\| + |\beta| a \|H_0\psi\| + |\beta| b \|\psi\|. \quad (4.8)$$

Für  $1 - |\beta| a > 1 \Leftrightarrow |\beta| < \frac{1}{a}$  ist daher nach Auflösen nach  $\|H_0\psi\|$

$$\|H_0\psi\| \leq (1 - |\beta| a)^{-1} \|(H_0 + \beta V)\psi\| + \frac{|\beta| b}{1 - |\beta| a} \|\psi\| \quad (4.9)$$

Dies zeigt gerade, dass  $H_0 + \beta V$  abgeschlossen ist, denn: sei dazu  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N} \in \mathcal{D}(H_0)$  mit  $\psi_n \rightarrow \psi \in \mathcal{H}$  und es gibt  $\phi \in \mathcal{H}$ , sodass  $(H_0 + \beta V)\psi_n \rightarrow \phi$  (das heißt  $((H_0 + \beta V)\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchy-Folge). Mit obiger Ungleichung folgt aber, dass auch  $(H_0\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge ist. Da aber  $H_0$  abgeschlossen und  $\psi_n \in \mathcal{D}(H_0)$  ist, ist das Grenzelement  $\psi \in \mathcal{D}(H_0)$  und es ist  $H_0\psi_n \rightarrow H_0\psi$ . Daraus folgt, dass auch  $H_0 + \beta V$  abgeschlossen ist. Dass  $(H_0 + \beta V)\psi$  analytisch für  $\psi \in \mathcal{D}(H_0)$  ist, ist klar.  $\square$

**BEISPIEL 4.9.** Wir erinnern uns an das alte Beispiel  $-\Delta + V$  auf dem Hilbertraum  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . Hierbei sollte  $V \in L^2 + L^\infty(\mathbb{R}^3)$  sein. Allgemeiner konnte  $V = \sum_{ij} V_{ij}$  mit  $V_{ij} \in L^2 + L^\infty(\mathbb{R}^3)$  sein und der Operator war auf  $L^2(\mathbb{R}^{3N})$  definiert. Dann wussten wir, dass  $V \ll -\Delta$  galt. Daraus folgt aber, dass  $-\Delta + \beta V$  eine ganze analytische Familie vom Typ (A) ist.

**theorem:2.27**

**SATZ 4.10.** *Sei  $H_0 + \beta V$  eine analytische Familie vom Typ (A) in einem Gebiet  $R \subseteq \mathbb{C}$ . Dann ist  $H_0 + \beta V$  auch eine analytische Familie im Sinne Katos. Ist insbesondere  $0 \in R$  und  $E_0$  ein isolierter, nicht-entarteter Eigenwert von  $H_0$ , so gibt es ein eindeutiges  $E(\beta) \in \sigma(H_0 + \beta V)$  nahe  $E_0$ , wenn  $|\beta|$  nahe bei  $\beta = 0$  ist.  $E(\beta)$  ist dann ein isolierter, nicht-entarteter Eigenwert von  $H_0 + \beta V$  und ist analytisch in  $\beta$  nahe  $\beta = 0$ .*

**BEWEIS.** Da Analytizität eine lokale Eigenschaft ist, nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass  $0 \in R$  ist und wir beweisen, dass  $T(\beta)$  eine analytische Familie im Sinne Katos für  $\beta$  nahe  $\beta = 0$  ist. Dazu müssen wir zeigen, dass für ein beliebiges  $\lambda \in \rho(H_0)$  auch  $\lambda \in \rho(H_0 + \beta V)$  ist, wenn  $\beta$  nahe bei  $\beta = 0$  ist. Zudem muss gezeigt werden, dass  $(H_0 + \beta V - \lambda)^{-1}$  eine analytische operatorwertige Funktion in  $\beta$  ist.

Wir wählen also ein beliebiges  $\lambda \in \rho(H_0)$ . Damit sind  $(H_0 - \lambda)^{-1}$  und  $H_0(H_0 - \lambda)^{-1} = 1 + \lambda(H_0 - \lambda)^{-1}$  beschränkte, lineare Operatoren. Daher und, da  $V$  relativ  $H_0$ -beschränkt ist, gilt für ein beliebiges  $\varphi \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \|V(H_0 - \lambda)^{-1}\varphi\| &\leq a \|H_0(H_0 - \lambda)^{-1}\varphi\| + b \|(H_0 - \lambda)^{-1}\varphi\| \\ &\leq (a \| \|H_0(H_0 - \lambda)^{-1} \| \| + b \| \| (H_0 - \lambda)^{-1} \| \|) \|\varphi\|, \end{aligned} \quad (4.10)$$

da  $(H_0 - \lambda)^{-1}\varphi \in \mathcal{D}(H_0) \subseteq \mathcal{D}(V)$ . Wir sehen also, dass auch  $V(H_0 - \lambda)^{-1}$  beschränkt ist. Daher existiert die Resolvente (als Neumann-Reihe)  $[1 + \beta V(H_0 - \lambda)^{-1}]^{-1}$  und sie ist analytisch in  $\beta$ , solange  $|\beta| < \| \| V(H_0 - \lambda)^{-1} \| \|$ . Als Nächstes zeigen wir, dass  $(H_0 + \beta V - \lambda)^{-1} = (H_0 - \lambda)^{-1}[1 + \beta V(H_0 - \lambda)^{-1}]^{-1}$ .

$$\begin{aligned} &(H_0 + \beta V - \lambda)(H_0 - \lambda)^{-1}[1 + \beta V(H_0 - \lambda)^{-1}]^{-1} \\ &= [1 + \beta V(H_0 - \lambda)^{-1}]^{-1} + \beta V(H_0 - \lambda)^{-1}[1 + \beta V(H_0 - \lambda)^{-1}]^{-1} \\ &= [1 + \beta V(H_0 - \lambda)^{-1}][1 + \beta V(H_0 - \lambda)^{-1}]^{-1} = \text{id}_{\mathcal{H}} \end{aligned} \quad (4.11a)$$

$$\begin{aligned} & (H_0 - \lambda)^{-1}[1 + \beta V(H_0 - \lambda)^{-1}]^{-1}(H_0 + \beta V - \lambda) \\ & = (H_0 - \lambda)^{-1}[1 + \beta V(H_0 - \lambda)^{-1}]^{-1}[1 + \beta V(H_0 - \lambda)^{-1}](H_0 - \lambda) = \text{id}_{\mathcal{H}} \end{aligned} \quad (4.11b)$$

Wir sehen also, dass für  $|\beta| < \|V(H_0 - \lambda)^{-1}\|$  auch  $\lambda \in \rho(H_0 + \beta V)$ , weshalb  $(H_0 + \beta V - \lambda)^{-1}$  analytisch in  $\beta$  ist. Schreibt man  $H_0 + \beta V = (H_0 + \beta_0 V) + (\beta - \beta_0)V$ , so sieht man die Analytizität in  $\beta$ .  $\square$

**BEISPIEL 4.11.** Wir betrachten nun nochmals den Operator  $-\Delta + \beta V$  auf dem Hilbertraum  $L^2(\mathbb{R}^3)$  mit  $V \in L^2 + L^\infty(\mathbb{R}^3)$ . Wir haben bereits gelernt, dass dieser eine analytische Familie vom Typ (A) ist. Mit obigem Satz wissen wir nun auch, dass er ein Mitglied einer analytischen Familie im Sinne Katos ist, weshalb wir den Satz von Kato–Rellich anwenden können. Wir werden später zeigen, dass die Grundzustandsenergie  $E_0(\beta)$  (der niedrigste Eigenwert von  $-\Delta + \beta V$ ) nicht entartet ist. Daher ist  $E_0(\beta)$  eine analytische Funktion von  $\beta$  in einer Umgebung von  $(\beta_0, \infty)$ , wobei  $\beta_0 = \inf\{\beta > 0 : E_0(\beta) < 0\}$ .

Wir geben nun ein weiteres Kriterium, sodass  $H_0 + \beta V$  eine analytische Familie im Sinne Katos ist. Dazu werden wir zu Formen übergehen. Dafür benötigen wir einige Standard-Definitionen.

**DEFINITION 4.12** (Numerisches Bild/Numerischer Rang). Sei  $t : \mathcal{Q}(t) \times \mathcal{Q}(t) \rightarrow \mathbb{C}$  eine quadratische Form und  $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow \mathcal{H}$  ein linearer Operator.

(i) Das *numerische Bild der Form*  $t$  ist definiert als

$$\Theta(t) := \{t[\varphi, \varphi], \varphi \in \mathcal{Q}(t), \|\varphi\| = 1\}. \quad (4.12)$$

(ii) Das *numerische Bild des Operators*  $T$  ist definiert als

$$\Theta(T) := \{(\psi, T\psi), \psi \in \mathcal{Q}(t), \|\psi\| = 1\}. \quad (4.13)$$

**DEFINITION 4.13** (Sektorielle Formen und Operatoren). Sei  $t : \mathcal{Q}(t) \times \mathcal{Q}(t) \rightarrow \mathbb{C}$  eine quadratische Form und  $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow \mathcal{H}$  ein linearer Operator.

(i) Die Form  $t$  heißt *sektoriell*, wenn es  $c \in \mathbb{R}$  und  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$  gibt, sodass

$$\Theta(t) \subseteq S_{c,\theta} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\text{Im}\lambda| \leq (\text{Re}\lambda - c) \tan \theta\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg(\lambda - c) \leq \theta\}. \quad (4.14)$$

(ii) Der Operator  $T$  heißt *sektoriell*, wenn es  $c \in \mathbb{R}$  und  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$  gibt, sodass  $\Theta(T) \subseteq S_{c,\theta}$ .

(iii)  $T$  heißt *m-sektoriell*, wenn  $\Theta(T) \subseteq S_{c,\theta}$ ,  $T$  abgeschlossen und  $\text{Ran}(T - \alpha)$  dicht in  $\mathcal{H}$  ist, wobei  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus S_{c,\theta}$ .

**DEFINITION 4.14** (Analytische Familie vom Typ (B)). Sei  $R \subseteq \mathbb{C}$ . Eine Familie von abgeschlossenen und  $m$ -sektoriellen Formen  $q(\beta)$  für alle  $\beta \in R$  heißt *analytische Familie vom Typ (B)* genau dann, wenn

- a) Der Formbereich  $\mathcal{Q}(q(\beta))$  ist unabhängig von  $\beta$ . Wir nennen ihn  $F$ .
- b)  $(\psi, q(\beta)\psi)$  ist eine in  $\beta$  analytische Funktion auf  $R$  für alle  $\psi \in F$ .

**DEFINITION 4.15.** Sei  $R \subseteq \mathbb{C}$  und  $\beta \in R$ . Ist  $q(\beta)$  eine analytische Familie vom Typ (B), so heißen die dazugehörigen eindeutig bestimmten abgeschlossenen Operatoren  $T(\beta)$  ebenfalls *analytische Familie vom Typ (B)*.

**LEMMA 4.16.** Sei  $H_0 + \beta V$  als Form auf  $\mathcal{Q}(H_0) \cap \mathcal{Q}(V)$  definiert. Dann ist  $H_0 + \beta V$  genau dann eine analytische Familie vom Typ (B), wenn  $V$  relativ  $H_0$ -formbeschränkt ist.

theorem:2.34

SATZ 4.17. Sei  $R \subseteq \mathbb{C}$  und  $\beta \in R$ . Ist  $H_0 + \beta V$  eine analytische Familie vom Typ (B) für alle  $\beta \in R$ , so ist sie eine analytische Familie im Sinne Katos für alle  $\beta \in R$ .

SATZ 4.18. Sei  $H_0$  positiv und selbstadjungiert und sei  $V$  selbstadjungiert. Definiere  $V_+ := \frac{1}{2}(V + |V|)$  und  $V_- := \frac{1}{2}(|V| - V)$ . Unter den Annahmen

- a)  $\mathcal{Q}(V_+) \cap \mathcal{Q}(H_0)$  ist dicht und
- b)  $V_-$  ist relativ  $H_0$ -formbeschränkt mit Formschranke 0

ist  $H_0 + \beta V$  eine analytische Familie vom Typ (B) in  $\{\beta : \beta \notin (-\infty, 0]\} \subseteq \mathbb{C}$ .

Wir erhalten also starke Analytizitätseigenschaften, für  $H_0 + \beta V$ , wenn  $H_0$  und  $V$  positiv sind.

BEMERKUNG 4.19. a) Es gibt analytische Familien, die weder vom Typ (A) noch vom Typ (B) sind. Sei beispielsweise  $T(\beta)$  eine analytische Familie vom Typ (A) und sei  $C$  ein beliebiger beschränkter, selbstadjungierter Operator. Dann ist  $U(\beta) := \exp(i\beta C)$  eine ganze analytische Funktion in  $\beta$  und es ist nicht schwierig zu sehen, dass  $\tilde{T}(\beta) := U(\beta)T(\beta)U(\beta)^{-1}$ , definiert auf  $U(\beta)D$ , ebenfalls eine analytische Familie ist. Jedoch können  $T$  und  $C$  jeweils so gewählt werden, sodass weder  $\mathcal{D}(T(\beta))$  noch  $\mathcal{Q}(T(\beta))$  konstant sind.

- b) Es ist möglich, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe eines Eigenwerts  $E(\beta)$  größer ist, als der Radius in dem  $H(\beta)$  überhaupt  $E(\beta)$  als Eigenwert besitzt. Folgendes Beispiel wird dies illustrieren.

BEISPIEL 4.20. Sei  $H_0 = -\Delta - \frac{1}{r}$  und  $V = \frac{1}{r}$ , sodass  $H_0 + \beta V = -\Delta - \frac{1-\beta}{r}$ . Die Eigenwerte sind dann für  $\beta < 1$  durch  $E_n(\beta) = -\frac{(1-\beta)^2}{4n^2}$  gegeben. Insbesondere ist die Grundzustandsenergie  $E_1(\beta) = -\frac{1}{4} + \frac{\beta}{2} - \frac{\beta^2}{4}$  eine Funktion, die analytisch auf ganz  $\mathbb{C}$  fortgesetzt werden kann. Jedoch gibt es für  $\beta \geq 1$  nicht einen einzigen Eigenwert des Operators  $H_0 + \beta V$ .

Schließlich bemerken wir, dass es explizite untere Schranken für den Konvergenzradius von gestörten Eigenwerten gibt.

SATZ 4.21. Sei  $\|V\varphi\| \leq a\|H_0\varphi\| + b\|\varphi\|$ . Sei  $H_0$  selbstadjungiert mit ungestörtem, isolierten und nicht-entarteten Eigenwert  $E_0$ . Definieren wir dann noch  $\epsilon := \frac{1}{2}\text{dist}(E_0, \sigma(H_0) \setminus \{E_0\})$  und

$$r(a, b, E_0, \epsilon) := \left[ a + \frac{b + a(|E_0| + \epsilon)}{\epsilon} \right]^{-1},$$

dann ist der Eigenwert  $E(\beta)$  von  $H_0 + \beta V$  nahe  $E_0$  analytisch auf der Kreisscheibe vom Radius  $r(a, b, E_0, \epsilon)$ .

**4.1. Störungstheorie für entartete Eigenwerte.** Schließlich untersuchen wir noch den Fall, in dem  $E_0$  ein isolierter, entarteter Eigenwert von  $T(\beta_0)$  endlicher Multiplizität ist. Wir nehmen hier an, dass  $T(\beta)$  selbstadjungiert ist, wenn  $\beta \in \mathbb{R}$ . Wenn  $T(\beta)$  eine analytische Familie im Sinne Katos ist, ist es nicht schwer zu zeigen, dass  $P(\beta) = -\frac{1}{2\pi i} \oint (T(\beta) - E)^{-1} dE$  analytisch in  $\beta$  nahe  $\beta_0$  ist.

SATZ 4.22. Sei  $R \subseteq \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit  $0 \in R$  und  $P(\beta)$  eine projektorwertige analytische Funktion in  $R$ . Dann gibt es eine analytische Familie von invertierbaren Operatoren  $U(\beta)$ , sodass

$$P(\beta) = U(\beta)P(0)U(\beta)^{-1}. \quad (4.15)$$

Ist darüberhinaus  $P(\beta)$  selbstadjungiert für  $\beta \in R \cap \mathbb{R}$ , so kann  $U(\beta)$  für  $\beta \in R \cap \mathbb{R}$  als unitärer Operator gewählt werden.

theorem:2.40

SATZ 4.23. Sei  $T(\beta)$  eine analytische Familie im Sinne Katos für  $\beta$  nahe  $\beta = 0$  und sei  $E_0$  ein diskreter Eigenwert mit Multiplizität  $m$ . Dann gibt es  $m$  nicht notwendigerweise voneinander verschiedene Funktionen  $E^{(1)}(\beta), \dots, E^{(m)}(\beta)$  mit  $E^{(j)}(0) = E_0$ , die bei  $\beta = 0$  analytisch und Eigenwerte von  $T(\beta)$  bei  $\beta = 0$  sind. Darüberhinaus sind dies die einzigen Eigenwerte bei  $E_0$ .

BEWEIS. Da  $E_0$  ein isolierter Punkt in  $\sigma(T(0))$  ist und  $T(\beta)$  eine analytische Familie ist, existiert  $P(\beta) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (T(\beta) - E)^{-1} dE$  und ist selbst analytisch für  $\beta$  nahe bei  $\beta = 0$ . Wie im Beweis von Satz 2.6 ist theorem:2.17

$$\sigma(T(\beta) \upharpoonright \text{Ran}(P(\beta))) = \sigma(T(\beta)) \cap \{E : |E - E_0| < \epsilon\}. \quad (4.16)$$

Aus dem vorherigen Satz wissen wir, dass eine bei  $\beta = 0$  analytische Familie  $U(\beta)$  gibt, die für  $\beta \in \mathbb{R}$  unitär ist, und  $U(\beta)P(0)U(\beta)^{-1} = P(\beta)$  bewirkt. Definiert man nun  $\tilde{T}(\beta) = U(\beta)T(\beta)U(\beta)^{-1}$ , so ist  $\text{Ran}P(0)$  ein invarianter Unterraum für alle  $\tilde{T}(\beta)$ . Somit ist  $S(\beta) := \tilde{T}(\beta) \upharpoonright \text{Ran}(P(0))$  eine endlichdimensionale Familie, die für  $\beta \in \mathbb{R}$  selbstadjungiert ist. Der Satz folgt nun unmittelbar aus dem Satz von Rellich.  $\square$

Wir haben nun das unendlichdimensionale Problem auf ein endlichdimensionales reduziert. Die Existenz analytischer Vektoren im endlichdimensionalen Fall impliziert die Existenz analytischer Vektoren im unendlichdimensionalen Fall.

BEISPIEL 4.24. Wir betrachten ein letztes mal  $H_0 + \beta_0 V$  auf  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . Falls der Operator  $n$  Eigenwerte in  $(-\infty, 0)$  besitzt, so tut es auch der Operator  $H_0 + \beta V$  für  $|\beta - \beta_0|$  klein. Die gestörten Eigenwerte sind außerdem analytisch für  $\beta$  nahe  $\beta_0$ .

Wir fassen die Ergebnisse der regulären Störungstheorie zusammen.

### Analytische Familie vom Typ (A)

Sei  $R \subseteq \mathbb{C}$  zusammenhängend.

- 1)  $T(\beta)$  ist abgeschlossen mit  $\rho(T(\beta)) \neq \emptyset$  für alle  $\beta \in R$ .
- 2)  $D(T(\beta))$  ist unabhängig von  $\beta \Rightarrow D(T(\beta)) = D$
- 3)  $\forall \psi \in D$  ist  $T(\beta)\psi$  analytisch in  $\beta$

$T(\beta)$  ist analytische Familie vom Typ (A)  
 $H_0 \subseteq H_1$

$V$  ist relativ  $H_0$ -beschränkt (mit relativer Schranke = 0)

### Analytische Familie vom Typ (B)

Sei  $R \subseteq \mathbb{C}$  zusammenhängend

- 1)  $g(\beta)$  ist Familie von  $m$ -sektoriellen, abgestimmten Formen  $\forall \beta \in R$
- 2)  $\mathcal{R}(g(\beta))$  ist unabhängig von  $\beta \Rightarrow \mathcal{R}(g(\beta)) = F$
- 3)  $(\psi, g(\beta)\psi)$  ist analytisch auf  $R$  für alle  $\psi \in \mathcal{R}(g(\beta))$

Sei  $H_0 \subseteq H_1$  als Form auf  $\mathcal{R}(H_0) \cap \mathcal{R}(V)$  definiert

$H_0 \subseteq H_1$  analytische Familie vom Typ (B)

$V$  ist relativ  $H_0$ -formbeschränkt, d.h.  $\mathcal{R}(H_0) \subseteq \mathcal{R}(V)$   
 und  $\exists a, b \in \mathbb{R}$  sodaß  $\forall \psi \in \mathcal{R}(H_0)$   
 $(\psi, V\psi) \leq a(\psi, H_0\psi) + b(\psi, \psi) \quad \forall \psi \in \mathcal{R}(H_0)$

### Analytische Familie im Sinne Kato

- 1)  $\forall \beta \in R$  ist  $T(\beta)$  ein abgeschlossener Operator mit  $\rho(T(\beta)) \neq \emptyset$
- 2)  $\forall \beta_0 \in R \exists \lambda_0 \in \rho(T(\beta_0))$ , sodass auch  $\lambda_0 \in \rho(T(\beta))$  für  $\beta$  nahe  $\beta_0$ .  
 Außerdem ist  $(T(\beta) - \lambda_0)^{-1}$  eine analytische operatorwertige Funktion in  $\beta$  für  $\beta$  nahe  $\beta_0$ .

Satz 4)  $\Gamma = \{\beta \in R, \lambda \in \rho(T(\beta))\}$  ist offen.

b)  $(T(\beta) - \lambda_0)^{-1}$  ist eine analytische Funktion in  $\beta$  und  $\lambda$  auf  $\Gamma$ .

Typ (A)  $\Rightarrow$  Analytische Familie im Sinne Kato

- $E_0$  ist ein isolierter, nicht-einstufiger EW von  $H_0$  ( $\beta_0 = 0$ )  $\Rightarrow \exists$  ein einstufiger EW  $E(\beta) \in \mathcal{S}(H_0, H_1)$  nahe  $E_0$  f.  $\beta$  nahe  $\beta_0 = 0$ . (siehe B. 2)
- $E(\beta)$  ist ein isolierter, nicht-einstufiger EW von  $H_0 \subseteq H_1$  und ist analytisch in  $\beta$

Typ (B)  $\Rightarrow$  Analytische Familie im Sinne Kato

Kato-Redlich: Sei  $T(\beta)$  analytische Familie im Sinne Kato

$E_0$  ein nicht-entartet, diskreter EW von  $T(\beta_0)$

$\Rightarrow$  Für  $\beta$  nahe  $\beta_0$  gibt es genau ein  $E(\beta) \in \sigma(T(\beta))$  nahe  $E(\beta_0)$  und

$\bullet$   $E(\beta)$  ist ebenfalls nicht entartet und isoliert.

$\bullet$   $E(\beta)$  ist analytisch f.  $\beta$  nahe  $\beta_0$

$\bullet$   $\exists$  analytischer EV  $r(\beta)$  f.  $\beta$  nahe  $\beta_0$ . Ist  $T(\beta)$  f.  $\beta - \beta_0 \in \mathbb{R}$  selbstadjungiert, so kann  $r(\beta)$  normiert werden.

Satz Sei  $\|V\| \leq a\|h\| + b\|l\|$ ,  $H_0$  selbstadjungiert mit ungestörtem, nicht-entartetem, isolierten EW  $E_0$

$$\epsilon := \frac{1}{2} \text{dist}(E_0, \sigma(H_0) \setminus \{E_0\}) \quad \text{und} \quad r(a, b, E_0, \epsilon) := \left[ a + \frac{b + a(\|E_0\| + \epsilon)}{\epsilon} \right]^{-1}$$

Dann ist der EW  $E(\beta)$  von  $H_0 + \beta V$  nahe  $E_0$  analytisch auf der Kreisscheibe vom Radius  $r(a, b, E_0, \epsilon)$ .

Bemerkungen 1)  $\exists$  analytische Familien, die weder vom Typ (A) noch vom Typ (B) sind.

Bsp:  $T(\beta)$  analyt. Familie vom Typ (A),  $C$  ein beschränkter, selbstadjungierter Operator.

Dann ist  $U(\beta) = \exp(i\beta C)$  eine ganze Funktion in  $\beta$  und

$\tilde{T}(\beta) := U(\beta) T(\beta) U(\beta)^{-1}$  ist auf  $U(\beta)D$  eine analytische Familie.

Man kann nun  $T$  und  $C$  so wählen, dass weder  $\mathcal{D}(T(\beta))$  noch  $\mathcal{D}(\tilde{T}(\beta))$  konstant in  $\beta$  sind.

2) Es kann passieren, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe für  $E(\beta)$  größer ist als der Radius in dem  $E(\beta)$  überhaupt noch einen Eigenwert  $E(\beta)$  besitzt.

Bsp:  $H_0 = -\Delta - \frac{1}{|x|}$ ,  $V = \frac{1}{|x|}$   $\Rightarrow$  EW von  $H_0 + \beta V$ :  $E_n(\beta) = -\frac{(1-\beta)^n}{4n^2}$

$E_0(\beta) = -\frac{1}{4} + \frac{\beta}{2} - \frac{\beta^2}{4}$  6Z-Energie kann analytisch auf ganz  $\mathbb{C}$  fortgesetzt werden

Jedoch besitzt  $H_0 + \beta V$  f.  $\beta \geq 1$  keinen einzigen EW mehr.

## 5. Asymptotische Störungstheorie

Die eben diskutierte reguläre Störungstheorie ist jedoch nicht immer anwendbar. Dazu betrachtet man das einfach aussehende Beispiel  $H(\beta) = H_0 + V$  auf  $L^2(\mathbb{R})$  mit  $H_0 = -d_x^2 + x^2$  und  $V = x^4$ . Dieser Operator ist für alle  $\beta > 0$  auf  $\mathcal{D}(H_0) \cap \mathcal{D}(x^4) = \mathcal{D}(p^2) \cap \mathcal{D}(x^4)$  selbstadjungiert. Da jedoch  $\mathcal{D}(H_0) = \mathcal{D}(p^2) \cap \mathcal{D}(x^2)$ , sieht man, dass sich der Definitionsbereich in dem Moment verändert, in dem die Störung angeschaltet wird, das heißt das Analytizitätskriterium aus Satz

**theorem:2.27**

4.10 ist nicht anwendbar! Analog ändert sich auch der Formbereich  $\mathcal{H}(H(\beta))$  mit dem Anschalten des  $x^4$ -Potentials. Tatsächlich kann es gar kein solches Analytizitätskriterium für diesen Operator geben, da die Potenzreihe bei  $\beta = 0$  divergiert, wie man aus dem folgenden heuristischen Argument sieht:

Wäre  $\beta < 0$ , so konvergiert  $x^2 + \beta x^4 \rightarrow -\infty$  für  $x \rightarrow \pm\infty$ , das heißt  $H_0 + \beta V$  ist bereits qualitativ sehr verschieden von  $H_0$ . Tatsächlich ist der Operator für negative  $\beta$  nicht einmal mehr wesentlich selbstadjungiert. Man erwartet daher, dass die Potenzreihe für  $\beta < 0$  divergiert. Da jedoch Potenzreihen immer auf Kreisen konvergieren, sollte die Potenzreihe für gar kein  $\beta$  konvergieren. Eine detailliertere Untersuchung zeigt, dass die Rayleigh-Schrödinger-Koeffizienten  $a_n$  für die Grundzustandsenergie  $E_0(\beta)$  die Abschätzung  $|a_n| \geq AB^n \Gamma(n/2)$  für geeignete Konstanten  $A$  und  $B$  erfüllen.

Man muss sich also die Frage stellen, ob eine Störungsreihe in so einem Fall überhaupt sinnvoll ist oder nicht (Bezug auf QFTs.). Die einfachste Interpretation einer formalen Reihe ist durch asymptotische Reihen gegeben.

DEFINITION 5.1. Sei  $f$  eine auf  $\mathbb{R}^+$  definierte Funktion. Man sagt, dass  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  genau dann *asymptotisch für  $z \searrow 0$  gegen  $f$  konvergiert*, wenn für alle festen  $N$

$$\lim_{z \searrow 0} \frac{\left(f(z) - \sum_{n=0}^N a_n z^n\right)}{z^N} = 0. \quad (5.1)$$

Man schreibt dann manchmal

$$f \sim_{z \searrow 0} \sum a_n z^n. \quad (5.2)$$

Ist  $f$  auf einem sektoriellen Gebiet  $\{z : 0 \leq |z| \leq B, |\arg(z)| \leq \theta\}$  definiert, so sagt man, dass  $\sum a_n z^n$  genau dann *asymptotisch für  $|z| \rightarrow 0$  gegen  $f$ , gleichmäßig in jedem Sektor konvergiert*, wenn für alle  $N$

$$\lim_{|z| \rightarrow 0, |\arg(z)| \leq \theta} \frac{\left(f(z) - \sum_{n=0}^N a_n z^n\right)}{z^N} = 0. \quad (5.3)$$

BEMERKUNG 5.2. Ist  $f \sim \sum a_n z^n$  und  $f \sim \sum b_n z^n$  für  $z \searrow 0$ , dann ist per Definition

$$\lim_{z \searrow 0} \frac{\left(\sum_{n=0}^N a_n z^n - \sum_{n=0}^N b_n z^n\right)}{z^N} = 0 \quad (5.4)$$

für alle  $N$ , das heißt  $a_n = b_n$  für alle  $n$ . Jede Funktion  $f$  hat daher höchstens *eine* asymptotische Reihe für  $z \searrow 0$ .

**example:2.44**

BEISPIEL 5.3. Betrachte  $f(z) = \exp(-z^{-1})$  für  $z > 0$ , dann konvergiert  $z^{-n} f(z) \rightarrow 0$  für  $z \searrow 0$ , das heißt  $f$  hat eine Null-asymptotische Reihe. Tatsächlich ist die Null-Reihe asymptotisch gleichmäßig in jedem Sektor  $|\arg(z)| \leq \theta$  mit  $\theta < \pi/2$ .

Dieses Beispiel zeigt eine interessante Eigenschaft von asymptotischen Reihen: *zwei verschiedene* Funktionen können *die selbe* asymptotische Reihe haben. Die Tatsache, dass eine Funktion  $f$  eine gewisse asymptotische Reihe hat, gibt noch lange keinen Aufschluss über den Wert  $f(z)$  an einer bestimmten Stelle  $z \neq 0$ . Wir wissen lediglich, dass  $f(z)$  gut durch  $a_0 + a_1 z$  approximiert wird, wenn  $z$  „klein“ wird, doch sagt uns die Definition von asymptotischen Reihen nicht, was „klein“ bedeutet.

Konvergiert die asymptotische Reihe  $\sum_n a_n z^n$  nicht, so kann man zwar sagen, dass die ersten partiellen Summen eine gute Approximation für  $f(z)$  sind, wenn  $z$  klein ist. Doch oszillieren die Summen für  $N \rightarrow \infty$  sehr stark, weshalb sie  $f$  nicht mehr so gut approximieren. In Kürze zeigen wir, dass die Rayleigh-Schrödinger-Reihe für die Grundzustandsenergie  $E_0(\beta)$  des Hamilton-Operators  $p^2 + x^2 + \beta x^4$  ( $\beta > 0$ ) asymptotisch für  $\beta \searrow 0$  gegen  $E_0(\beta)$  konvergiert.

example:2.45

BEISPIEL 5.4. Sei  $f \in C^\infty([-1, 1])$ , dann konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$  asymptotisch für  $x \searrow 0$  oder  $x \nearrow 0$  gegen  $f$  wegen des Satzes von Taylor:

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \sup_{|a| \leq |x|} \left[ |f^{(N+1)}(a)| \right]. \quad (5.5)$$

Da jedoch  $C^\infty$ -Funktionen nicht-analytisch sein können, zeigt dieses Beispiel, dass asymptotische Reihen nicht konvergieren müssen. Sollten sie trotzdem konvergieren, so müssen sie nichts mit der eigentlichen Funktion zu tun haben, wie man im ersten Beispiel bereits gesehen hat.

Wir haben analytische Familien bisher nur auf offenen Mengen definiert (was ja sinnvoll ist). Wir missbrauchen nun die Terminologie, indem wir sagen, dass eine Familie genau dann analytisch ist, wenn sie norm-stetig auf der Menge und analytisch im Inneren ist. Damit kommen wir zum Hauptresultat dieses Abschnitts.

theorem:2.46

SATZ 5.5. Sei  $H_0$  ein selbstadjungierter Operator. Angenommen,  $H(\beta)$  ist eine analytische Familie auf dem Gebiet  $\{\beta : 0 < |\beta| < B, |\arg(\beta)| \leq \theta\}$ , und, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $\lim_{|\beta| \rightarrow 0, |\arg(\beta)| \leq \theta} \left\| (H(\beta) - \lambda)^{-1} - (H_0 - \lambda)^{-1} \right\| = 0$  für ein  $\lambda \notin \sigma(H_0)$  (Grenzabsorptionsprinzip erfüllt)
- Es gibt einen abgeschlossen, symmetrischen Operator  $V$ , sodass  $C^\infty(H_0) \subseteq \mathcal{D}(V)$  und  $V[C^\infty(H_0)] \subseteq C^\infty(H_0)$ .
- $C^\infty(H_0) \subseteq \mathcal{D}(H(\beta))$  für alle  $\beta$  im obigen Sektor und für  $\psi \in C^\infty(H_0)$  ist  $H(\beta)\psi = H_0\psi + \beta V\psi$ .

Sei  $E_0$  ein isolierter, nicht-entarteter Eigenwert von  $H_0$ , dann gilt:

- Ist  $|\beta|$  klein und  $|\arg(\beta)| \leq \theta$ , so gibt es genau einen Eigenwert  $E(\beta)$  von  $H(\beta)$  nahe  $E_0$  (Stabilität). Darüberhinaus ist jeder einzelne Term der formalen Rayleigh-Schrödinger-Reihe  $\sum a_n \beta^n$  für den Eigenwert von  $H_0 + \beta V$  endlich und die Reihe konvergiert asymptotisch gegen  $E(\beta)$  gleichmäßig in jedem Sektor. Explizit ist also

$$\lim_{|\beta| \rightarrow 0, |\arg(\beta)| \leq \theta} \frac{|E(\beta) - \sum_{n=0}^N a_n \beta^n|}{\beta^N} \quad (5.6)$$

für alle  $N$ .

- Es gibt eine vektorwertige Funktion  $\Omega(\beta)$ , die auf  $\{\beta : |\arg(\beta)| \leq \theta, |\beta| < B\}$  für ein  $B > 0$  analytisch ist, sodass  $H(\beta)\Omega(\beta) = E(\beta)\Omega(\beta)$ .
- Dieses  $\Omega(\beta)$  erfüllt  $(\Omega_0, \Omega(\beta)) \equiv 1$  und hat eine asymptotische Reihe  $\sum_n \varphi_n \beta^n$  für  $|\beta| \rightarrow 0$  und  $|\arg(\beta)| \leq \theta$ . Diese Reihe besteht aus Ausdrücken, die nur  $V$ ,  $(H_0 - \lambda)^{-1}$  und  $\Omega_0$  enthalten.
- $[V(H_0 - E)^{-1}]^N \Omega$  ist für alle Vektoren  $\Omega \in C^\infty(H_0)$  und alle kompakten Mengen  $K \subseteq \rho(H_0)$ , die  $E$  enthalten, eine norm-stetige Funktion von  $E$  in  $K$ .

Das Hauptwerkzeug zum Beweis der asymptotischen Eigenschaft kennen wir bereits aus der regulären Störungstheorie. Mit den nützlichen Formeln

$$E(\beta) = \frac{(\Omega_0, (H_0 + \beta V)P(\beta)\Omega_0)}{(\Omega_0, P(\beta)\Omega_0)} \quad (5.7a)$$

$$P(\beta) = -\frac{1}{2\pi i} \oint (H(\beta) - E)^{-1} dE. \quad (5.7b)$$

werden wir die gut bekannte Fehlerschranke der Reihe herleiten.

DEFINITION 5.6. Sei  $A(\beta)$  eine Familie von Operatoren auf dem Gebiet  $\{\beta : 0 < |\beta| < B, |\arg(\beta)| \leq \theta\}$ . Angenommen, es existiert ein Operator  $A_0$ , sodass für ein  $\lambda \notin \sigma(A_0)$

$$s - \lim_{|\beta| \rightarrow 0, |\arg(\beta)| \leq \theta} (A(\beta) - \lambda)^{-1} = (A_0 - \lambda)^{-1} \quad (5.8)$$

ist. Ein isolierter, nicht-entarteter Eigenwert  $E_0$  von  $A_0$  heißt genau dann *stabil*, wenn  $A(\beta)$  genau einen isolierten, nicht-entarteten Eigenwert nahe  $E_0$  für kleine  $\beta$  hat.

Genauer:  $E_0$  ist genau dann stabil, wenn es für alle hinreichend kleinen  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, sodass  $|\beta| < \delta$  und  $|\arg(\beta)| \leq \theta$  implizieren, dass es genau einen Punkt in  $\sigma(A(\beta))$  gibt, der in  $\{E : |E - E_0| \leq \epsilon\}$  liegt, und, dass dieser Punkt ein nicht-entarteter Eigenwert ist.

LEMMA 5.7. *Ist das Grenzabsorptionsprinzip a) aus dem Hauptresultat erfüllt, so ist jeder isolierte, nicht-entartete Eigenwert von  $H_0$  stabil. Dies zeigt die erste Aussage aus (i).*

BEWEIS. Mittels der Resolventenformel sieht man, dass, wenn  $(H(\beta) - \lambda)^{-1} \rightarrow (H_0 - \lambda)^{-1}$  in Norm für ein  $\lambda \notin \sigma(H_0)$  konvergiert, so konvergiert der Ausdruck für alle  $\lambda \notin \sigma(H_0)$  und die Konvergenz ist gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von  $\rho(H_0)$ . Hat also  $H_0$  für gegebenes  $\epsilon > 0$  hinreichend klein nur einen Eigenwert in  $\{E : |E - E_0| \leq \epsilon\}$ , so kann man für ein  $\delta > 0$  folgern, dass,  $E \notin \sigma(H(\beta))$ , wenn  $|\beta| \leq \delta$ ,  $|\arg(\beta)| \leq \theta$  und  $|E - E_0| = \epsilon$ . Daher existiert für kleine  $|\beta|$

$$P(\beta) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|E - E_0| = \epsilon} (H(\beta) - E)^{-1} dE \quad (5.9)$$

und konvergiert für  $|\beta| \rightarrow 0$  gegen

$$P_0 = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|E - E_0| = \epsilon} (H_0 - E)^{-1} dE. \quad (5.10)$$

Nach Satz [2.3](#) ist  $P_0$  auf den Eigenvektor von  $H_0$  mit Eigenwert  $E_0$ . Nach dem Lemma, das vor dem Satz von Kato–Rellich [4.5](#) steht, ist  $P(\beta)$  ebenfalls eindimensional, wenn  $|\beta|$  klein ist. Das Lemma folgt dann aus Satz [2.6](#).  $\square$

Als Nächstes entwickeln wir eine asymptotische Reihe für  $P(\beta)\Omega_0$ :

LEMMA 5.8. *Angenommen, dass die restlichen Bedingungen des Hauptresultats ebenfalls erfüllt sind und  $\Omega_0$  ein Eigenvektor von  $H_0$  mit Eigenwert  $E_0$  ist. Für  $|\beta|$*

klein, sei  $\Omega(\beta) = P(\beta)\Omega_0$  mit obigem  $P(\beta)$ . Dann gilt für alle  $N$

$$\lim_{|\beta| \rightarrow 0, |\arg(\beta)| \leq \theta} \frac{\left\| \Omega(\beta) - \sum_{n=0}^N \varphi_n \beta^n \right\|}{|\beta|^N} = 0, \quad (5.11)$$

wobei

$$\varphi_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i} \oint_{|E-E_0|=\epsilon} (H_0 - E)^{-1} [V(H_0 - E)^{-1}]^n \Omega_0 dE \quad (5.12)$$

BEWEIS. Sei  $|E - E_0| = \epsilon$ , dann ist formal mit der Resolventenformel

$$\begin{aligned} (H(\beta) - E)^{-1} &= \sum_{n=0}^N (-\beta)^n (H_0 - E)^{-1} [V(H_0 - E)^{-1}]^n \\ &\quad + (-\beta)^{N+1} (H(\beta) - E)^{-1} [V(H_0 - E)^{-1}]^{N+1}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Angenommen, wir würden beide Seiten dieser formalen Rechnung auf einen Zustand  $\Omega_0$  anwenden. Da  $\Omega_0 \in C^\infty(H_0)$ , sind wegen Bedingung *b*) beide Seiten wohldefiniert. Wegen *c*) geben beide Seiten dasselbe Ergebnis, wenn man  $H(\beta) - E$  auf sie anwendet. Da  $E \notin \sigma(H(\beta))$ , sind beide Seiten gleich. Mit dem Satz vom geschlossenen Graphen kann man zeigen, dass  $[V(H_0 - E)^{-1}]^N \Omega_0$  stetig in  $E \in \{E : |E - E_0| = \epsilon\}$  ist. Daher konvergiert nach Integration entlang des geschlossenen Kreises um  $E_0$  mit Radius  $\epsilon$

$$\begin{aligned} &\frac{\left\| \Omega(\beta) - \sum_{n=0}^N \varphi_n \beta^n \right\|}{|\beta|^N} \\ &= \frac{|\beta|}{2\pi} \left\| \oint_{|E-E_0|=\epsilon} (H(\beta) - E)^{-1} [V(H_0 - E)^{-1}]^{N+1} \Omega_0 dE \right\| \\ &\leq \epsilon |\beta| \sup_{|E-E_0|=\epsilon, |\beta| < \delta, |\arg(\beta)| \leq \theta} \left\| (H(\beta) - E)^{-1} \right\| \left\| V[(H_0 - E)^{-1}]^{N+1} \Omega_0 \right\| \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

für  $|\beta| \rightarrow 0$ .  $\square$

Um den Beweis des Hauptresultats zu schließen, benötigen wir noch folgendes Lemma:

LEMMA 5.9. Seien  $f$  und  $g$  zwei Funktionen, die auf dem Sektor  $\{\beta : 0 < |\beta| < B, |\arg(\beta)| \leq \theta\}$  definiert sind. Angenommen, dass  $f \sim_{\beta \searrow 0} \sum a_n \beta^n$  und  $g \sim_{\beta \searrow 0} \sum b_n \beta^n$  mit  $b_0 \neq 0$ . Sei  $\sum c_n \beta^n$  die formale Reihe von  $\frac{\sum a_n \beta^n}{\sum b_n \beta^n}$ . Dann ist  $h(\beta) = f(\beta)/g(\beta)$  asymptotisch zu  $\sum c_n \beta^n$  für  $\beta \searrow 0$ .

BEWEIS.  $\square$

BEWEIS VON SATZ <sup>theorem: 2.46</sup> 5.5. Es verbleibt zu zeigen, dass jeder einzelne Term der Rayleigh-Schrödinger-Reihe für sich endlich ist und, dass sie asymptotisch ist. Wegen des zweiten Lemmas und Bedingung *b*) sind alle Terme der Reihen  $(H(\beta)\Omega_0, P(\beta)\Omega_0)$  und  $(\Omega_0, P(\beta)\Omega_0)$  endlich und sie sind asymptotisch. Da  $\lim_{|\beta| \rightarrow 0} (\Omega_0, P(\beta)\Omega_0) = 1 \neq 0$ , vervollständigt das dritte Lemma den Beweis.  $\square$

Als Nächstes stellen wir zwei Situationen vor, in denen das Grenzabsorptionsprinzip *a*) bewiesen werden kann. Zur Erinnerung: man sagt, dass  $A \leq B$  für zwei von unten beschränkte Operatoren  $A$  und  $B$  genau dann, wenn  $\mathcal{Q}(B) \supseteq \mathcal{Q}(A)$  und  $(\varphi, A\varphi) \leq (\varphi, B\varphi)$  für alle  $\varphi \in \mathcal{Q}(B)$ .

SATZ 5.10. *Seien  $H_0$  und  $V$  selbstadjungiert. Angenommen,*

- a)  $H_0 \geq 0$   
b) Für alle  $a > 0$  gibt es  $b$ , sodass

$$-V_- \leq aH_0 + b \quad (5.15)$$

- c) Es gibt  $c$  und  $d$ , sodass

$$|V| \leq cH_0^2 + d. \quad (5.16)$$

Dann ist  $H_0 + \beta V$  eine analytische Familie vom Typ (B) in der Halbebene  $\{\beta : |\arg(\beta)| < \pi, |\beta| > 0\}$  und

$$\lim_{|\beta| \rightarrow 0, |\arg(\beta)| \leq \theta} \left| \left| (H(\beta) - \lambda)^{-1} - (H_0 - \lambda)^{-1} \right| \right| = 0 \quad (5.17)$$

für alle  $\theta < \pi$ .

theorem:2.52

SATZ 5.11. *Seien  $H_0$  und  $V$  selbstadjungiert. Angenommen,*

- a)  $H_0 \geq 0$   
b) Für alle  $a > 0$  gibt es  $b$ , sodass

$$-V_- \leq aH_0 + b \quad (5.18)$$

- c) Es gibt  $d$ ,  $c < 1$  und  $B$ , sodass

$$\pm\beta[H_0^{1/2}, [H_0^{1/2}, V]] \leq c(H_0^2 + \beta^2 V^2) + d \quad (5.19)$$

für  $0 < \beta < B$

- d) Für alle  $e > 0$  gibt es ein  $f$ , sodass

$$\pm i\beta[H_0, V] \leq e(H_0^2 + \beta^2 V^2) + d \quad (5.20)$$

für  $0 < \beta < B$ .

- e) Für ein  $p > 1$  gibt es  $g$  und  $h$ , sodass

$$|V|^{2/p} \leq gH_0^2 + h \quad (5.21)$$

- f)  $H_0 + \beta V$  ist wesentlich selbstadjungiert auf  $\mathcal{D}(H_0) \cap \mathcal{D}(V)$  für  $0 < \beta < B$ .

Dann ist  $H_0 + \beta V$  eine analytische Familie vom Typ (B) in der abgeschnittenen Ebene  $\{\beta : |\arg(\beta)| < \pi, |\beta| > 0\}$  und

$$\lim_{|\beta| \rightarrow 0, |\arg(\beta)| \leq \theta} \left| \left| (H(\beta) - \lambda)^{-1} - (H_0 - \lambda)^{-1} \right| \right| = 0 \quad (5.22)$$

für alle  $\theta < \pi$ .

Sind zusätzlich

- (iii'), (iv') Für alle  $B$  gibt es geeignete  $d$  und  $f$ , sodass die Abschätzungen aus (iii) und (iv) gelten

(vi')  $H_0 + \beta V$  ist wesentlich selbstadjungiert auf  $\mathcal{D}(H_0) \cap \mathcal{D}(V)$  für alle  $\beta > 0$  erfüllt, so ist  $H(\beta)$  eine analytische Familie vom Typ (A) in der abgeschnittenen Ebene.

SKIZZE DES BEWEISES. Man verwendet (ii), (iii) und (iv), um „quadratische“ Abschätzungen zu beweisen. Insbesondere kann man für gegebenes  $\theta < \pi$  positive  $\alpha$  und  $\gamma$  finden, sodass

$$H_0^2 + |\beta|^2 V^2 \leq \alpha(H_0 + \beta V)^*(H_0 + \beta V) + \gamma \quad (5.23)$$

für alle  $0 < |\beta| < B$  und  $|\arg(\beta)| \leq \theta$ . Daraus folgt, dass  $H_0 + \beta V$  auf  $\mathcal{D}(H_0) \cap \mathcal{D}(V)$  abgeschlossen ist. Als Nächstes schätzt man

$$\left\| (H_0 + \beta V - \lambda)^{-1} - (H_0 - \lambda)^{-1} \right\| \leq |\beta|^{1/p} \left\| (H(\beta) - \lambda)^{-1} |\beta V|^{1-1/p} |V|^{1/p} (H_0 - \lambda)^{-1} \right\| \quad (5.24)$$

ab. Wegen der quadratischen Abschätzungen ist  $(H(\beta) - \lambda)^{-1} |\beta V|^{1-1/p}$  gleichmäßig auf dem Sektor  $\{\beta : 0 < |\beta| < B, |\arg(\beta)| \leq \theta\}$  beschränkt. Wegen (v) ist  $|V|^{1/p} (H_0 - \lambda)^{-1}$  beschränkt, weshalb  $\left\| (H_0 + \beta V - \lambda)^{-1} - (H_0 - \lambda)^{-1} \right\|$  wie  $|\beta|^{1/p}$  gegen Null konvergiert.  $\square$

example:2.53

BEISPIEL 5.12 (Anharmonischer Oszillator). Sei  $-d_x^2 + x^2$  auf  $L^2(\mathbb{R})$  und  $V = x^{2m}$ , dann sind alle Bedingungen von Satz 5.11 erfüllt: (i) und (ii) sind offensichtlich. (vi) wurde bereits früher behandelt (siehe auch Kalf). Um (iii) und (iv) zu beweisen, führt man Erzeuger und Vernichter ein und rechnet mit diesen herum, (v) ist wahr mit  $p = m$ . Da  $V$  den Raum  $C^\infty(H_0)$  invariant lässt und 5.11 anwendbar ist, sind alle Bedingungen von Satz 5.5 erfüllt. Das heißt die Eigenwerte von  $p^2 + x^2 + \beta x^{2m}$  besitzen Rayleigh-Schrödinger-Reihen, die asymptotisch sind und gleichmäßig in Sektoren mit  $|\arg(\beta)| \leq \theta < \pi$  konvergieren. Weiter kann gezeigt werden, dass die Eigenwerte analytische Fortsetzungen auf mehrblättrige Flächen haben, das heißt  $|\arg(\beta)| \leq \theta$ ,  $0 < \beta < B_\theta$  für alle  $\theta < \frac{m+1}{2}\pi$ . Zudem ist die Reihe asymptotisch auf der mehrblättrigen Fläche.

BEISPIEL 5.13 ( $(\varphi^4)_2$ -Theorie mit räumlichem Abschnitt). Sei  $H_0$  der freie Operator eines bosonischen Feldes mit Masse  $m_0 > 0$  in zwei-dimensionaler Raumzeit. Sei  $V = \int g(x) : \varphi^4(x) : dx$  mit  $g \in L^1 \cap L^2$  und  $g \geq 0$ . Man kann dann zeigen, dass alle Bedingungen von Satz 5.11 erfüllt sind. Der einzige isolierte Eigenwert von  $H_0$  ist das Fock-Vakuum. Doch ist Satz 5.5 in der Form, wie es gegeben ist, nicht anwendbar, da  $V$  den Raum  $C^\infty(H_0)$  nicht invariant lässt. Doch lassen  $V$  und  $(H_0 - E)^{-1}$  den Raum  $C^\infty(N)$  ( $N$  ist der Teilchenzahloperator) invariant und man kann ein analoges Resultat beweisen, wo  $C^\infty(H_0)$  durch  $C^\infty(N)$  ersetzt wird. So kann man folgern, dass die Grundzustandsenergie von  $H_0 + \beta V$  eine asymptotische Reihe hat, deren Koeffizienten durch Summen von Feynman-Diagrammen gegeben sind.

Neben der Bedingung, dass das Grenzabsorptionsprinzip *a*) erfüllt ist, gibt es weitere Bedingungen, unter denen die Stabilität von Eigenwerten gezeigt werden kann.

theorem:2.55

SATZ 5.14. Sei  $H_0$  ein abgeschlossener Operator und folgende Annahmen sind erfüllt:

- $P$  ist eine endlich-dimensionale, orthogonale Projektion, sodass  $\text{Ran}(P) \subseteq \mathcal{D}(H_0)$  und  $H_0 P = P H_0$
- $H_0 \upharpoonright \text{Ran}(1 - P)$  ist sektoriell mit Sektor  $S_0 \equiv \{z : |\arg(z)| \leq \theta_0 < \pi/2\}$  und das Spektrum von  $H_0 \upharpoonright \text{Ran}(P)$  liegt außerhalb von  $S_0$
- Sei auch  $V$  abgeschlossen und sektoriell mit Sektor  $S_0$

d)  $\text{Ran}(P) \subseteq \mathcal{D}(V) \cup \mathcal{D}(V^*)$  und  $E_0$  sei ein nicht-entarteter, isolierter Eigenwert von  $H_0 \upharpoonright \text{Ran}(P)$

Dann gibt es für alle  $\epsilon, \delta > 0$  ein  $B$ , sodass die Formsumme  $H_0 + \beta V$  genau einen Eigenwert  $E(\beta) \in \{E : |E - E_0| < \epsilon\}$  für  $\beta \in Q \equiv \{\beta : |\arg(\beta)| \leq \pi/2 - \theta_0 - \delta, |\beta| \leq B\}$  hat. Zudem ist dieser Eigenwert nicht entartet und der einzige Punkt im Spektrum von  $H_0 + \beta V$  nahe  $E_0$  und es gilt

$$\sup\{\| |(H_0 + \beta V - E)^{-1} | \| : |E - E_0| = \epsilon, \beta \in Q\} < \infty. \quad (5.25)$$

Angenommen, dass weiter

e)  $H_0 \Omega_0 = E_0 \Omega_0$  und  $((H_0 - E)^{-1} V)^j (H_0 - E)^{-1} \Omega_0 \in \mathcal{D}(V)$  für  $|E - E_0| = \epsilon$  und alle  $j = 0, \dots, k$

erfüllt ist. Dann sind die Rayleigh-Schrödinger-Koeffizienten von  $E(\beta)$  endlich bis zur Ordnung  $\beta^{k+1}$  und die Rayleigh-Schrödinger-Reihe ist asymptotisch bis mindestens zu dieser Ordnung für  $\beta \in Q$ .

BEWEIS. Es genügt die Stabilität zu zeigen, da die Ergebnisse für die asymptotische Reihe aus den Beweisen des zweiten und dritten Lemmas folgen.

Wir zerlegen  $V = V_1 + V_2$  mit  $V_1 = (1 - P)V(1 - P)$  und  $V_2 = V - V_1$ . Dann ist  $V_2$  ein beschränkter Operator endlichen Ranges, da  $\text{Ran}(P) \subseteq \mathcal{D}(V) \cup \mathcal{D}(V^*)$ . Offensichtlich ist  $H_0 + \beta V_1$  sektoriell auf  $\text{Ran}(1 - P)$  für  $\beta \in Q$  (unabhängig von der Wahl von  $B$  und  $\delta$ ) und  $(H_0 + \beta V_1) \upharpoonright \text{Ran}(P) = H_0$ . Da  $\beta V_2$  beschränkt ist, können wir reguläre Störungstheorie bzgl.  $H_0 + \beta V_1$  verwenden, um seinen Effekt auf  $\sigma(H_0 + \beta V_1)$  zu verstehen. Das Resultat ist dann, dass für kleine  $\beta$  das Supremum endlich ist und die Projektion  $-\frac{1}{2\pi i} \oint (H_0 + \beta V - E)^{-1} dE$  konstante Dimension hat.  $\square$

BEISPIEL 5.15. Sei  $H_0 = -\Delta + W$ , wobei  $W$  reellwertig ist und  $W(x) \rightarrow 0$  für  $|x| \rightarrow \infty$ . Sei  $V(x) = |x|$  (man könnte auch  $|x|^n$  verwenden). In diesem Fall konvergiert zwar  $H_0 + \beta V \rightarrow H_0$  im starken Resolventensinne, aber nicht im Norm-Resolventensinne. Die Konvergenz kann gar nicht in Norm sein, da zwar  $(H_0 + \beta V - i)^{-1}$  kompakt ist, doch  $(H_0 - i)^{-1}$  nicht. Damit ist Satz 5.5 nicht anwendbar. da zwar [theorem:2.46](#)

Wenn  $H_0$  negative Eigenwerte hat, können wir  $P$  als die Projektion auf die entsprechenden Eigenfunktionen auffassen (oder auf die, die zu den  $m$  untersten Eigenfunktionen; in diesem Fall addieren wir eine Konstante zu  $H_0$ , um sicher zu stellen, dass  $H_0 \upharpoonright (1 - P)$  sektoriell mit Sektor  $S_0$  ist). Da die Eigenfunktionen von  $H_0$  exponentiell abfallen, ist  $\text{Ran}(P) \subseteq \mathcal{D}(V) = \mathcal{D}(V^*)$ , womit die erste Bedingung von Satz 5.14 erfüllt ist. Darüberhinaus ist unter sehr milden Annahmen an  $W$ , dass für  $E$  nahe  $E_0$  und  $a$  klein, die Resolvente  $(H_0 - E)^{-1}$  eine beschränkte Abbildung von  $\mathcal{H}_a = \{\psi : \|\psi\|_a = \|e^{a|x|}\psi\|_2 < \infty\}$  in sich selbst ist. Da  $\Omega_0 \in \mathcal{H}_a$  für kleine  $a$ , und  $V$  eine  $\mathcal{H}_a \rightarrow \mathcal{H}_{a/2}$ -beschränkte Abbildung ist, kann man die Hypothese des zweiten Teils von Satz 5.11 für alle  $k$  verifizieren. Die Rayleigh-Schrödinger-Reihe ist daher für alle Ordnungen und alle  $\beta$  mit  $\text{Re}(\beta) > 0$  asymptotisch. Ist  $\beta < 0$ , so ist der Eigenwert nicht stabil, doch ist die Rayleigh-Schrödinger-Reihe immer noch von Relevanz, wie wir später sehen werden. [theorem:2.55](#)

In unserem letzten Beispiel werden wir sehen, dass eine Rayleigh-Schrödinger-Reihe zwar asymptotisch ist, doch der entsprechende Eigenwert nicht stabil ist. Das Beispiel illustriert nochmals, dass zwei völlig verschiedene Funktionen die selbe asymptotische Reihe haben können. [theorem:2.52](#)

BEISPIEL 5.16 (Doppelter Potentialwall). Wir betrachten folgende Familie von Operatoren auf  $L^2(\mathbb{R})$ :

$$H(\beta) = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + 2\beta x^3 + \beta^2 x^4 \quad (5.26)$$

Da das volle Potential als  $x^2(1 + \beta x)^2$  geschrieben werden kann, ist für alle  $\beta \geq 0$  die Familie  $H(\beta)$  von unten beschränkt.  $H(\beta)$  ist demnach auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  wesentlich selbstadjungiert und hat rein diskretes Spektrum, sowie eine vollständige Menge von Eigenvektoren. Obwohl  $H(\beta)$  nicht in  $\beta$  linear ist, kann man die zu Beginn ausgerechneten Formeln erweitern, um formale Reihen für die Eigenwerte zu erhalten. Dazu muss man nur  $2\beta x^3 + \beta^2 x^4 \equiv V$  verwenden und die Formeln bis zur Ordnung  $\beta^n$  anwenden. Da  $(\Omega_n, (2\beta x^3 + \beta^2 x^4)\Omega_m) = 0$  für  $|n - m| > 4$  für die ungestörten Eigenvektoren  $\Omega_n$  von  $H_0$ , sind die Summen in der Definition der Rayleigh-Schrödinger-Reihe alle endlich, weshalb man eine formale Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta^n$  für die Eigenwerte von  $H(\beta)$  erhält. Da das Problem invariant unter  $x \mapsto -x$  und  $\beta \mapsto -\beta$  ist, sind die ungeraden Koeffizienten  $a_{2n+1} = 0$  für alle  $n$ .

Soweit unterscheidet sich dieses Beispiel nicht sehr vom anharmonischen Oszillator. Ersetzt man nämlich den Faktor 2 in  $2\beta x^3$  durch ein  $\theta \in (-2, 2)$ , so könnte man Norm-Resolventen-Konvergenz für  $\beta \searrow 0$  zeigen. Doch man bemerkt, dass das volle Potential bei  $x = -1/\beta$  verschwindet. Durch Translation in  $-\frac{1}{2\beta}$ -Einheiten erhält man den unitär äquivalenten Operator

$$\tilde{H}(\beta) = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{16}\beta^{-2} - \frac{x^2}{2} + \beta^2 x^4. \quad (5.27)$$

Da das Potential unter  $x \mapsto -x$  invariant ist, sieht man, dass  $H(\beta)$  zwei identische Wälle im Potential besitzt – einer, der bei  $x = 0$  und ein anderer, der bei  $x = -\beta^{-1}$  zentriert ist. Wir erwarten daher, dass es zwei Eigenwerte nahe  $E_0$  geben wird, wenn  $\beta$  klein ist, da wir zwei nahezu orthogonale Vektoren mit Energie nahe  $E_0$  erhalten, indem wir einerseits den ungestörten Grundzustand  $\Omega_0(x)$  von  $H_0$  und andererseits den Translatierten  $\Omega_0(x + \beta^{-1})$  verwenden.

Wir bezeichnen daher die Eigenwerte von  $H(\beta)$  für  $\beta > 0$  als  $E_0(\beta) < E'_0(\beta) < E_1(\beta) < E'_1(\beta) < \dots$  mit entsprechenden Eigenvektoren  $\Omega_0(x, \beta)$  usw.  $E_0, E_1, \dots$  sind die Eigenwerte von  $\tilde{H}(\beta)$ , die unter  $x \mapsto -x$  invariant und  $E'_0, E'_1$  sind die Eigenwerte, die unter  $x \mapsto -x$  ungerade sind. Wir erwarten, dass für  $\beta \searrow 0$  beide  $E_0(\beta)$  und  $E'_0(\beta)$  gegen  $E_0$  laufen, das heißt  $E_0$  (die Grundzustandsenergie von  $H_0$ ) ist *nicht* stabil.

Weiter erwarten wir, dass  $|E_0(\beta) - E'_0(\beta)| \leq ce^{-a\beta^{-2}}$  geht, denn: die wahren Eigenvektoren von  $\tilde{H}(\beta)$  sind gerade und ungerade unter  $x \mapsto -x$ . Startet man zur Zeit  $t = 0$  mit einem Zustand wie  $\frac{\Omega_0(x, \beta) + \Omega'_0(x, \beta)}{N(\beta)}$ , der bei  $x = 0$  konzentriert ist, dann wird er nach einer Zeit  $t = \frac{\pi}{E'_0 - E_0}$  unter der von  $H(\beta)$  erzeugten Dynamik bei  $x = -\beta^{-1}$  konzentriert sein, das heißt er wird durch die Barrieren durchgetunnelt sein.  $E'_0(\beta) - E_0(\beta)$  sollte daher von derselben Größenordnung wie die Tunnelwahrscheinlichkeit sein. Diese ist in etwa  $e^{-d\sqrt{h}}$ , wobei  $d$  die Breite – also  $\beta^{-1}$  – und  $h$  die Höhe – also  $\frac{1}{16}\beta^{-2}$  – der Barriere ist.

Zusammengefasst erwarten wir, dass die beiden Eigenwerte  $E_0(\beta)$  und  $E'_0(\beta)$  beide gegen den einfachen Eigenwert  $E_0$  von  $H_0$  konvergieren und beide die selbe

asymptotische Rayleigh-Schrödinger-Reihe haben. Für den Beweis benötigen wir drei Zutaten:

- a) Für  $\beta \searrow 0$  konvergieren  $E_i(\beta)$  und  $E'_i(\beta)$  gegen  $E_i(0) \equiv E_i$ . Insbesondere konvergiert die  $\beta$ -unabhängige Lücke zwischen  $E'_i(\beta)$  und  $E_i(\beta)$  gegen Null für  $\beta \rightarrow 0$ .
- b) Wir zeigen, dass es  $a$  und  $b$  gibt, sodass  $e^{-a\beta^{-2}} \leq E'_0(\beta) - E_0(\beta) \leq e^{-b\beta^{-2}}$ .
- c) Wir zeigen, dass  $E_0(\beta)$  (und wegen b) auch  $E'_0(\beta)$ ) eine Rayleigh-Schrödinger-Reihe, verstanden als asymptotische Reihe, haben und, dass diese übereinstimmen.

Als vorbereitenden Schritt für a) betrachten wir die Operatoren  $H^D(a)$  und  $H^N(a)$  auf  $L^2(-a, a)$ , die durch  $-\mathbf{d}_x^2 + x^2$  mit Dirichlet- bzw. Neumann-Randbedingungen bei  $x = \pm a$  gegeben sind. Seien  $E_n^D(a)$  bzw.  $E_n^N(a)$  die zugehörigen Eigenwerte und  $E_n$  die Eigenwerte von  $-\mathbf{d}_x^2 + x^2$  auf ganz  $L^2(\mathbb{R})$ . Aus dem Dirichlet-Neumann-Bracketing folgt

$$E_n^N(a) \leq E_n \leq E_n^D(a), \quad (5.28)$$

solange  $a^2 \geq E_n = 2n + 1$ . Wir zeigen dann, dass

$$E_n^D(a) \leq E_n^N(a) + e^{-ca^2} \quad (5.29)$$

für große  $a$ , wobei die Größe von  $n$  abhängen wird. Sei dazu  $\psi_n^N(x, a)$  der  $n$ -te normierte Eigenvektor von  $H^N(a)$ . Für hinreichend großes  $a$  behaupten wir dann, dass

$$|\psi_n^N(a, a)| \leq e^{-\frac{a^2}{12}}. \quad (5.30)$$

BEWEIS. Sei dazu  $\varphi(x)$  die Lösung von  $-\varphi'' + x^2\varphi = E_n^N(a)\varphi$  mit den Randbedingungen  $\varphi'(a) = 0$ ,  $\varphi(a) = 1$ . Wir wählen  $a$  so groß, dass  $a > 16$  und  $(a/2)^2 \geq a^2/9 + (2n + 1)$ . Dann ist für  $x \in [a/2, a]$   $x^2 - E_n^N(a) \geq a^2/9$ , da  $E_n^N(a) \leq 2n + 1$  wegen des Dirichlet-Neumann-Bracketings. Mit einem Vergleichsargument ist daher  $\varphi(x) \geq \cosh(\frac{a}{3})(x - a)$  für  $x \in [a/2, a]$ . Insbesondere ist  $\varphi(x) \geq \frac{1}{2}e^{\frac{a^2}{12}}$  für  $x \in [a/2, 3a/4]$ . Daher, und wegen  $a > 16$ , ist

$$\int_{a/2}^{3a/4} |\varphi(x)|^2 dx \geq \cosh\left(\frac{a^2}{6}\right). \quad (5.31)$$

Da  $\psi_n^N(x, a)$  ein normiertes Vielfaches von  $\varphi$  ist, folgt die Behauptung.  $\square$

Für spätere Zwecke bemerken wir, dass ein ähnliches Argument

$$\left| \frac{\partial \psi_n^D}{\partial x}(a, a) \right| \leq e^{-ca^2} \quad (5.32)$$

zeigt. Wir fixieren nun  $n_0$  und wählen  $a_0$  so, dass  $|\psi_n^N(a, a)| \leq e^{-\frac{a^2}{12}}$  für alle  $n = 0, 1, \dots, n_0$  und  $a \geq a_0$  wahr ist. Sei dann

$$\eta_i(x) = \begin{cases} \psi_i^N(x, a) - \psi_i^N(a, a) & i = 0, 2, \dots \\ \psi_i^N(x, a) - a^{-1}x\psi_i^N(a, a) & i = 1, 3, \dots \end{cases} \quad (5.33)$$

Die so definierten  $\eta_i$  verschwinden bei  $x = \pm a$ , weshalb sie erlaubte Testfunktionen für  $H^D(a)$  sind, da sie in  $\mathcal{Q}(H^D(a))$  liegen. Weiter definieren wir  $\Delta_{ij} = (\eta_i, \eta_j)$ ,

sowie  $E_{ij} = (\eta_i, H^D(a)\eta_j)$ . Wegen der punktweisen Schranke an die Neumann-Eigenfunktionen, haben wir für  $0 \leq i, j \leq n_0$

$$|\Delta_{ij} - \delta_{ij}| \leq de^{-\frac{a^2}{20}}, \quad (5.34a)$$

$$|E_{ij} - E_i^N(a)\delta_{ij}| \leq de^{-\frac{a^2}{20}} \quad (5.34b)$$

für ein geeignetes  $d$ . Sei  $E_{(i)}$  der  $i$ -te Eigenwert von  $\Delta^{-1/2}E\Delta^{-1/2}$ , wobei  $\Delta = \{\Delta_{ij}\}$  und  $E = \{E_{ij}\}$ . Wegen des Min-Max-Prinzips ist  $E_{(i)} \geq E_i^D(a)$  für  $i = 0, \dots, n_0$ , und, wegen der obigen Abschätzungen

$$\left\| \left\| \Delta^{-1/2}E\Delta^{-1/2} - E_i^N\delta_{ij} \right\| \right\| \leq d_2e^{-\frac{a^2}{20}}. \quad (5.35)$$

Daraus folgt  $|E_{(i)} - E_i^N| \leq d_1e^{-\frac{a^2}{20}}$  und daher die Behauptung  $E_n^D(a) \leq E_n^N(a) + e^{-ca^2}$ .

Nun können wir endlich Schritt  $a$ ) zeigen. Wegen der Form von  $\tilde{H}(\beta)$  ist  $E_i$  (bzw.  $E'_i$ ) der  $(i+1)$ -te Eigenwert von  $-d_x^2 + x^2 + 2\beta x^3 + \beta^2 x^4$  auf  $L^2(-\frac{1}{2}\beta^{-1}, \infty)$  mit Neumann- (bzw. Dirichlet-)Randbedingungen bei  $x = -\frac{1}{2}\beta^{-1}$ . Wir fixieren nun  $a > \sqrt{2n+1}$  und führen weitere Dirichlet- oder Neumann-Randbedingungen bei  $x = \pm a$  ein. Seien dann  $E_{i,D}(\beta, a)$ ,  $E_{i,N}(\beta, a)$ ,  $E'_{i,D}(\beta, a)$  und  $E'_{i,N}(\beta, a)$  die entsprechenden Eigenwerte. Wieder haben wir wegen des Dirichlet-Neumann-Bracketings

$$E_{i,N}(\beta, a) \leq E_i(\beta) \leq E_{i,D}(\beta, a) \quad (5.36)$$

und analog für die gestrichenen Eigenwerte. Lässt man  $\beta \rightarrow 0$  laufen, sieht man, dass

$$E_i^N(a) \leq \liminf E_i(\beta) \leq \limsup E_i(\beta) \leq E_i^D(a) \quad (5.37)$$

mit  $E_i^D(a)$  aus Schritt Null. Lässt man nun  $a \rightarrow \infty$  laufen und verwendet die Abschätzung an die Dirichlet-Neumann-Eigenwerte  $E_n^N$  und  $E_n^D$ , sieht man, dass  $\lim_{\beta \rightarrow 0} |E_i(\beta) - E_i| = 0$ .

Als Vorbereitung für Schritt  $b$ ) bemerken wir, dass  $\lim_{\beta \rightarrow 0} \left\| \Omega_i(\beta) - \tilde{\Omega}_i(\beta) \right\| = 0$  und

$\lim_{\beta \rightarrow 0} \left\| \Omega'_i(\beta) - \tilde{\Omega}'_i(\beta) \right\| = 0$ , wobei  $\tilde{\Omega}_i(x, \beta) := 2^{-1/2}(\Omega_i(x) + \Omega_i(x + \beta^{-1}))$  und  $\tilde{\Omega}'_i(x, \beta) := 2^{-1/2}(\Omega'_i(x) - \Omega'_i(x + \beta^{-1}))$  (man beachte das Minus-Zeichen!). Man sieht, dass  $\tilde{\Omega}_i$  gerade unter Reflexion bei  $x = -\frac{1}{2}\beta^{-1}$  ist und

$$\lim_{\beta \searrow 0} \left\| (H(\beta) - E_i(\beta))\tilde{\Omega}_i \right\| = 0. \quad (5.38)$$

Da  $H(\beta)$  nur einen Eigenwert mit geradem Eigenvektor nahe  $E_i(\beta)$  hat, ist daher insbesondere  $\left\| \Omega_i(\beta) - \tilde{\Omega}_i(\beta) \right\| \rightarrow 0$ . Das Argument verläuft analog für die gestrichenen Vektoren. Insbesondere ist

$$\lim_{\beta \searrow 0} \int_{-\frac{1}{2}\beta^{-1}}^{\infty} \infty \Omega_i(x, \beta) \Omega'_i(x, \beta) dx = \frac{1}{2}. \quad (5.39)$$

Verwendet man dies und die Randbedingungen bei  $x = -\frac{1}{2}\beta^{-1}$ , so findet man nach einer partiellen Integration in

$$\int_{-\frac{1}{2}\beta^{-1}}^{\infty} [\Omega_i(H(\beta)\Omega'_i) - \Omega'_i(H(\beta)\Omega_i)] dx, \quad (5.40)$$

dass

$$\frac{1}{2}(E'_i - E_i) = \Omega_i(-\frac{1}{2}\beta^{-1}, \beta) \frac{d}{dx} \Omega'_i(-\frac{1}{2}\beta^{-1}, \beta). \quad (5.41)$$

Mit dem Argument für den Beweis der punktweisen Schranken der Eigenfunktionen und, dass  $\frac{x^2}{4} \leq x^2(1 + \beta x)^2 \leq x^2$  auf  $(-\frac{1}{2}\beta^{-1}, 0)$ , ist es leicht zu zeigen, dass die rechte Seite des letzten Ausdrucks von unten durch  $e^{-a\beta^{-2}}$  und von oben durch  $e^{-b\beta^{-2}}$  beschränkt ist, was b) zeigt.

Um c) zu zeigen, bemerken wir, dass man für  $\varphi \in \mathcal{S}$  leicht zeigen kann, dass  $(H(\beta) - H_0)\varphi \rightarrow 0$  für  $\beta \searrow 0$ . Da das Spektrum von  $H(\beta)$  gegen das von  $H_0$  nach a) konvergiert, konvergiert  $(H(\beta) - z)^{-1} - (H_0 - z)^{-1} \rightarrow 0$  für  $\beta \searrow 0$  und alle  $z \neq 2n + 1$ . Daraus folgt, dass auch  $P(\beta) \rightarrow P(0)$  für  $\beta \searrow 0$  stark konvergiert, wobei  $P(\beta) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} (z - H(\beta))^{-1} dz$ . Dabei ist  $P(0)$  ei-

ne Rang-1-Projektion und  $P(\beta)$  für  $\beta \neq 0$  eine Rang-2-Projektion. Wie üblich hat  $e(\beta) := \frac{(\Omega_0, H(\beta)P(\beta)\Omega_0)}{(\Omega_0, P(\beta)\Omega_0)}$  eine Rayleigh-Schrödinger-Reihe, die asymptotisch ist. Darüberhinaus ist  $e(\beta) = \theta(\beta)E_0(\beta) + (1 - \theta(\beta))E'_0(\beta)$  für eine geeignete Funktion  $\theta(\beta)$ . Da  $E_0 - E'_0 \rightarrow 0$  schneller als jede Potenz konvergiert, haben  $E_0(\beta)$  und  $E'_0(\beta)$  die selbe asymptotische Rayleigh-Schrödinger-Reihe.

## 6. Summierungsverfahren in der Störungstheorie

Im vorigen Abschnitt haben wir am Beispiel von  $p^2 + x^2 + \beta x^4$  gesehen, dass, obwohl die Störungstheorie für die Eigenwerte dieses Operators divergiert, man dennoch etwas Information über die eigentlichen Eigenwerte erhalten kann und, unter recht allgemeinen Umständen eine Rayleigh-Schrödinger-Reihe, aufgefasst als asymptotische Reihe, erhalten kann. Doch haben wir auch gesehen, dass asymptotische Reihen nicht besonders aussagekräftig sind. Ist beispielsweise  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta^n$  eine asymptotische Reihe für  $E(\beta)$ , so sagt dies noch lange nichts über  $E(\beta_0)$  für  $\beta_0 \neq 0$  aus.

In diesem Abschnitt werden wir uns um die Frage kümmern, ob die divergente Störungsreihe doch die Energie  $E(\beta)$  bestimmen kann, wenn man sie nicht stur, sondern etwas geschickter aufsummiert. Dazu entwerfen wir zunächst ein Kriterium, das stärker ist als, dass  $\sum a_n \beta^n$  asymptotisch für  $E(\beta)$  ist, aber schwächer ist als, dass die Reihe konvergiert, und trotzdem  $E(\beta)$  eindeutig bestimmt. Wir erinnern uns, dass die Nicht-Eindeutigkeit von asymptotischen Reihen daher kam, dass von Null verschiedene Funktionen wie  $e^{-\beta^{-1}}$  eine asymptotische Reihe haben können, die trotzdem exakt Null ist. So eine „mittlere“ Bedingung kann durch das folgende Resultat von Carleman motiviert werden.

**SATZ 6.1 (Carleman).** *Sei  $g$  eine Funktion, die analytisch im Inneren von  $S = \{z : 0 \leq |z| \leq B : |\arg(z)| \leq \pi/2\}$  und stetig auf  $S$  ist. Angenommen, dass für jedes  $n$*

$$|g(z)| \leq b_n |z|^n \quad (6.1)$$

*für alle  $z \in S$  ist. Ist darüberhinaus  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-1/n} = \infty$ , so ist  $g$  identisch Null.*

In der Praxis werden wir jedoch nur einen Spezialfall dieses Resultats benötigen. Man bemerkt, dass  $|g(z)| \leq b_n |z|^n$  gerade die Bedingung ist, dass  $g$  eine Null-asymptotische Reihe hat. Die zusätzliche Bedingung  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-1/n} = \infty$  entspricht

einer Schranke, wie schnell  $b_n^{-1/n}$  gegen Null gehen kann bzw. wie schnell  $b_n$  gegen Unendlich strebt. Da  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$  „nur“ logarithmisch divergiert, ist die Bedingung  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-1/n} = \infty$  nur etwas schwächer als eine Schranke  $b_n \leq C_0 B_0^n n^n$  für geeignete  $C_0, B_0$  oder äquivalent  $b_n \leq C B^n n!$  für geeignete  $C, B$ . Wir beweisen nun folgenden Spezialfall von Carlemans Satz.

**SATZ 6.2.** *Sei  $g$  eine Funktion, die analytisch im Inneren von  $S = \{z : 0 \leq |z| \leq R : |\arg(z)| \leq \pi/2 + \epsilon\}$  für ein  $\epsilon > 0$  und stetig auf  $S$  ist. Angenommen, es gibt  $C$  und  $B$  so, dass*

$$|g(z)| \leq C B^n n! |z|^n \quad (6.2)$$

für alle  $z \in S$  und alle  $n \in \mathbb{N}$ , so ist  $g$  identisch Null.

**BEWEIS.** Um die Notation zu vereinfachen, definieren wir  $w = z^{-1}$  und  $f(w) = g(w^{-1}) = g(z)$ . Dann ist  $f$  in

$$\tilde{S} := \{w : |w| \geq R^{-1}, |\arg(w)| \leq \frac{\pi}{2} + \epsilon\} \quad (6.3)$$

analytisch. Außerdem ist  $|f(w)| \leq C B^n n! |w|^{-n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $w \in \tilde{S}$ . Wegen Stirlings Formel  $\log(n!) = n \log(n) - n + \mathcal{O}(\log(n))$  gibt es für alle  $\delta > 0$  ein  $D_\delta$ , sodass  $n! \leq D_\delta n^n e^{-n(1-\delta)}$ . Wählt man  $n = \left\lfloor \frac{|w|}{B} \right\rfloor$ , so sieht man, dass  $|f(w)| \leq C' e^{-\epsilon|w|}$  für eine Konstante  $C'$  und  $\epsilon > 0$ . Verwendet man nun das Phragmén–Lindelöf-Prinzip, so werden wir zeigen, dass  $f(w_0) = 0$ , falls  $w_0 \in \mathbb{R}$  und  $w_0 > R^{-1}$ . Wir werden dann per analytischer Fortsetzung schließen, dass  $f$  identisch verschwindet.

Wir wählen dazu  $\alpha$  so, dass  $\alpha(\frac{\pi}{2} + \epsilon) = \frac{\pi}{2}$ . Sei  $f_m(w) = f(w) \exp[m(\frac{w}{w_0})^\alpha]$ . Da  $\alpha < 1$  und  $|f(w)| \leq C' e^{-\epsilon|w|}$ , konvergiert  $\lim_{|w| \rightarrow \infty} f_m(w) = 0$ . Wegen des Maximumprinzips ist daher

$$|f_m(w_0)| \leq \max\{|f_m(w)| : |w| = R^{-1} \text{ oder } |\arg(w)| = \frac{\pi}{2} + \epsilon\}. \quad (6.4)$$

Mit  $M_1 := \max\{|f_m(w)| : |w| = R^{-1}\}$  und  $M_2 := \{|f_m(w)| : |\arg(w)| = \frac{\pi}{2} + \epsilon\}$  ist also

$$|f_m(w_0)| \leq \max\{M_1 \exp[m(\frac{R^{-1}}{w_0})^\alpha], M_2\}, \quad (6.5)$$

das heißt

$$|f(w_0)| \leq \max\{M_1 \exp[m(-1 + (\frac{R^{-1}}{w_0})^\alpha)], M_2 e^{-m}\}. \quad (6.6)$$

Da  $m$  beliebig war, folgt  $f(w_0) = 0$ .  $\square$

Wir haben also gezeigt, dass, wenn  $f$  in  $\tilde{S}$  analytisch ist und exponentiell abfällt,  $f$  identisch Null sein muss. Wir werden dies später verwenden, um die Abwesenheit positiver Eigenwerte zu zeigen, und eine Erweiterung dieses Resultats (den Satz von Carlson) beweisen.

Das letzte Resultat suggeriert, dass wir eine stärkere Bedingung definieren können, als, dass  $E(\beta)$  die asymptotische Reihe  $\sum a_n \beta^n$  hat.

**DEFINITION 6.3.** Sei  $E(\beta)$  analytisch in einem sektoriellen Gebiet  $\{\beta : 0 < |\beta| < B, |\arg(\beta)| \leq \frac{\pi}{2} + \epsilon\}$ . Wir sagen, dass  $E(\beta)$  genau dann eine *starke asymptotische*

Bedingung erfüllt und  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta^n$  als *starke asymptotische Reihe* hat, wenn es  $C$  und  $\sigma$  gibt, sodass

$$|E(\beta) - \sum_{n=0}^N a_n \beta^n| \leq C \sigma^{N+1} (N+1)! |\beta|^{N+1} \quad (6.7)$$

für alle  $N$  und  $\beta$  in obigem Sektor.

**SATZ 6.4.** *Ist  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta^n$  eine starke asymptotische Reihe für zwei analytische Funktionen  $f$  und  $g$ , so ist  $f \equiv g$ .*

**BEWEIS.** Per Voraussetzung ist

$$|f(\beta) - g(\beta)| \leq 2C \sigma^{N+1} (N+1)! |\beta|^{N+1} \quad (6.8)$$

im Sektor  $\{\beta : 0 < |\beta| < B, |\arg(\beta)| \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\epsilon}{2}\}$ , weshalb der Spezialfall von Carleman Resultat impliziert, dass  $f \equiv g$ .  $\square$

Um die Idee dieser starken asymptotischen Bedingung für Eigenwerte anwenden zu können, ist es hilfreich folgende einfachen technischen Lemmata zu kennen.

**LEMMA 6.5.** *Erfüllen  $f$  und  $g$  die starken asymptotischen Bedingungen und  $\lim_{|\beta| \rightarrow 0} g(\beta) \neq 0$ , so erfüllt auch  $f/g$  die starke asymptotische Bedingung und die zugehörige asymptotische Reihe ist durch den formalen Quotienten der asymptotischen Reihen von  $f$  und  $g$  gegeben.*

**example:2.63**

**BEISPIEL 6.6.** Wir betrachten nochmals den anharmonischen Oszillator  $p^2 + x^2 + \beta x^4$ . Wir wissen bereits, dass  $E(\beta) = \frac{(H(\beta)\Omega_0, P(\beta)\Omega_0)}{(\Omega_0, P(\beta)\Omega_0)}$ . Wegen des vorherigen Lemmas benötigen wir also nur eine Schranke der Form  $C \sigma^{N+1} (N+1)! |\beta|^{N+1}$  für die Norm des Rests  $P(\beta)\Omega_0$ , nachdem die ersten  $N$  Terme der asymptotischen Reihe subtrahiert worden sind. Nachdem  $P(\beta)$  das Integral über die Resolvente ist, brauchen wir nur eine starke asymptotische Bedingung für den Vektor  $(H(\beta) - E)^{-1}\Omega_0$ , die uniform in  $|E - E_0| = \epsilon$  sind. Der Rest, den wir beschränken müssen ist nur der Rest einer geometrischen Reihe

$$\begin{aligned} & (H(\beta) - E)^{-1}\Omega_0 - \sum_{n=0}^N (-\beta)^n (H_0 - E)^{-1} [V(H_0 - E)^{-1}]^n \Omega_0 \\ & = (-\beta)^{N+1} (H(\beta) - E)^{-1} [V(H_0 - E)^{-1}]^{N+1} \Omega_0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Da  $\|(H(\beta) - E)^{-1}\|$  wegen der im letzten Abschnitt bewiesenen Norm-Konvergenz gleichmäßig beschränkt ist, müssen wir nur noch

$$\| [x^4(p^2 + x^2 - E)^{-1}]^{N+1} \Omega_0 \| \leq C \sigma^{N+1} (N+1)! \quad (6.10)$$

für  $|E - 1/2| = 1/2$  zeigen. Mit Hilfe der Erzeuger und Vernichter, ist  $x^4 = \frac{1}{4}(A + A^*)^4$ , das heißt die zu beschränkte Norm kann durch  $(2^4)^{N+1}$  Terme der Form

$$4^{-N-1} \| A_1^\# \dots A_4^\# (H_0 - E)^{-1} A_5^\# \dots A_{4N+4}^\# (H_0 - E)^{-1} \Omega_0 \| \quad (6.11)$$

beschränkt werden, wobei  $A^\#$  ein Erzeuger oder Vernichter sein kann. Die  $C \sigma^{N+1} (N+1)!$ -Schranke wird mit Hilfe der Formeln

$$A \Omega_n = \sqrt{n} \Omega_{n-1} \quad (6.12a)$$

$$A^* \Omega_n = \sqrt{n+1} \Omega_{n+1} \quad (6.12b)$$

$$(H_0 - E)^{-1} \Omega_n = (2n+1 - E)^{-1} \Omega_n \quad (6.12c)$$

bewiesen. Die Energieniveaus des anharmonischen Oszillators erfüllen daher eine starke asymptotische Bedingung. Insbesondere sind sie eindeutig durch die Rayleigh-Schrödinger-Reihe bestimmt.

Verallgemeinerungen des obigen Arguments in eine abstrakte Situation wurden von Simon durchgeführt. Ein typisches Resultat ist Folgendes.

SATZ 6.7. *Seien  $H_0$ ,  $V$  und  $M$  selbstadjungierte Operatoren, die folgende Bedingungen erfüllen:*

- a)  $H_0 \geq 0$
- b) Für alle  $a > 0$  gibt es ein  $b$ , sodass  $-V_- \leq aH_0 + b$
- c) Es gibt  $c$  und  $d$  so, dass

$$|V| \leq cH_0^2 + d \quad (6.13)$$

- d)  $0 \leq M \leq H_0$
- e)  $M$  und  $H_0$  kommutieren
- f)  $C^\infty(M) \subseteq \mathcal{D}(V)$  und  $V$  bildet  $C^\infty(M)$  auf sich selbst ab
- g) Es gibt  $e$  und  $f$  so, dass für alle  $n$  und  $\psi \in C^\infty(M)$

$$\|(M+1)^n V \psi\| \leq e \|(M+f)^{n+2} f\| \quad (6.14)$$

Sei  $H_0 + \beta V$  als Formsumme für kleine  $|\beta|$  und  $|\arg(\beta)| \leq \pi - \epsilon$  definiert. Dann gibt es für alle nicht-entarteten, isolierten Eigenwerte von  $H_0$  einen Eigenwert von  $H_0 + \beta V$  für kleine  $|\beta|$ , der eine Rayleigh-Schrödinger-Reihe als starke asymptotische Reihe hat.

Dieses Resultat erlaubt es die Ergebnisse des eindimensionalen anharmonischen Oszillators für die des  $n$ -dimensionalen anharmonischen Oszillators zu erweitern. Sei dazu  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ ,

$$H_0 = \sum_{i=1}^n -\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \omega_i^2 x_i^2 \quad (6.15a)$$

und

$$V = \sum_{i,j,k,\ell=1}^n a_{ijkl} x_i x_j x_k x_\ell, \quad (6.15b)$$

wobei  $a$  so gewählt ist, dass  $V(x) \geq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ . Dann ist für jeden nicht-entarteten Eigenwert  $E_0$  von  $H_0$  die Rayleigh-Schrödinger-Reihe eine starke asymptotische Reihe für den Eigenwert  $E(\beta)$  von  $H(\beta) = H_0 + \beta V$  mit  $E(0) = E_0$ .

example: 2.65

BEISPIEL 6.8 ( $(\varphi^4)_2$ , räumlich abgeschnitten). Im vorigen Abschnitt haben wir kurz räumlich abgeschnittene Feldtheorien in zweidimensionaler Raumzeit betrachtet.

$$H_0 = \int \sqrt{m^2 + k^2} a^*(k) a(k) dk = d\Gamma(\sqrt{k^2 + m^2}) \quad (6.16a)$$

$$V = \int g(x) : \varphi^4(x) : dx \quad (6.16b)$$

mit  $g \in L^2 \cap L^1$ ,  $g \geq 0$  und

$$M = \int a^*(k) a(k) dk = d\Gamma(1) = N \quad (6.16c)$$

dem Teilchenzahloperator. In diesem Beispiel können alle Bedingungen des Resultats von Simon nachgewiesen werden. Die am schwierigsten zu beweisende Bedingung ist *b*), welche bereits früher diskutiert wurde. Die Rayleigh-Schrödinger-Reihe für die Grundzustandsenergie ist daher eine starke asymptotische Reihe für die exakte Grundzustandsenergie und in diesem Fall als Summe von Feynman-Diagrammen gegeben. Dies suggeriert, dass auch unter allgemeineren Zuständen die Feynman-Reihe eine starke asymptotische Reihe ist.

Die starke asymptotische Bedingung impliziert, dass  $|a_n| \leq C\sigma^n n!$ . Jedoch gibt es Reihen einiger einfacher Beispiele, wo die  $a_n$  sich wie  $(kn)!$  mit  $k > 1$  verhalten, das heißt die starke asymptotische Bedingung kann in solchen Fällen nicht erfüllt sein. Doch zeigt ein einfaches Skalierungsargument und Carlemans Satz, dass eine Funktion  $g$ , die auf dem mehrblättrigen Gebiet  $\{z : 0 < |z| < B, |\arg(z)| < \frac{k\pi}{2} + \epsilon\}$  und  $|g(z)| \leq C\sigma^N [k(N+1)]! |z|^{N+1}$  für alle  $N$  und  $z$  in diesem Gebiet erfüllt, identisch Null ist. Wir definieren daher:

DEFINITION 6.9. Sei  $E(\beta)$  analytisch auf dem sektoriellen Gebiet  $\{\beta : 0 < |\beta| < B, |\arg(\beta)| \leq \frac{k\pi}{2} + \epsilon\}$ . Man sagt  $E(\beta)$  erfüllt genau dann eine *modifizierte starke asymptotische Bedingung der Ordnung  $k$*  und hat  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta^n$  als *starke Ordnung- $k$ -asymptotische Reihe*, wenn es  $C$  und  $\sigma$  so gibt, sodass

$$|E(\beta) - \sum_{n=0}^N a_n \beta^n| \leq C\sigma^{N+1} [k(N+1)]! |\beta|^{N+1} \quad (6.17)$$

für alle  $N$  und alle  $\beta$  in diesem Sektor.

BEMERKUNG 6.10. Aus dieser Definition folgt die Verallgemeinerung, dass, wenn  $f$  und  $g$  die gleiche  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta^n$ -Reihe als starke Ordnung- $k$ -asymptotische Reihe haben, dann  $f = g$  sein muss.

example: 2.68

BEISPIEL 6.11 ( $x^{2m}$ -Oszillator ( $m \geq 3$ )). Sei  $H_0 = -d_x^2 + x^2$  und  $V = x^{2m}$  mit  $m \geq 3$ . Numeriker behaupten, dass die Rayleigh-Schrödinger-Koeffizienten  $a_n$  der Grundzustandsenergie wie  $(-1)^{n+1} C\sigma^n [(m-1)n]! [1 + \mathcal{O}(n^{-1})]$  für  $n \rightarrow \infty$  gehen, was jedoch bedeuten würde, dass eine normale starke asymptotische Bedingung nicht erfüllt wäre. Man kann jedoch zeigen, dass sich  $E(\beta)$  analytisch auf den mehrblättrigen Sektor  $\{\beta : |\beta| \leq B_\epsilon, |\arg(\beta)| \leq \frac{m+1}{2}\pi - \epsilon\}$  für alle  $\epsilon > 0$  fortsetzen lässt und, dass eine starke asymptotische Bedingung der Ordnung  $m-1$  in so einem Sektor erfüllt ist. Das heißt die asymptotische Reihe bestimmt den Eigenwert also auch in diesem Fall.

Da eine starke asymptotische Reihe  $E(\beta)$  eindeutig bestimmt, könnte man denken, dass man  $E$  durch die  $a_n$  konstruieren kann. Watson hat hierzu sogar eine explizite Methode so einer Konstruktion geliefert.

SATZ 6.12 (Watson). *Angenommen, dass  $E(\beta)$  durch die starke asymptotische Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta^n$  auf  $\{\beta : 0 < |\beta| < B, |\arg(\beta)| \leq \frac{\pi}{2} + \epsilon\}$  beschrieben wird. Definiere*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n, \quad (6.18)$$

die wegen der starken asymptotischen Bedingung in einem Kreis um  $z = 0$  analytisch ist. Dann gilt:

- (i)  $g$  hat eine analytische Fortsetzung auf das Gebiet  $\{z : |\arg(z)| < \epsilon\}$

- (ii) Ist  $|\beta| < B$  und  $|\arg(\beta)| < \epsilon$ , dann ist  $\int_0^\infty |g(\beta x)| e^{-x} dx < \infty$   
 (iii) Ist  $|\beta| < B$  und  $|\arg(\beta)| < \epsilon$ , dann ist  $E(\beta) = \int_0^\infty g(\beta x) e^{-x} dx$ .

BEMERKUNG 6.13. Wir erinnern uns an  $n! = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$ . Könnte man also  $\int_0^\infty$  und  $\sum_{n=0}^\infty$  miteinander vertauschen, so hätten wir (zumindest formal)

$$\int_0^\infty g(\beta x) e^{-x} dx = \sum_{n=0}^\infty a_n \beta^n. \quad (6.19)$$

Die hier beschriebene Methode, die Summe  $\sum_{n=0}^\infty a_n \beta^n$  zu bestimmen ist ein Beispiel einer *Summiermethode*, also eine Methode eine endliche Antwort einer divergenten Reihe, die *formal* eine Summe ist, zu bekommen. Diese Methode ist unter dem Namen *Borelsche Summiermethode* bekannt. Hierbei ist  $g(z)$  die *Borel-Transformation* der Folge  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ . Die Laplace-Transformation  $\int_0^\infty g(\beta x) e^{-x} dx$  nennt man manchmal *inverse Borel-Transformation*.

Wir diskutieren nun nochmals die Beispiele [Beispiel 6.6](#), [Beispiel 6.8](#) und den  $x^{2m}$ -Oszillator [Beispiel 6.11](#) mit Hilfe der Borelschen Summiermethode.

BEISPIEL 6.14 (Nochmals zu [Beispiel 6.6](#)). Wählt man  $\epsilon$  beliebig nahe bei  $\pi$  (was man ja darf), so ist  $g$  analytisch auf der abgeschnittenen Ebene  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -R)$ , wobei  $R$  der Konvergenzradius der Borel-Transformation ist. Im Spezialfall des eindimensionalen Oszillators ist bekannt, dass  $E(\beta)$  auf  $\{\beta : |\arg(\beta)| < \pi\}$  analytisch ist, weshalb die inverse Borel-Transformation für alle  $\beta > 0$  (bzw. alle  $\beta$  mit  $\operatorname{Re}(\beta) > 0$ ) gegen  $E$  konvergiert.

BEISPIEL 6.15 (Nochmals zu [Beispiel 6.8](#)). Man kann in diesem Fall  $E(\beta)$  für hinreichend kleines  $|\beta|$  und  $|\arg(\beta)|$  aus der Borel-Transformation der Rayleigh-Schrödinger-Reihe wiederherstellen.

BEISPIEL 6.16 (Nochmals zum  $x^{2m}$ -Oszillator ( $m \geq 3$ ) [Beispiel 6.11](#)). Zwar ist die Borel-Methode nicht direkt anwendbar, doch gibt es eine Verallgemeinerung dieser. Für den  $x^{2m}$ -Oszillator ist die modifizierte Borel-Transformation

$$g(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{[n(m-1)]!} z^n \quad (6.20)$$

auf der abgeschnittenen Ebene  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -R_m)$  analytisch. Für positives und kleines  $\beta$  ist dann

$$E(\beta) = \int_0^\infty g(\beta x^{m-1}) e^{-x} dx. \quad (6.21)$$

BEMERKUNG 6.17. Für andere Spezialfälle bzw. Probleme existieren eigene andere Summiermethoden.

## 7. Spektrale Konzentration

In den vorherigen zwei Abschnitten haben wir gestörte Systeme untersucht, die einen isolierten Eigenwert nahe des ungestörten isolierten Eigenwerts aufwiesen. Jeder einzelne Term der zugehörigen Störungsreihe war zwar endlich, doch konvergierte die Reihe nicht. In diesem Abschnitt werden wir die kompliziertere Situation analysieren, in der es einen ungestörten Eigenwert und eine Term für Term endliche Störungsreihe, aber *keinen* gestörten Eigenwert gibt.

Als einführendes Beispiel betrachten wir den Stark-Hamilton-Operator  $H_0 = -\Delta - \frac{1}{|x|}$  mit  $V = E_0 \mathbf{e} \cdot \mathbf{x}$ , wobei  $E_0$  die Feldstärke eines homogenen elektrischen Feldes und  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$  fest ist. Für  $\beta \in \mathbb{R}$  ist  $H_0 + \beta V$  der Hamilton-Operators des Wasserstoffatoms, das sich im konstanten elektrischen Feld  $= -\beta E_0 \mathbf{e}$  befindet. Früher haben wir bereits gesehen, dass  $H_0 + \beta V$  auf  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  wesentlich selbstadjungiert ist. Doch ist es andererseits leicht zu sehen, dass  $H_0 + \beta V$  für  $\beta \neq 0$  von unten unbeschränkt ist. Insbesondere werden wir später sehen, dass  $\sigma(H_0 + \beta V) = (-\infty, \infty)$ . Sobald wir also die Störung anschalten, werden alle negativen Eigenwerte ins stetige Spektrum eingebettet. Jedoch ist die Störungsreihe für die Grundzustandsenergie, die durch die in den ersten Abschnitten hergeleitete Formel gegeben ist, endlich Term für Term. Was passiert hier also?

Bevor wir eine mathematische Antwort geben, betrachten wir eine alternative Interpretation. Sei dazu

$$V_n(x) = E_0 \begin{cases} \mathbf{e} \cdot \mathbf{x} & , \text{ falls } |\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}| < n \\ n & , \text{ falls } \mathbf{e} \cdot \mathbf{x} > n \\ -n & , \text{ falls } \mathbf{e} \cdot \mathbf{x} \leq -n \end{cases} \quad (7.1)$$

Jedes  $V_n$  ist eine Störung vom Typ (A), das heißt es gibt  $B^{(n)}$ , sodass die Störungsreihe  $\sum_{m=0} a_m^{(n)} \beta^m$  der Grundzustandsenergie  $E^{(n)}(\beta)$  von  $H_0 + \beta V_n$  gegen  $E^{(n)}(\beta)$  konvergiert, wenn  $|\beta| \leq B^{(n)}$  ist. Angenommen, es sei  $\sum_m a_m \beta^m$  die formale Störungsreihe für die Grundzustandsenergie von  $H_0 + \beta V$ . Da  $a_m^{(n)} \rightarrow a_m$  für  $n \rightarrow \infty$ , interpretieren wir  $\sum_m a_m \beta^m$  als den formalen Grenzwert von  $\sum_{m=0} a_m^{(n)} \beta^m$ . Diese Interpretation mag zwar mathematisch nicht zufriedenstellend sein, da es sehr wahrscheinlich ist, dass  $B^{(n)} \rightarrow 0$  und  $\sum a_m \beta^m$  für alle  $\beta$  divergiert, doch ist sie die richtige physikalische Interpretation. Der Grund dafür ist, dass  $V$  im Experiment natürlich nicht über die ganze Welt reichen, sondern eben nur bis eine gewisse Reichweite haben –  $V$  ist lediglich eine Idealisierung.  $V_n$  hat viel mehr mit dem elektrischen Feld und  $E^{(n)}(\beta)$  mit den gemessenen spektroskopischen Observablen im Experiment zu tun. Doch da  $E^{(n)}(\beta) \approx a_0 + a_1^{(n)} \beta$  für kleine  $\beta$  und  $a_1^{(n)} \approx a_1$  für große  $n$ , können wir  $E^{(n)}(\beta)$  durch  $a_1$  approximieren.

Wir werden nun sehen, dass sich das Spektrum von  $H_0 + \beta V$  nahe des ungestörten Eigenwerts konzentriert und, dass das Zentrum dieser spektralen Konzentration durch die asymptotische Reihe  $\sum_m a_m \beta^m$  gegeben ist. Als Erstes definieren wir diese spektrale Konzentration.

**DEFINITION 7.1.** Sei  $H_n$  eine Familie von selbstadjungierten Operatoren und sei  $\{P_n(\Omega)\}$  die Familie der projektionswertigen spektralen Maße von  $H_n$ . Seien  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}, T \subseteq \mathbb{R}$ . Wir sagen, dass *der Teil des Spektrums von  $H_n$  in  $T$  asymptotisch in  $S_n$  liegt* genau dann, wenn

$$s - \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(T \setminus S_n) = 0. \quad (7.2)$$

Konvergiert  $H_n \rightarrow H$  im starken Resolventensinne, so sagen wir, dass *der Teil des Spektrums von  $H_n$  in  $S_n$  asymptotisch der Teil des Spektrums von  $H$  in  $T$  ist* genau dann, wenn

$$s - \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(S_n) = P(T), \quad (7.3)$$

wobei  $\{P(\Omega)\}$  die projektionswertigen spektralen Maße von  $H$  sind.

BEISPIEL 7.2. Sei  $H = \text{id}$ ,  $H_n = \text{id} + n^{-1}X$ , wobei  $X$  der Multiplikationsoperator  $(Xf)(x) = xf(x)$  auf  $L^2(\mathbb{R})$  ist. Ist  $\chi_{(a,b)}$  der Multiplikationsoperator mit der charakteristischen Funktion auf das Intervall  $(a, b)$  ist, so ist  $P_n(1 - \alpha, 1 + \beta) = \chi_{(-n\alpha, n\beta)}$ , denn

$$(f, P_n(1 - \alpha, 1 + \beta)f) = \int |f(x)|^2 \chi_{\{1 + \frac{x}{n} \in (1 - \alpha, 1 + \beta)\}} dx = \int_{-n\alpha}^{n\beta} |f(x)|^2 dx. \quad (7.4)$$

Darüberhinaus ist der Teil des Spektrums von  $H_n$  in  $(0, 2)$  asymptotisch in  $(1 - n^{-1/2}, 1 + n^{-1/2})$  und umgekehrt ist der Teil des Spektrums von  $H_n$  in  $(1 - n^{-1/2}, 1 + n^{-1/2})$  asymptotisch im Spektrum von  $H$  in  $(0, 2)$ . Um die Verbindung zwischen diesem asymptotischen Enthaltensein und der intuitiven Definition von „Konzentration“ zu verstehen, betrachtet man die Spektralmaße bezüglich eines bestimmten Vektors  $\psi$ . Ist  $d\mu_n(\lambda) = d(\psi, P_n(\lambda)\psi)$ , so ist  $d\mu_n(\lambda) = d\mu_1(1 + (\lambda - 1)n^{-1})$  und daher  $d\mu_n \rightarrow \delta(\lambda - 1)$ .

Wir haben in diesem Beispiel eine charakteristische Symmetrie festgestellt:

BEHAUPTUNG 7.3. *Angenommen, es konvergiert  $H_n \rightarrow H$  im starken Resolventensinne. Sei  $T = (a, b)$  mit  $a, b \notin \sigma_{pp}(H)$  und  $S_n \subseteq T$  für hinreichend großes  $n$ . Dann ist der Teil des Spektrums von  $H_n$  in  $T$  genau dann asymptotisch in  $S_n$ , wenn der Teil des Spektrums von  $H_n$  in  $S_n$  asymptotisch im Spektrum von  $H$  in  $T$  ist.*

BEWEIS. Da  $s - \lim P_n(T) = P(T)$ , ist  $s - \lim P_n(S_n) = P(T)$  genau dann, wenn  $s - \lim P_n(T \setminus S_n) = 0$ .  $\square$

Es ist wichtig zu bemerken, dass der Begriff von asymptotischer Konzentration eine Eigenschaft einer Folge von Operatoren  $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ist. Es ist daher sinnlos zu sagen, dass das Spektrum eines einzelnen Operators  $H_n$  sich in  $S_n$  konzentriert. In obigem Beispiel sind alle  $H_n$  unitär äquivalent, weshalb  $\sigma(H_n) = \sigma(H_m)$  für alle  $n, m \in \mathbb{N}$ .

Wir können nun eine Vermutung über das Verhältnis von  $a_0 + a_1\beta$  und  $H_0 + \beta V$  am Beispiel des Stark-Effekts aufstellen. Angenommen, wir fänden ein hinreichend kleines Intervall  $I$  um die ungestörte Grundzustandsenergie  $a_0$  mit  $\sigma(H_0) \cap I = \{a_0\}$  und eine Funktion  $f(\beta)$  mit  $\beta^{-1}f(\beta) \rightarrow 0$  so, dass der Teil des Spektrums von  $H(\beta)$  in  $(a_0 + a_1\beta - f(\beta), a_0 + a_1\beta + f(\beta))$  asymptotisch das Spektrum von  $H_0$  in  $I$  ist. Diese Eigenschaft bestimmt  $a_1$  eindeutig (Aufgabe). Obwohl also  $H(\beta)$  keinen Eigenwert nahe  $a_0 + \beta a_1$  hat, gibt es spektrale Konzentration bei  $a_0 + a_1\beta$  für  $\beta \rightarrow 0$ . Um dies zu zeigen, definieren wir sogenannte Pseudo-Eigenwerte und -Eigenvektoren.

DEFINITION 7.4. Sei  $H(\beta)$  eine Familie selbstadjungierter Operatoren, die für kleine  $\beta \in \mathbb{R}$  definiert sind und  $H(\beta) \rightarrow H_0$  für  $\beta \rightarrow 0$  im starken Resolventensinne erfüllen. Sei  $E_0$  ein isolierter, nicht-entarteter Eigenwert von  $H_0$  mit zugehörigem normierten Eigenvektor  $\psi_0$ . Eine Familie von Vektoren  $\psi(\beta)$  ( $\beta \in \mathbb{R}$ ) und Zahlen  $E_0 + \beta E_1$  heißen genau dann *Pseudo-Eigenvektor erster Ordnung* und *Pseudo-Eigenwert erster Ordnung*, wenn

- a)  $\lim_{\beta \rightarrow 0} \|\psi(\beta) - \psi_0\| = 0$
- b)  $\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta^{-1} \|(H(\beta) - E_0 - \beta E_1)\psi(\beta)\| = 0$

Wir verwenden die Aussage „ $E_0 + \beta E_1$  ist ein Pseudo-Eigenwert erster Ordnung von  $H(\beta)$ “ als Abkürzung dafür, dass ein Pseudo-Eigenvektor  $\psi(\beta)$  mit zugehörigem Pseudo-Eigenwert  $E_0 + \beta E_1$  gibt.

SATZ 7.5. Seien  $H_0$  und die Familie der  $H(\beta)$  für alle  $\beta \in \mathbb{R}$  selbstadjungiert und  $H(\beta) \rightarrow H_0$  für  $\beta \rightarrow 0$  im starken Resolventensinne. Sei  $E_0$  ein isolierter, nicht-entarteter Eigenwert von  $H_0$  und  $I$  ein so kleines Intervall um  $E_0$ , dass  $\bar{I} \cap \sigma(H_0) = \{E_0\}$ . Dann gibt es eine Funktion  $f(\beta)$  mit  $\frac{f(\beta)}{\beta} \rightarrow 0$  so, dass der Teil des Spektrums von  $H(\beta)$  in  $I$  genau dann asymptotisch in

$$I_\beta := (E_0 + \beta E_1 - f(\beta), E_0 + \beta E_1 + f(\beta)) \quad (7.5)$$

liegt, wenn  $E_0 + \beta E_1$  ein Pseudo-Eigenwert erster Ordnung von  $H(\beta)$  ist.

BEWEIS.  $\Rightarrow$ : Seien  $P^\beta(\Omega)$  die Spektralprojektionen von  $H(\beta)$ . Ist der Teil von  $\sigma(H(\beta))$  in  $I$  asymptotisch in  $I_\beta$  enthalten, so konvergiert  $P^\beta(I_\beta)$  stark gegen  $P^0(I) = P^0(\{E_0\})$ , da  $s - \lim P^\beta(\Omega) = P^0(\Omega)$  per Voraussetzung. Ist insbesondere  $\psi_0$  der ungestörte Eigenvektor von  $H_0$  und  $\psi(\beta) = P^\beta(I_\beta)\psi_0$ , so konvergiert  $\psi(\beta) \rightarrow \psi_0$  in Norm und darüberhinaus

$$\beta^{-1} \|(H(\beta) - E_0 - \beta E_1)\psi(\beta)\| \leq \beta^{-1} f(\beta) \|\psi(\beta)\| \rightarrow 0 \quad (7.6)$$

für  $\beta \rightarrow 0$ . Daher ist  $E_0 + \beta E_1$  ein Pseudo-Eigenwert erster Ordnung.

$\Leftarrow$ : Sei umgekehrt  $E_0 + \beta E_1$  ein Pseudo-Eigenwert erster Ordnung mit zugehörigem Eigenvektor  $\psi(\beta)$ . Sei

$$f(\beta) = \|(H(\beta) - E_0 - \beta E_1)\psi(\beta)\|^{1/2} \beta^{1/2}. \quad (7.7)$$

Dann ist  $\frac{f(\beta)}{\beta} \rightarrow 0$  für  $\beta \rightarrow 0$ . Wir zeigen nun, dass  $P^\beta(I_\beta)$  stark gegen  $P^0(\{E_0\})$  konvergiert.

$$\begin{aligned} \beta^{-2} f(\beta)^4 &= \|(H(\beta) - E_0 - \beta E_1)\psi(\beta)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - E_0 - \beta E_1)^2 d(\psi(\beta), P^\beta(\lambda)\psi(\beta)) \\ &\geq f(\beta)^2 \int_{\lambda \notin I_\beta} d(\psi(\beta), P^\beta(\lambda)\psi(\beta)) = f(\beta)^2 \|(\text{id} - P^\beta(I_\beta))\psi(\beta)\|^2, \end{aligned} \quad (7.8)$$

da  $d(\psi(\beta), P^\beta(\lambda)\psi(\beta))$  ein positives Maß und  $(\lambda - E_0 - \beta E_1)^2 \geq f(\beta)^2$  für  $\lambda \notin I_\beta$  ist. Daher ist  $\lim_{\beta \rightarrow 0} \|(\text{id} - P^\beta(I_\beta))\psi(\beta)\| \leq \lim_{\beta \rightarrow 0} \beta^{-1} f(\beta) = 0$ . Da zudem

$$\|(\text{id} - P^\beta(I_\beta))\psi_0\| \leq \|(\text{id} - P^\beta(I_\beta))\psi(\beta)\| + \|\psi(\beta) - \psi_0\|, \quad (7.9)$$

folgern wir, dass

$$(\text{id} - P^\beta(I_\beta))P^0(\{E_0\}) \rightarrow 0 \quad (7.10)$$

in Norm konvergiert. Daher konvergiert auch

$$P^\beta(I \setminus I_\beta)P^0(\{E_0\}) = P^\beta(I \setminus I_\beta)(\text{id} - P^\beta(I_\beta))P^0(\{E_0\}) \rightarrow 0. \quad (7.11)$$

Darüberhinaus impliziert die starke Resolventenkonvergenz von  $H(\beta) \rightarrow H_0$ , dass  $P^\beta(I) \rightarrow P^0(\{E_0\})$  und daher, dass

$$s - \lim_{\beta \rightarrow 0} P^\beta(I \setminus I_\beta)(\text{id} - P^0(\{E_0\})) = 0. \quad (7.12)$$

Daraus folgert man schließlich  $s - \lim_{\beta \rightarrow 0} P^\beta(I \setminus I_\beta) = 0$ .  $\square$

SATZ 7.6. Sei  $\beta$  in einer Umgebung  $N$  von 0 und  $H(\beta)$  eine Familie selbstadjungierter Operatoren mit  $H_0 = H(0)$ . Angenommen, es gibt einen symmetrischen Operator  $V$ , sodass

a)  $H_0$  ist auf  $\mathcal{D}(H_0) \cap \mathcal{D}(V)$  wesentlich selbstadjungiert

- b) Ist  $\varphi \in \mathcal{D}(H_0) \cap \mathcal{D}(V)$ , dann ist für alle  $\beta \in N$   $\varphi \in \mathcal{D}(H(\beta))$  und  $H(\beta)\varphi = H_0\varphi + V\varphi$   
c)  $E_0$  ist ein isolierter Eigenwert von  $H_0$  mit Multiplizität 1 und der zugehörige Eigenvektor  $\psi_0$  ist in  $\mathcal{D}(V)$

Sei  $I$  ein kleines, offenes Intervall um  $E_0$  mit  $\sigma(H_0) \cap \bar{I} = \{E_0\}$  und sei  $E_1 = (\psi_0, V\psi_0)$  der Rayleigh-Schrödinger-Koeffizient der ersten Ordnung für die Störung von  $E_0$ .

Dann gibt es eine Funktion  $f(\beta)$  mit  $\beta^{-1}f(\beta) \rightarrow 0$ , sodass der Teil des Spektrums von  $H_0 + \beta V$  in  $I$  asymptotisch in  $(E_0 + \beta E_1 - f(\beta), E_0 + \beta E_1 + f(\beta))$  ist.

BEWEIS. Mit Hilfe von a), b) und der ersten Resolventengleichung kann man zeigen, dass  $H(\beta) \rightarrow H_0$  im starken Resolventensinne konvergiert. Wegen des vorigen Satzes genügt es einen Pseudo-Eigenvektor  $\psi(\beta)$  erster Ordnung mit Pseudo-Eigenwert  $E_0 + \beta E_1$  zu konstruieren. Seien dazu  $\{P^\beta(\Omega)\}$  die Spektralprojektionen von  $H(\beta)$  und wähle  $\psi(\beta) = P^\beta(I)\psi_0$ . Da wegen der starken Resolventenkonvergenz  $s - \lim P^\beta(I) = P^0(I)$  ist, konvergiert auch per Definition  $\psi(\beta) \rightarrow \psi_0$ . Da  $\psi_0 \in \mathcal{D}(H(\beta))$  für alle  $\beta \in N$ , ist  $P^\beta(I)H(\beta)\psi_0 = H(\beta)P^\beta(I)\psi_0$ . Daher ist

$$\begin{aligned} \|\beta^{-1}(H(\beta) - E_0 - \beta E_1)\psi(\beta)\| &= \|\beta^{-1}P^\beta(I)(H_0 + \beta V - E_0 - \beta E_1)\psi_0\| = \|P^\beta(I)(V - E_1)\psi_0\| \\ &\leq \|[P^\beta(I) - P^0(I)](V - E_1)\psi_0\| + \|P^0(I)(V - E_1)\psi_0\| \end{aligned} \quad (7.13)$$

Da  $s - \lim P^\beta(I) = P^0(I)$ , konvergiert der erste Term des letzten Ausdrucks gegen Null. Da  $E_0$  nicht-entartet ist, ist  $P^0(I)\varphi = (\psi_0, \varphi)\psi_0$  und daher

$$P^0(I)(V\psi_0) = E_1\psi_0, \quad (7.14)$$

weshalb der zweite Term des letzten Ausdrucks identisch Null ist. Das zeigt, dass  $\psi(\beta)$  ein Pseudo-Eigenvektor erster Ordnung ist.  $\square$

BEISPIEL 7.7 (Stark-Effekt des Wasserstoffatoms). Sei  $H_0 = -\Delta - |x|^{-1}$  und  $V = E_0 e \cdot \mathbf{x}$ . Wie wir bereits gesehen haben, ist  $H(\beta)$  auf  $\mathcal{D}(H_0) \cap \mathcal{D}(V)$  wesentlich selbstadjungiert. Dann ist  $E_0 = -\frac{1}{4}$  die Grundzustandsenergie von  $H_0$  und  $\psi_0$  ist explizit bekannt und erfüllt  $|\psi_0(x)| \leq A \exp(-|x|/2)$  für ein geeignetes  $A$ , sowie  $\psi_0 \in \mathcal{D}(V)$ . Damit sind die Bedingungen des letzten Satzes erfüllt. Da  $E_1 = (\psi_0, V\psi_0) = 0$ , ist der Teil des Spektrums von  $H(\beta)$  nahe  $E_0$  bei  $(E_0 - \lambda\beta, E_0 + \lambda\beta)$  für alle  $\lambda > 0$  konzentriert.

Man kann darüberhinaus zeigen, dass alle Koeffizienten der Rayleigh-Schrödinger-Reihe endlich sind. Zudem kann man für alle  $n$  ein  $f^{(n)}(\beta)$  mit  $|\beta|^{-n} f^{(n)}(\beta) \rightarrow 0$  finden, sodass der Teil des Spektrums von  $H(\beta)$  nahe  $E_0$  bei  $(\sum_{m=0}^n E_m \beta^m - f^{(n)}(\beta), \sum_{m=0}^n E_m \beta^m + f^{(n)}(\beta))$  für  $\beta \rightarrow 0$  konzentriert ist.

Neben der Verallgemeinerung von Pseudo-Eigenwerten und -Eigenvektoren auf höhere Ordnungen, hat der letzte Satz eine weitere Verallgemeinerung: diskrete Energieniveaus endlicher, aber nicht-trivialer Entartung können behandelt werden. Im Beispiel des Stark-Effekts ist der erste angeregte Zustand vierfach entartet und spaltet sich dabei in einen zweidimensionalen Pseudo-Eigenwert und zwei eindimensionale Pseudo-Eigenwerte erster Ordnung auf. Man kann explizit vier linear unabhängige Pseudo-Eigenvektoren finden, die gegen Vektoren  $\psi_i$  konvergieren, die  $H_0\psi_i = -\frac{1}{16}\psi_i$  erfüllen. Die entsprechenden Pseudo-Eigenwerte sind dann zwei mal

$-\frac{1}{16}$  und einmal  $-\frac{1}{16} \pm a\beta$ , wobei  $a$  durch „entartete Störungstheorie“ ausgerechnet werden kann.

### 8. Resonanzen und Fermis goldene Regel

Wir haben soweit „singulärer werdende Störungen“ von isolierten Eigenwerten betrachtet. Wir haben mit dem Fall begonnen, wo sowohl ein gestörter Eigenwert, als auch eine konvergente Störungsreihe existierte. Danach haben wir Fälle gesehen, wo es zwar einen gestörten Eigenwert, aber keine konvergente Störungsreihe mehr gegeben hat. Im letzten Abschnitt gab es dann nicht einmal mehr einen gestörten Eigenwert. In diesem letzten Abschnitt betrachten wir den singulärsten Fall, wo es nicht nur keinen gestörten Eigenwert mehr gibt, sondern, wo schon der ungestörte Eigenwert nicht isoliert ist.

Ein einfaches Beispiel ist das nicht-relativistische Helium-Atom mit unendlich schwerem Kern und der Coulombwechselwirkung zwischen den Elektronen als Störung, das heißt

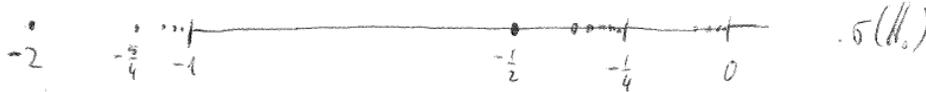
$$H_0 = -\Delta_1 - \frac{2}{|x_1|} - \Delta_2 - \frac{2}{|x_2|} + V(x_1 - x_2) \quad (8.1)$$

und  $V = |x_1 - x_2|^{-1}$  auf  $L^2(\mathbb{R}^6)$ . Punkte in  $\mathbb{R}^6$  werden wir mit  $\langle x_1, x_2 \rangle$ ,  $x_i \in \mathbb{R}^3$  bezeichnen. Ist  $h = -\Delta - 2|x|^{-1}$  auf  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , so ist  $H_0 = \text{id} \otimes h + h \otimes \text{id}$ . Da sowohl  $h$ , als auch  $H_0$  selbstadjungiert sind, kann das Spektrum von  $H_0$  durch das Spektrum von  $h$  bestimmt werden, wenn man  $L^2(\mathbb{R}^6)$  mit  $L^2(\mathbb{R}^3) \otimes L^2(\mathbb{R}^3)$  identifiziert. Die Eigenwerte von  $h$  sind durch  $\{-n^{-2}\}_{n \in \mathbb{N}}$  gegeben, weshalb  $H_0$  die Eigenwerte

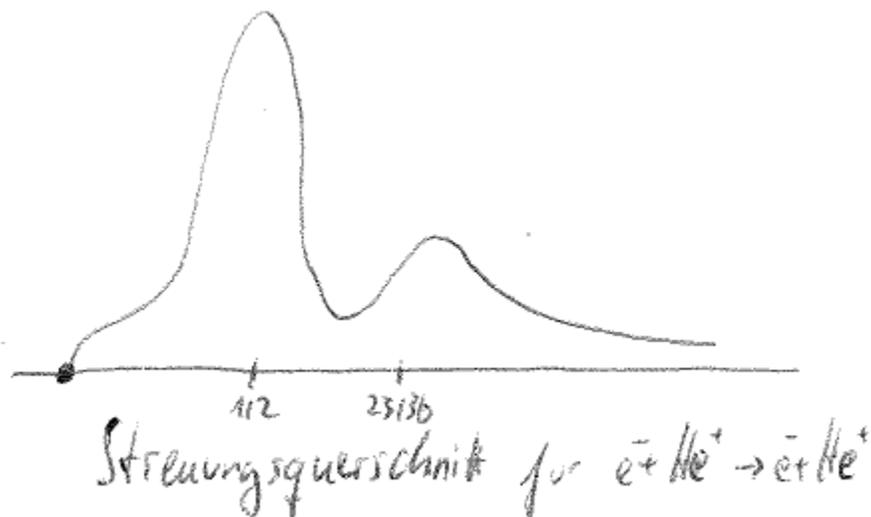
$$\{E_{n,m}\} = \left\{ - \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2} \right) \right\}_{n,m \in \mathbb{N}} \quad (8.2)$$

besitzt. Darüberhinaus ist (siehe HVZ)  $\sigma_{ess}(H_0) = [-1, \infty)$ , da  $\sigma_{ess}(h) = [0, \infty)$  und  $\inf \sigma(h) = -1$ . Damit ist

$$\sigma(H_0) = \{x + y : x, y \in [0, \infty) \cup \{-n^{-2}\}_{n \in \mathbb{N}}\} = \{-1 - n^{-2}\}_{n \in \mathbb{N}} \cup [-1, \infty) \quad (8.3)$$



Die Eigenwerte  $E_{n,m}$  sind daher für  $n, m \geq 2$  im stetigen Spektrum eingebettet. Wenn nun die Störung angeschaltet wird, erwartet man, dass sich die eingebetteten Eigenwerte „auflösen“. Jedoch beobachtet man eine Art „Erinnerung“ dieser Eigenwerte von  $H_0$  in der Physik des Helium-Atoms. Bei der Streuung von Elektronen an Helium-Ionen beobachtet man Beulen im Streuquerschnitt der gesamten  $\text{He}^+ + e$ -Energie nahe der Eigenwerte  $E_{n,m}$ . Man findet ähnliche Beulen bei der Absorption von Licht durch Helium. Die Frequenz des einfallenden Lichts bei den Beulen beträgt typischerweise gerade die Energiedifferenz zwischen  $E_{n,m}$  und  $E_{1,1}$ . Diese Beulen nennt man auch *Auger-* oder *selbstionisierende Zustände*. Neben der Beobachtung dieser Auger-Zustände stellt man fest, dass die Breite dieser Beulen gut durch Fermis goldene Regel beschrieben wird.



Wir beginnen damit die mathematische Größe, die der Breite der Beulen entspricht, zu isolieren und zeigen dann, dass die goldene Regel eine Konsequenz aus der Kato–Rellich-Theorie regulärer Störungen ist – zumindest im Falle des Heliums. Wir bemerken noch, dass Fermis goldene Regel heuristisch hergeleitet wird und auf einem physikalischen Modell beruht, welches automatisch Beulen produziert. Zudem wurde sie in vielen physikalischen Situationen erfolgreich angewendet, ohne, dass sie rigoros gerechtfertigt wurde.

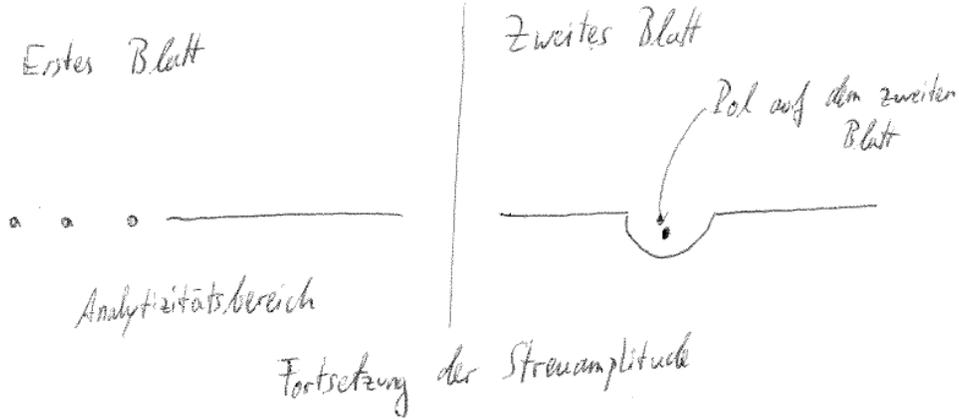
Unsere Interpretation der goldenen Regel geschieht in drei Schritten – zwei davon sind „quasimathematisch“ und der letzte rigoros. In den ersten beiden Schritten werden wir die Größe extrahieren, die wir für die mathematische Untersuchung benötigen. Diese ist zwar nicht ganz die Breite der Beule, ist jedoch mit ihr durch einige nicht-rigoreuse Argumente verbunden.

**BEMERKUNG 8.1.** Dieses Vorgehen ist in der mathematischen Physik nicht unüblich. Die mathematisch präzisen Größen sind nicht gleich den experimentellen Messgrößen. Sie können jedoch durch eine Reihe nicht-rigorooser Argumente verbunden werden.

- (1) Im ersten Schritt werden wir die Breite der Beule mit dem Imaginärteil der Position der Pole der „Streuamplitude“ verbinden.
- (2) Wir betrachten dann die Pole der analytischen Fortsetzung der Resolvente. Der quasimathematische Teil ersetzt also die nicht-präzise „Breite der Beule“ mit dem präzisen „Imaginärteil der Position eines Pols auf dem zweiten Blatt der analytischen Fortsetzung des Erwartungswerts der Resolvente auf einer dichten Menge von Zuständen“.
- (3) Diese präzise Größe werden wir studieren können, indem wir zeigen, dass sie gleich dem Imaginärteil eines Eigenwerts eines nicht-selbstadjungierten Operators ist. Das technische Werkzeug hierfür ist das *komplexe Skalieren*.

Streuung wird in der Quantenmechanik durch das Betragsquadrat der „Streuamplitude“ beschrieben. Die Streuamplitude ist eine komplexwertige Funktion der Energie und des Streuwinkels. Sie ist üblicherweise analytisch in der Energie in der abgeschnittenen Ebene  $\mathbb{C} \setminus \sigma(H)$ , wobei  $H$  der Hamilton-Operator der wechselwirkenden Quantensystems ist. Angenommen, die Streuamplitude  $f(E)$  hat eine

analytische Fortsetzung auf das zweite Blatt und es gibt einen einfachen Pol auf dem zweiten Blatt an der Stelle  $E_\Gamma - i\Gamma/2$  nahe der reellen Achse.



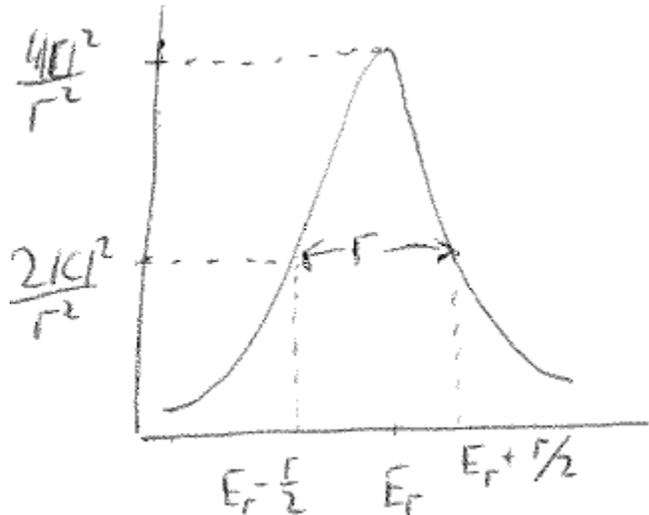
Dann ist  $f$  von der Form

$$f(E) = \frac{C}{E - E_\Gamma + \frac{i}{2}\Gamma} + f_b(E), \quad (8.4)$$

wobei der Hintergrund  $f_b$  bei  $E_\Gamma - \frac{i}{2}\Gamma$  analytisch ist. Ist der Pol nahe der reellen Achse, und ist  $f_b(E_\Gamma)$  nicht zu groß, dann ist

$$|f(E)|^2 = \frac{|C|^2}{(E - E_\Gamma)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} + R \quad (8.5)$$

mit einem bei  $E = E_\Gamma$  kleinen Rest  $R$ . Der erste Summand ist nichts anderes als eine Breit-Wigner-Funktion, die bei  $E_\Gamma$  zentriert und FWHM (Full width half maximum)  $\Gamma$  hat.



Ist der „Pol-Term“ viel größer als der Hintergrund-Term für  $E = E_\Gamma$ , so ist  $\Gamma$  ungefähr die Breite einer „Beule“ in  $|f(E)|^2$ . Damit ist die erste Hälfte der quasimathematischen Aufgabe, die Breite der Beule zu „isolieren“, erledigt.

Im zweiten Teil werden wir zeigen, dass die Streuamplitude mit den Randwerten der Resolvente  $(H - E)^{-1}$  verknüpft ist, wenn  $E$  sich der reellen Achse von der positiven Halbebene aus nähert. Wir müssen daher eine Methode entwickeln, die Resolvente  $R_\psi(E) := (\psi, (H - E)^{-1}\psi)$  auf das zweite Blatt fortzusetzen. Sollte so eine Fortsetzung für eine dichte Menge von  $\psi \in \mathcal{H}$  möglich sein, und sollte  $R_\psi(E)$  für diese Menge einen Pol bei  $E = E_\Gamma - \frac{i}{2}\Gamma$  haben, so werden wir den Resonanzpol mit  $E$  und die Resonanzbreite mit  $\Gamma$  verknüpfen. Wir brauchen natürlich einen Grund, dass der Pol mit  $H$  und nicht mit der bestimmten dichten Menge der  $\psi$  verknüpft ist. Daher werden wir auch nur solche  $\psi$  untersuchen, für die  $(\psi, (H_0 - z)^{-1}\psi)$  auch eine Fortsetzung auf das zweite Blatt, aber ohne den Pol bei  $E_\Gamma - \frac{i}{2}\Gamma$ , hat.

Wir haben damit die Aufgabe gelöst eine mathematische Größe zu finden, die wir gerne untersuchen würden.

**DEFINITION 8.2.** Angenommen, es gibt eine Dichte Menge von Vektoren  $D \subseteq \mathcal{H}$ , sodass für alle  $\psi \in D$  sowohl  $R_\psi(z) = (\psi, (H - z)^{-1}\psi)$ , als auch  $R_\psi^{(0)}(z) = (\psi, (H_0 - z)^{-1}\psi)$  eine analytische Fortsetzung auf das zweite Blatt (über die reelle Achse der oberen Halbebene des ersten Blatts) hat. Wir sagen, dass  $z_0 = E_\Gamma - \frac{i}{2}\Gamma$  genau dann ein *Resonanzpol* ist, wenn  $R_\psi^{(0)}$  bei  $z_0$  analytisch und  $R_\psi(z)$  bei  $z_0$  für ein  $\psi$  einen Pol hat.  $\Gamma$  heißt die *Breite der Resonanz*.

Wir würden wie gesagt  $\Gamma$  gerne als Breite einer Beule auffassen, doch dieser Schritt ist aus zwei Gründen nicht präzise:

- (1) Die Formel, die die Streuamplitude mit der Resolvente verknüpft beinhaltet im Allgemeinen keine Erwartungswerte von Zuständen  $\psi \in D$
- (2) Der Hintergrund  $f_b$  könnte nicht vernachlässigbar sein

Um diese Resonanzpole studieren zu können, verwenden wir Dilatationen. Wir skizzieren die Ideen hier lediglich und wenden sie zum Schluß auf  $-\Delta - 2|x|^{-1}$  und den Helium-Hamilton-Operator an.

Für  $\theta \in \mathbb{R}$  definieren wir den Operator  $u(\theta)$  auf  $L^2(\mathbb{R}^3)$  durch

$$(u(\theta)f)(x) = e^{3\theta/2}f(e^\theta x). \quad (8.6)$$

$u(\theta)$  ist eine unitäre Ein-Parametergruppe auf  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . Man sieht, dass  $u(\theta)$  den Definitionsbereich  $\mathcal{D}(h) = \mathcal{D}(-\Delta)$  invariant lässt und

$$h(\theta) := u(\theta)hu(\theta)^{-1} = -e^{-2\theta}\Delta - \frac{2me^{-\theta}}{|x|} \quad (8.7)$$

ist. Die erste wichtige Bemerkung ist, dass  $h(\theta)$  eine Fortsetzung zu einer Familie von Operatoren hat, die analytisch im Sinne von Kato auf der gesamten Ebene sind.

Wir untersuchen nun das Spektrum von  $h(\theta)$ . Das Spektrum von  $-\Delta$  ist bekanntlich  $[0, \infty)$ . Da  $|x|^{-1}(-\Delta + 1)^{-1} \in \mathcal{S}^2(L^2(\mathbb{R}^3))$  wird nach dem Satz von Weyl  $-\Delta - 2e^\theta|x|^{-1}$  Spektrum in  $[0, \infty)$ , sowie eine Menge isolierter Punkte außerhalb  $[0, \infty)$  haben, selbst wenn  $\theta$  nicht reell ist. Darüberhinaus ist jeder dieser erwähnten Punkte ein Eigenwert endlicher Multiplizität. Das Spektrum von  $h(\theta)$  besteht daher aus  $\{e^{-2\theta}\lambda : \lambda \in [0, \infty)\}$ , sowie möglicherweise etwas diskretem Spektrum. Die Punkte des diskreten Spektrums werden durch analytische Funktionen  $f(\theta)$  gegeben sein. Da

$$u(\theta_0)h(\theta_1 + i\theta_2)u(\theta_0)^{-1} = h(\theta_1 + \theta_0 + i\theta_2) \quad (8.8)$$

für  $\theta_0, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ , ist  $h(\theta_1 + i\theta_2)$  unitär äquivalent zu  $h(\theta_1' + i\theta_2)$ , weshalb sie die selben Eigenwerte haben müssen. Die  $f(\theta)$  sind daher konstant, wenn  $\text{Im}(\theta)$  konstant ist. Da die  $f(\theta)$  analytisch sind, sind sie damit für alle  $\theta$  konstant. Da  $\sigma_{pp}(h) = \{-n^{-2}\}_{n \in \mathbb{N}}$  ist damit schließlich

$$\sigma(h(\theta)) = \{e^{-2\theta} \lambda : \lambda \in [0, \infty)\} \cup \{-n^{-2}\}_{n \in \mathbb{N}} \quad (8.9)$$



Wir haben damit jedoch nicht gezeigt, dass  $h(\theta)$  keine Eigenwerte im Sektor  $0 > \arg(\lambda) > -2\text{Im}(\theta)$  haben könnte. Eine genauere Untersuchung unter Zuhilfenahme expliziter Lösungen der Coulomb-Schrödinger-Gleichung zeigt jedoch, dass dies nicht der Fall ist.

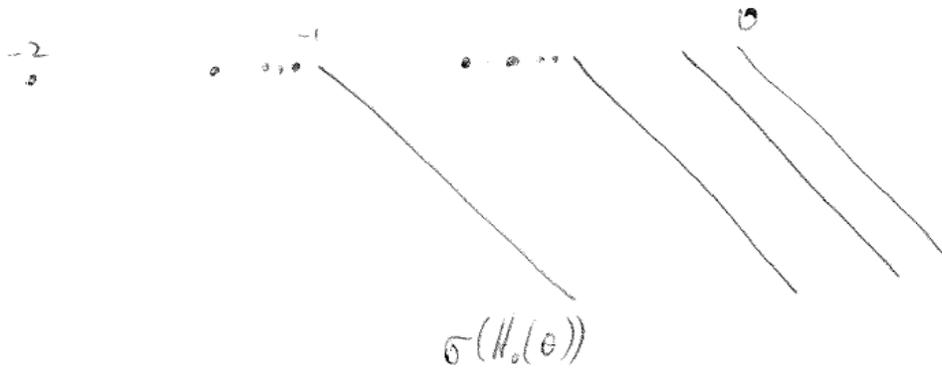
Als Nächstes betrachten wir das Verhalten von  $H_0$  und  $H_0 + \beta V$  unter Skalieren. Dazu definieren wir  $U(\theta)$  auf  $\mathbb{R}^6$  durch  $(U(\theta)F)(x_1, x_2) = e^{3\theta} F(e^\theta x_1, e^\theta x_2)$  für  $\theta \in \mathbb{R}$ . Für  $\theta \in \mathbb{R}$  seien weiter  $V(\theta) := U(\theta)VU(\theta)^{-1} = e^{-\theta}V$  und  $H_0(\theta) = U(\theta)H_0U(\theta)^{-1} = h(\theta) \otimes \text{id} + \text{id} \otimes h(\theta)$ . Sowohl  $H_0(\theta)$ , als auch  $V(\theta)$  haben analytische Fortsetzungen vom Typ (A) auf die gesamte Ebene.  $H_0(\theta)$  ist für alle  $\theta$  von der Form  $A \otimes \text{id} + \text{id} \otimes B$ , obwohl  $A$  und  $B$  nicht selbstadjungiert sind. Wir zeigen später, dass trotzdem in diesem Fall

$$\sigma(A \otimes \text{id} + \text{id} \otimes B) = \{x + y : x \in \sigma(A), y \in \sigma(B)\}. \quad (8.10)$$

Daher ist

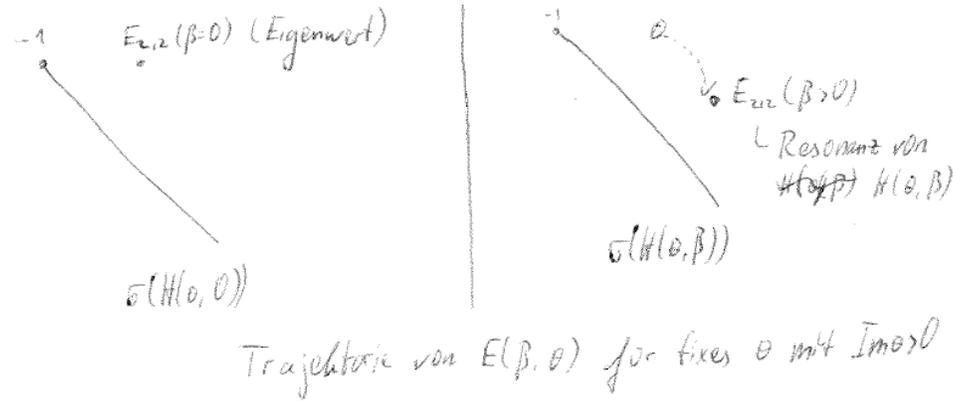
$$\begin{aligned} \sigma(H_0(\theta)) &= \{x + y : x, y \in \sigma(h_0(\theta))\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{-n^{-2} + \lambda e^{-2\theta} : \lambda \geq 0\} \cup \{-n^{-2} - m^{-2} : n, m \in \mathbb{N}\} \cup \{\lambda e^{-2\theta} : \lambda \geq 0\} \end{aligned} \quad (8.11)$$

Insbesondere sind die in  $\sigma(H_0)$  eingebetteten Eigenwerte nun isolierte, diskrete Eigenwerte von  $H_0(\theta)$  für nicht-reelle  $\theta$ .



Die Eigenwerte  $E_{n,m}$  sind für  $n, m \geq 2$  alle entartet. Es ist möglich Symmetrien zu verwenden, um  $L^2(\mathbb{R}^6)$  in eine unendliche direkte Summe von Räumen  $\mathcal{H}_k$  zu zerlegen. Die  $\mathcal{H}_k$  sind alle links-invariant unter allen  $H_0(\theta)$  und  $V(\theta)$ . Für alle  $n, m$  ist dann  $E_{n,m}$  ein Eigenwert von nur mehr endlich vielen Operatoren  $H_0(\theta) \upharpoonright \mathcal{H}_k$ . Für einige der  $\mathcal{H}_k$  ist  $E_{n,m}$  nicht entartet. Diese  $\mathcal{H}_k$ , für die  $E_{n,m}$  ein Eigenwert von  $\mathcal{H}_0(\theta) \upharpoonright \mathcal{H}_k$  und solche für die der Eigenwert nicht entartet ist, hängen von  $n$  und  $m$  ab. Von nun an nehmen wir an, dass wir auf ein  $\mathcal{H}_k$  restringiert sind, auf dem  $E_{n,m}$  nicht entartet ist, ohne dabei neue Notation einzuführen. Details über entartete Theorie und Reduktion durch Symmetrien können in [RS78] gefunden werden.

Sei nun  $H(\theta, \beta) = H_0(\theta) + \beta V(\theta)$ . Verwendet man reguläre Störungstheorie, sieht man, dass für fixes  $\theta$  und kleines  $|\beta|$  der Operator  $H(\theta, \beta)$  einen Eigenwert nahe  $E_{n,m}$  hat, der durch eine konvergente Potenzreihe in  $\beta$  gegeben ist.



Jetzt fixieren wir  $\beta$  und drehen an  $\theta$ . Da  $H(\theta, \beta)$  eine analytische Familie in  $\theta$  für fixes  $\beta$  ist, gibt es einen Eigenwert  $E^{(\theta)}(\beta)$ , solange der Eigenwert isoliert bleibt.  $E^{(\theta)}(\beta)$  ist in  $\theta$  analytisch für  $\beta$  fix. Da  $H(\theta, \beta)$  zu  $H(\theta', \beta)$  unitär äquivalent ist, wenn  $\theta - \theta' \in \mathbb{R}$ , ist  $E^{(\theta)}(\beta)$  konstant in  $\theta$ . Wir können dann zeigen:

BEHAUPTUNG 8.3. Ist  $\beta_0 \in \mathbb{R}$  und  $\text{Im}(\theta_0) > 0$ , so ist  $\text{Im}(E_{2,2}^{(\theta_0)}(\beta_0)) \leq 0$ .

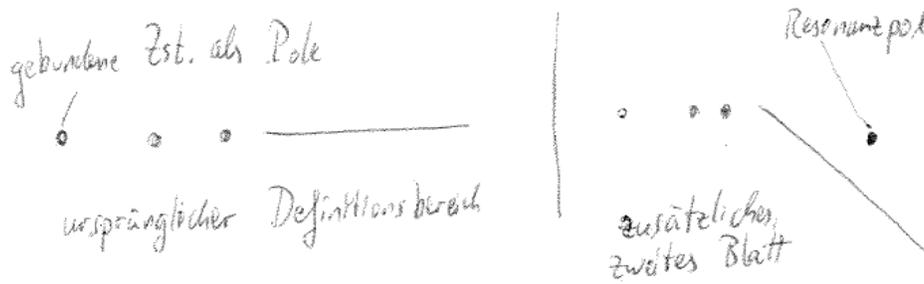
BEWEIS. Angenommen,  $\text{Im}(E_{2,2}^{(\theta_0)}(\beta_0)) > 0$ . Dann bleibt der Eigenwert isoliert, wenn wir  $\theta$  gegen Null laufen lassen unter der Bedingung  $\text{Im}(\theta) \geq 0$ . Dies würde jedoch implizieren, dass  $H(\theta, \beta)$  einen komplexen Eigenwert hätte, was jedoch nicht der Fall ist.  $\square$

Ist  $\text{Im}(E_{2,2}^{(\theta_0)}(\beta_0)) < 0$  und  $\theta$  geht nach Null, so fällt das wesentliche Spektrum auf den Eigenwert und wir können keine diskrete Störungstheorie mehr anwenden. Es gibt daher keinen Widerspruch zwischen der Selbstadjungiertheit von  $H_0 + \beta_0 V$  für  $\beta_0 \in \mathbb{R}$  und dem Auftreten komplexer Eigenwerte  $E_{2,2}^{(\theta_0)}(\beta_0)$  in der unteren Halbebene, wenn  $\beta_0 \in \mathbb{R}$  und  $\text{Im}(\theta_0) > 0$ .

Die zweite wichtige Bemerkung ist, dass die komplexen Eigenwerte von  $H(\theta, \beta)$  im Zusammenhang mit den Polen der Resolvente  $H(\beta) = H_0 + \beta V$  auf dem zweiten Blatt stehen. Sei dazu  $\psi \in \mathcal{H}$  ein Vektor, sodass  $U(\theta)\psi$  eine analytische Fortsetzung auf ganz  $\mathbb{C}$  hat. Wir wählen  $\psi$  als einen ganzen Vektor für den infinitesimalen Erzeuger der Gruppe  $U(\theta)$  und betrachten die Funktion  $R_\psi(E) = (\psi, (H_0 + \beta V - E)^{-1}\psi)$ , die ursprünglich auf der abgeschnittenen Ebene  $\mathbb{C} \setminus \sigma(H_0 + \beta V)$  definiert ist. Für  $\theta \in \mathbb{R}$  ist

$$R_\psi(E) = (U(\theta)\psi, U(\theta)(H_0 + \beta V - E)^{-1}U(\theta)^{-1}U(\theta)\psi) = (U(\theta)\psi, (H(\theta, \beta) - E)^{-1}U(\theta)\psi) \quad (8.12)$$

Wir fixieren dann  $E$  in der oberen Halbebene. Per analytischer Fortsetzung gilt die letzte Formel auch für  $0 \leq \text{Im}(\theta) \leq \frac{\pi}{2}$ . Wir können daher  $R_\psi(E)$  über die reelle  $E$ -Achse auf Teile des zweiten Blatts fortsetzen.



Da  $(H(\theta, \beta) - E)^{-1}$  Pole hat, wenn  $E$  ein Eigenwert von  $H(\theta, \beta)$  ist, wird die analytische Fortsetzung von  $R_\psi(E)$  Pole bei den komplexen Eigenwerten von  $H(\theta, \beta)$  haben. Zusammengefasst: *Die komplexen Eigenwerte von  $H(\theta, \beta)$  sind die Positionen der Pole der Resolvente auf dem zweiten Blatt.*

Per Definition ist die Breite der Pole dieser Resonanzen durch den Imaginärteil von  $E^{(\theta)}(\beta)$  gegeben.  $E^{(\theta)}(\beta)$  selbst ist wiederum durch eine konvergente Störungsreihe  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \beta^n$  gegeben, wenn  $\theta$  fix und  $\beta$  klein ist. Mit dem klassischen Konstanz-in- $\theta$ -Argument folgt, dass die  $a_n$  alle von  $\theta$  unabhängig sind. Offensichtlich ist  $a_0$  reell und, da  $\text{Im}(E) \leq 0$  für alle  $\beta \in \mathbb{R}$ , ist  $\text{Im}(a_1) = 0$ . Daher ist  $a_2$  der erste der  $a_n$  für den es möglich ist, dass  $\text{Im}(a_n) \neq 0$ . Konvergiert die Störungsreihe sehr schnell, dann ist  $|\text{Im}(E(\beta))| = \frac{\Gamma}{2} \approx (\text{Im}(a_2))\beta^2$ . Daher ist

$$\Gamma \approx 2\text{Im}(a_2)\beta^2. \quad (8.13)$$

$a_2$  ist ein Rayleigh-Schrödinger-Koeffizient und kann durch die anfangs besprochenen Methoden berechnet werden. Ist  $\Omega(\theta, 0)$  der ungestörte Eigenvektor von  $H(\theta, 0) \equiv H_0(\theta)$ , so ist explizit

$$a_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|E-E_0|=\epsilon} (\overline{\Omega(\theta, 0)}, V[H_0(\theta) - E]^{-1}V\Omega(\theta, 0)) \frac{dE}{E - E_0}, \quad (8.14)$$

wobei  $E_0$  der ungestörte Eigenwert und  $\overline{\Omega(\theta, 0)}$  der komplex konjugierte als Element von  $L^2(\mathbb{R}^6)$  ist. Nun betrachtet man die Funktion

$$f(\theta, E) = \overline{\Omega(\theta, 0)}, V(\theta)(H_0(\theta) - E)^{-1}V(\theta)\Omega(\theta, 0) - \frac{\left| \overline{\Omega(\theta, 0)}, V(\theta)\Omega(\theta, 0) \right|^2}{E_0 - E} \quad (8.15)$$

Dann sieht man, dass  $f(\theta, E)$  bei  $E = E_0$  für  $\theta$  fix mit  $\text{Im}(\theta) > 0$  analytisch ist, da der Pol-Term explizit subtrahiert wurde. Nach dem Cauchy-Integral-Satz ist daher

$$a_2 = f(\theta, E)|_{E=E_0} = \lim_{\epsilon \searrow 0} f(\theta, E_0 + i\epsilon) = \lim_{\epsilon \searrow 0} f(\theta = 0, E_0 + i\epsilon). \quad (8.16)$$

Im letzten Schritt haben wir verwendet, dass  $\text{Im}(E) > 0$  und  $f(\theta, E)$  für  $\text{Im}(\theta) = 0$  wohldefiniert und von  $\theta$  im Streifen  $0 \leq \text{Im}(\theta) \leq \frac{\pi}{2}$  unabhängig ist. Daher ist

$$\text{Im}(a_2) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{2i} [(\Omega_0, V\{(H_0 - E_0 - i\epsilon)^{-1} - (H_0 - E_0 + i\epsilon)^{-1}\}V\Omega_0) \quad (8.17)$$

$$- |(\Omega_0, V\Omega_0)|^2 \{(E - E_0 - i\epsilon)^{-1} - (E - E_0 + i\epsilon)^{-1}\}|_{E=E_0}]. \quad (8.18)$$

Wegen der Stoneschen Formel ist  $\text{Im}(a_2)$  eine Funktion der Spektralprojektionen von  $H_0$  abgesehen davon, dass die Subtraktion des Pols die Projektion auf den Eigenvektor  $\Omega_0$  subtrahiert. Wir können damit zeigen:

**SATZ 8.4** (Fermis goldene Regel für Auger-Zustände in Helium). *Seien  $n, m$  mit  $n, m > 1$  gegeben und restringiere auf einen Symmetrie-Unterraum  $\mathcal{H}_k$  auf dem  $E_{n,m}$  ein nicht-entarteter Eigenwert ist. Dann hat die Resolvente von*

$$-\Delta_1 - \Delta_2 - \frac{2}{|x_1|} - \frac{2}{|x_2|} + \frac{\beta}{|x_1 - x_2|} \quad (8.19)$$

für  $\beta \in \mathbb{R}$  klein einen Pol auf dem zweiten Blatt nahe  $E_0 \equiv a_0 = -n^{-2} - m^{-2}$ . Die Position des Pols ist durch die Funktion  $E(\beta)$  gegeben, die für kleine  $\beta$  analytisch ist und die Störungsreihe

$$E(\beta) = a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 + \dots \quad (8.20)$$

hat.

Sei  $\{P_\Omega\}$  die Spektralfamilie von  $H_0$  und definiere  $\tilde{P}(E) = P_{(-\infty, E) \setminus \{E_0\}}$ . Sei  $\Omega_0$  der ungestörte Eigenvektor von  $H_0$ , dann gilt

- (i)  $g(E) = (\Omega_0, V\tilde{P}(E)V\Omega_0)$  ist bei  $E = E_0$  analytisch
- (ii)  $\text{Im}(a_2) = \pi \frac{dg}{dE}|_{E=E_0}$

**BEWEIS.** Wegen der vorigen Definition müssen wir nur noch a) und b) beweisen. Wegen der Stoneschen Formel müssen wir daher nur noch zeigen, dass

$$(\Omega_0, V\{(H_0 - E)^{-1} - (E_0 - E)^{-1}P_{\{E_0\}}\}V\Omega_0) \quad (8.21)$$

eine analytische Fortsetzung vom Gebiet  $\text{Im}(E) > 0$  bis zur und unterhalb der reellen Achse nahe  $E = E_0$  hat. Denn dann ist  $g(E)$  das Integral einer analytischen Funktion und ihre Ableitung ist nur (bis auf einen Faktor  $\pi$ ) der Ausdruck, den wir eben schon für  $\text{Im}(a_2)$  hatten. Um zu sehen, dass die benötigte Funktion bereits

bei  $E = E_0$  analytisch ist, müssen wir nur zeigen, dass  $U(\theta)V\Omega_0$  eine analytische Fortsetzung auf den Streifen  $|\operatorname{Im}(\theta)| < \epsilon$  hat. Dazu bemerken wir

$$U(\theta)V\Omega_0 = [U(\theta)VU(\theta)^{-1}]U(\theta)\Omega_0 = (e^{-\theta}V)[U(\theta)\Omega_0]. \quad (8.22)$$

Dass  $U(\theta)\Omega_0$  eine analytische Fortsetzung hat, folgt aus einem Argument, das das Schwarzsche Reflexionsprinzip verwendet.  $\square$

Wir haben daher gezeigt, dass in niedrigster Ordnung Störungstheorie

$$\Gamma = 2\operatorname{Im}(a_2) = 2\pi \frac{d}{dE} (\Omega_0, V\tilde{P}(E)V\Omega_0) \Big|_{E=E_0} \quad (8.23)$$

ist. Dies ist gerade Fermis goldene Regel.



## KAPITEL 3

# Spektraltheorie

Wir sind in diesem Abschnitt nicht nur am Spektrum  $\sigma(H)$ , sondern auch an qualitativen und quantitativen Eigenschaften der Teilmengen  $\sigma_{ess}(H)$ ,  $\sigma_{disc}(H)$  bzw.  $\sigma_{ac}(H)$ ,  $\sigma_{sc}(H)$  und  $\sigma_{pp}(H)$  interessiert. (Eine genauere Abhandlung über  $\sigma_{ac}(H)$ ,  $\sigma_{sc}(H)$  und  $\sigma_{pp}(H)$  befindet sich in Abschnitt 17.) Typische Fragen etwa sind, ob  $\sigma_{disc}(H)$  endlich oder  $\sigma_{pp}(H) \subseteq (\sigma_{disc} \cup \partial\sigma_{ess})$  ist. In diesem Abschnitt werden wir Methoden entwickeln, um Informationen über  $\sigma_{disc}(H)$  und  $\sigma_{ess}(H)$  mit Hilfe von  $(\psi, H\psi)$  zu bekommen. Diese Methode ist besonders dann nützlich, wenn das wesentliche Spektrum die Form  $[a, \infty)$  ( $a > -\infty$ ) hat und es Eigenwerte in  $(-\infty, a)$  gibt.

### 1. Min-Max-Prinzip

Mit Hilfe des Rayleigh Prinzips haben wir folgendes fundamentale Resultat, welches aus der Variationsrechnung folgt.

**theorem:3.1**

**SATZ 1.1 (Min-Max-Prinzip für Operatoren).** *Sei  $H$  ein von unten durch  $c$  beschränkter selbstadjungierter Operator und definiere*

$$\mu_n = \sup_{\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}} U_H(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}), \quad (1.1)$$

wobei

$$U_H(\varphi_1, \dots, \varphi_m) := \inf_{\psi \in \mathcal{D}(H), \psi \in [\varphi_1, \dots, \varphi_m]^\perp} (\psi, H\psi) \quad (1.2)$$

und  $[\varphi_1, \dots, \varphi_m]^\perp$  die Abkürzung für die Menge  $\{\psi : (\psi, \varphi_j) = 0, j = 1, \dots, m\}$  ist. Hierbei müssen die  $\varphi_j$  nicht notwendigerweise voneinander unabhängig sein (was auf entartete Eigenwerte führt). Dann gilt für festes  $n$  eine der folgenden Aussagen:

- a) *Es gibt  $n$  Eigenwerte (Entartung der Eigenwerte entspricht ihrer Multiplizität) unterhalb  $\sigma_{ess}$ , wobei  $\mu_j(H)$  der  $j$ -te Eigenwert ist.*
- b)  *$\mu_n$  ist der Threshold des wesentlichen Spektrums, das heißt  $\mu_n = \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma_{ess}(H)\}$ . In diesem Fall ist  $\mu_n = \mu_{n+1} = \mu_{n+2} = \dots$  und es gibt höchstens  $n - 1$  Eigenwerte unterhalb  $\mu_n$ .*

**theorem:3.2**

**SATZ 1.2 (Min-Max mit Hilfe von Formen).** *Sei  $H$  selbstadjungiert und von unten beschränkt, dann ist*

$$\mu_n = \sup_{\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}} \inf_{\psi \in \mathcal{Q}(H), \psi \in [\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}]^\perp} (\psi, H\psi), \quad (1.3)$$

wobei  $\mathcal{Q}(H)$  der Formbereich von  $H$  ist.

Wir werden später in bestimmten Fällen zeigen, dass  $\sigma_{ess}(H) = [a, \infty)$  für ein bestimmtes  $a$ . Angenommen wir wüssten, dass  $\mu_n < a$ . Dann könnten wir daraus

schließen, dass  $H$  höchstens  $n$  Eigenwerte hat. Das Min-Max-Prinzip kann also dazu verwendet werden, um zu zeigen, dass ein Operator diskretes Spektrum besitzt.

Die folgende Behauptung zeigt, wie das Min-Max-Prinzip angewandt werden kann.

**SATZ 1.3.** *Seien  $A \geq 0$  und  $B$  selbstadjungierte Operatoren. Unter den Annahmen*

- a)  $\mathcal{Q}(A) \cap \mathcal{Q}(B)$  ist dicht,
  - b)  $B_-$  ist relativ  $A$ -formbeschränkt mit relativer Formschranke gleich Null, das heißt  $B \prec\prec A$  und
  - c)  $\sigma_{\text{ess}}(A + \beta B) = [0, \infty)$  für alle  $\beta \geq 0$  (wobei wir für  $\beta \geq 0$   $A + \beta B$  als den zur Formsumme gehörigen Operator interpretieren),
- ist  $\mu_n(A + \beta B)$  monoton fallend auf  $[0, \infty)$ .

**BEWEIS.** Da wegen der Voraussetzung  $\sigma_{\text{ess}}(A + \beta B) = [0, \infty)$  gilt, dass  $\mu_n(A + \beta B) \leq 0$  für alle  $n$  ist. Damit gilt

$$\mu_n(A + \beta B) = \max_{\varphi_1, \dots, \varphi_n} \min_{\psi \in \mathcal{Q}(A) \cap \mathcal{Q}(B), \psi \in [\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}]} [\min\{0, (\psi, (A + \beta B)\psi)\}]. \quad (1.4)$$

Da  $A \geq 0$  ist, ist klar, dass  $\min\{0, (\psi, (A + \beta B)\psi)\}$  monoton fällt in  $\beta$ .  $\square$

## 2. Gebundene Zustände von Schrödinger-Operatoren: Quantitative Methoden

In diesem Abschnitt sind wir daran interessiert die Energien von gebundenen Zuständen (also die Punkte im diskreten Spektrum) mit hoher Genauigkeit zu bestimmen. Wir werden dazu die Rayleigh-Ritz-Technik entwickeln. Als Leitbeispiel soll uns das Helium-Atom mit dem Hamilton-Operator

$$H = -\Delta_1 - \Delta_2 - \frac{2}{r_1} - \frac{2}{r_2} + \frac{1}{|x_1 - x_2|} \quad (2.1)$$

dienen. Das Eigenwertproblem eines  $N$ -Körper-Problems mit  $N \geq 2$  lässt sich nicht exakt lösen, weshalb wir zumindest Methoden entwickeln müssen um die Grundzustandsenergie (und die Energien anderer gebundener Zustände) zu bestimmen.

Die erhaltene Genauigkeit lässt sich experimentell einfach verifizieren. Die Ionisierungsenergie, also die Energie die es braucht um ein Elektron aus dem System zu „entfernen“ kann mit hoher Genauigkeit bestimmt werden. Übrig bleibt dann nur noch ein Helium-Ion, was aber nichts anderes ist als ein Wasserstoffatom mit doppelter Ladung. Von diesem aber kennen wir die Energieniveaus der gebundenen Zustände.

Möchte man die Genauigkeit der Rechnungen erhöhen, müssen wir unser Modell jedoch verfeinern. Insbesondere spielt der Spin eine entscheidende Rolle, weshalb wir eigentlich auf dem Hilbertraum  $L^2(\mathbb{R}^6) \otimes \mathbb{C}^4$  mit  $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  arbeiten müssen. Wir schreiben dann  $H = H \otimes \text{id}_{\mathbb{C}^4}$ . Die Differenz zwischen dem exakten Hamilton-Operator und diesem  $H$  ist die Summe aller Korrekturen  $\sum_{\alpha} A_{\alpha}$ , die wir im Folgenden kurz erklären.

- (1) Hughes-Eckart-Korrektur: Die Grundzustandsenergie wird durch den multiplikativen Faktor  $\frac{m_e}{m_{\alpha}}$  korrigiert, wobei  $m_{\alpha}$  die Masse des Helium-Kerns ist.
- (2) Feinstruktur-Korrektur: Sie besteht aus einigen einfachen relativistischen Korrekturen.

- a) Sommerfeld-Korrektur: Man verwendet statt der klassischen kinetischen Energie  $\frac{p^2}{2m_e}$  die relativistische kinetische Energie  $\sqrt{(m_e c^2)^2 + (pc)^2} - m_e c^2$ .
- b) Spin-Bahn-Kopplung zwischen dem magnetischen Moment des Elektrons und dem magnetischen Feld, das durch die Relativbewegung zum Kern entsteht.
- c) Darwin-Korrektur: relativistische Elektronen können nicht beliebig genau lokalisiert werden, insbesondere nicht genauer als in Regionen der Größe  $\frac{\hbar}{mc}$ . Deshalb muss  $V(r)$  durch ein sphärisches Mittel von  $V(r)$  über eine Kugel vom Radius  $\frac{\hbar}{mc}$  ersetzt werden.
- d) Retardierungs-Korrektur: die Coulombkraft auf das Elektron wirkt nicht instantan, sondern braucht eine gewisse Zeit, nämlich  $\frac{R}{c}$ , bis das Elektron sie spürt. Man muss daher mit dem retardierten Potential rechnen.
- e) Spin-Spin-Kopplung zwischen den magnetischen Momenten der Elektronen.

Wir präsentieren nun eine Methode, um die Grundzustandsenergie  $E$  mit Hilfe des Min-Max-Prinzips zu bestimmen. Wir werden im ersten Schritt eine obere Schranke an die wahren Eigenwerte geben.

**SATZ 2.1** (Rayleigh–Ritz-Technik). *Sei  $H$  ein halbbeschränkter, selbstadjungierter Operator und  $U$  ein  $n$ -dimensionaler Unterraum  $U \subseteq \mathcal{D}(H)$  und  $P$  die orthogonale Projektion auf  $U$ . Definieren wir  $H_U := PHP$  und  $\hat{\mu}_1 \leq \hat{\mu}_2 \leq \dots \leq \hat{\mu}_n$  die Eigenwerte von  $H_U \upharpoonright U$  aus dem Min-Max-Prinzip. Dann gilt für die  $\mu_m(H)$  ( $m = 1, \dots, n$ ) aus dem Min-Max-Prinzip:*

$$\mu_m(H) \leq \hat{\mu}_m \quad (2.2)$$

Hat insbesondere  $H$  die Eigenwerte  $E_1 \leq \dots \leq E_k$  am Boden des Spektrums, so ist mit  $m = 1, \dots, \min(k, n)$

$$E_m \leq \hat{\mu}_m. \quad (2.3)$$

**BEWEIS.** Wegen des Min-Max-Prinzips gilt für die Eigenwerte von  $H_U \upharpoonright U$ :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_m &= \sup_{\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1} \in U} \inf_{\psi \in U, \psi \in [\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}]^\perp} (\psi, H\psi) \\ &= \sup_{\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1} \in \mathcal{H}} \inf_{\psi \in U, \psi \in [P\varphi_1, \dots, P\varphi_{m-1}]^\perp} (\psi, H\psi) \\ &= \sup_{\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1} \in \mathcal{H}} \inf_{\psi \in U, \psi \in [\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}]^\perp} (\psi, H\psi) \\ &\geq \sup_{\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1} \in \mathcal{H}} \inf_{\psi \in \mathcal{D}(H), \psi \in [\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}]^\perp} (\psi, H\psi) = \mu_m(H) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Im dritten Schritt haben wir  $(\psi, \varphi) = (\psi, P\varphi)$  und die Eigenschaft von  $P$  für  $\psi \in U$  verwendet. □

Die Strategie, um obere Schranken an die Eigenwerte ist also die folgende: wir nehmen uns eine orthonormale Menge  $\eta_1, \dots, \eta_n \in \mathcal{D}(H)$  und diagonalisieren  $(\eta_i, H\eta_j)$  mit Hilfe eines Computers. Es stellen sich nun zwei natürliche Fragen:

- 1) Wir wählen eine Orthonormalbasis  $\{\eta_j\}_{j=1}^\infty$  und erhalten durch Diagonalisieren von  $\{(\eta_i, H\eta_j)\}_{1 \leq i, j \leq n}$  eine obere Schranke  $\hat{\mu}_1^{(n)}$  an  $E_1$ . Konvergiert dann  $\hat{\mu}_1^{(n)} \rightarrow E_1$  für  $n \rightarrow \infty$ ?
- 2) Gibt es eine Möglichkeit untere Schranken für die Eigenwerte zu bekommen, um die Genauigkeit der oberen Schranke zu bestimmen?

Die erste Frage wird durch folgendes Resultat beantwortet:

**SATZ 2.2.** Sei  $\{\eta_j\}_{j=1}^\infty$  eine Orthonormalbasis von  $\mathcal{H}$ , wobei alle  $\eta_j \in \mathcal{D}(H)$  sein sollen. Sei  $\mu_1(H)$  (aus dem Min-Max-Prinzip) ein Eigenwert  $E_1$  von  $H$  mit normiertem Eigenvektor  $\psi = \sum_{i=1}^\infty a_i \eta_i$ . Nehmen wir weiter an, dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^N a_i \eta_i, H \left[ \sum_{i=1}^N a_i \eta_i \right] \right) = \mu_1(H). \quad (2.5)$$

Dann konvergiert  $\hat{\mu}_1^{(n)} \rightarrow E_1$ , wobei  $\hat{\mu}_1^{(n)}$  der kleinste Eigenwert der Matrix  $\{(\eta_i, H\eta_j)\}_{1 \leq i, j \leq n}$  ist.

Die Konvergenz  $\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^N a_i \eta_i, H \left[ \sum_{i=1}^N a_i \eta_i \right] \right)$  nach  $\mu_1(H) = (\psi, H\psi)$  kann manchmal sehr einfach bewiesen werden. Sie gilt beispielsweise immer, wenn  $H$  beschränkt ist, denn wir haben ja per Voraussetzung, dass  $\sum_{i=1}^N a_i \eta_i \rightarrow \psi$  für  $N \rightarrow \infty$  in Norm konvergiert. Folgendes Beispiel illustriert, was wir tun müssen, wenn  $H$  nicht beschränkt ist.

**BEISPIEL 2.3.** Sei  $H = H_0 + V$  mit  $V \in L^2(\mathbb{R}^3) + (L^\infty(\mathbb{R}^3))_\epsilon$ , (sprich  $\|V_\infty\|_\infty$  kann beliebig klein gemacht werden) und  $\mu_1(H) < 0$ . Dann weiß man, dass  $\mu_1(H)$  ein nicht-entarteter Eigenwert ist, dessen zugehörige Eigenfunktion  $\psi$  in  $\mathcal{D}(|x|^2)$  ist. Da  $\psi \in \mathcal{D}(H_0)$ , ist  $\psi \in \mathcal{D}(H_0 + x^2) = \mathcal{D}(H_0) \cap \mathcal{D}(x^2)$ . Seien  $\{\varphi_i\}$  die Eigenfunktionen des dreidimensionalen harmonischen Oszillators. Dann gibt es  $\{a_i\}_{i=1}^\infty$ , sodass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \left[ \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i - \psi \right], (H_0 + x^2) \left[ \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i - \psi \right] \right) = 0. \quad (2.6)$$

Da aber  $V \in L^2 + L^\infty$ ,  $|V| \leq H_0 + b$  (für ein geeignetes  $b$ ), gilt

$$H_0 + |V| \leq 2H_0 + b \leq 2(H_0 + x^2) + b, \quad (2.7)$$

weshalb mit obiger Approximation auch

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \left[ \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i - \psi \right], (H_0 + V) \left[ \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i - \psi \right] \right) = 0 \quad (2.8)$$

wahr ist. Dies impliziert wiederum

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i, (H_0 + V) \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i \right) = \mu_1. \quad (2.9)$$

Aus dem vorherigen Satz folgt damit  $\hat{\mu}_1^{(n)} \rightarrow \mu_1$ .

Es ist wichtig zu bemerken, dass die  $\{\eta_i\}_{i=1}^\infty$  nicht notwendigerweise eine Orthonormalbasis aufspannen. Was wichtig ist, ist, dass der Grundzustand  $\psi \in \text{Span}\{\eta_i\}_{i=1}^\infty$  ist, und dass die Konvergenzbedingung

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^N a_i \eta_i, H \left[ \sum_{i=1}^N a_i \eta_i \right] \right) = \mu_1(H)$$

gilt.

Wir widmen uns nun unteren Schranken der Eigenwerte aus dem Min-Max-Prinzip, um die Genauigkeit der oberen Schranke an die Eigenwerte zu bestimmen.

SATZ 2.4 (Temples Ungleichung). Sei  $H$  ein nach unten beschränkter, selbstadjungierter Operator. Angenommen wir haben  $\mu_1 < \mu_2$  und es gibt  $\check{\mu}_2 < \mu_2$ , sodass  $(\psi, H\psi) < \check{\mu}_2$  für ein normiertes  $\psi \in \mathcal{D}(H)$ . Dann ist

$$\mu_1 \geq (\psi, H\psi) - \frac{(\psi, H^2\psi) - (\psi, H\psi)^2}{\check{\mu}_2 - (\psi, H\psi)}. \quad (2.10)$$

BEWEIS. Da  $\mu_1$  ein diskreter Eigenwert ist und  $\sigma(H) \setminus \{\mu_1\} \subseteq [\check{\mu}_2, \infty)$ , ist  $(H - \mu_1)(H - \check{\mu}_2) \geq 0$ . Daher ist

$$(\psi(H - \check{\mu}_2)H\psi) \geq \mu_1(\psi(H - \check{\mu}_2)\psi) \quad (2.11)$$

Per Voraussetzung ist  $(\psi(H - \check{\mu}_2)\psi) < 0$ , weshalb wir schlußendlich erhalten:

$$\mu_1 \geq \frac{\check{\mu}_2(\psi, H\psi) - (\psi, H^2\psi)}{\check{\mu}_2 - (\psi, H\psi)} = (\psi, H\psi) - \frac{(\psi, H^2\psi) - (\psi, H\psi)^2}{\check{\mu}_2 - (\psi, H\psi)}. \quad (2.12)$$

□

BEMERKUNG 2.5. a) Die untere Schranke an  $\mu_1$  ist also sehr nahe bei der oberen Schranke, wenn  $\psi$  „fast“ ein Eigenvektor ist, in dem Sinne, dass  $(\psi, (H^2 - \langle H \rangle^2)\psi)$  klein ist ( $\langle H \rangle = (\psi, H\psi)$ ).

b) Temples Ungleichung benötigt lediglich eine grobe untere Schranke an den zweiten Eigenwert.

Die untere Schranke an den zweiten Eigenwert kann mit Hilfe folgender Überlegung leicht gefunden werden.

DEFINITION 2.6. Seien  $A$  und  $B$  von unten beschränkte, selbstadjungierte Operatoren. Wir schreiben  $A \leq B$  genau dann, wenn

- a)  $\mathcal{Q}(B) \subseteq \mathcal{Q}(A)$  und
- b)  $(\varphi, A\varphi) \leq (\varphi, B\varphi)$  für alle  $\varphi \in \mathcal{Q}(B)$ .

LEMMA 2.7. Aus  $A \leq B$  folgt, dass  $\mu_n(A) \leq \mu_n(B)$  für alle Eigenwerte aus dem Min-Max-Prinzip.

BEISPIEL 2.8. Sei  $H$  der Hamilton-Operator des Helium-Atoms und  $A = -\Delta_1 - \frac{2}{r_1} - \Delta_2 - \frac{2}{r_2}$ . Dann ist offensichtlich  $A \leq H$  und damit  $\mu_2(H) \geq \mu_2(A) = -\frac{5}{4}$ . (Erstes Elektron im Grundzustand, zweites Elektron im ersten angeregten Zustand.)

### 3. Gebundene Zustände von Schrödinger-Operatoren: Qualitative Methoden

In diesem Abschnitt untersuchen wir die qualitativen Eigenschaften von  $N(V)$ , der Zahl der gebundenen Zustände (Multiplizität eingerechnet) von  $-\Delta + V$ . Im ersten Teil werden wir Kriterien finden, wann  $N(V)$  endlich oder unendlich ist, um später explizite Schranken an  $N(V)$  zu geben.

#### 3.3.1

**3.1. Ist  $\sigma_{disc}(H)$  endlich oder unendlich?** Das Min-Max-Prinzip ist ein gutes Werkzeug um die Existenz von Eigenwerten zu zeigen. Insbesondere hilft es zu zeigen, dass das diskrete Spektrum unendlich ist. Wir untersuchen zunächst das Zwei-Körper-Problem. Sollte es unendlich viele Eigenwerte geben, so ist intuitiv klar, dass die sehr schwach gebundenen Zustände sehr weit draußen im Raum verteilt und damit sensitiv auf den langreichweitigen Teil des Potentials sind. Es hängt also vom langreichweitigen Teil des Potentials ab, ob es nun endlich oder unendlich

viele gebundene Zustände gibt. Wir werden sogleich sehen, dass der Grenzfall bei  $|x|^{-2}$  ist.

Der Beweis stützt sich auf vier Pfeiler:

- 1) Das Min-Max-Prinzip
- 2) Die Hardy-Ungleichung  $-\Delta \geq \frac{1}{4|x|^2}$
- 3)  $\sigma_{ess}(-\Delta + V) = [0, \infty)$ , falls  $V \in R + (L^\infty)_\epsilon$
- 4)  $-\Delta + V$  hat nur endlich viele gebundene Zustände, wenn  $V \in R$

Intuitiv ist auch klar, warum der Grenzfall bei  $x^{-2}$  ist. Denn in diesem Fall sind sowohl die kinetische Energie als auch die Potentielle Energie homogen vom Grad  $-2$ . Wenn das Potential bei großen Abständen also wie  $|x|^{-2+\epsilon}$  geht, ist die Anziehungskraft des Potentials stärker als die kinetische Energie, weshalb es prinzipiell unendlich viele (sehr schwach) gebundene Zustände gibt. Wenn das Potential jedoch wie  $|x|^{-2-\epsilon}$  weit draußen geht, gewinnt die kinetische Energie, womit die weit draußen ausgebreiteten Zustände nicht mehr gebunden werden können. Wir beweisen zunächst folgendes Resultat für das Ein-Körper-Problem.

finiteorinfinite

SATZ 3.1. Wir betrachten den Operator  $-\Delta + V$  auf  $L^2(\mathbb{R}^3)$ .

a) Angenommen,  $V \in R + (L^\infty)_\epsilon$  und

$$V(x) \leq -ar^{-2+\epsilon} \text{ falls } r = |x| > R_0 \quad (3.1)$$

für ein  $R_0 > 0$ ,  $a > 0$  und  $\epsilon > 0$  gelten. Dann ist  $\sigma_{disc}(-\Delta + V)$  unendlich.

b) Angenommen,  $V \in R + (L^\infty)_\epsilon$  und

$$V(x) \geq -\frac{b}{4}r^{-2} \text{ falls } r = |x| > R_0 \quad (3.2)$$

für ein  $R_0 > 0$  und  $b < 1$ . Dann ist  $\sigma_{disc}(-\Delta + V)$  endlich.

In diesem Zusammenhang sind noch die Referenzen auf Kirsch–Werner <sup>KirschSimon1988</sup> [KS88], <sup>Stubbe1990</sup> Stubbe [Stu90], <sup>EkholfFrank2006</sup> Ekholf–Frank [EF06] und <sup>Weidl1999</sup> Weidl [Wei99] interessant.

BEWEIS. a) Da  $\sigma_{ess}(-\Delta + V) = [0, \infty)$  genügt es zu zeigen, dass  $\mu_n < 0$  ist für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Die Strategie ist es, das Rayleigh–Ritz-Prinzip für einen endlichen Unterraum  $U_N = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$  zu verwenden. Sei dazu  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  mit  $\text{supp}(\psi) \subseteq \{x : 1 < |x| < 2\}$  und  $\|\psi\| = 1$ . Wir definieren dann die reskalierte Version als  $\psi_R(x) = R^{-3/2}\psi(x/R)$ , sodass auch  $\|\psi_R\| = 1$  und  $\text{supp}(\psi) \subseteq \{x : R < |x| < R\}$ . Ist  $R > R_0$ , so gilt

$$\begin{aligned} (\psi_R, H\psi_R) &= (\psi_R, -\Delta\psi_R) + (\psi_R, V\psi_R) \leq (\psi_R, -\Delta\psi_R) - a(\psi_R, r^{-2+\epsilon}\psi_R) \\ &= R^{-2}(\psi, -\Delta\psi) - aR^{-2+\epsilon}(\psi, r^{-2+\epsilon}\psi). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Da  $\epsilon > 0$  ist, ist der letzte Ausdruck für hinreichend großes  $R$  negativ. Wir definieren daher  $Q > 0$  so groß, dass  $(\psi_R, H\psi_R) < 0$  für alle  $R > Q$ . Wir wählen nun unser Orthonomalsystem durch  $\varphi_n = \psi_{2^n Q}$  und sehen, dass die  $\varphi_n$  paarweise disjunkten Träger haben, weshalb sie tatsächlich orthonormal aufeinander stehen. Des Weiteren sind die Nicht-Diagonalelemente wegen der Disjunktheit  $(\varphi_m, H\varphi_n) = 0$  für  $n \neq m$ . Sei nun  $U_N := \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ , dann hat  $P_N H P_N \upharpoonright U_N$  die Eigenwerte  $\{(\varphi_n, H\varphi_n)\}_{n=1}^N$ . Mit der Rayleigh–Ritz-Technik ist deshalb

$$\mu_N(H) \leq \sup_{1 \leq m \leq N} \{(\varphi_m, H\varphi_m)\} < 0 \quad (3.4)$$

für alle  $N \in \mathbb{N}$ , womit die Behauptung gezeigt ist.

b) Wir betrachten  $W = V + \frac{b}{4}r^{-2}$ , dann ist (als Formen auf  $\mathcal{Q}(H_0)$ )

$$-\Delta + V = -(1-b)\Delta + W + b \left( -\Delta - \frac{1}{4}r^{-2} \right) \geq -(1-b)\Delta + W \geq -(1-b)\Delta + \tilde{W}, \quad (3.5)$$

wobei  $\tilde{W} = \min\{0, W\}$  ist. Daher haben wir mit dem Min-Max-Prinzip

$$\mu_n(-\Delta + V) \geq \mu_n(-(1-b)\Delta + \tilde{W}) = (1-b)\mu_n \left( -\Delta + (1-b)^{-1}\tilde{W} \right). \quad (3.6)$$

Da  $V \in R + (L^\infty)_\epsilon$  und  $W(x) \geq 0$  für  $|x| > R_0$ , hat  $\tilde{W}$  kompakten Träger und  $\tilde{W} \in R + (L^\infty)_\epsilon$ . Damit ist aber bereits  $\tilde{W} \in R$ . Wie wir in [Referenz einfügen] später sehen werden, impliziert dies, dass  $-\Delta + (1-b)^{-1}\tilde{W}$  nur endlich viele gebundene Zustände hat, weshalb  $\mu_n \left( -\Delta + (1-b)^{-1}\tilde{W} \right) = 0$  für  $n \geq N_0$  für ein  $N_0$ . Damit ist aber

$$0 \geq \mu_n(-\Delta + V) \geq (1-b)\mu_n \left( -\Delta + (1-b)^{-1}\tilde{W} \right) = 0 \quad (3.7)$$

für alle  $n \geq N_0$ , womit gezeigt ist, dass  $-\Delta + V$  höchstens  $N_0$  echt negative Eigenwerte hat. □

**BEMERKUNG 3.2.** Dieses Argument lässt sich auf den hyperrelativistischen  $|p|$  oder den Dirac-Operator  $D_0 = i\vec{\sigma} \cdot \nabla$  übertragen. Diese sind homogen vom Grade  $-1$ , weshalb der Grenzfall der Homogenität des Potentials auch gerade bei  $-1$  liegt.

Folgendes Beispiel illustriert, dass es genügt lediglich einen negativen Eigenwert zu finden, um zu schließen, dass  $\sigma_{disc}$  unendlich ist.

**BEISPIEL 3.3.** Wir betrachten den Operator  $-\frac{d^2}{dx^2} + V$  auf  $\mathbb{R}$ , wobei  $\int V < 0$  und es ein  $R > 0$  und  $\epsilon > 0$  gibt, sodass für alle  $|x| > R$  das Potential  $V \sim r^{-2+\epsilon}$  erfüllt. Dann ist  $\sigma_{disc}$  unendlich nach obigem Satz, wenn wir zeigen können, dass es wenigstens einen negativen Eigenwert gibt. Dazu konstruieren wir uns folgende Testwellenfunktion  $\chi_N$ .

$$\chi_N(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [-N, N] \\ \in [0, 1] & \text{für } x \in [-2N, -N] \cup [N, 2N] \\ 0 & \text{für } x \in (-\infty, -2N] \cup [2N, \infty) \end{cases} \quad (3.8)$$

Dann ist

$$\|\chi_N\|^2 = \mathcal{O}(N), \quad (3.9)$$

$$(\chi_N, -\Delta\chi_N) = \int |\nabla\chi_N|^2 = \mathcal{O}(N^{-1}), \quad (3.10)$$

wohingegen

$$(\chi_N, V\chi_N) = \int V(x)|\chi_N(x)|^2 dx \quad (3.11)$$

Satz <sup>finiteorinfinite</sup>3.1 wurde kürzlich von Frank–Laptev–Weidl <sup>Franketal2022</sup>[FLW22, Theorem 14 und 15] präzisiert.

SATZ 3.4 (<sup>Franketal2022</sup>[FLW22, Theorem 14]). Sei  $V \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$  mit  $Q_+ \in L^p(\mathbb{R}^d) + L^\infty(\mathbb{R}^d)$ , wobei  $p = 1$  wenn  $d = 1$ ,  $p > 1$  wenn  $d = 2$  und  $p = d/2$  wenn  $d \geq 3$ . Angenommen weiter es gibt  $R > 0$ , sodass für alle  $r \geq R$  die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \sup_{\omega \in \mathbb{S}^{d-1}} \int_r^\infty V(s\omega) s^{-|d-2|+1} ds &\leq \frac{|d-2|}{4r^{|d-2|}}, \quad \text{falls } d \neq 2, \\ \sup_{\omega \in \mathbb{S}^1} \int_r^\infty V(s\omega) s^1 ds &\leq \frac{1}{4 \log r}, \quad \text{falls } d = 2, \end{aligned} \quad (3.12)$$

gelten. Dann besitzt  $-\Delta - V$  (definiert als selbstadjungierter Operator in  $L^2(\mathbb{R}^d)$  via Friedrichs Satz) höchstens endlich viele negative Eigenwerte. (Genauer gesagt, die gesamte spektrale Multiplizität des negativen Spektrums von  $-\Delta - V$  ist endlich.)

Die Endlichkeit des negativen Spektrums von  $-\Delta - V$  folgt also insbesondere, wenn es  $R < \infty$  gibt, sodass

$$V(x) \leq \begin{cases} \frac{(d-2)^2}{4} |x|^{-2} & \text{falls } d \neq 2, \\ \frac{1}{4|x|^2(\log|x|)^2} & \text{falls } d = 2, \end{cases} \quad \text{für alle } |x| \geq R. \quad (3.13)$$

Die Konstanten in dieser Ungleichung sind optimal in dem Sinne, dass, wenn es  $R < \infty$  und  $\epsilon > 0$  gibt, sodass

$$V(x) \geq (1 + \epsilon) \cdot \begin{cases} \frac{(d-2)^2}{4} |x|^{-2} & \text{falls } d \neq 2, \\ \frac{1}{4|x|^2(\log|x|)^2} & \text{falls } d = 2, \end{cases} \quad \text{für alle } |x| \geq R \quad (3.14)$$

wahr ist, so ist der negative Spektralraum von  $-\Delta - V$  unendlichdimensional.

Im  $N$ -Körper-Problem ist die Situation im Allgemeinen nicht mehr nur vom Verhalten des langreichweitigen Teil des Potentials abhängig, da der Threshold  $\Sigma$  des wesentlichen Spektrums negativ sein kann. Es gibt beispielsweise ein Drei-Körper-System mit  $V = V_{01}(x_1) + V_{02}(x_2) + V_{12}(x_1 - x_2)$ , sodass die Zahl der gebundenen Zustände  $N(\lambda)$  sich für  $H_\lambda = -\Delta_1 - \Delta_2 + \lambda V$  wie folgt verhält:

- Für  $\lambda = 0$  ist  $N(\lambda) = 0$  (klar).
- Wenn  $\lambda$  von Null erhöht wird, erhöht sich auch  $N(\lambda)$  um ganze Zahlen.
- Wenn  $\lambda$  ein  $\lambda_1$  erreicht hat, ist  $N(\lambda) = \infty$  bis  $\lambda = \lambda_2$  erreicht hat.
- Erhöht man  $\lambda$  weiter, findet man neue kritische Werte  $\lambda_3, \lambda_4, \dots$

Somit ist  $N(\lambda) = \infty$  für  $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2] \cup [\lambda_3, \lambda_4] \cup [\lambda_5, \lambda_6] \cup \dots$  und  $N(\lambda) < \infty$  für  $\lambda \in [0, \lambda_1) \cup (\lambda_2, \lambda_3) \cup (\lambda_4, \lambda_5) \cup \dots$ . Wir sehen also, dass  $\mu_n(H_{\lambda_2}) < \Sigma_{\lambda_2}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Erhöht man  $\lambda > \lambda_2$ , so wird zwar  $\mu_n(H_\lambda)$  kleiner, aber auch der Threshold  $\Sigma_\lambda$  sinkt und überholt in diesem Fall einige  $\mu_n(H_\lambda)$ , sodass  $\mu_n(H_\lambda) = \Sigma_\lambda$  für alle  $n \geq N_0$  für ein bestimmtest  $N_0$ .

Wir konzentrieren uns nun wieder auf das Helium-Atom. Zustände im wesentlichen Spektrum sind heuristisch als Streuzustände anzusehen, das heißt sie sind nicht gebunden. Man kann sich einfach überlegen, wo der Threshold des wesentlichen Spektrums in diesem Setup liegen soll. Der erste nicht-gebundene Zustand tritt offenbar dann auf, wenn ein Elektron im Grundzustand gebunden ist, wohingegen das andere gerade nicht mehr gebunden ist. Solche Streuzustände haben also Energien, die größer oder gleich der Grundzustandsenergie von  $-\Delta_1 - 2/|x_1|$ , also  $-1$  sind. Damit ist  $\sigma_{\text{ess}}(H) = [-1, \infty)$ . Angeregte Zustände des noch gebundenen Elektrons entsprechen also Eigenwerte, die im wesentlichen Spektrum eingebettet sind. Wir werden dies später rigoros zeigen. Mit dieser Information können wir das Min-Max-Prinzip verwenden.

**SATZ 3.5.** *Der Hamilton-Operator  $H = -\Delta_1 - 2/|x_1| - \Delta_2 - 2/|x_2| + |x_1 - x_2|^{-1}$  hat unendliche viele gebundene Zustände.*

**BEWEIS.** Da  $\sigma_{ess}(H) = [-1, \infty)$  ist, müssen wir lediglich zeigen, dass  $\mu_n(H) < -1$  ist für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Wie im Beweis des vorigen Satzes genügt es für die Rayleigh–Ritz-Methode einen  $n$ -dimensionalen Raum  $U_n$  zu finden, sodass  $\sup(\psi, H\psi) \leq -\|\psi\|^2$  für alle  $\psi \in U_n$  ist. Intuitiv sollten wir dazu ein Elektron in den Grundzustand und das andere in einen beliebigen gebundenen Zustand bringen. Sei dazu  $\psi_1(x_1)$  der normierte Grundzustand von  $-\Delta_1 - 2/|x_1|$  und  $\varphi_n(x_2)$  die normierte Eigenfunktion von  $-\Delta_2 - 1/|x_2|$  im  $n$ -ten angeregten Zustand, das heißt

$$\left(-\Delta_2 - \frac{1}{|x_2|}\right) \varphi_n(x_2) = -\frac{1}{4n^2}.$$

Wir bemerken hier, dass der  $n$ -te Eigenwert  $n^2$ -fach entartet ist, was aus der Drehimpulsentartung des Wasserstoffatoms  $\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2$  folgt. Wir setzen nun

$$\psi = \sum_{i=1}^N \alpha_i \psi_1(x_1) \varphi_i(x_2) \quad (3.15)$$

mit  $\sum_{i=1}^N |\alpha_i|^2 = 1$  an. Dann ist  $(\psi, H\psi) = t_1 + t_2 + t_3$ , wobei

$$t_1 = \left( \psi, \left( -\Delta_1 - \frac{2}{|x_1|} \right) \psi \right) = (\psi, -\psi) = -1, \quad (3.16a)$$

$$t_2 = \left( \psi, \left( -\Delta_2 - \frac{1}{|x_2|} \right) \psi \right) = \sum_{i=1}^N |\alpha_i|^2 E_i \leq E_n, \quad (3.16b)$$

$$t_3 = \left( \psi, \left( \frac{1}{|x_1 - x_2|} - \frac{1}{|x_2|} \right) \psi \right) \leq 0. \quad (3.16c)$$

Die letzte Ungleichung folgt aus Newtons Theorem ( $\psi_1(x_1)$  ist sphärisch symmetrisch), denn

$$\int \frac{|\psi_1(x_1)|^2}{|x_1 - x_2|} dx_1 = \int \frac{|\psi_1(x_1)|^2}{\max\{|x_1|, |x_2|\}} dx_1 \leq \frac{1}{|x_2|}. \quad (3.17)$$

Wählen wir also unseren  $n$ -dimensionalen Unterraum als  $U_n = \text{span}\{\psi_1\varphi_1, \dots, \psi_1\varphi_n\}$ , so sehen wir, dass

$$(\psi, H\psi) \leq -1 + E_n \quad (3.18)$$

für alle  $\psi \in U_n$  ist. Da  $E_n < 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist, ist mit der Rayleigh–Ritz-Technik  $\mu_n(H) \leq -1 + E_n < -1$ , womit die Behauptung gezeigt ist.  $\square$

Folgendes Resultat von Zhislin verallgemeinert die Situation.

**SATZ 3.6 (Zhislin).** *Sei  $H$  ein atomarer Hamilton-Operator der Form*

$$H = \sum_{i=1}^N \left( -\Delta_i - \frac{N}{|x_i|} \right) + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \left( \frac{\nabla_i \cdot \nabla_j}{M} + \frac{1}{|x_i - x_j|} \right), \quad (3.19)$$

welcher als Operator im Hilbertraum  $L^2(\mathbb{R}^{3N})$  wirkt, wobei  $M, \{\mu_i\}_{i=1}^N > 0$  beliebig sind. Dann ist  $\sigma_{disc}(H)$  unendlich.

**BEMERKUNG 3.7.**  $H$  ist der Hamilton-Operator eines neutralen Atoms mit  $N$  Elektronen, dessen Kern die Masse  $M$  hat.  $\mu_1, \dots, \mu_N$  sind die relativen Massen der Elektronen, also nachdem die Schwerpunktsbewegung absepariert wurde.

**3.2. Schranken an  $N(V)$  im Falle von Zentralpotentialen.** Wir wollen in diesem Abschnitt Schranken an die Zahl der Eigenwerte von  $-\Delta + V$  finden, wenn das Potential lediglich vom Radius abhängt. Man kann zunächst folgende Punkte zeigen:

- BEHAUPTUNG 3.8.** (i) Ist  $E$  ein Eigenwert von  $-\Delta + V$ , so ist  $\{\psi : H\psi = E\psi\}$  ein unter Rotationen invarianter Unterraum von  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . Dies bedeutet, dass er von Vektoren der Form  $\psi(x) = \frac{f(r)}{r} Y_{\ell m}(x/|x|)$  mit  $r = |x|$  und  $\int_0^\infty |f(r)|^2 dr = 1$  aufgespannt wird.
- (ii) Ist  $\psi \in \mathcal{D}(-\Delta)$ , so ist  $f(r)$  stetig und erfüllt  $f(0) = 0$ .
- (iii)  $f$  erfüllt die gewöhnliche Differential- bzw. Eigenwertgleichung

$$\left( -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + V(r) \right) f(r) = E f(r) \quad (3.20)$$

mit Dirichlet-Randbedingung  $f(0) = 0$ . Die Gleichung ist im Sinne von Differentialoperatoren auf  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , nicht im Sinne einer klassischen Differentialgleichung, zu verstehen.

- (iv) Setzt man voraus, dass  $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$  ist, folgt aus elliptischer Regularität sofort, dass die Lösungen der Eigenwertgleichung glatt sind. Wir werden später sehen, dass man auch ohne so eine starke Bedingung an das Potential zeigen kann, dass die Lösungen hinreichend regulär sind.

Wir betrachten nun spezielle Lösungen  $u_\ell$  der Eigenwertgleichung. Sei für jedes  $\ell \in \mathbb{N}$  und  $E < 0$  die Funktion  $u_\ell(r; E)$  eine Lösung der Differentialgleichung, die  $u_\ell(0, E) = 0$  und  $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-1-\ell} u_\ell(r; E) = 1$ . Das heißt, für höheren Drehimpuls soll  $u_\ell$  am Ursprung schneller wachsen. Ist  $V \in C_0^\infty$ , so ist es nicht schwer zu zeigen, dass eindeutige Lösungen im  $\ell$ -ten Drehimpulskanal existieren.

Wir sind im Folgenden an der Zahl der negativen Energien  $E < 0$  interessiert, für die  $u_\ell(r; E) \in L^2(\mathbb{R}^+)$  ist. Denn dies ist gerade die Zahl der gebundenen Zustände  $n_\ell(V)$  im  $\ell$ -ten Drehimpulskanal mit fixem magnetischen Moment  $m$ . Wegen Drehimpulsentartung gibt es  $(2\ell + 1)n_\ell(V)$  gebundene Zustände im Kanal  $\ell$ . Die gesamte Anzahl der Eigenwerte ist somit  $N(V) = \sum_{\ell=0}^\infty (2\ell + 1)n_\ell(V)$ . Das folgende klassische Resultat zeigt eine Verbindung zwischen  $n_\ell(V)$  und der Zahl der Nullstellen einer Lösung  $u_\ell(r; E)$ .

**theorem: 3.17**

**SATZ 3.9.** Sei  $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$  und sei  $N_\ell(E; V)$  die Zahl der Nullstellen von  $u_\ell(r; E)$ , die von  $r = 0$  verschieden sind. Dann gelten folgende Aussagen.

- (i) Ist  $E < 0$ , so ist  $N_\ell(E; V) < \infty$ .
- (ii)  $N_\ell(E; V)$  wächst monoton in  $E$  und fällt monoton in  $\ell$ .
- (iii) a) Ist  $E_0 \leq 0$ , so ist  $N_\ell(E_0; V)$  gleich der Zahl der Lösungen  $u_\ell(r; E)$  mit  $E < E_0$ , die  $\|u_\ell\|_2 < \infty$  erfüllen.
- b) Insbesondere ist damit  $N_\ell(0; V) = n_\ell(V)$ !
- c)  $\dim P_{-\Delta+V}(-\infty, E) = \sum_{\ell=0}^\infty (2\ell + 1)N_\ell(E; V)$  für  $E \leq 0$ .

Der letzte Punkt des Satzes ist besonders interessant. Betrachten wir folgende zwei Grenzsituationen. Ist die Energie der Lösung  $E$  sehr klein, so können wir mit Blick auf die Differentialgleichung sehen, dass  $u_\ell(r; E)$  überhaupt keine Nullstellen hat. Da  $u$  und  $u''$  dasselbe Vorzeichen haben, und  $u$  und  $u'$  positiv starten, so bleiben sie positiv, das heißt  $N_\ell(E; V) = 0$ , wenn  $E$  sehr negativ ist. Nehmen wir auf der anderen Seite an, dass  $E = 0$  ist, so ist das Teilchen nicht mehr gebunden, das heißt es propagiert wie eine Welle, womit  $u_\ell(r; E)$  Nullstellen haben muss. Wir werden sehen, dass, wenn wir  $E$  kleiner machen, die Nullstellen nach  $+\infty$  herauswandern, bis sie überhaupt nicht mehr da sind. Der Punkt ist nun der folgende: wir haben verlangt, dass  $u_\ell$  quadratintegrierbar ist, das heißt, dass  $u_\ell$  insbesondere im Unendlichen abfallen, bzw. Null sein muss. Dies passiert aber gerade an den zu  $\infty$  herausgeschobenen Nullstellen! Man kann sich vorstellen, dass wenn man das sehr negative  $E$  langsam erhöht, bei einem bestimmten  $E_1$  eine erste Nullstelle im Unendlichen generiert wird – dies entspricht also gerade dem ersten angeregten Zustand. Wiederholt man diese Prozedur bis  $E = 0$ , so sieht man, dass die Zahl der gebundenen Zustände gerade die Zahl der Nullstellen von  $u_\ell(r, 0)$  ist.

Wir beweisen den Satz mit Hilfe einiger Lemmata.

**lemma:3.18**

LEMMA 3.10. *Sei  $E_0 \leq 0$ . Ist  $N_\ell(E_0; V) \geq m_0$ . so hat das Eigenwertproblem mindestens  $m_0$  quadratintegrierbare Lösungen mit  $E < E_0$ . Insbesondere ist wegen  $\sigma_{\text{ess}}(-\Delta + V) = [0, \infty)$  die Zahl der Nullstellen  $N_\ell(E_0; V) < \infty$ , wenn  $E_0 < 0$ .*

BEWEIS. Wir betrachten dazu

$$H_\ell = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + V(r) \quad (3.21)$$

als Operator auf  $L^2(\mathbb{R}^+)$ . Dieser ist für  $\ell = 0$  wesentlich selbstadjungiert auf  $\{u \in C_0^\infty[0, \infty), u(0) = 0\}$  und für  $\ell > 0$  wesentlich selbstadjungiert auf  $\{u \in C_0^\infty(0, \infty)\}$ . Wir zeigen im ersten Schritt, dass der  $m_0$ -te Min-Max-Eigenwert  $\mu_{m_0}(H_\ell) \leq E_0$ , wenn  $N_\ell(E_0; V) \geq m_0$ . Seien dazu  $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_{m_0}$  Nullstellen von  $u_\ell(r; E_0)$ . Definieren wir dann

$$\psi_i(r) = \begin{cases} u_\ell(r; E_0) & \text{für } r_{i-1} \leq r \leq r_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (3.22)$$

so sind die  $\psi_i$  stetig und stückweise  $C^1$ . Zwar sind  $\psi_i \notin \mathcal{D}(-d_r^2)$ , aber  $\psi_i \in \mathcal{Q}(-d_r^2)$  und damit auch  $\psi_i \in \mathcal{Q}(H_\ell)$ . Darüberhinaus ist

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^{m_0} a_i \psi_i, H_\ell \sum_{i=1}^{m_0} a_i \psi_i \right) &= \sum_{i=1}^{m_0} |a_i|^2 \int_{r_{i-1}}^{r_i} \left[ |\psi_i'|^2 + \left( \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + V(r) \right) |\psi_i|^2 \right] dr \\ &= E_0 \left( \sum_{i=1}^{m_0} a_i \psi_i, \sum_{i=1}^{m_0} a_i \psi_i \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Mit dem Min-Max-Prinzip für Formen ist daher  $\mu_{m_0}(H_0) \leq E_0$ .

Wegen der Stetigkeit der Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen in ihren Koeffizienten konvergiert  $u_\ell(r; E_n) \rightarrow u_\ell(r; E_\infty)$  gleichmässig auf Kompakta, wenn  $E_n \rightarrow E_\infty$ . Daher konvergiert  $u_\ell(r; E_0 - n^{-1}) \in C_0^\infty(0, \infty)$  gleichmässig gegen  $u_\ell(r; E_0)$ . Hat also  $u_\ell(r; E_0)$  mindestens  $m_0$  Nullstellen, so hat auch  $u_\ell(r; E_0 - n^{-1})$  mindestens  $m_0$  Nullstellen, wenn  $n$  genügend groß ist. Aus obiger Rechnung folgt

daher, dass  $\mu_{m_0}(H_\ell) \leq E_0 - \frac{1}{n} < E_0$  ist. Da  $\sigma_{ess}(H_\ell) \subseteq \sigma_{ess}(-\Delta + V) = [0, \infty)$ , folgt das Lemma aus dem Min-Max-Prinzip.  $\square$

**lemma:3.19**

LEMMA 3.11 (Sturmscher Oszillationssatz).  $N_\ell(E; V)$  ist monoton steigend in  $E$ . Ist  $E_0 < 0$  ein Eigenwert von  $H_\ell = -d_r^2 + \ell(\ell+1)/r^2 + V(r)$ , so ist  $N_\ell(E; V) \geq N_\ell(E_0; V) + 1$ , wenn  $E > E_0$ , insbesondere wird in diesem Fall ein Eigenwert bei  $\infty$  generiert.

BEWEIS. Wir definieren  $V_\ell(r) = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + V(r)$  und  $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_n$  als die Nullstellen von  $u_\ell(r; E_0)$ . Sei nun  $E > E_0$ . Wir zeigen, dass dann  $u_\ell(r; E)$  mindestens eine Nullstelle in jedem der Intervalle  $(0, r_1)$ ,  $(r_1, r_2), \dots, (r_{n-1}, r_n)$ . Wenn  $E_0$  gerade ein Eigenwert ist, zeigen wir außerdem, dass es eine weitere Nullstelle in  $(r_n, \infty)$  gibt. Wir nehmen nun an, dass  $u_\ell(r; E)$  keine Nullstelle in  $(r_i, r_{i+1})$  hat. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass sowohl  $u_\ell(r; E)$ , als auch  $u_\ell(r; E_0)$  auf  $(r_i, r_{i+1})$  positiv sind und, dass insbesondere  $u'_\ell(r_i; E_0) \geq 0$  und  $u'_\ell(r_{i+1}; E_0) \leq 0$  sind. Wir berechnen dann

$$I = \int_{r_i}^{r_{i+1}} [u'_\ell(r; E_0)u_\ell(r; E) - u_\ell(r; E_0)u'_\ell(r; E)]' dr. \quad (3.24)$$

Einerseits ist wegen  $u_\ell(r_i; E_0) = u_\ell(r_{i+1}; E_0) = 0$  und den Voraussetzungen  $u'_\ell(r_i; E_0) \geq 0$  und  $u'_\ell(r_{i+1}; E_0) \leq 0$ , sowie  $u_\ell(r; E) \geq 0$  auf  $(r_i, r_{i+1})$

$$I = [u'_\ell(r; E_0)u_\ell(r; E) - u_\ell(r; E_0)u'_\ell(r; E)]_{r_i}^{r_{i+1}} = u'_\ell(r_{i+1}; E_0)u_\ell(r_{i+1}; E) - u'_\ell(r_i; E_0)u_\ell(r_i; E) \leq 0. \quad (3.25)$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} I &= \int_{r_i}^{r_{i+1}} [u''_\ell(r; E_0)u_\ell(r; E) - u_\ell(r; E_0)u''_\ell(r; E)] dr \\ &= \int_{r_i}^{r_{i+1}} u_\ell(r; E_0)u_\ell(r; E) [(V_\ell - E_0) - (V_\ell - E)] dr \\ &= (E - E_0) \int_{r_i}^{r_{i+1}} u_\ell(r; E_0)u_\ell(r; E) dr > 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass  $u_\ell(r; E)$  eine Nullstelle in  $(r_i, r_{i+1})$  haben muss.

Wir betrachten nun noch den Fall, dass  $E_0$  ein Eigenwert und  $\ell = 0$  ist. Da  $V$  kompakten Träger hat, geht  $u_0(r; E_0) = ae^{-\sqrt{-E_0}r}$  für große  $r$  und  $|u_0(r; E)| + |u'_0(r; E)| \leq be^{+\sqrt{-E}r}$  für große  $r$ . Deshalb konvergieren  $I$  und die anderen Integrale von oben, wenn man  $r_i$  durch  $r_n$  und  $r_{i+1}$  durch  $\infty$  ersetzt, womit  $u_\ell(r; E)$  mit demselben Argument auch eine Nullstelle in  $(r_n, \infty)$  hat. Ein ähnliches Argument gilt auch für den Fall  $\ell \neq 0$ , wenn man die Exponentialfunktionen durch geeignete Besselfunktionen ersetzt.  $\square$

LEMMA 3.12. Die Zahl der Nullstellen einer Lösung mit Energie  $\mu_n(H_\ell)$  ist  $N_\ell(\mu_n(H_\ell); V) = n - 1$ , wenn  $\mu_n(H_\ell) < 0$  ein Eigenwert aus dem Min-Max-Prinzip ist.

BEWEIS. Angenommen es wäre  $N_\ell(\mu_n(H_\ell); V) > n - 1$ , dann gibt es nach Lemma 3.10 mindestens  $n$  quadratintegrierbare Lösungen mit  $E \in (-\infty, \mu_n(H_\ell))$ , das heißt es gibt mindestens  $n$  Eigenwerte in  $(-\infty, \mu_n(H_\ell))$ . Somit muss wegen des Min-Max-Prinzips  $N_\ell(\mu_n(H_\ell); V) \leq n - 1$  sein.

Wir werden nun per Induktion zeigen, dass auch  $N_\ell(\mu_n(H_\ell); V) \geq n - 1$  ist. Klarerweise ist  $N_\ell(\mu_1(H_\ell); V) \geq 0$ . Angenommen nun es wäre  $N_\ell(\mu_{n-1}(H_\ell); V) \geq$

$n - 2$  für  $\mu_n < 0$ . Da  $\mu_{n-1} \leq \mu_n < 0$ , sind  $\mu_{n-1}$  und  $\mu_n$  Eigenwerte. Da die Differentialgleichung höchstens eine Lösung hat, die  $f(0) = 0$  erfüllt, ist sogar  $\mu_{n-1} < \mu_n < 0$ . Wegen Lemma 3.11 gilt daher  $N_\ell(\mu_n(H_\ell; V)) \geq N_\ell(\mu_{n-1}(H_\ell); V) + 1 = n - 1$ .  $\square$

BEWEIS VON SATZ 3.9. Wir haben bereits a) und die Monotonie von  $N_\ell(E; V)$  in  $E$  bewiesen. Nach Lemma 3.10 ist einerseits die Zahl der gebundenen Zustände mit Energie, die kleiner ist als  $E$ , nicht kleiner als  $N_\ell(E; V)$ . Nehmen wir nun andererseits an, dass sie größer ist als  $N_\ell(E; V)$ . Dies ist bereits unmöglich, wenn  $E = 0$  und  $N_\ell = \infty$  ist, also betrachten wir  $N_\ell(E; V) = n < \infty$  und nehmen an, dass es  $n + 1$  Eigenwerte unterhalb  $E$  gibt. Da damit insbesondere  $\mu_{n+1}(H_\ell) < E$  ist, und  $\mu_{n+1}(H_\ell)$  ein Eigenwert ist, ist mit Lemma 3.11  $N_\ell(E; V) \geq n + 1$ . Dieser Widerspruch zeigt, dass  $N_\ell(E; V)$  gleich der Zahl der Eigenwerte von  $H_\ell$  in  $(-\infty, E)$  ist. Da  $H_{\ell+1} \geq H_\ell$  ist, schließen wir, dass  $N_\ell(E; V) \geq N_{\ell+1}(E; V)$  ist.  $\square$

Wir können den eben bewiesenen Satz nutzen, um Schranken an die Zahl der Eigenwerte  $n_\ell(V)$  und an  $\ell_{max} = \max\{\ell : n_\ell(V) > 0\}$ , dem größten Drehimpulsquantenzahl, bei dem noch gebundene Zustände auftreten, zu geben.

**theorem:3.21**

SATZ 3.13. Sei  $V$  ein Zentralpotential in der Rollnik-Klasse  $V \in R + L^\infty(\mathbb{R}^3)_e$ . Dann haben wir folgende Schranken.

a) Bargmanns Schranke

$$n_\ell(V) \leq (2\ell + 1)^{-1} \int_0^\infty r|V(r)|dr \quad (3.27a)$$

$$n_\ell(V) \leq (2\ell + 1)^{-1} \int_0^\infty r|V_-(r)|dr \quad (3.27b)$$

b) Calogeros Schranke: Sei  $V$  monoton steigend und negativ, dann ist

$$n_\ell(V) \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\infty |V(r)|^{1/2} dr \quad (3.28a)$$

$$n_\ell(V) \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\infty |V_-(r)|^{1/2} dr. \quad (3.28b)$$

c) GGMT-Schranke: Für alle  $p \geq 1$  gilt

$$n_\ell(V) \leq c_p (2\ell + 1)^{-(2p-1)} \int_0^\infty r^{2p-1} |V(r)|^p dr, \quad (3.29)$$

wobei  $c_p = (p - 1)^{p-1} \frac{\Gamma(2p)}{p^p \Gamma(p)^2}$ .

d) Sind  $\int_0^\infty |V(r)|^{1/2} dr < \infty$  und  $V(r) < 0$  auf einer offenen Menge, dann gibt es für alle  $\ell$  Konstanten  $\Lambda$ ,  $a$  und  $b$  mit  $0 < a < b < \infty$ , sodass für alle  $\lambda > \Lambda$  gilt:

$$a\sqrt{\lambda} \leq n_\ell(\lambda V) \leq b\sqrt{\lambda} \quad (3.30)$$

e) Sind  $\int_0^\infty |V(r)|^{1/2} dr < \infty$  und  $V(r) < 0$  auf einer offenen Menge, dann gibt es Konstanten  $c$ ,  $d$  und  $\Lambda$  mit  $0 < c < d < \infty$ , sodass für alle  $\lambda > \Lambda$  gilt:

$$c\sqrt{\lambda} \leq \ell_{max}(\lambda V) \leq d\sqrt{\lambda} \quad (3.31)$$

BEMERKUNG 3.14. Wir schließen mit einigen Bemerkungen zu den vorgestellten Schranken.

- (i) Bargmanns Schranke impliziert, dass, wenn  $\int_0^\infty r|V(r)|dr < \infty$ , dann  $n_\ell(V) = 0$  für große  $\ell$  ist, da  $n_\ell(V) < 1$  in diesem Fall ist. Genauer gesagt impliziert Bargmanns Schranke, dass

$$\ell_{max}(V) \leq \frac{1}{2} \left[ \int_0^\infty r|V(r)|dr - 1 \right] \quad (3.32)$$

- (ii) Bargmanns Schranke, Calogeros Schranke und die Schranke an  $\ell_{max}(V)$ , die durch Bargmann impliziert wurde, sind scharfe Ungleichungen, das heißt die Konstanten sind optimal und werden durch die Wahl von bestimmten Potentialen angenommen.
- (iii) Andererseits sind die Bargmann-Schranke und die dadurch implizierte Schranke an  $\ell_{max}$  sehr schwach für starke Potentiale. Denn, wenn  $\lambda \rightarrow \infty$  geht, wachsen die Schranken wie  $\lambda$ , wohingegen  $n_\ell(\lambda V)$  und  $\ell_{max}(\lambda V)$  lediglich wie  $\sqrt{\lambda}$  wachsen.
- (iv) Die letzten beiden Schranken aus Satz [3.13](#) können für eine kleinere Klasse von Potentialen verbessert werden:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{n_\ell(\lambda V)}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |V_-(r)|^{1/2} dr \quad (3.33a)$$

für alle  $\ell$ ,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\ell_{max}(\lambda V)}{\sqrt{\lambda}} = - \min_r \{r^2 V(r)\} \quad (3.33b)$$

und  $(N(V) = \sum_{\ell=0}^\infty (2\ell + 1)n_\ell(V))$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N(\lambda V)}{\lambda^{3/2}} = \frac{1}{6\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} |V_-(x)|^{3/2} dx \quad (3.33c)$$

Die Grenzfälle für  $n_\ell(\lambda V)$  und  $N(\lambda V)$  werden wir später unter sehr allgemeinen Umständen beweisen.

**3.3. Schranken an  $N(V)$  im allgemeinen Zwei-Körper-Problem.** Wir werden im letzten Abschnitt Schranken an  $N(V)$  zeigen, wobei  $V$  nicht notwendigerweise sphärisch symmetrisch ist. Wir bemerken zunächst zwei nützliche Tatsachen.

LEMMA 3.15. *Sei  $H_0$  selbstadjungiert und positiv und sei  $V$  formbeschränkt bezüglich  $H_0$  mit relativer Formschranke gleich Null, das heißt  $V \prec\prec H_0$ . Wir definieren  $H_0 + \lambda V$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ) als den Operator, der durch die Formsumme identifiziert wird. Nehmen wir an, dass  $[0, \infty) \subseteq \sigma(H_0 + \lambda V)$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist, dann gilt für die Min-Max-Eigenwerte  $\mu_n(H_0 + \lambda V)$ :*

- (i)  $\mu_n(H_0 + \lambda V)$  ist stetig in  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- (ii)  $\mu_n(H_0 + \lambda V)$  ist monoton fallend in  $\lambda$  für  $\lambda \in [0, \infty)$  und streng monoton, sobald  $\mu_n$  negativ ist.

BEWEISSKIZZE. (i) Wegen  $V \prec\prec H_0$  ist  $\mathcal{Q}(H_0) \subseteq \mathcal{Q}(V)$  und mit dem Min-Max-Prinzip für Formen ist für  $\lambda_k \rightarrow \lambda$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_n(H_0 + \lambda_k V) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}} \inf_{\psi \in \mathcal{Q}(V), \psi \in [\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}]^\perp} (\psi, (H_0 + \lambda_k V)\psi) \quad (3.34)$$

Wir dürfen den Limes nun in das innere Produkt ziehen, da

$$|(\psi, (H_0 + \lambda_k V)\psi)| \leq (\psi, H_0\psi) + b\lambda_k \|\psi\|^2. \quad (3.35)$$

(ii) Sei dazu  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ . Dann betrachten wir die Differenz der Min-Max-Eigenwerte.

$$\mu_n(H_0 + \lambda_1 V) - \mu_n(H_0 + \lambda_2 V) = \sup \inf(\psi, (H_0 + \lambda_1 V)\psi) - \sup \inf(\psi, (H_0 + \lambda_2 V)\psi) \quad (3.36)$$

□

**SATZ 3.16** (Birman–Schwinger-Schranke). *Sei  $H_0 = -\Delta$  und  $V \in R$ , dann gilt für die Zahl der Eigenwerte von  $-\Delta + V$*

$$N(V) \leq \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|V(x)||V(y)|}{|x-y|^2} dx dy. \quad (3.37)$$

*Daraus folgt insbesondere, dass  $N(V) < \infty$  ist.*

**BEMERKUNG 3.17.** a) Zunächst einmal genügt es den Satz für  $V \leq 0$  zu beweisen, denn für beliebiges  $V$  gilt wegen  $-\Delta + V_- \leq -\Delta + V$  und des Min-Max-Prinzips, dass  $N(V_-) \geq N(V)$ .

Als Nächstes bemerken wir, dass es genügt den Satz für nicht-positive  $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  zu zeigen, wenn  $0 \geq V \in R + (L^\infty)_\epsilon$  beliebig ist und  $\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|V(x)||V(y)|}{|x-y|^2} dx dy < \infty$  erfüllt. Der Grund ist, dass so ein  $V$  durch nicht-positive  $V_n \in C_0^\infty$  im Sinne von

$$V_n - V \rightarrow 0 \text{ in } R + L^\infty \quad (3.38a)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|V_n(x)||V_n(y)|}{|x-y|^2} dx dy \nearrow \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|V(x)||V(y)|}{|x-y|^2} dx dy \quad (3.38b)$$

approximiert werden kann. Da  $V_n - V \rightarrow 0$  in  $R + L^\infty$ , folgt die Konvergenz  $-\Delta + V_n \rightarrow -\Delta + V$  im Norm-Resolventen-Sinne. Damit konvergiert auch  $P_{(-\infty, E)}^{(n)} \rightarrow P_{(-\infty, E)}$  für alle  $E < 0$ , die keine Eigenwerte von  $-\Delta + V$  sind. Für die Zahl der negativen Eigenwerte von  $-\Delta + V_n$  gilt

$$\lim_{E \nearrow 0} \text{tr} \left( P_{(-\infty, E)}^{(n)} \right) = N(V_n), \quad (3.39)$$

wobei die linke Seite monoton konvergiert, und

$$\lim_{E \nearrow 0} \text{tr} \left( P_{(-\infty, E)} \right) = N(V). \quad (3.40)$$

Wenn wir wissen, dass  $N(V_n) \leq \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|V_n(x)||V_n(y)|}{|x-y|^2} dx dy$  ist, so können wir schließen, dass

$$\begin{aligned} N(V) &= \lim_{E \nearrow 0} \text{tr} \left( P_{(-\infty, E)} \right) \leq \sup_{n, E < 0} \text{tr} \left( P_{(-\infty, E)}^{(n)} \right) \leq \sup_n N(V_n) \leq \sup_n \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|V_n(x)||V_n(y)|}{|x-y|^2} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|V(x)||V(y)|}{|x-y|^2} dx dy. \end{aligned} \quad (3.41)$$

b) Wir erinnern uns hierbei an die Helmholtzgleichung  $(-\Delta - E)u = f$ , wobei  $E < 0$  nicht im Spektrum (im PDE-Jargon) von  $-\Delta$  liegt. Diese wird durch

$u = (-\Delta - E)^{-1}f$ , oder im Fourierraum durch  $\hat{u}(\xi) = (\xi^2 - E)^{-1}\hat{f}$  gelöst. Wendet man nun die inverse Fouriertransformation an, erhält man

$$u(x) = \left[ ((\xi^2 - E)^{-1})^\wedge * f \right](x) \quad (3.42)$$

mit dem Helmholtz-Kern

$$\begin{aligned} ((\xi^2 - E)^{-1})^\wedge(x - y) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} (\xi^2 - E)^{-1} e^{i(x-y)\xi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty d\xi \xi^2 (\xi^2 - E)^{-1} \int_{-1}^1 e^{i|x-y|\xi u} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{|x-y|} \int_0^\infty \frac{\xi}{\xi^2 - E} \sin(|x-y|\xi) d\xi \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\sqrt{-E}|x-y|}}{|x-y|}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

BEWEIS. Wegen obiger Bemerkung genügt es also mit  $0 \geq V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  zu arbeiten. Sei nun  $E < 0$  und  $N_E(V) := \dim(\text{Ran}(P_{(-\infty, E)}))$ , wobei  $P$  die Spektralprojektion von  $-\Delta + V$  sein soll. Um die Notation zu vereinfachen schreiben wir  $\mu_n(\lambda)$  für den  $n$ -ten Min-Max-Eigenwert  $\mu_n(-\Delta + \lambda V)$ . Dann definieren wir die Zahl aller Min-Max-Eigenwerte, die kleiner sind als  $E$  als

$$N_E(V) = \#\{n : \mu_n(1) < E\}, \quad (3.44)$$

wobei  $\#(A)$  die Kardinalität der Menge  $A$  sein soll. Da  $\mu_n(\lambda)$  monoton in  $\lambda$  fällt, stetig in  $\lambda$  ist und  $\mu_n(0) = 0$  ist, ist  $\mu_n(1) < E$  genau dann, wenn  $\mu_n(\lambda) = E$  für ein  $0 < \lambda < 1$  ist. In diesem Fall ist wegen der Stetigkeit dieses  $\lambda$  eindeutig bestimmt, dies ist das sog. *Birman-Schwinger-Prinzip*. Somit ist

$$\begin{aligned} N_E(V) &= \#\{n : \mu_n(\lambda) = E \text{ für ein } \lambda \in (0, 1)\} \\ &= \sum_{\{0 < \lambda < 1 : \mu_k(\lambda) = E; k=1, \dots, N_E(V)\}} 1 \leq \sum_{\{0 < \lambda < 1 : \mu_k(\lambda) = E; k=1, \dots, N_E(V)\}} \lambda^{-2} \\ &\leq \sum_{\{0 < \lambda < 1 : \mu_k(\lambda) = E; k=1, \dots\}} \lambda^{-2}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Als Nächstes bemerken wir, dass  $\psi \in \text{Ker}(-\Delta + \lambda V - E)$ ,  $\psi$  also ein Eigenvektor von  $-\Delta + \lambda V$  mit Eigenwert  $E < 0$  ist, genau dann, wenn

$$\begin{aligned} (-\Delta - E)\psi = -\lambda V\psi = \lambda |V|\psi &\Leftrightarrow \lambda \left( (-\Delta - E)^{-1} |V|^{1/2} \right) \left( |V|^{1/2} \psi \right) = \psi \\ &\Leftrightarrow \lambda \left( |V|^{1/2} (-\Delta - E)^{-1} |V|^{1/2} \right) \left( |V|^{1/2} \psi \right) = |V|^{1/2} \psi, \end{aligned} \quad (3.46)$$

das heißt, wenn  $\lambda^{-1}$  ein Eigenwert des Operators  $K := |V|^{1/2}(-\Delta - E)^{-1}|V|^{1/2}$  ist. Beachte, dass  $(-\Delta - E) > 0$ , weshalb  $-\lambda V\psi = \lambda |V|\psi$  mit  $\lambda \in (0, 1)$  ist. Des Weiteren ist  $\psi \notin \text{Ker}(|V|)$ , denn sonst wäre  $\psi \in \text{Ker}(-\Delta - E)$ , also ein Eigenvektor der kinetischen Energie mit negativer Energie  $E < 0$ , was im Widerspruch zur Positivität von  $-\Delta$  steht.

Obige Gleichung ist genau dann wahr, wenn  $\lambda K\varphi = \varphi$  (mit  $\varphi = |V|^{1/2}\psi$ ) eine Lösung  $0 \neq \varphi \in L^2(\mathbb{R}^3)$  hat, wobei  $K = |V|^{1/2}(-\Delta - E)^{-1}|V|^{1/2}$ . Im Ortsraum ist

der Integrkern von  $K$  durch

$$K(x, y) = |V|^{1/2}(x)(-\Delta - E)^{-1}(x, y)|V|^{1/2}(y) \quad (3.47)$$

gegeben, wobei

$$(-\Delta - E)^{-1}(x, y) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\sqrt{-E}|x-y|}}{|x-y|} \quad (3.48)$$

der Helmholtz-Kern ist. Damit ist

$$K(x, y) = \frac{|V|^{1/2}(x)e^{-\sqrt{-E}|x-y|}|V|^{1/2}(y)}{4\pi|x-y|}. \quad (3.49)$$

Da  $V \in R$ , ist  $K \in \mathcal{S}^2(L^2(\mathbb{R}^3))$  (und damit tatsächlich als Integrkern schreibbar), denn

$$\int_{\mathbb{R}^6} \left| \frac{|V|^{1/2}(x)e^{-\sqrt{-E}|x-y|}|x-y||V|^{1/2}(y)}{4\pi|x-y|} \right|^2 dx dy \leq \int_{\mathbb{R}^6} \frac{|V(x)||V(y)|}{16\pi^2|x-y|^2} dx dy < \infty. \quad (3.50)$$

Außerdem ist  $K$  selbstadjungiert, da  $K(x, y)$  reell und symmetrisch ist. Daraus folgt, dass

$$\sum_{\{\kappa: \kappa \text{ ist ein Eigenwert von } K\}} \kappa^2 = \text{tr}(KK^*) = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \int e^{-2\sqrt{-E}|x-y|} \frac{|V(x)||V(y)|}{|x-y|^2} dx dy. \quad (3.51)$$

$0 \neq \kappa$  ist genau dann ein Eigenwert von  $K$ , wenn die Gleichung  $\kappa^{-1}K\varphi = \varphi$  eine Lösung hat, was nach unseren obigen Überlegungen genau dann wahr ist, wenn  $\mu_n(\lambda) = E$  mit  $\lambda = \kappa^{-1}$  ist. Daher ist also

$$\sum_{\{\lambda: \mu_k(\lambda) = E\}} \lambda^{-2} = \sum_{\{\kappa: \kappa \text{ ist ein Eigenwert von } K\}} \kappa^2, \quad (3.52)$$

woraus folgt, dass

$$N_E(V) \leq \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \int e^{-2\sqrt{-E}|x-y|} \frac{|V(x)||V(y)|}{|x-y|^2} dx dy. \quad (3.53)$$

Der Satz folgt nun, da  $N(V) = \lim_{E \nearrow 0} N_E(V)$  ist.  $\square$

**BEMERKUNG 3.18.** a) Definiert man wie im Fall der Zentralpotentiale  $V_- = \min\{V, 0\}$ , so hat man sogar

$$N(V) \leq \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \int \frac{V_-(x)V_-(y)}{|x-y|^2} dx dy. \quad (3.54)$$

b) Die Birman–Schwinger-Schranke kann erweitert werden, um auch gebundene Zustände mit Energie gleich Null zu erfassen, das heißt man kann zeigen, dass

$$\dim(\text{Ran}(P_{(-\infty, 0]})) \leq \left(\frac{1}{4\pi^2}\right) \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|V(x)||V(y)|}{|x-y|^2} dx dy. \quad (3.55)$$

c) Man kann mit dieser Methode auch die Schranke von Bargmann zeigen.

d) Aus der Birman–Schwinger-Schranke folgt, dass, wenn  $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  ist, die Zahl der Eigenwerte  $N(\lambda V) = 0$  ist, wenn  $\lambda$  hinreichend klein ist.

Wir werden später sehen, dass die letzte Bemerkung auch für Dimensionen  $n > 3$  wahr ist. Insbesondere zeigen wir später, dass, wenn  $V \in L^{\frac{n}{2}-\epsilon}(\mathbb{R}^3) \cap L^{\frac{n}{2}+\epsilon}(\mathbb{R}^3)$ , die Operatoren  $-\Delta + \lambda V$  und  $-\Delta$  für kleine  $\lambda$  unitär äquivalent sind. Für  $n = 1, 2$  schaut die Sache jedoch etwas anders aus.

**SATZ 3.19.** *Sei  $0 \geq V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , die nicht identisch verschwindet und  $n \in \{1, 2\}$ . Dann hat  $-\Delta + \lambda V$  einen negativen Eigenwert für alle  $\lambda > 0$ .*

**BEWEIS.** Mit dem Beweis des vorigen Satzes reicht es zu zeigen, dass es für ein beliebiges  $\lambda > 0$  ein  $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gibt, sodass  $|V|^{1/2}(-\Delta + \kappa^2)^{-1}|V|^{1/2}$  einen Eigenwert hat, der größer als  $\lambda^{-1}$  ist. Da  $|V|^{1/2}(-\Delta + \kappa^2)^{-1}|V|^{1/2}$  Hilbert-Schmidt, und damit kompakt, positiv und selbstadjungiert ist, genügt es zu zeigen, dass

$$\lim_{\kappa^2 \rightarrow 0} \left\| \left| |V|^{1/2}(-\Delta + \kappa^2)^{-1}|V|^{1/2} \right| \right\| = \infty. \quad (3.56)$$

Dazu müssen wir lediglich ein  $\eta \in L^2(\mathbb{R}^n)$  finden, sodass

$$\lim_{\kappa^2 \rightarrow 0} \left( |V|^{1/2} \eta, (-\Delta + \kappa^2)^{-1} |V|^{1/2} \eta \right) = \infty \quad (3.57)$$

Wir wählen dazu  $0 \neq \eta \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , so dass  $\varphi(x) \equiv |V(x)|^{1/2} \eta(x) \geq 0$  und nicht fast überall Null ist. Dann ist

$$\left( |V|^{1/2} \eta, (-\Delta + \kappa^2)^{-1} |V|^{1/2} \eta \right) = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 (\xi^2 + \kappa^2)^{-1} d\xi. \quad (3.58)$$

Es gibt nun sicherlich  $\eta \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , sodass  $\hat{\varphi}(\xi) \neq 0$  für  $\xi$  nahe dem Ursprung (z.B. ist  $\hat{\varphi}$  dort konstant), sodass das Integral für  $\kappa^2 \rightarrow 0$  divergiert  $n = 1, 2$ . Insbesondere sieht man, dass die Rate, mit der der Ausdruck logarithmisch für  $n = 2$  und wie  $|\cdot|^{-1/2}$  für  $n = 1$  geht.  $\square$

Tatsächlich gibt es, für hinreichend kleines  $\lambda$ , genau einen gebundenen Zustand. Tatsächlich zeigte Simon <sup>Simon1976</sup> [Sim76] daneben, dass der zugehörige Eigenwert bei  $\lambda = 0$  in  $d = 1$  analytisch und in  $d = 2$  nicht analytisch ist. Außerdem untersuchte er das Verhalten der Eigenwerte nahe der Schwelle  $\inf \sigma_{ess}(H) = 0$ .

Wir haben gesehen, dass bei der Bargmann-Schranke  $n_\ell(\lambda V)$  wie  $\sqrt{\lambda}$  wächst, wohingegen die Schranke wie  $\lambda$  wächst. Ähnlich verhält es sich mit der Birman-Schwinger-Schranke;  $N(V)$  wächst wie  $\lambda^{3/2}$ , wohingegen die Schranke wie  $\lambda^2$  wächst. Dieser unschöne Umstand wird durch das folgende Resultat behoben, welches besonders schön ist, da man leicht eine Verbindung zum klassischen Bild des Phasenraums erhält.

**theorem:3.28**

**SATZ 3.20** (Cwikel–Lieb–Rosenbljum). *Sei  $n \geq 3$  und  $N(V)$  die Zahl der gebundenen Zustände von  $-\Delta + V$  auf  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Dann gibt es eine Konstante  $c_n$ , sodass*

$$N(V) \leq c_n \int_{\mathbb{R}^n} |V_-(x)|^{n/2} dx. \quad (3.59)$$

#### 4. Bestimmung des wesentlichen Spektrums I: Weyls Satz

In den folgenden Abschnitten werden wir  $\sigma_{ess}(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma_{disc}(A)$  für eine Vielfalt von Operatoren  $A$  bestimmen und ein klassisches Störungsresultat beweisen,

welches sagt, dass  $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A + C)$ , wenn  $C$  „fast kompakt“ ist. Was das bedeuten soll, werden wir später erfahren. Dieses Resultat ist wichtig, um das wesentliche Spektrum von Schrödinger-Operatoren, deren Schwerpunktsmasse absepariert wurde, zu bestimmen.

Primär sind wir an selbstadjungierten  $A$  interessiert, der natürliche Fall ist jedoch, dass  $A$  lediglich abgeschlossen sein muss. Um  $\sigma_{ess}(A)$  zu bestimmen, werden wir hauptsächlich die Resolvente  $(A - z)^{-1}$  für  $z \in \rho(A)$  untersuchen. Für allgemeine selbstadjungierte Operatoren muss dabei  $z$  komplex sein, wenn  $A$  jedoch von unten beschränkt ist, kann man natürlich auch hinreichend tiefe  $z$  auf der reellen Achse verwenden. Die Ergebnisse des Abschnitts stützen sich auf das analytische Fredholm-Theorem, sowie einer Verallgemeinerung dessen. Wir beweisen daher zu Beginn einen Spezialfall dessen, was uns erwarten wird.

**SATZ 4.1.** *Seien  $A$  und  $B$  zwei beschränkte, selbstadjungierte Operatoren mit  $\sigma_{disc}(A) = \sigma_{disc}(B) = \emptyset$ . Ist die Differenz  $B - A \in \mathcal{S}^\infty$ , so ist  $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$ .*

**BEWEIS.** Wir schreiben  $A = B + C$  mit  $C \in \mathcal{S}^\infty$  und definieren  $F(z) = C(A - z)^{-1}$ . Für  $z \in \rho(A)$  ist  $F(z)$  eine analytische operatorwertige Funktion von  $z$ , die kompakt ist, da  $C$  kompakt ist. Da  $A$  beschränkt ist, konvergiert

$$\|F(z)\| \leq \|C\| \|(A - z)^{-1}\| \rightarrow 0 \quad (4.1)$$

für  $z \rightarrow \infty$ . Daher existiert insbesondere  $(1 - F(z))^{-1}$  für hinreichend großes  $|z|$ . Wegen des analytischen Fredholm-Satzes existiert daher  $(1 - F(z))^{-1}$  für  $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(A) \cup D)$ , wobei  $D$  eine diskrete Teilmenge von  $\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$  ist. Der Fredholm-Satz sagt uns weiterhin, dass  $(1 - F(z))^{-1}$  meromorph in  $\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ , mit Residuen (also die Operatoren an den Polen) endlichen Ranges auf Punkten in  $D$ , ist.

Sei nun  $z \notin \sigma(A)$ . Dann ist  $B - z = (1 - C(A - z)^{-1})(A - z)$ . Ist nun  $1 - F(z) = 1 - C(A - z)^{-1}$  invertierbar (das heißt zusätzlich ist  $z \notin D$ ), so ist auch  $z \notin \sigma(B)$  und es ist  $(B - z)^{-1} = (A - z)^{-1}(1 - F(z))^{-1}$  und somit ist  $\sigma(B) \subseteq \sigma(A) \cup D$ . Darüberhinaus hat  $B$  Residuen endlichen Ranges an den Punkten in  $D$ , das heißt Punkte in  $D$  sind Elemente von  $\sigma_{disc}(B)$ . Dies heißt jedoch, dass  $\sigma_{ess}(B) \subseteq \sigma(A)$ . Analog erhält man durch Vertauschen der Rollen von  $A$  und  $B$  auch die andere Inklusion  $\sigma_{ess}(A) \subseteq \sigma(B)$ . Da wir  $\sigma_{disc}(A) = \sigma_{disc}(B) = \emptyset$  vorausgesetzt hatten, sehen wir, dass  $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$  ist.  $\square$

Wir wollen die Behauptung nun in einige Richtungen erweitern. Vor allem sollten unbeschränkte Operatoren und Operatoren mit diskretem Spektrum zugelassen werden. Hierzu brauchen wir eine stärkere Version des analytischen Fredholm-Satzes theorem: A.45 4.17.

theorem: 3.32

**SATZ 4.2 (Meromorpher Fredholm-Satz).** *Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  offen und zusammenhängend. Sei  $A(z)$  eine meromorphe, operatorwertige Funktion von  $z$ , das heißt  $A$  ist analytisch in  $\Omega \setminus D$ , wobei  $D$  eine diskrete Teilmenge von  $\Omega$  ist, also eine Menge, die keine Häufungspunkte in  $\Omega$  enthält und nahe jedem  $z_0 \in D$  die Entwicklung*

$$A(z) = A_{-k}(z - z_0)^{-k} + \cdots + A_{-1}(z - z_0)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z - z_0)^n \quad (4.2)$$

hat. Weiter nehmen wir

- (1)  $A(z)$  ist kompakt, wenn  $z \in \Omega \setminus D$  und
- (2) die Koeffizienten  $A_{-j}$  ( $j = 1, \dots, k$ ) an den Punkten  $z_0 \in D$  sind Operatoren endlichen Ranges.

an. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen.

- a)  $1 - A(z)$  ist für kein  $z \in \Omega \setminus D$  invertierbar.  
 b) Es gibt eine diskrete Teilmenge  $D' \subseteq \Omega$ , sodass  $(1 - A(z))^{-1}$  für  $z \notin (D \cup D')$  existiert und zu einer in  $\Omega \setminus D'$  analytischen und in  $\Omega$  meromorphen Funktion erweiterbar ist, sodass die  $A_{-j}$  ( $j = 1, \dots, k$ ) an den Punkten  $z_0 \in D'$  Operatoren endlichen Ranges sind.

Die Voraussetzung, dass die  $A_{-j}$  ( $j = 1, \dots, k$ ) Operatoren endlichen Ranges sind, ist wichtig, da der Satz nicht wahr ist, wenn wir lediglich Kompaktheit voraussetzen. Der meromorphe Fredholm-Satz erlaubt es uns die Voraussetzung, dass  $\sigma(A) = \sigma_{ess}(A)$  ist, zu eliminieren.

**lemma:3.31**

LEMMA 4.3. Sei  $A$  abgeschlossen. Dann ist  $(A - z)^{-1}$  eine meromorphe Funktion auf  $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(A)$ , die Singularitäten nur bei Punkten  $z \in \sigma_{disc}(A)$  aufweist. Zudem sind die  $A_{-j}$  ( $j = 1, \dots, k$ ) bei Punkten  $z_0 \in \sigma_{disc}(A)$  Operatoren endlichen Ranges.

BEWEIS. Wir wissen bereits, dass  $(A - z)^{-1}$  analytisch in  $\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$  ist. Sei nun  $z_0$  ein isolierter Punkt in  $\sigma(A)$ . Dann ist  $(A - z)^{-1}$  insbesondere analytisch in der Menge  $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$  und lässt sich als

$$(A - z)^{-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n (z - z_0)^n \quad (4.3)$$

schreiben, wobei

$$R_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r/2} (z - z_0)^{-n-1} (A - z)^{-1} dz. \quad (4.4)$$

Wir haben bereits gesehen, dass die Resolventengleichung  $(-R_{-1})^1 = -R_{-1}$  impliziert. In ähnlicher Weise kann man auch  $R_{-n} = -(N)^{n-1}$  für  $n \geq 2$  und  $N = -R_{-2}$  zeigen, sowie, dass  $NP = PN = N$  ist, wo  $P = -R_{-1}$  die Projektion auf  $z_0$  ist. Da  $\sum_{n=-\infty}^0 R_n \mu^n$  für alle  $\mu \neq 0$  absolut konvergiert, konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n N^n$  für alle  $\lambda$ , das heißt  $(1 - \lambda N)^{-1}$  existiert für alle  $\lambda$  als Neumannreihe. Damit ist  $\sigma(N) = \{0\}$ .

Nehmen wir nun weiter an, dass der isolierte Punkt  $z_0$  auch im diskreten Spektrum von  $A$  liegt. Dann ist  $P$  per Definitionem endlichen Ranges. Wegen  $PN = N$  ist  $\text{Ran}(N) \subseteq \text{Ran}(P)$ , das heißt auch  $R_{-n}$  hat endlichen Rang. Das bedeutet, dass die Pole von  $(A - z)^{-1}$  bei  $z_0$  Operatoren endlichen Ranges sind.

Da  $\sigma(N) = \{0\}$  ist  $N \upharpoonright_{\text{Ran}(P)}$  ein endlichdimensionaler Operator, der lediglich 0 im Spektrum hat. Daher ist  $(NP)^k = 0$  ab einem bestimmten  $k$ . Wegen  $NP = N$  ist  $(NP)^k = N^k$ , das heißt auch  $N^k = 0$  ab diesem  $k$ . Damit ist auch  $R_{-n} = 0$  für alle  $n \geq k + 1$ , womit  $(A - z)^{-1}$  meromorph bei  $z_0$  mit Residuen endlichen Ranges ist.  $\square$

Wir sind damit in der Lage unsere erste Aussage zu erweitern.

SATZ 4.4. Seien  $A$  und  $B$  zwei beschränkte, selbstadjungierte Operatoren. Ist die Differenz  $B - A \in \mathcal{S}^\infty$ , so ist  $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$ .

BEWEIS.  $\square$

Als Nächstes erweitern wir die Aussage auf unbeschränkte Operatoren.

LEMMA 4.5 (Starker Spektral-Abbildungs-Satz). *Sei  $A$  ein abgeschlossener Operator auf  $\mathcal{H}$ . Sei  $z_0 \notin \sigma(A)$  und definiere  $B = (A - z_0)^{-1}$ . Dann gilt:*

a) *Sei  $z \neq 0$ , dann haben wir:*

- (i)  $z \in \sigma(B) \Leftrightarrow z_0 + z^{-1} \in \sigma(A)$
- (ii)  $z \in \sigma_{ess}(B) \Leftrightarrow z_0 + z^{-1} \in \sigma_{ess}(A)$
- (iii)  $z \in \sigma_{disc}(B) \Leftrightarrow z_0 + z^{-1} \in \sigma_{disc}(A)$ .

b) *Sei  $z = 0$ , dann haben wir:*

- (i)  $0 \in \sigma(B) \Leftrightarrow A$  ist nicht beschränkt.
- (ii) *Es gilt immer  $0 \notin \sigma_{disc}(B)$ , das heißt wenn  $0 \in \sigma(B)$  ist, so muss  $0 \in \sigma_{ess}(B)$  sein.*

BEWEIS. a) Sei  $z \neq 0$ .

(i) Da  $z_0 \notin \sigma(A)$  ist, ist

$$B - z = (A - z_0)^{-1} - z = [1 - z(A - z_0)](A - z_0)^{-1} = -z[A - (z_0 + z^{-1})](A - z_0)^{-1}. \quad (4.5)$$

Ist nun  $z \notin \sigma(B)$ , so ist  $[A - (z_0 + z^{-1})]^{-1} = -z(A - z_0)^{-1}(B - z)^{-1}$ , das heißt  $z^{-1} + z_0 \notin \sigma(A)$ .

Ist umgekehrt  $z^{-1} + z_0 \notin \sigma(A)$ , so ist  $-z^{-1}(A - z_0)[A - (z_0 + z^{-1})]^{-1} = -z^{-1} - z^{-2}[A - (z_0 + z^{-1})]$  beschränkt und eine Inverse für  $B - z$ , das heißt  $z \notin \sigma(B)$ . Damit ist  $z \in \sigma(B)$  genau dann, wenn  $z^{-1} + z_0 \in \sigma(A)$ .

- (ii) Isolierte Punkte des Spektrums werden durch die Abbildung  $z \mapsto z^{-1} + z_0$  wieder in isolierte Punkte abgebildet. Sei nun  $z_1 \in \sigma_{disc}(B)$ . Dann ist  $(B - z)^{-1}$  für  $z$  nahe  $z_1$  meromorph und hat Residuen endlichen Ranges. Daher ist auch  $[A - (z_0 + z^{-1})]^{-1} = -z(A - z_0)^{-1}(B - z)^{-1}$  für  $z$  nahe  $z_1$  meromorph und hat Residuen endlichen Ranges. Daher ist (die linke Seite)  $(A - \lambda)^{-1}$  für  $\lambda$  nahe  $z_1^{-1} + z_0$  meromorph mit Residuen endlichen Ranges, das heißt  $z_1^{-1} + z_0 \in \sigma_{disc}(A)$ . Die umgekehrte Inklusion kann man ähnlich beweisen. Daraus folgt die Behauptung für  $z \neq 0$ .

b)

□

Wollten wir das Endresultat nur für halbbeschränkte, selbstadjungierte Operatoren aufschreiben, so könnten wir die erste Behauptung des Abschnitts auf  $(A + c)^{-1}$  für geeignetes  $c \in \mathbb{R}$  anwenden. Für allgemeine selbstadjungierte Operatoren ist  $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$  und deshalb müssen wir die Resolvente  $(A - i)^{-1}$  genauer untersuchen. Diese ist offensichtlich nicht mehr selbstadjungiert, weshalb wir die anfangs aufgestellte Behauptung auf nicht-selbstadjungierte Operatoren erweitern müssen.

Das folgende Beispiel zeigt, dass es nicht ausreicht, dass  $B - A$  kompakt ist (für unbeschränkte Operatoren), um  $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$  zu zeigen.

BEISPIEL 4.6. Sei  $\mathcal{H} = l^2(-\infty, \infty)$  und  $A$  der Shift-Operator  $(A\varphi)_n = \varphi_{n+1}$ . Sei  $C : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  durch  $(C\varphi)_n = \delta_{n,0}\varphi_1$  definiert, das heißt  $C$  ist eine Rang-Eins-Störung. Sei  $B = A - C$ , dann werden wir zeigen, dass  $\sigma(A) = \sigma_{ess}(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ , wohingegen  $\sigma(B) = \sigma_{ess}(B) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ .

Um  $\sigma(A)$  zu bestimmen bilden wir  $l^2(-\infty, \infty)$  durch  $U\{\varphi_n\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi_n e^{inx}$  auf  $L^2(0, 2\pi)$  ab.  $U$  ist unitär und  $UAU^{-1}$  ist die Multiplikation mit  $e^{-ix}$ , das heißt  $\sigma(A) = \sigma(UAU^{-1}) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ .

Ist nun  $z \notin \sigma(A)$ , so existiert  $(B - z)^{-1}$  genau dann, wenn  $(1 - C(A - z)^{-1})^{-1}$  existiert. Da  $C(A - z)^{-1}$  kompakt ist, existiert  $(1 - C(A - z)^{-1})^{-1}$  (analytischer Fredholm-Satz), außer  $C(A - z)^{-1}$  hat 1 als Eigenwert, was gleichbedeutend ist mit  $z$  ist ein Eigenwert von  $B$ . Sei nun  $\varphi$  ein Eigenvektor von  $B$  zum Eigenwert  $z$ , das heißt  $(B - z)\varphi = 0$ . Dann ist  $\varphi_{n+1} - \delta_{n,0}\varphi_1 - z\varphi_n = 0$ . Angenommen es wäre  $z \neq 0$ . Für  $n = 0$  ist  $\varphi_0 = 0$ . Iteriert man nun für  $n = -1, -2, \dots$ , so sieht man, dass  $\varphi_n = 0$  für alle  $n \leq 0$ . Für  $n \geq 1$  sieht man, dass  $\varphi_n = z^{n-1}\varphi_1$ . Da der Eigenvektor normierbar sein muss, existiert für  $|z| > 1$  kein Eigenvektor von  $B$  zum Eigenwert  $z$ , das heißt  $B - z$  ist auf  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \subseteq \rho(B)$  invertierbar. Ist jedoch  $|z| < 1$ , so ist  $\langle 0, \varphi_1, z\varphi_1, \dots, z^{n-1}\varphi_1, \dots \rangle$  ein Eigenvektor, das heißt  $\sigma(B) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ .

Wo bricht also der Beweis von  $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$  potentiell zusammen? Wir wissen zwar immer noch, dass  $C(A - z)^{-1}$  auf  $\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$  analytisch ist. Auf dem Gebiet von  $\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ , welches nach Unendlich herausgeht, ist irgendwann  $|||C(A - z)^{-1}||| < 1$ , das heißt  $(1 - C(A - z)^{-1})^{-1}$  existiert auf diesem Teilgebiet. Auf dem restlichen Gebiet wissen wir jedoch nicht, dass  $(1 - C(A - z)^{-1})^{-1}$  an irgendeinem Punkt existiert, weshalb das Fredholm-Theorem auf diesem Gebiet entweder gar keine Aussage gibt, oder schlimmer noch, die Resolvente auf diesem Gebiet überhaupt nicht existiert.

Wir brauchen daher einige weitere Annahmen an  $B$ , die sicherstellen, dass die Nicht-Invertierbarkeit von  $1 - C(A - z)^{-1} = (B - z)(A - z)^{-1}$  auf einer ganzen Komponente von  $\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$  nicht auftreten kann. Wenn wir die Situation des Beispiels umkehren, also  $A$  als Störung von  $B$  auffassen, so sieht man, dass das Interior von  $\sigma_{ess}(A)$  unter Störungen sogar verschwinden kann. Wir nehmen daher an, dass  $\sigma_{ess}(A)$  nirgends dicht ist.

LEMMA 4.7. *Seien  $A, B$  beschränkte Operatoren, sodass*

- a)  $A - B$  ist kompakt,
- b)  $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$  hat leeres Interior als Teilmenge von  $\mathbb{C}$  und
- c) jede Komponente von  $\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$  beinhaltet wenigstens einen Punkt, der in  $\rho(B)$  liegt.

Dann ist  $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$ .

BEWEIS. Sei wieder  $C = A - B$ . Da  $C$  kompakt ist, ist  $C(A - z)^{-1}$  kompakt und eine analytische und operatorwertige Funktion auf  $\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ . Wegen Lemma 4.3 ist daher  $(A - z)^{-1}$  meromorph auf  $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(A)$  mit Residuen endlichen Ranges an den Punkten in  $\sigma_{disc}(A)$ . Ist nun  $z \notin \sigma(A)$ , so existiert  $(B - z)^{-1}$  genau dann, wenn  $(1 - C(A - z)^{-1})^{-1}$  existiert. Da per Voraussetzung jede Komponente von  $\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$  einen Punkt aus  $\rho(B)$  enthält, ist  $(1 - C(A - z)^{-1})^{-1}$  irgendwo auf jeder Komponente von  $\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$  invertierbar. Da  $\sigma_{disc}(A)$  diskret ist, sind die Komponenten von  $\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$  und  $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(A)$  die selben. Wegen des meromorphen Fredholm-Satzes existiert daher  $(1 - C(A - z)^{-1})^{-1}$  auf  $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(A)$  bis auf eine diskrete Menge  $D'$ , wo  $(1 - C(A - z)^{-1})^{-1}$  Residuen endlichen Ranges hat.  $B$  kann daher nur diskretes Spektrum auf  $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(A)$  haben, das heißt  $\sigma_{ess}(B) \subseteq \sigma_{ess}(A)$ .

Da  $\sigma(A)$  per Voraussetzung kein Interior hat, hat jede Komponente von  $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(B)$  weder einen Punkt in  $\sigma(A)$  noch in  $\sigma(B)$ . Man kann also den Beweis wiederholen, wenn die Rollen von  $A$  und  $B$  vertauscht werden und erhält die umgekehrte Inklusion  $\sigma_{ess}(A) \subseteq \sigma_{ess}(B)$ .  $\square$

Wir brauchen nur noch ein kleines Hilfsmittel, um das Endresultat beweisen zu können.

lemma:3.36

LEMMA 4.8. *Seien  $A, B$  abgeschlossen. Ist  $(A - z)^{-1} - (B - z)^{-1} \in \mathcal{S}^\gamma$  ( $\gamma \in [1, \infty]$ ) für ein  $z_0 \in \rho(A) \cap \rho(B)$ , so ist  $(A - z)^{-1} - (B - z)^{-1} \in \mathcal{S}^\gamma$  für alle  $z \in \rho(A) \cap \rho(B)$ .*

BEWEIS. Wir definieren  $S_z := \text{id} + (z - z_0)(A - z)^{-1}$  und  $T_z := \text{id} + (z - z_0)(B - z)^{-1}$  für  $z \in \rho(A) \cap \rho(B)$ . Diese sind für  $z \in \rho(A) \cap \rho(B)$  beschränkte Operatoren. Dann gilt mit der ersten Resolventengleichung

$$\begin{aligned} S_z(A - z_0)^{-1} &= (A - z_0)^{-1} + (z - z_0)(A - z)^{-1}(A - z_0)^{-1} \\ &= (A - z_0)^{-1} + (A - z)^{-1} - (A - z_0)^{-1} = (A - z)^{-1} \end{aligned} \quad (4.6)$$

und analog  $(B - z_0)^{-1}T_z = (B - z)^{-1}$ . Daher haben wir

$$\begin{aligned} S_z [(A - z_0)^{-1} - (B - z_0)^{-1}] T_z &= S_z(A - z_0)^{-1}T_z - S_z(B - z_0)^{-1}T_z \\ &= (A - z)^{-1}T_z - S_z(B - z)^{-1} \\ &= (A - z)^{-1} + (z - z_0)(A - z)^{-1}(B - z)^{-1} \\ &\quad - (B - z)^{-1} - (z - z_0)(A - z)^{-1}(B - z)^{-1} \\ &= (A - z)^{-1} - (B - z)^{-1} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Die Behauptung folgt, da die Schattenklassen links- und rechtsseitige Ideale sind.  $\square$

SATZ 4.9 (Weyls Satz über das wesentliche Spektrum). *Sei  $A$  selbstadjungiert und  $B$  abgeschlossen, sodass*

- a) *Für ein (und damit für alle)  $z \in \rho(A) \cap \rho(B)$  ist  $(A - z)^{-1} - (B - z)^{-1}$  kompakt und entweder*
- b<sub>1</sub>)  *$\sigma(A) \neq \mathbb{R}$  und  $\rho(B) \neq \emptyset$  oder*
- b<sub>2</sub>)  *$\rho(B)$  hat Punkte, die sowohl in der oberen, als auch in der unteren Halbebene leben.*

*Dann ist  $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$ .*

BEWEIS. Die Voraussetzungen implizieren zunächst, dass es ein  $z_0 \in \rho(B)$  geben muss, das nicht-reell ist. Definieren wir  $D := (A - z_0)^{-1}$  und  $E := (B - z_0)^{-1}$ , so müssen wir wegen des starken Spektral-Abbildungs-Satzes lediglich  $\sigma_{ess}(D) = \sigma_{ess}(E)$  zeigen. Da  $A$  selbstadjungiert ist, ist  $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$  und deshalb wegen des Spektral-Abbildungs-Satzes  $\sigma_{ess}(D) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda^{-1} + z_0 \in \mathbb{R}\} \cup \{0\}$ . Damit hat  $\sigma_{ess}(D)$  als Teilmenge von  $\mathbb{C}$  leeres Interior und wir müssen zwei Fälle untersuchen: entweder  $\sigma_{ess}(A) = \mathbb{R}$ , dann hat  $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(D)$  zwei Komponenten, oder  $\sigma_{ess}(A) \neq \mathbb{R}$ , das heißt  $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(D)$  ist zusammenhängend. In beiden Fällen implizieren der Spektral-Abbildungs-Satz und die Voraussetzung b), dass jede Komponente von  $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(D)$  die Resolventenmenge  $\rho(E)$  schneidet. Da  $D$  und  $E$  beschränkt sind und per Voraussetzung  $D - E$  kompakt ist, sagt uns voriges Lemma, dass  $\sigma_{ess}(D) = \sigma_{ess}(E)$  ist. Mit dem Spektral-Abbildungs-Satz folgt  $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$ .  $\square$

BEMERKUNG 4.10. Weyls Satz kann auf nicht-selbstadjungierte und nicht-normale  $A$  mit etwas stärkeren Voraussetzungen erweitert werden.

BEISPIEL 4.11. Seien  $A$  und  $B$  die Operatoren vom vorigen Beispiel, sodass  $\sigma(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  und  $\sigma(B) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ . Da 1 kein Eigenwert von  $A, A^*, B$  oder  $B^*$  ist, sind  $A - 1$  und  $B - 1$  injektive Abbildungen von  $l^2$  auf

dichte Teilräume von  $l^2$ . Damit sind  $(A-1)^{-1}$  und  $(B-1)^{-1}$  unbeschränkte, dicht definierte, abgeschlossene Operatoren. Definieren wir nun  $D := i(A+1)(A-1)^{-1} = i[1+2(A-1)^{-1}]$  und  $E := i(B+1)(B-1)^{-1} = i[1+2(B-1)^{-1}]$ . Dann ist  $D$  selbstadjungiert, da  $UDU^{-1}$  der Multiplikationsoperator mit  $i\frac{e^{-i\theta}+1}{e^{-i\theta}-1} = -\cot(\theta/2)$  ist. Weiter bemerken wir, dass  $(D-i)^{-1} = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}$  und  $(E-i)^{-1} = \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}$  sind. Mit dem Spektral-Abbildungs-Satz folgt, dass  $\sigma(D) = \mathbb{R}$  und  $\sigma(E) = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \leq 0\}$  ist. Darüberhinaus ist  $(D-i)^{-1} - (E-i)^{-1}$  kompakt, aber  $\sigma_{ess}(D) \neq \sigma_{ess}(E)$ .

Das Beispiel illustriert nochmal die notwendige Forderung, dass jede Komponente von  $\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$  Punkte aus  $\rho(B)$  enthalten muss.

Wir diskutieren nun zwei Spezialfälle von Weyls Satz.

**KOROLLAR 4.12.** *Seien  $A$  und  $B$  selbstadjungiert mit  $(A+i)^{-1} - (B+i)^{-1}$  kompakt, dann ist  $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$ .*

**BEWEIS.** Da auch  $B$  selbstadjungiert ist enthält  $\rho(B)$  Punkte in der oberen und unteren Halbebene.  $\square$

Um das zweite Korollar aufzustellen, führen wir eine weitere Definition ein.

**DEFINITION 4.13.** Sei  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$  selbstadjungiert. Man nennt  $C : \mathcal{D}(C) \rightarrow \mathcal{H}$  mit  $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(C)$  *relativ kompakt bezüglich  $A$*  genau dann, wenn der Operator  $C(A+i)^{-1} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  kompakt ist.

**LEMMA 4.14.** *Sei  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$  selbstadjungiert und  $C : \mathcal{D}(C) \rightarrow \mathcal{H}$  mit  $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(C)$ . Dann gilt:*

- Ist  $C(A-z_0)^{-1}$  kompakt für ein  $z_0 \in \rho(A)$ , so ist  $C$  relativ kompakt bezüglich  $A$ .*
- Ist  $C$  relativ kompakt bezüglich  $A$ , so ist  $C(A-z)^{-1}$  kompakt für alle  $z \in \rho(A)$ .*
- Ist  $C$  relativ kompakt bezüglich  $A$ , so ist  $C$  infinitesimal  $A$ -beschränkt.*

**LEMMA 4.15.** *Sei  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$  selbstadjungiert und  $C : \mathcal{D}(C) \rightarrow \mathcal{H}$  mit  $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(C)$ . Dann ist  $C$  genau dann relativ kompakt bezüglich  $A$ , wenn  $C : \langle \mathcal{D}(A), \|\cdot\|_A \rangle \rightarrow \langle \mathcal{H}, \|\cdot\| \rangle$  kompakt ist. Hierbei ist  $\|\varphi\|_A^2 = \|A\varphi\|^2 + \|\varphi\|^2$  die Graphennorm von  $A$ .*

**corollary:3.44**

**KOROLLAR 4.16.** *Sei  $A$  selbstadjungiert und  $C$  eine relativ kompakte Störung von  $A$ . Dann gilt:*

- $B = A + C : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$  ist abgeschlossen.*
- $B$  ist selbstadjungiert, wenn  $C$  symmetrisch ist.*
- $\sigma_{ess}(B) = \sigma_{ess}(A)$ .*

**BEWEIS.** Für  $\lambda > 0$  ist  $C(A+i\lambda)^{-1} = [C(A+i)^{-1}][(A+i)(A+i\lambda)^{-1}]$ . In der Spektraldarstellung von  $A$  ist  $(A \pm i)(A \pm i\lambda)^{-1}$  die Multiplikation mit  $(x \pm i)(x \pm i\lambda)^{-1}$ , womit  $s - \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (A \pm i)(A \pm i\lambda)^{-1} \rightarrow 0$ . Da  $C(A+i)^{-1}$  kompakt ist und  $[(A+i)(A+i\lambda)^{-1}]^*$  stark gegen Null konvergiert, konvergiert  $C(A+i)^{-1}[(A+i)(A+i\lambda)^{-1}]$  gegen Null in Norm. Damit ist  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \|C(A+i\lambda)^{-1}\| = 0$ . Daraus folgt, dass  $C$  relativ  $A$ -beschränkt mit relativer Schranke gleich Null ist, denn für  $\psi \in \mathcal{D}(A)$  ist

$$\|C\psi\| = \|C(A+i\lambda)^{-1}(A+i\lambda)\psi\| \leq \|C(A+i\lambda)^{-1}\| (\|A\psi\| + \lambda\|\psi\|). \quad (4.8)$$

Da die linke Seite von  $\lambda$  unabhängig ist, können wir  $\lambda \rightarrow \infty$  gehen lassen. Damit folgt sofort, dass  $A+C$  abgeschlossen ist und mit Kato–Rellich, dass  $A+C$  ebenfalls selbstadjungiert ist, wenn  $C$  symmetrisch ist.

Es verbleibt die Stabilität des wesentlichen Spektrums zu zeigen. Für hinreichend großes  $\lambda$  existieren (wegen vorgehender Rechnung) sowohl  $[1+C(A+i\lambda)^{-1}]^{-1}$  als auch  $[1+C(A-i\lambda)^{-1}]^{-1}$ , das heißt mit  $B = A + C$  existieren  $(B+i\lambda)^{-1}$  und  $(B-i\lambda)^{-1}$  für hinreichend großes  $\lambda$ . Damit enthält  $\rho(B)$  Punkte aus der oberen und unteren Halbebene. Des Weiteren ist für großes  $\lambda$

$$\begin{aligned} (B+i\lambda)^{-1} - (A+i\lambda)^{-1} &= (A+i\lambda)^{-1}[(1+C(A+i\lambda)^{-1})^{-1} - 1] \\ &= -(B+i\lambda)^{-1}C(A+i\lambda)^{-1}. \end{aligned}$$

Da  $C(A+i\lambda)^{-1}$  kompakt ist, ist auch  $(B+i\lambda)^{-1} - (A+i\lambda)^{-1}$  kompakt und damit ist der Weylsche Satz anwendbar, womit wir  $\sigma_{ess}(B) = \sigma_{ess}(A)$  schließen können.  $\square$

**BEHAUPTUNG 4.17.** *Sei  $V \in L^q(\mathbb{R}^n) + L_\epsilon^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit  $q \geq \max\{d/2, 2\}$  falls  $n \neq 4$  und  $q > 2$  falls  $n = 4$ . Dann ist  $V$  eine relativ  $-\Delta$ -kompakte Störung und insbesondere  $\sigma_{ess}(-\Delta + V) = \sigma_{ess}(-\Delta)$ .*

Die Tatsache, dass solche Potentiale  $-\Delta$ -Form-kompakt sind, folgt sofort aus der Tatsache, dass  $R + L_\epsilon^\infty$ -Potentiale relativ Form-kompakt bezüglich  $-\Delta$  sind (siehe Beispiel 4.27) und der Hardy–Littlewood–Sobolew-Ungleichung, aus der  $L^{n/2} \subseteq R$  folgt.

**BEWEIS.** Siehe [ReedSimon1978, RS78, Problem 41].  $\square$

**DEFINITION 4.18.** Sei  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$  selbstadjungiert und positiv. Eine beschränkte Form-Störung  $C$  von  $A$  heißt genau dann *relativ Form-kompakt*, wenn  $C$  als Abbildung von  $\mathcal{H}_{+1}$  nach  $\mathcal{H}_{-1}$  kompakt ist.

**KOROLLAR 4.19.** *Sei  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$  selbstadjungiert und positiv und  $C$  relativ Form-kompakt bezüglich  $A$ . Dann hat  $C$  relative Form-Schranke gleich Null und es ist  $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A + C)$ .*

Wir können das letzte Korollar für Operatoren noch etwas verstärken.

**KOROLLAR 4.20.** *Sei  $A$  selbstadjungiert und  $C$  symmetrisch, sodass  $C$  eine relativ kompakte Störung von  $A^n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  ist. Ist zudem  $A+C$  selbstadjungiert, so ist  $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A + C)$ .*

**BEWEIS.**  $\square$

**BEMERKUNG 4.21.** Das letzte Korollar ist falsch, wenn wir lediglich wesentliche Selbstadjungiertheit auf  $\mathcal{D}(A)$  voraussetzen. Hat zum Beispiel  $A$  kompakte Resolvente und sei  $C = -A$ . Dann ist  $\sigma_{ess}(A) = \emptyset$ , aber  $\sigma_{ess}(A + C) = \{0\}$ .

Das letzte Korollar lässt sich auch wieder für Formen beweisen.

corollary:3.49

**KOROLLAR 4.22.** *Sei  $A$  selbstadjungiert und positiv und sei  $C$  ein selbstadjungierter Operator mit  $\mathcal{Q}(A) \subseteq \mathcal{Q}(C)$ . Angenommen  $A + C$  ist als Form von unten beschränkt und auf  $\mathcal{Q}(A)$  abgeschlossen, sodass  $A + C$  als Operator der Friedrichs-Erweiterung selbstadjungiert ist. Ist zudem entweder*

- (i)  $C$  eine relativ kompakte Störung von  $A^n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  oder
- (ii)  $\mathcal{Q}(A) \subseteq \mathcal{Q}(|C|)$  und  $|C|$  eine relativ Form-kompakte Störung von  $A^n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ , das heißt  $(A+i)^{-n/2}|C|(A+i)^{-n/2}$  ist kompakt.

Dann ist  $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A + C)$ .

BEWEIS. □

Wir betrachten nun einige Anwendungen des Weylschen Satzes.

BEISPIEL 4.23. Sei  $A$  selbstadjungiert und  $C$  kompakt, dann ist  $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A + C)$ , da hier  $C$  automatisch relativ kompakt bezüglich  $A$  ist.

BEISPIEL 4.24. Sei  $V \in C_0^\infty(0, \infty)$  und  $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V$  auf  $C_0^\infty(0, \infty)$ . Dann ist  $H$  zwar nicht selbstadjungiert, hat aber Defektzahlen  $\langle 1, 1 \rangle$ . Seien  $A$  und  $B$  zwei verschiedene selbstadjungierte Erweiterungen von  $H$ . Ist  $D = \mathcal{D}(\bar{H})$ , dann ist  $R \equiv \text{Ran}(\bar{H} + i)$  ein abgeschlossener Unterraum mit Kodimension 1, da  $H$  Defektzahlen  $\langle 1, 1 \rangle$  hat. Ist  $\psi \in R$ , so ist  $\psi = (\bar{H} + i)\varphi$  für ein  $\varphi$  und daher

$$[(A + i)^{-1} - (B + i)^{-1}]\psi = (A + i)^{-1}(\bar{H} + i)\varphi - (B + i)^{-1}(\bar{H} + i)\varphi = 0, \quad (4.9)$$

da  $\bar{H} \subseteq A$  und  $\bar{H} \subseteq B$  ist. Daher verschwindet der Operator  $(A + i)^{-1} - (B + i)^{-1}$  auf  $R$ . Da  $R$  Kodimension 1 hat, folgt, dass  $(A + i)^{-1} - (B + i)^{-1}$  ein Rang-1-Operator ist und daher kompakt ist. Damit ist  $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$ .

BEISPIEL 4.25. Sei  $H$  ein Operator mit Defektzahlen  $\langle d, d \rangle$  mit  $d < \infty$  und seien  $A$  und  $B$  zwei voneinander verschiedene selbstadjungierte Erweiterungen von  $H$ . Dann ist  $(A + i)^{-1} - (B + i)^{-1}$  ein Rang- $d$ -Operator und es ist daher wieder  $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$ . Die Folgerung ist für  $d = \infty$  im Allgemeinen nicht wahr.

BEISPIEL 4.26. Sei  $H_0 = -\Delta$  auf  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , dann sieht man mittels Fouriertransformation, dass  $\sigma_{ess}(-\Delta) = [0, \infty)$  ist. Sei  $V \in L^2 + (L^\infty)_\epsilon$ . Dann gibt es eine Folge von Potentialen  $V_n \in L^2$  mit  $V - V_n \in L^\infty$  und  $\|V - V_n\|_\infty \rightarrow 0$ , das heißt  $V_n(H_0 + 1)^{-1}$  konvergiert gegen  $V(H_0 + 1)^{-1}$  in Operator-Norm. Da die  $V_n \in L^2$  sind, ist der Integralkern

$$V_n(-\Delta + 1)^{-1}(x, y) = V_n(x) [\mathcal{F}(-\Delta + 1)](x - y) = V_n(x) \frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|} \quad (4.10)$$

in  $L^2(\mathbb{R}^6)$ , womit  $V_n(-\Delta + 1)^{-1}$  ein Hilbert-Schmidt-Operator und daher kompakt ist. Damit ist auch  $V(-\Delta + 1)^{-1}$  kompakt und daher ist  $\sigma_{ess}(-\Delta + V) = \sigma_{ess}(-\Delta)$ .

ex:4.27

BEISPIEL 4.27. Sei nun allgemeiner  $V \in R + (L^\infty)_\epsilon$ . Im Allgemeinen ist  $V$  nicht relativ kompakt, da  $\mathcal{D}(-\Delta)$  nicht unbedingt in  $\mathcal{D}(V)$  enthalten ist. Jedoch ist  $V$  eine Form-kompakte Störung, womit das Korollar für Formen greift, was uns sagt, dass  $V$  relativ Form-beschränkt mit Form-Schranke Null ist und, dass  $\sigma_{ess}(-\Delta + V) = \sigma_{ess}(-\Delta)$  ist.

Ist  $W \in R$ , so ist

$$\lim_{E \rightarrow +\infty} \left\| |W|^{1/2} (-\Delta + E)^{-1} |W|^{1/2} \right\| = 0, \quad (4.11)$$

da  $|W|^{1/2}(-\Delta + E)^{-1}|W|^{1/2}$  ein Hilbert-Schmidt-Operator mit Integralkern

$$|W|^{1/2}(-\Delta + E)^{-1}|W|^{1/2}(x, y) = |W(x)|^{1/2} \frac{e^{-\sqrt{E}|x-y|}}{4\pi|x-y|} |W(y)|^{1/2} \quad (4.12)$$

ist. Da  $\|K\| \leq \|K\|_{S^2}$  und

$$\int_{\mathbb{R}^6} |W(x)| |W(y)| \frac{e^{-2\sqrt{E}|x-y|}}{|x-y|^2} dx dy \leq \text{const} \|W\|_R^2 \quad (4.13)$$

mit majorisierter Konvergenz gegen Null geht, wenn  $E \rightarrow \infty$  geht, folgt die Zwischenbehauptung. Für hinreichend großes  $E > 0$  ist also mit  $H = -\Delta + W$  und

$$\begin{aligned}
 W^{1/2} &\equiv \frac{W}{|W|^{1/2}} \\
 (H + E)^{-1} - (-\Delta + E)^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} [(-\Delta + E)^{-1} |W|^{1/2}]^n [-W^{1/2} (-\Delta + E)^{-1} |W|^{1/2}]^n [W^{1/2} (-\Delta + E)^{-1}].
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

Jeder dieser Terme in dieser norm-konvergenten Summe ist kompakt. Mit  $A = (-\Delta + E)^{-1/2} |W|^{1/2}$  ist  $A^*A$  kompakt und daher ist auch  $A$  kompakt. Somit ist  $(-\Delta + W + E)^{-1} - (-\Delta + E)^{-1}$  für  $W \in R$  kompakt. Die Erweiterung von  $R$  zu  $R + (L^\infty)_\epsilon$  geht wie oben durch Approximation durch Rollnik-Potentiale.

**BEISPIEL 4.28.** Sei  $V = |x|^{-2}$  auf  $L^2(\mathbb{R}^5)$ . Dann kann  $V$  nicht  $-\Delta$ -kompakt sein, da (wie wir früher gesehen haben)  $V$  nicht relativ durch Null beschränkt ist. Jedoch ist  $V$  relativ  $-\Delta^2$ -kompakt mit folgendem allgemeinem Kriterium.

Angenommen  $V \in L^2(\mathbb{R}^5) + (L^\infty(\mathbb{R}^5))_\epsilon$ , dann schreiben wir  $V = V_{1,\epsilon} + V_{2,\epsilon}$  mit  $V_{1,\epsilon} \in L^2$  und  $\sup_x |V_{2,\epsilon}(x)| \leq \epsilon$ . Daher konvergiert  $V_{1,\epsilon}(-\Delta^2 + 1)^{-1}$  in Norm gegen  $V(-\Delta^2 + 1)^{-1}$ , womit wir nur noch zeigen müssen, dass  $V_{1,\epsilon}(-\Delta^2 + 1)^{-1}$  für alle  $\epsilon > 0$  kompakt ist. Dies folgt sofort, denn sowohl  $V_{1,\epsilon} \in L^2(\mathbb{R}^5)$ , als auch  $(p^4 + 1)^{-1} \in L^2(\mathbb{R}^5)$ , das heißt  $V_{1,\epsilon}(-\Delta^2 + 1)^{-1}$  ist für alle  $\epsilon > 0$  Hilbert-Schmidt, also kompakt.

Früher haben wir gesehen, dass  $\mathcal{Q}(-\Delta + \lambda V) = \mathcal{Q}(-\Delta)$  und  $\frac{-\Delta + \lambda V}{\lambda}$  nach unten beschränkt ist für  $\lambda \geq -2,25$ . Für  $\lambda \geq -2,25$  ist Korollar 4.22 anwendbar, womit  $\sigma_{ess}(-\Delta + V) = [0, \infty)$ . Analog behandelt man den Fall  $V = |x|^{-1}$  und  $H_0 = \sqrt{-\Delta + m^2}$  (Chandrasekhar). Ist  $H_0$  der Dirac-Operator, so ist  $H_0$  nicht von unten beschränkt und man muss andere Techniken anwenden.

**theorem:3.56**

**SATZ 4.29.** Sei  $V$  eine lokal beschränkte, positive Funktion mit  $V(x) \rightarrow \infty$  für  $|x| \rightarrow \infty$ . Wir definieren  $-\Delta + V$  durch die Summe der entsprechenden quadratischen Formen. Dann hat  $-\Delta + V$  nur diskretes Spektrum.

**BEWEIS.** Sei  $H = -\Delta + V$ . Mit dem Min-Max-Prinzip genügt es zu zeigen, dass  $\mu_n(H) \rightarrow \infty$ , wenn  $n \rightarrow \infty$  geht. Für gegebenes  $c > 0$  finden wir eine Kugel  $K$ , für die  $V(x) \geq c$  ist, wenn  $x \notin K$ . So eine Kugel existiert, da  $V(x) \rightarrow \infty$  für  $|x| \rightarrow \infty$ . Sei nun

$$W = \begin{cases} -c & \text{für } x \in S, \\ 0 & \text{für } x \notin S. \end{cases}$$

Dann ist  $V \geq c + W$  und mit dem Min-Max-Prinzip ist  $\mu_n(H) \geq c + \mu_n(-\Delta + W)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Da  $W$  ein kompakt getragenes, beschränktes Potential ist, gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\mu_n(-\Delta + W) \geq -1$  für alle  $n \geq N$ . Daher ist  $\mu_n(H) \geq c - 1$  für  $n \geq N$ . Da  $c$  beliebig war, geht  $\mu_n(H) \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

**5. Bestimmung des wesentlichen Spektrums II: Der HVZ-Satz**

**6. Bestimmung des wesentlichen Spektrums III: Geometrische Methoden**

Wir sehen, dass das wesentliche Spektrum davon abhängt, was „weit draußen“ passiert. Zwei Sätze dieses Abschnitts präzisieren diese Aussage, indem die – zwar

nicht so genau wie der HVZ-Satz – ebenfalls das wesentliche Spektrum bestimmen. Andererseits greifen diese Resultate für eine weitaus größere Klasse von Potentialen. Diese müssen, nicht einmal im schwachen Sinne, im Unendlichen abfallen. Damit sind periodische, fast-periodische und zufällige Potentiale in diesen Sätzen enthalten, die man mit dem HVZ-Satz nicht behandeln kann.

Die wichtige Eigenschaft dieser Potentiale ist, dass der zugehörige Schrödinger-Operator „lokal kompakt“ ist. Dies ist ein Begriff, den v.a. Enns (1981) geprägt hat.

**DEFINITION 6.1 (Lokale Kompaktheit).** Ein Schrödinger-Operator  $H = H_0 + V$  heißt genau dann *lokal kompakt*, wenn  $f(x)(H + i)^{-1}$  für alle beschränkten und kompakt getragenen Funktionen  $f$  ein kompakter Operator ist.

**LEMMA 6.2.** *Sei  $f$  eine beschränkte und kompakt getragene Funktion. Ist  $f(x)(H + z)^{-1}$  für ein  $z \in \rho(H)$  kompakt, so ist  $f(x)(H + z)^{-1}$  für alle  $z \in \rho(H)$  kompakt.*

**BEMERKUNG 6.3.** Praktisch alle physikalisch relevanten Operatoren haben diese Eigenschaft. Ist beispielsweise  $V$  relativ  $H_0$ -(form)beschränkt, so ist  $H$  bereits lokal kompakt.

**BEISPIEL 6.4.**  $\Delta$  ist auf  $L^2(\mathbb{R}^3)$  lokal kompakt. Sei dazu oBdA  $B \subseteq \mathbb{R}^3$  kompakt und  $f = \chi_B$ . Dann hat  $\chi_B(-\Delta + 1)^{-1}$  den bekannten Helmholtz-Kern

$$\chi_B(x) \cdot \frac{1}{4\pi|x-y|} e^{-|x-y|}. \quad (6.1)$$

Dieser ist offenbar in  $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ , also ist  $\chi_B(-\Delta + 1)^{-1}$  sogar Hilbert-Schmidt.

Gleichzeitig sieht man durch Fouriertransformation, dass  $(-\Delta + 1)^{-1}$  alleine nicht kompakt sein kann. Man berechnet dazu das Spektrum von  $(-\Delta + 1)^{-1}$ .

**BEISPIEL 6.5.**  $\sqrt{-\Delta}$  ist lokal kompakt. Wir geben hierfür zwei Beweise.

- (1) Sei  $A^* := \chi_B(\sqrt{-\Delta} + i)^{-1}$ , dann ist  $A^*A = \chi_B(-\Delta + 1)^{-1}\chi_B$ . Von diesem Operator wissen wir aber bereits, dass er kompakt ist. Das heißt es genügt zu zeigen, dass  $A = (-i + \sqrt{-\Delta})^{-1}\chi_B$  kompakt ist. Sei dazu  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge, die schwach gegen Null konvergiert. Dann ist

$$\|Au_n\|^2 = (u_n, A^*Au_n) \leq \|u_n\| \|A^*Au_n\|. \quad (6.2)$$

Da  $A^*A$  kompakt ist, konvergiert also  $Au_n$  stark gegen Null, das heißt  $A$  ist kompakt.

(2)

**SATZ 6.6.** *Sei  $V$  stetig oder  $V \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ ,  $V \geq 0$  und  $V \rightarrow \infty$  für  $|x| \rightarrow \infty$ . Dann ist  $H = -\Delta + V$  lokal kompakt.*

**BEWEIS.** Zunächst ist  $H \geq 0$  und wegen der Kato-Ungleichung  $(\Delta|u| \geq \text{Re}[\text{sgn}(u)\Delta u])$  im distributionellen Sinne für  $u \in L^1_{loc}$  selbstadjungiert. Dann behaupten wir zunächst, dass  $\sqrt{-\Delta}$  relativ  $H^{1/2}$ -beschränkt und damit  $(\sqrt{-\Delta} + 1)(H + 1)^{-1/2}$  beschränkt sind. Dazu sind zunächst die Operatoren wohldefiniert, da  $V \geq 0$  und  $-\Delta \geq 0$ . Für  $u \in C_0^\infty$  haben wir zunächst

$$\left\| \sqrt{-\Delta}u \right\|^2 = (u, -\Delta u) \leq (u, Hu) \leq (u, (H + 1)u) \leq \left\| (H + 1)^{1/2}u \right\|^2. \quad (6.3)$$

Diese einfache Abschätzung lässt sich auf alle  $\mathcal{D}(H^{1/2})$  erweitern, womit gezeigt ist, dass  $\sqrt{-\Delta}$  relativ  $H^{1/2}$  beschränkt ist.

Schreibt man nun  $\chi_B(H+1)^{-1} = \chi_B(H+1)^{-1/2}(H+1)^{-1/2}$ , so sind wir fertig, wenn wir zeigen können, dass  $\chi_B(H+1)^{-1/2}$  kompakt ist. Dazu wiederum schreiben wir

$$\chi_B(H+1)^{-1/2} = \chi_B(\sqrt{-\Delta}+1)^{-1}(\sqrt{-\Delta}+1)(H+1)^{-1/2}. \quad (6.4)$$

Beim zweiten Beispiel haben wir bereits gesehen, dass  $\sqrt{-\Delta}+1$  lokal kompakt ist. Da  $(\sqrt{-\Delta}+1)(H+1)^{-1/2}$  beschränkt ist, folgt die Aussage.  $\square$

Wir nehmen für den Rest dieses Abschnitts an, dass  $V$  wenigstens relativ  $H_0$ -beschränkt ist, sofern nichts anderes gesagt wird. Wir bemerken dabei, dass wir keine Abfalleigenschaften von  $V$  voraussetzen. Für solche Operatoren hat man zunächst die folgende schöne Eigenschaft.

**LEMMA 6.7.** *Sei  $V$  relativ  $H_0$ -beschränkt und  $f$  eine beschränkte, kompakt getragene Funktion. Dann sind sowohl  $f(x)(H+i)^{-1}$  als auch  $f(x)\nabla(H+i)^{-1}$  kompakte Operatoren.*

**BEWEIS.** Wir zeigen zunächst, dass  $f(x)(H+i)^{-1}$  unter diesen Voraussetzungen kompakt ist. Sei dazu  $f(x) = \chi_B$  für  $B \subseteq \mathbb{R}^3$  kompakt. Dazu schreiben wir

$$\chi_B(H+i)^{-1} = \chi_B(-\Delta+i)^{-1}(-\Delta+i)(H+i)^{-1}. \quad (6.5)$$

Der erste Term ist kompakt, da  $-\Delta$  lokal kompakt ist, der zweite ist beschränkt, denn aus der relativen Beschränktheit von  $V$  folgt für  $u \in \mathcal{D}(-\Delta)$

$$\|-\Delta u\| \leq \|Hu\| + \|Vu\| \leq (1+a)\|Hu\| + b\|u\|. \quad (6.6)$$

Durch ein Approximationsargument sieht man, dass dann auch  $f(x)(H+i)^{-1}$  für allgemeine  $f$  kompakt ist.

$f(x)\nabla(H+i)^{-1}$  drücken wir so aus.

$$f(x)\nabla(H+i)^{-1} = (f(x)(H_0+i)^{-1/2})[\nabla(H_0+i)^{-1/2}](H_0+i)(H+i)^{-1}. \quad (6.7)$$

Der erste Term ist bekanntermaßen kompakt, die anderen sind beschränkt.  $\square$

Wir kommen nun zum ersten der zwei wichtigen Sätze, die die Aussage „ $\sigma_{ess}$  hängt davon ab, was weit draußen passiert“ präzisieren. Sei dazu  $B_n := \{x : |x| \leq n\}$  die Kugel um den Ursprung mit Radius  $n$ .

**SATZ 6.8.** *Sei  $V$  relativ  $H_0$ -beschränkt und  $H = H_0 + V$ . Dann ist  $\lambda \in \sigma_{ess}$  genau dann, wenn es eine Folge von Funktionen  $\varphi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus B_m)$  mit  $\|\varphi_n\|_2 = 1$  gibt, sodass*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(H - \lambda)\varphi_n\| = 0 \quad (6.8)$$

- BEMERKUNG 6.9.** (1) Wegen des Weyl-Kriteriums wissen wir, dass  $\lambda \in \sigma_{ess}(H)$  äquivalent dazu ist, dass es eine Folge von Testfunktionen  $\varphi_n$  mit  $\|\varphi_n\| = 1$  und  $\varphi_n \rightarrow 0$  gibt, sodass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(H - \lambda)\varphi_n\| = 0$ . Der Satz sagt uns also, dass die  $\varphi_n$  aus dem Satz schwach gegen Null konvergieren.
- (2) Man kann den Satz unter deutlich schwächeren Voraussetzungen an  $V$  beweisen. Es muss lediglich gewährleistet bleiben, dass  $C_0^\infty$  ein determinierender Bereich und die Operatoren  $f(x)(H+i)^{-1}$  und  $f(x)\nabla(H+i)^{-1}$  für kompakt getragene, beschränkte  $f$  kompakt sind.

BEWEIS. „ $\Leftarrow$ “: Klar.

„ $\Rightarrow$ “: Sei dazu  $\lambda \in \sigma_{ess}(H)$ , dann gibt es wegen des Weyl-Kriteriums eine Folge  $\psi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit  $\|\psi_n\| = 1$  und  $\psi_n \rightarrow 0$ , sodass

$$\|(H - \lambda)\psi_n\| \rightarrow 0. \quad (6.9)$$

Wir wählen dann für jedes  $n$  die Funktion  $\chi_n \in C^\infty$   $0 \leq \chi_n(x) \leq 1$  so, dass  $\chi_n(x) = 1$  für  $|x| \geq n + 1$  und  $\chi_n(x) = 0$  für  $|x| \leq n$ . Wir behaupten dann, dass es für alle  $n$  ein  $i = i(n) > n$  gibt, sodass

$$\|(1 - \chi_n)\psi_{i(n)}\| < 1/n \quad (6.10a)$$

$$\|(\Delta\chi_n)\psi_{i(n)}\| < 1/n \quad (6.10b)$$

$$\|\nabla\chi_n\nabla\psi_{i(n)}\| < 1/n. \quad (6.10c)$$

erfüllt sind. Nimmt man dies für den Moment als wahr an, so kann man

$$\varphi_n := \frac{\chi_n\psi_{i(n)}}{\|\chi_n\psi_{i(n)}\|} \quad (6.11)$$

definieren und hat

$$\|(H - \lambda)\varphi_n\| \leq \frac{1}{\|\chi_n\psi_{i(n)}\|} [\|(H - \lambda)\psi_{i(n)}\| + 2\|\nabla\chi_n\nabla\psi_{i(n)}\| + \|(\Delta\chi_n)\psi_{i(n)}\|] \quad (6.12)$$

Die rechte Seite geht aber gerade wegen der obigen drei Behauptungen gegen Null.

Wir beweisen nun die drei Zwischenbehauptungen. Sei dazu  $\chi \in C_0^\infty$ , dann ist

$$\begin{aligned} \|\chi\psi_n\| &= \|\chi(H + i)^{-1}[(H - \lambda) + (i + \lambda)]\psi_n\| \\ &\leq \|\chi(H + i)^{-1}\| [\|(H - \lambda)\psi_n\| + |\lambda + i| \|\chi(H + i)^{-1}\psi_n\|]. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Der erste Term geht wegen der Voraussetzung  $\lambda \in \sigma_{ess}(H)$  und dem Weyl-Kriterium gegen Null. Der zweite Term geht wegen der Kompaktheit von  $\chi(H + i)^{-1}$  (sh. voriges Lemma) und der schwachen Konvergenz von  $\psi_n$  gegen Null. Dies zeigt die ersten zwei Zwischenbehauptungen, die Dritte geht analog.  $\square$

Es gibt zahlreiche weitere Resultate, wie z.B.

$$\sigma_{ess}(H) = \bigcap_n \sigma(H + n\chi_{\{|x| \leq n\}}). \quad (6.14)$$

Wir beweisen nun ein Resultat von Persson (1960), mit dem man den Threshold des wesentlichen Spektrums durch eine Min-Max-Technik erhält. Dies ist der zweite Satz, der die Aussage, dass  $\sigma_{ess}(H)$  nur davon abhängt, was „weit draußen passiert“, unterstreicht.

SATZ 6.10 (Persson). *Sei  $V$  relativ  $H_0$ -beschränkt, dann ist*

$$\inf \sigma_{ess}(H) = \sup_{K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ kompakt}} \inf_{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus K), \|\varphi\|=1} (\varphi, H\varphi). \quad (6.15)$$

BEMERKUNG 6.11. (1) Der Threshold hängt nicht davon ab „was in einer kompakten Menge passiert“.

(2) Für jedes kompakte  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  ist  $\inf_{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus K)} (\varphi, H\varphi)$  gerade die Grundzustandsenergie des Hamilton-Operators  $H$  auf  $L^2(\mathbb{R}^n \setminus K)$  mit Dirichlet-Randbedingungen auf  $\partial K$ .  $\inf \sigma_{ess}(H)$  ist also das Supremum über alle diese Grundzustandsenergien.

(3) Der Satz kann unter schwächeren Voraussetzungen bewiesen werden, siehe dazu auch Agmon (1982).

BEWEIS. „ $\geq$ “: Sei  $\lambda_0$  der Threshold von  $\sigma_{ess}(H)$ , dann ist insbesondere  $\lambda \in \sigma_{ess}(H)$ . Wegen des vorigen Satzes gibt es eine Folge  $\varphi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus B_m)$  mit  $\|\varphi_n\| = 1$  und  $(H - \lambda_0)\varphi_n \rightarrow 0$  im starken Sinne. Daher ist

$$\begin{aligned} \sup_{K \text{ kompakt}} \inf_{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus K), \|\varphi\|=1} (\varphi, H\varphi) &= \limsup_m \inf_{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus B_m), \|\varphi\|=1} (\varphi, H\varphi) \\ &\leq \limsup_m (\varphi_m, H\varphi_m) \\ &\leq \limsup_m (\varphi_m, [H - \lambda_0]\varphi_m) + \limsup_m (\varphi_m, \lambda_0\varphi_m) = \lambda_0. \end{aligned} \quad (6.16)$$

„ $\leq$ “: Wir definieren dazu

$$\mu_m := \sup_{\psi_1, \dots, \psi_{m-1}} \inf_{\varphi \in C_0^\infty, \varphi \in [\psi_1, \dots, \psi_{m-1}]^\perp, \|\varphi\|=1} (\varphi, H\varphi), \quad (6.17)$$

dann ist wegen des Min-Max-Prinzips  $\mu_m$  der  $m$ -te Eigenwert von unten von  $H$  (Multiplizität eingerechnet). Gibt es nur  $m_0$  Eigenwerte unterhalb  $\lambda_0 := \inf \sigma_{ess}(H)$ , so sind  $\mu_{m_0+1} = \mu_{m_0+2} = \dots = \lambda_0$ . Gibt es darüberhinaus unendlich viele Eigenwerte unterhalb  $\sigma_{ess}(H)$ , so konvergiert  $\mu_m \rightarrow \inf \sigma_{ess}(H)$ . Um also

$$\lambda_0 = \inf \sigma_{ess}(H) \leq \sup_K \inf_{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus K), \|\varphi\|=1} (\varphi, H\varphi) =: \nu_0 \quad (6.18)$$

zu zeigen, genügt es  $\nu_0 \geq \mu_n$  für alle  $n$  zu zeigen. Wir beweisen die Aussage per Induktion und starten mit  $n = 1$ . Da

$$\mu_1 = \inf_{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \|\varphi\|=1} (\varphi, H\varphi), \quad (6.19)$$

ist  $\mu_1 \leq \nu_0$  offensichtlich. Sei nun  $n > 1$  und nehme an, dass  $\nu_0 \geq \mu_{n-1}$ . Ist zufällig  $\mu_{m-1} = \lambda_0$ , sind wir fertig. Sei also  $\mu_{n-1} < \lambda_0$ , dann ist

$$\mu_n = \inf_{\varphi \in [\rho_1, \dots, \rho_m]^\perp, \|\varphi\|=1} (\varphi, H\varphi), \quad (6.20)$$

wobei die  $\rho_i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) die normierten Eigenfunktionen von  $H$  mit zugehörigen Eigenwerten  $\mu_i$  sind. Die  $\rho_i$  spannen darüberhinaus den Eigenraum der  $\mu_i$  auf. Wir wählen nun  $\epsilon > 0$  und  $K_0$  kompakt so groß, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus K} |\rho_i(x)|^2 dx < \epsilon \text{ für alle } i = 1, \dots, n-1. \quad (6.21)$$

Für eine beliebige Funktion  $\varphi$  definieren wir  $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(x) - \sum_{i=1}^n (\varphi, \rho_i) \rho_i(x)$ . Dann ist  $\tilde{\varphi} \perp \rho_i$  und wir haben

$$\begin{aligned} \nu_0 &\geq \inf_{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus K_0), \|\varphi\|=1} (\varphi, H\varphi) \\ &= \inf_{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus K_0), \|\varphi\|=1} \left[ (\tilde{\varphi}, H\tilde{\varphi}) + (\tilde{\varphi}, \sum (\varphi, \rho_i) \mu_i \rho_i) + \left( \sum (\varphi, \rho_i) \mu_i \rho_i, \varphi \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Für jedes  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus K_0)$  ist  $|(\varphi, \rho_i)| \leq \sqrt{\epsilon} \|\varphi\|$  wegen der Bedingung an  $K_0$ . Daher ist

$$\begin{aligned} \nu_0 &\geq \inf_{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus K_0), \|\varphi\|=1} (\tilde{\varphi}, H\tilde{\varphi}) - C\epsilon \geq (1 - C'\epsilon) \inf_{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus K_0), \|\varphi\|=1} \frac{(\tilde{\varphi}, H\tilde{\varphi})}{\|\tilde{\varphi}\|^2} - C\epsilon \\ &\geq (1 - C'\epsilon) \inf_{\tilde{\varphi} \in [\rho_1, \dots, \rho_{m-1}]^+} \frac{(\tilde{\varphi}, H\tilde{\varphi})}{\|\tilde{\varphi}\|^2} - C\epsilon \geq (1 - C'\epsilon)\mu_n - C\epsilon. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Da  $\epsilon$  beliebig war, haben wir  $\nu_0 \geq \mu_n$  und wegen voriger Überlegung  $\nu_0 \geq \lambda_0$ .  $\square$

Wir schließen den Abschnitt mit einem Phänomen, welches bereits in einer Dimension auftritt. Wir betrachten dazu ein Potential mit unendlich vielen Buckeln, die jedoch immer weiter auseinander sind, je mehr man sich vom Ursprung entfernt.

**klaus**

**SATZ 6.12 (Klaus).** Sei  $V \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $V \leq 0$  ein Buckel. Sei  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  eine Folge reeller Zahlen mit  $x_n \leq x_{n+1}$  und  $|x_n - x_{n+1}| \rightarrow \infty$  für  $|n| \rightarrow \infty$ . Sei  $W := \sum_{n \in \mathbb{Z}} V(x - x_n)$  die Summe aller Buckel an den Orten  $x_n$ ,  $H = -\frac{d^2}{dx^2} + W$  und  $H' := -\frac{d^2}{dx^2} + V$  der Operator mit einem einzelnen Buckel am Ursprung. Dann ist

$$\sigma_{ess}(H) = \sigma(H'). \quad (6.24)$$

**BEMERKUNG 6.13.** Wir sehen, dass die negativen Eigenwerte von  $H'$ , dem Operator mit nur einem Buckel, isolierte Punkte des wesentlichen Spektrums von  $H$  sind. Sie können daher *nicht* zum stetigen Spektrum von  $H$  gehören. Sie können jedoch auch keine Eigenwerte unendlicher Multiplizität sein, da wir in einer Dimension sind. Sie müssen also Häufungspunkte von  $\sigma_{disc}(H)$  sein! So ein Phänomen tritt wegen des HVZ-Satzes für Potentiale, die im Unendlichen abfallen, nicht auf.

Für den Beweis brauchen wir ein kleines Lemma.

**LEMMA 6.14.** Sei  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $C_n$  beschränkte Operatoren und  $f_n, g_n$  beschränkte Funktionen mit  $\text{supp}(f_n) \cap \text{supp}(f_m) = \emptyset$  und  $\text{supp}(g_n) \cap \text{supp}(g_m) = \emptyset$ , wenn  $n \neq m$ . Konvergiert  $\|f_n C_n g_n\| \rightarrow 0$  für  $|n| \rightarrow \infty$ , so konvergiert die Reihe

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n C_n g_n \quad (6.25)$$

in Norm.

**BEWEIS.** Seien dazu  $\chi_n$  und  $\eta_n$  die charakteristischen Funktionen auf den Trägern von  $f_n$  bzw.  $g_n$ . Dann haben wir

$$\begin{aligned} \left| \left( \psi, \sum_{|n|>M} f_n C_n g_n \varphi \right) \right| &= \left| \sum_{|n|>M} (\chi_n \psi, (f_n C_n g_n) \eta_n \varphi) \right| \leq \sup_{|n|>M} \|f_n C_n g_n\| \sum_{|n|>M} \|\chi_n \psi\| \|\eta_n \varphi\| \\ &\leq \epsilon \left( \sum_{|n|>M} \|\chi_n \psi\|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{|n|>M} \|\eta_n \varphi\|^2 \right)^{1/2} \leq \epsilon \|\psi\| \|\varphi\|, \end{aligned} \quad (6.26)$$

wenn  $M$  groß genug ist.  $\square$

BEWEIS VON KLAUS' SATZ <sup>klaus</sup> 6.12. „ $\sigma(H') \subseteq \sigma_{ess}(H)$ “: kann mit Weyls Kriterium bewiesen werden.

„ $\sigma_{ess}(H) \subseteq \sigma(H')$ “: Sei dazu  $V_n(x) = V(x - x_n)$  der translatierte Buckel und  $H_n = -\frac{d^2}{dx^2} + V_n$ . Um die Notation einfach zu halten, nehmen wir an, dass  $\text{supp}(V_n) \cap \text{supp}(V_m) = \emptyset$  für  $n \neq m$ . Unter dieser Annahme wählen wir eine Zerlegung der Eins  $\{j_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  mit den folgenden Eigenschaften:

- (i)  $j_n W = j_n W_n$ ,
- (ii)  $j_n j_m = 0$ , wenn  $|n - m| > 2$ ,
- (iii)  $j_n \in C_0^\infty$ ,  $\|\nabla j_n\| \rightarrow 0$  und  $\|\Delta j_n\|_\infty \rightarrow 0$ .

Wir definieren dann

$$A(z) := \sum j_n (H_n - z)^{-1} j_n. \quad (6.27)$$

Es ist dann nicht schwer zu sehen, dass  $A(z)$  beschränkt und analytisch als Funktion  $z$  auf  $\Omega := \mathbb{C} \setminus \sigma(H')$  ist. Wir werden nun zeigen, dass für kompakte Operatoren  $B(z)$

$$A(z) = (H - z)^{-1} [1 + B(z)] \quad (6.28)$$

analytisch auf  $\Omega$  ist. Sobald wir das wissen, folgt aus dem analytischen Fredholm-Satz <sup>theorem: A.45</sup> 4.17, dass die Resolvente von  $1 + B(z)$  auf  $\Omega \setminus D$  existiert, wobei  $D$  eine in  $\Omega$  diskrete Menge ist. (Da  $B(z)$  kompakt ist, geht  $\|B(z)\| \rightarrow 0$  für  $z \rightarrow -\infty$ , das heißt  $1 + B(z)$  ist zumindest für einige  $z$  invertierbar.) Darüberhinaus sagt uns der Fredholm-Satz, dass die Residuen an den Polen Operatoren endlichen Ranges sind. Wegen  $A(z) = (H - z)^{-1} [1 + B(z)]$  kann man daher  $(H - z)^{-1}$  zu einer analytischen Funktion auf  $\Omega \setminus D$  fortsetzen, dessen Residuen an den Polen wieder Operatoren endlichen Ranges an den Punkten von  $D$  sind. Dies zeigt  $\Omega \cap \sigma_{ess}(H) = \emptyset$ , was die Behauptung zeigt.

Um die Operatorgleichung  $A(z) = (H - z)^{-1} [1 + B(z)]$  zu zeigen, definieren wir abgeschnittene Versionen von  $B$

$$B_n(z) := [H_0, j_n] (H_n - z)^{-1} j_n, \quad (6.29)$$

das heißt  $B_n(z)$  ist kompakt und analytisch auf  $\Omega$ . Wir rechnen

$$\begin{aligned} (H - z)^{-1} B_n(z) &= (H - z)^{-1} [(H - z), j_n] (H_n - z)^{-1} j_n \\ &= (H - z)^{-1} [(H - z) j_n - j_n (H_n - z)] (H_n - z)^{-1} j_n \\ &= j_n (H_n - z)^{-1} j_n - (H - z)^{-1} j_n^2, \end{aligned} \quad (6.30)$$

wobei wir  $j_n W = j_n V_n$  in der zweiten Gleichung verwendet haben. Dass  $B(z) = \sum B_n(z)$  wohldefiniert und kompakt ist, folgt dann aus dem vorigen Lemma. Wir schreiben dazu

$$\begin{aligned} B(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} [H_0, j_n] (H_n - z)^{-1} j_n \\ &= \sum_{n \text{ ungerade}} -j_n'' (H_n - z)^{-1} j_n + \sum_{n \text{ ungerade}} -2j_n' (\nabla (H_n - z)^{-1}) j_n \\ &\quad + \sum_{n \text{ gerade}} -j_n'' (H_n - z)^{-1} j_n + \sum_{n \text{ gerade}} -2j_n' (\nabla (H_n - z)^{-1}) j_n \end{aligned} \quad (6.31)$$

und wenden das Lemma auf alle vier Terme getrennt an. Da wir dadurch Norm-Konvergenz gezeigt haben, folgt, dass auch  $B(z)$  kompakt sein muss.  $\square$

### 7. Die Abwesenheit des singular-stetigen Spektrums I: allgemeine Theorie

Das grundlegende Kriterium für die Abwesenheit des singular-stetigen Spektrums wird teilweise auf Stones Formel aufbauen.

LEMMA 7.1 (Stones Formel). *Sei  $H : \mathcal{D}(H) \rightarrow \mathcal{H}$  selbstadjungiert. Dann gilt für alle  $\varphi \in \mathcal{H}$*

$$\frac{1}{2} (\varphi, (P_{[a,b]} + P_{(a,b)})\varphi) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi} \int_a^b \operatorname{Im}(\varphi, (H - x - i\epsilon)^{-1}\varphi) dx \quad (7.1)$$

Insbesondere gilt

$$\sup_{0 < \epsilon < 1} \int_a^b |\operatorname{Im}(\varphi, (H - x - i\epsilon)^{-1}\varphi)|^p dx < \infty \quad (7.2)$$

für  $p = 1$  für alle  $\varphi \in \mathcal{H}$ .

BEMERKUNG 7.2. Sei  $\mu(\lambda)$  ein Maß, welches  $\int \frac{d\mu}{1+|\lambda|} < \infty$  erfüllt mit zugehöriger Borel-Stieltjes-Transformation

$$F(z) := \int \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z}. \quad (7.3)$$

Dann ist  $\operatorname{supp}(\mu_{sing}) = \{E : \lim_{\epsilon \searrow 0} \operatorname{Im}(F(E+i\epsilon)) = \infty\} \equiv \Omega$ , das heißt  $|\operatorname{supp}(\mu_{sing})| = \int_{\Omega}$ . Hier ist

$$F(E+i\epsilon) = (\varphi, (H - E - i\epsilon)^{-1}\varphi) = \int \frac{d\mu_{\varphi}(\lambda)}{\lambda - E - i\epsilon}, \quad (7.4)$$

wobei  $\mu_{\varphi}(B) = (\varphi, P_B\varphi)$  das Spektralmaß einer Borelmenge  $B$  bezüglich des Operators  $H$  ist. Zudem konvergiert  $\pi^{-1} \operatorname{Im}(F(E+i\epsilon))dE$  schwach gegen  $d\mu$ , das heißt

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \pi^{-1} \int f(E) \operatorname{Im}(F(E+i\epsilon))dE = \int f(E)d\mu(E) \text{ für alle } f \in C_c^0. \quad (7.5)$$

**theorem:3.58**

SATZ 7.3. *Sei  $H : \mathcal{D}(H) \rightarrow \mathcal{H}$  selbstadjungiert,  $(a, b)$  ein beschränktes Intervall und  $\varphi \in \mathcal{H}$ . Angenommen es gäbe ein  $p > 1$ , sodass*

$$\sup_{0 < \epsilon < 1} \int_a^b |\operatorname{Im}(\varphi, (H - x - i\epsilon)^{-1}\varphi)|^p dx < \infty \quad (7.6)$$

wahr ist. Dann ist  $P_{(a,b)}\varphi \in \mathcal{H}_{ac}$ .

BEWEIS. Wegen Stones Formel und  $P_{(a,b)} \leq P_{[a,b]}$  gilt

$$(\varphi, E_{(c,d)}\varphi) \leq \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_c^d \operatorname{Im}(\varphi, (H - x - i\epsilon)^{-1}\varphi) dx \quad (7.7)$$

für jedes offene Intervall  $(c, d)$ . Sei nun  $S$  eine offene Menge in  $(a, b)$ , sodass  $S = \bigcup_{i=1}^N (a_i, b_i)$  als Vereinigung disjunkter, offener Intervalle dargestellt werden kann.

Wir nehmen zunächst an, dass  $N < \infty$  ist. Dann ist

$$\begin{aligned}
(\varphi, P_S \varphi) &\leq \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^N \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{a_i}^{b_i} \operatorname{Im}(\varphi, (H - x - i\epsilon)^{-1} \varphi) dx \\
&\leq \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} \operatorname{Im}(\varphi, (H - x - i\epsilon)^{-1} \varphi) dx \\
&\leq \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \searrow 0} \left[ \int_a^b |\operatorname{Im}(\varphi, (H - x - i\epsilon)^{-1} \varphi)|^p dx \right]^{1/p} |S|^{1/q} \leq \operatorname{const} |S|^{1/q}
\end{aligned} \tag{7.8}$$

wobei  $|S|$  das Lebesgue-Maß von  $S$  und  $q$  der Hölder-konjugierte Exponent von  $p$  ist.

Ist nun  $N = \infty$ , so sei  $S_m := \bigcup_{i=1}^m (a_i, b_i)$  wieder die Vereinigung disjunkter, offener Intervalle. Dann ist

$$(\varphi, P_S \varphi) = \lim_{m \rightarrow \infty} (\varphi, P_{S_m} \varphi) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \operatorname{const} |S_m|^{1/q} = \operatorname{const} |S|^{1/q}. \tag{7.9}$$

Sei nun  $I$  eine beliebige Menge mit Lebesgue-Maß Null innerhalb von  $(a, b)$ . Da das Lebesgue-Maß von außen regulär ist, gibt es eine offene Menge  $S^{(k)}$ , sodass  $I \subseteq S^{(k)}$  und  $|S^{(k)}| < 1/k$ . Damit ist

$$(\varphi, P_I \varphi) \leq \inf_{k \in \mathbb{N}} (\varphi, P_{S^{(k)}} \varphi) \leq \operatorname{const} \inf_{k \in \mathbb{N}} |S^{(k)}|^{1/q} = 0. \tag{7.10}$$

Daher ist das Maß  $\Omega \mapsto (\varphi, P_\Omega \varphi)$  absolut stetig auf  $(a, b)$  und damit ist  $E_{(a,b)} \varphi \in \mathcal{H}_{ac}$ .  $\square$

**theorem:3.59**

**SATZ 7.4.** Sei  $H : \mathcal{D}(H) \rightarrow \mathcal{H}$  selbstadjungiert und  $(a, b)$  ein beschränktes Intervall. Dann gilt:

a) Angenommen es gäbe eine dichte Menge  $D$  in  $\mathcal{H}$ , sodass für alle  $\varphi \in D$

$$\sup_{0 < \epsilon < 1} \int_a^b |\operatorname{Im}(\varphi, (H - x - i\epsilon)^{-1} \varphi)|^p dx < \infty \tag{7.11}$$

für ein  $p > 1$  gilt. Dann hat  $H$  rein absolut stetiges Spektrum auf  $(a, b)$ , das heißt  $\operatorname{Ran}(P_{(a,b)}) \subseteq \mathcal{H}_{ac}$ .

b) Ist andererseits  $\operatorname{Ran}(P_{(a,b)}) \subseteq \mathcal{H}_{ac}$ , dann gibt es eine in  $\operatorname{Ran}(P_{(a,b)})$  dichte Menge  $D$ , sodass

$$\sup_{0 < \epsilon < 1} \int_a^b |\operatorname{Im}(\varphi, (H - x - i\epsilon)^{-1} \varphi)|^p dx < \infty \tag{7.12}$$

für alle  $p \in [1, \infty]$  gilt, wenn  $\varphi \in D$ .

**BEWEIS.** a) Folgt aus vorigem Satz.

b) Sei hierzu  $D$  die Menge aller Vektoren  $\varphi$  für die das Spektralmaß  $d\mu_\varphi$  von  $H$  die Form  $f(x)dx$  hat, wobei  $f \in L^\infty$  kompakt in  $(a, b)$  getragen sein soll. Dann ist  $D$  dicht in  $\operatorname{Ran}(P_{(a,b)})$  und es gilt

$$\operatorname{Im}(\varphi, (H - x - i\epsilon)^{-1} \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} g_\epsilon(x - y) f(y) dy = g_\epsilon * f, \tag{7.13}$$

wobei  $g_\epsilon(y) = \epsilon(y^2 + \epsilon^2)^{-1}$ . Da  $\|g_\epsilon\|_1 = \pi$  für alle  $\epsilon$  ist, gilt

$$\|g_\epsilon * f\|_{L^\infty(a,b)} \leq \pi \|f\|_\infty \quad (7.14)$$

und damit

$$\sup_{0 < \epsilon < 1} \int_a^b |\operatorname{Im}(\varphi, (H - x - i\epsilon)^{-1}\varphi)|^p dx < \infty \quad (7.15)$$

für  $p = \infty$  wegen der Youngschen Ungleichung für Faltungen und, da  $(a, b)$  endlich ist, für alle  $p$ . □

In den meisten Anwendungen des letzten Satzes beweist man eigentlich, dass  $(\varphi, (H - \lambda)^{-1}\varphi)$  auf  $M = \{x + i\epsilon : \epsilon \in (0, 1), x \in (a, b)\}$  beschränkt ist – bzw. eigentlich, dass  $(\varphi, (H - \lambda)^{-1}\varphi)$  eine stetige Erweiterung auf  $\overline{M}$  hat.

Eine klassische Anwendung des Satzes ist folgendes Resultat.

**SATZ 7.5.** *Sei  $V \in R$ , der Rollnik-Klasse, und sei  $H = -\Delta + V$  auf  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . Ist entweder*

- a)  $\|V\|_R < 4\pi$  oder
- b)  $Ve^{a|x|} \in R$  für ein  $a > 0$ .

*Dann ist  $\sigma_{\text{sing}}(H) = \emptyset$ .*

**BEWEIS.** a) Da  $\|V\|_R < 4\pi$  ist

$$\left\| |V|^{1/2} (-\Delta - \lambda)^{-1} V^{1/2} \right\|_{\mathcal{S}^2}^2 = \int \frac{V(x)V(y)e^{-2\sqrt{-\lambda}|x-y|}}{16\pi^2|x-y|^2} dx dy \leq \frac{\|V\|_R^2}{16\pi^2} < 1 \quad (7.16)$$

gleichmäßig für alle  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ . Sei nun  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ , dann ist  $|f|^{1/2} \in R$  und wegen vorheriger Rechnung konvergiert

$$\begin{aligned} |f|^{1/2} (H - \lambda)^{-1} |f|^{1/2} &= |f|^{1/2} (-\Delta - \lambda)^{-1} |f|^{1/2} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left( |f|^{1/2} (-\Delta - \lambda)^{-1} V^{1/2} \right) \left( |V|^{1/2} (-\Delta - \lambda)^{-1} V^{1/2} \right)^n \times \\ &\times \left( |V|^{1/2} (-\Delta - \lambda)^{-1} |f|^{1/2} \right) \end{aligned} \quad (7.17)$$

gleichmäßig in der Hilbert-Schmidt-Norm zu einem Operator mit Operatornorm kleiner als  $c_1 + c_2 \left(1 - \frac{\|V\|_R}{4\pi}\right)^{-1}$ . Man erinnere sich hier wieder an die Neumann-Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( |V|^{1/2} (-\Delta - \lambda)^{-1} V^{1/2} \right)^n = \left( 1 - |V|^{1/2} (-\Delta - \lambda)^{-1} V^{1/2} \right)^{-1}$$

und sieht, dass  $c_1 = \left\| |f|^{1/2} (-\Delta - \lambda)^{-1} |f|^{1/2} \right\|_{\mathcal{S}^2}$  und

$$c_2 = \left\| |f|^{1/2} (-\Delta - \lambda)^{-1} V^{1/2} \right\|_{\mathcal{S}^2} \left\| |V|^{1/2} (-\Delta - \lambda)^{-1} |f|^{1/2} \right\|_{\mathcal{S}^2}.$$

Damit ist

$$|(f, (H - \lambda)^{-1}f)| \leq \left\| |f|^{1/2} \right\|_2 \left\| |f|^{1/2} (H - \lambda)^{-1} |f|^{1/2} \right\|_2 \quad (7.18)$$

auf  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$  beschränkt. Daher können wir das fundamentale Kriterium aus Satz 7.3 anwenden und sehen, dass  $\text{Ran}(P_{(a,b)}) \subseteq \mathcal{H}_{ac}$  für alle  $(a, b)$  ist. Damit sind  $\sigma_{pp}$  und  $\sigma_{sc}$  leer.

- b) Wie wir früher gesehen haben existiert  $(1 + |V|^{1/2} (-\Delta - \lambda)^{-1} V^{1/2})^{-1}$  für alle  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$  und hat stetige Randwerte für  $\lambda \rightarrow x + i0$ , solange  $x$  eine endliche Menge  $\mathcal{E}$  reeller Zahlen meidet. Sei  $[a, b]$  ein von  $\mathcal{E}$  disjunktes, abgeschlossenes Intervall, dann ist

$$\begin{aligned} |f|^{1/2} (H - \lambda)^{-1} |f|^{1/2} &= |f|^{1/2} (-\Delta - \lambda)^{-1} |f|^{1/2} \\ &\quad - \left( |f|^{1/2} (-\Delta - \lambda)^{-1} V^{1/2} \right) \left( 1 + |V|^{1/2} (-\Delta - \lambda)^{-1} V^{1/2} \right)^{-1} \times \\ &\quad \times |V|^{1/2} (-\Delta - \lambda)^{-1} |f|^{1/2} \end{aligned} \quad (7.19)$$

ein gleichmäßig beschränkter Operator auf  $\{x + i\epsilon : 0 < \epsilon < 1, x \in [a, b]\}$  für alle  $f \in C_0^\infty$  (weshalb wieder  $|f|^{1/2} \in R$ ). Mit dem gleichen Argument wie in a) ist daher  $\text{Ran}(P_{(a,b)}) \subseteq \mathcal{H}_{ac}$  und  $\sigma_{sing} \subseteq \mathcal{E}$ , einer endlichen Menge, was  $\sigma_{sing} = \emptyset$  impliziert.  $\square$

Obwohl man das relativ einfach zu hand habende Kriterium aus den Sätzen 7.3 und 7.4 hat, ist es schwer  $\sigma_{sing}$  zu kontrollieren, da dieses deutlich instabiler unter Störungen ist. Um dies zu illustrieren stellen wir die Aronszajn–Donoghue-Theorie vor, die das Verhalten von  $\sigma_{sing}$  unter Rang-Eins-Störungen beschreibt. Die Theorie sollte mit dem Weylschen Satz über die Stabilität des wesentlichen Spektrums verglichen werden. Wir müssen für die Theorie etwas ausholen.

LEMMA 7.6. Sei  $\nu$  ein endliches Borel-Maß auf  $\mathbb{R}$  und sei  $F(z) = \int (x - z)^{-1} d\nu(x)$  für  $\text{Im}(z) > 0$  die Boreltransformation von  $\nu$ . Seien  $A_\nu := \{x \in \mathbb{R} : \lim_{\epsilon \searrow 0} F(x + i\epsilon) = \infty\}$  und

$$B_\nu := \{x \in \mathbb{R} : \lim_{\epsilon \searrow 0} F(x + i\epsilon) = \Phi(x), \text{ eine endliche Zahl mit } \text{Im}\Phi(x) \neq 0\}.$$

Dann ist  $\nu(\mathbb{R} \setminus (A_\nu \cup B_\nu)) = 0$ ,  $\nu \upharpoonright A_\nu$  ist singulär bezüglich des Lebesgue-Maßes und  $\nu \upharpoonright B_\nu$  ist absolut stetig bezüglich des Lebesgue-Maßes.

Sei nun  $H_0$  ein selbstadjungierter Operator auf  $\mathcal{H}$ ,  $\varphi \in \mathcal{H}$  ein Einheitsvektor,  $P$  die Projektion auf  $\varphi$  und  $H_\alpha := H_0 + \alpha P$ . Sei  $\mathcal{H}'$  der zyklische Unterraum für  $\varphi$ , der durch  $H_0$  erzeugt wird, das heißt  $\mathcal{H}' = \{\varphi, H_0\varphi, H_0^2\varphi, \dots\}$ . Dann ist auf  $\mathcal{H}'^\perp = \{\psi \in \mathcal{H} : (\psi, H_0^k\varphi) = 0 \forall k \in \mathbb{N}_0, \varphi \in \mathcal{H}\}$   $H_0$  gleich  $H_\alpha$ , weshalb wir ohne Beschränkung annehmen können, dass  $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$  ist, das heißt  $\varphi$  ist zyklisch für  $H_0$ . Dann ist aber wegen

$$(H_\alpha - z)^{-1}\varphi = (H_0 - z)^{-1}\varphi - \alpha(\varphi, (H_0 - z)^{-1}\varphi)(H_\alpha - z)^{-1}\varphi \quad (7.20)$$

der Span von  $\{(H_\alpha - z)^{-1}\varphi\}$  gleich dem Span von  $\{(H_0 - z)^{-1}\varphi\}$ , weshalb  $\varphi$  auch für  $H_\alpha$  zyklisch ist. Wegen dieses Ergebnisses ist  $H_\alpha$  unitär äquivalent zur Multiplikation mit  $x$  auf  $L^2(\mathbb{R}, d\nu_\alpha)$  für ein gewisses Maß  $\nu_\alpha$ . Definiert man

$$F_\alpha(z) := \int (x - z)^{-1} d\nu_\alpha = (\varphi, (H_\alpha - z)^{-1}\varphi), \quad (7.21)$$

so erfüllt  $F_\alpha$  wegen der ersten Resolventengleichung

$$(H_\alpha - z)^{-1} = (H_\beta - z)^{-1} + (\beta - \alpha)(H_\alpha - z)^{-1}P(H_\beta - z)^{-1} \quad (7.22)$$

die Gleichung

$$F_\alpha(z) = F_\beta(z) + (\beta - \alpha)F_\alpha(z)F_\beta(z), \quad (7.23)$$

woraus wir

$$F_\alpha(z) = F_\beta(z)(1 + (\alpha - \beta)F_\beta(z))^{-1} \quad (7.24)$$

erhalten. Ist nun  $\lim_{\epsilon \searrow 0} F_\beta(z + i\epsilon) = \infty$ , so gilt jedoch für  $\alpha \neq \beta$ , dass  $\lim_{\epsilon \searrow 0} F_\alpha(z + i\epsilon) = (\alpha - \beta)^{-1}$ . Wendet man nun das vorige Lemma an, sieht man, dass  $\sigma_{sing} = \sigma_{pp} \cup \sigma_{sc}$  unter Rang-Eins-Störungen nicht erhalten bleibt. Wir haben

**theorem:7.7**

**SATZ 7.7.** *Sei  $H_0$  ein selbstadjungierter Operator und  $\varphi$  ein zyklischer Vektor von  $H_0$ . Sei  $H_\alpha = H_0 + \alpha(\varphi, \cdot)\varphi$ . Dann sind für  $\alpha \neq \beta$  die singulären Teile (also die Vereinigung von  $\mu_{pp} + \mu_{sc}$ ) der Spektralmaße von  $H_\alpha$  und  $H_\beta$  singulär zueinander.*

Wir schließen den Abschnitt mit einer physikalischen Interpretation des singular-stetigen Spektrums, siehe dazu auch Pearson <sup>Pearson1978</sup> [Pea78]. Wir betrachten einen eindimensionalen Schrödingeroperator (der auch von einem radialsymmetrischen Potential herrühren kann), dessen Potential unendlich viele Hügel hat, dessen Abstände voneinander schnell genug wachsen. Es ist sogar möglich, das Potential so zu konstruieren, dass es im Unendlichen verschwindet. Man findet, dass das Teilchen mit Energie  $\lambda \in \sigma_{sing}(H)$ , obwohl es möglicherweise unendlich oft reflektiert und transmittiert wurde, mit Wahrscheinlichkeit 1 zu einer Umgebung seines Startpunkts zurückkehrt. Man kann dies auch als einen „Quantum Random Walk“ bezeichnen. Teilchen, die sich in so einem Potential befinden, werden also mit 100-prozentiger Wahrscheinlichkeit total reflektiert.

## 8. Die Abwesenheit des singular-stetigen Spektrums II: glatte Störungen

**s:hsmoothness**

**DEFINITION 8.1.** Sei  $H$  selbstadjungiert und  $A$  abgeschlossen.  $A$  heißt *H-glatt* genau dann, wenn für alle  $\varphi \in \mathcal{H}$  und jedes  $\epsilon \neq 0$  der Vektor  $(H - \lambda - i\epsilon)^{-1}\varphi \in \mathcal{D}(A)$  für fast alle  $\lambda$  ist und darüberhinaus

$$\|A\|_H^2 = \sup_{\|\varphi\|=1, \epsilon>0} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \|A(H - \lambda - i\epsilon)^{-1}\varphi\|^2 + \|A(H - \lambda + i\epsilon)^{-1}\varphi\|^2 \right) d\lambda < \infty \quad (8.1)$$

gilt.

**LEMMA 8.2.** *Sei  $H$  selbstadjungiert und  $A$  abgeschlossen. Dann haben wir folgende Aussagen.*

- Gilt  $\|A\|_H < \infty$  für eine dichte Teilmenge von  $\varphi$ s, dann ist für alle  $\varphi \in \mathcal{H}$  der Vektor  $(H - \lambda - i\epsilon)^{-1}\varphi \in \mathcal{D}(A)$  für fast alle  $\lambda$  und es gilt  $\|A\|_H < \infty$ .
- Sei  $\epsilon > 0$  fix und angenommen es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|A(H - \lambda \mp i\epsilon)^{-1}\varphi\|^2 d\lambda < \infty \quad (8.2)$$

für alle  $\varphi \in \mathcal{H}$ . Dann gibt es eine positive Konstante, sodass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|A(H - \lambda \mp i\epsilon)^{-1}\varphi\|^2 d\lambda \leq \text{const} \|\varphi\|^2 \quad (8.3)$$

für alle  $\varphi \in \mathcal{H}$  gilt.

c) Angenommen es ist  $\sup_{\epsilon > 0} \int_{-\infty}^{\infty} \|A(H - \lambda \mp i\epsilon)^{-1}\varphi\|^2 d\lambda < \infty$  für alle  $\varphi \in \mathcal{H}$ . Dann ist  $A$   $H$ -glatt.

Der Abschnitt ist in zwei Teile gegliedert. Im ersten Teil werden wir die abstrakte Theorie von glatten Störungen entwickeln, ehe wir sie im zweiten Teil auf einige Schrödinger-Operatoren anwenden. Die ersten beiden Anwendungen beinhalten Situationen, wo die Wellenoperatoren unitär sind, das heißt, wo  $H$  und  $H_0$  unitär äquivalent sind. Dies betrifft Schrödinger-Operatoren der Form  $H_0 + \lambda V$ , wo entweder  $\lambda$  „klein“ oder  $V$  abstoßend ist. In letzteren Fall wird die Theorie der glatten Störungen uns sagen, dass  $H$  rein absolut stetiges Spektrum hat.

Wir beginnen damit die  $H$ -Glattheit in äquivalenten Formen umzuformulieren. Hierfür werden wir eine Vektorwertige Version des Satzes von Plancherel benötigen.

vectorplancherel

LEMMA 8.3. Sei  $\varphi(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$  eine schwach-messbare Funktion (das heißt die Komposition von  $\varphi$  mit einem Element aus  $\mathcal{H}'$ , dem Dualraum von  $\mathcal{H}$  ist messbar) von  $\mathbb{R}$  zu einem separablen Hilbertraum  $\mathcal{H}$ . Angenommen, es ist  $\int \|\varphi(x)\| dx < \infty$ . Wir definieren  $\hat{\varphi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$  als

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-ix\xi} dx \quad (8.4)$$

als schwaches Integral bzw. Pettis-Integral. Sei  $A$  ein abgeschlossener Operator auf  $\mathcal{H}$ , dann gilt

$$\int \|A\hat{\varphi}(\xi)\|^2 d\xi = \int \|A\varphi(x)\|^2 dx. \quad (8.5)$$

Die Integrale werden  $\infty$  gesetzt, wenn  $\varphi(x)$  bzw.  $\hat{\varphi}(\xi)$  nicht in  $\mathcal{D}(A)$  fast überall sind.

BEWEIS. Sei  $A$  ein beliebiger abgeschlossener Operator. Zu diesem gibt es einen positiven (und daher selbstadjungierten) Operator  $|A|$  mit  $\mathcal{D}(|A|) = \mathcal{D}(A)$  und  $\| |A|\psi \| = \|A\psi\|$ . Daher genügt es die Aussage für selbstadjungiertes  $A$  zu zeigen.

Wir nehmen zunächst an  $A$  sei beschränkt. Dann ist für alle  $\psi \in \mathcal{H}$  die Funktion  $(\psi, A\hat{\varphi}(\xi)) = (A^*\psi, \hat{\varphi}(\xi))$  die gewöhnliche Fouriertransformation von  $(A^*\psi, \varphi(x)) = (\psi, A\varphi(x))$ . Wir können daher das gewöhnliche Plancherel-Theorem anwenden und erhalten

$$\int |(\psi, A\hat{\varphi}(\xi))|^2 d\xi = \int |(\psi, A\varphi(x))|^2 dx. \quad (8.6)$$

Die Behauptung folgt, wenn man über alle  $\psi$  in einer Orthonormalbasis summiert.

Sei nun  $A$  selbstadjungiert. Dann ist  $AP_{(-a,a)}$  beschränkt und wir können voriges Argument anwenden, um

$$\int \|AP_{(-a,a)}\hat{\varphi}(\xi)\|^2 d\xi = \int \|AP_{(-a,a)}\varphi(x)\|^2 dx \quad (8.7)$$

zu erhalten. Angenommen eines der beiden Integrale (und damit das andere ebenso) sei endlich. Dann ist  $\varphi(x) \in \mathcal{D}(A)$  fast überall, das heißt  $\|AP_{(-a,a)}\varphi(x)\|^2$  konvergiert monoton für  $a \rightarrow \infty$  gegen  $\|A\varphi(x)\|^2$ , das heißt mit dem Satz der monotonen Konvergenz ist

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int \|AP_{(-a,a)}\hat{\varphi}(\xi)\|^2 d\xi = \int \|A\hat{\varphi}(\xi)\|^2 d\xi < \infty. \quad (8.8)$$

Insbesondere ist dabei  $\lim_{a \rightarrow \infty} \|AP_{(-a,a)}\hat{\varphi}(\xi)\|^2 < \infty$  für fast alle  $\xi$ . Daraus folgt, dass  $\hat{\varphi}(\xi) \in \mathcal{D}(A)$  für fast alle  $\xi$  und die Behauptung folgt.  $\square$

BEISPIEL 8.4. Wir betrachten  $H = -i\frac{d}{dx}$  auf  $L^2(\mathbb{R})$ , das heißt  $(e^{-iHt}\varphi)(x) = \varphi(x-t)$ . Sei  $g \in L^2(\mathbb{R})$  und  $A$  der Multiplikationsoperator mit  $g$ . Wir zeigen, dass dann  $A$   $H$ -glatt ist. Sei  $\epsilon > 0$  fix, dann ist mit dem Spektralkalkül für  $\varphi \in \mathcal{H}$

$$\int_0^\infty e^{-\epsilon t} e^{i\lambda t} e^{-iHt} \varphi dt = -i(H - \lambda - i\epsilon)^{-1} \varphi. \quad (8.9)$$

Als Nächstes zeigen wir, dass  $e^{-iHt}\varphi \in \mathcal{D}(A)$  für fast alle  $x \in \mathbb{R}$  ist, und damit auch die „Fouriertransformierte“  $(H - \lambda - i\epsilon)^{-1}\varphi \in \mathcal{D}(A)$  für fast alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Mit  $\mathcal{D}(A) = \{\psi \in L^2 : \int_{\mathbb{R}} |g(x)\psi(x)|^2 dx < \infty\}$  und Fubini ist

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)\varphi(x-t)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} |g(x)\varphi(x-t)|^2 dx dt = \int_{\mathbb{R}} \|Ae^{-iHt}\varphi\|^2 dt = \|g\|_2^2 \|\varphi\|_2^2. \quad (8.10)$$

Wir können daher das Lemma anwenden ( $\psi(t) := e^{-\epsilon t} e^{-itH}\theta(t)\varphi$ ,  $\hat{\psi}(\lambda) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}(H - \lambda - i\epsilon)^{-1}\varphi$ ) und erhalten

$$\int_{\mathbb{R}} \|A(H - \lambda - i\epsilon)^{-1}\varphi\|^2 d\lambda = 2\pi \int_0^\infty e^{-2\epsilon t} \|Ae^{-iHt}\varphi\|^2 dt. \quad (8.11)$$

Mit einer ähnlichen Rechnung für  $\lambda - i\epsilon$  erhalten wir damit

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left( \|A(H - \lambda - i\epsilon)^{-1}\varphi\|^2 + \|A(H - \lambda + i\epsilon)^{-1}\varphi\|^2 \right) d\lambda &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} e^{-2\epsilon|t|} \|Ae^{-iHt}\varphi\|^2 dt \\ &\leq 2\pi \|g\|_2^2 \|\varphi\|_2^2 \end{aligned} \quad (8.12)$$

und sehen, dass  $\|A\|_H^2 = \frac{\|g\|_2^2}{2\pi}$ , womit  $A$  tatsächlich  $H$ -glatt ist.

BEISPIEL 8.5. Sei  $H$  selbstadjungiert und  $A = \text{id}$ . Wir zeigen, dass der Identitätsoperator nie  $H$ -glatt sein kann, indem wir  $\int_{\mathbb{R}} \|(H - \lambda - i\epsilon)^{-1}\varphi\|^2 d\lambda$  für  $\varphi \in \mathcal{H}$  berechnen. Wieder ist mit dem Spektralkalkül

$$\int_0^\infty e^{-\epsilon t} e^{i\lambda t} e^{-iHt} \varphi dt = -i(H - \lambda - i\epsilon)^{-1} \varphi \quad (8.13)$$

und daher

$$\int_{\mathbb{R}} \|(H - \lambda - i\epsilon)^{-1}\varphi\|^2 d\lambda = 2\pi \int_0^\infty e^{-2\epsilon t} \|e^{-iHt}\varphi\|^2 dt = \frac{\pi}{\epsilon} \|\varphi\|^2. \quad (8.14)$$

Daher ist  $\sup_{\epsilon > 0} \int_{\mathbb{R}} \|(H - \lambda - i\epsilon)^{-1}\varphi\|^2 d\lambda = \infty$  für alle  $0 \neq \varphi \in \mathcal{H}$ , womit  $\text{id}$  nie  $H$ -glatt sein kann.

Wir sehen, dass  $H$ -Glattheit auch im dynamischen Bild verstanden werden kann, denn der Zeit-Propagator  $e^{-iHt}$  kann auch als Greensche Funktion  $(H - \lambda - i\epsilon)^{-1}$  im Fourierraum verstanden werden.

LEMMA 8.6. *Sei  $H$  selbstadjungiert und  $A$  abgeschlossen. Dann ist  $A$  genau dann  $H$ -glatt, wenn für alle  $\varphi \in \mathcal{H}$  der in der Zeit propagierte Vektor  $e^{iHt}\varphi \in \mathcal{D}(A)$  für fast alle  $t \in \mathbb{R}$  ist und es eine Konstante  $c$  gibt, sodass*

$$\int_{\mathbb{R}} \|Ae^{-iHt}\varphi\|^2 dt \leq \text{const} \|\varphi\|^2. \quad (8.15)$$

$c$  kann dabei höchstens  $2\pi \|A\|_H^2$  sein.

Diese äquivalente Formulierung hat einige wichtige Konsequenzen.

**SATZ 8.7.** *Sei  $H$  selbstadjungiert und  $A$  abgeschlossen. Ist  $A$   $H$ -glatt, so ist  $A$  relativ  $H$ -beschränkt mit relativer Schranke gleich Null. Mit Kato–Rellich folgt, dass  $H + A$  ebenfalls selbstadjungiert ist, wenn  $A$  auch noch symmetrisch ist.*

**BEMERKUNG 8.8.** Die umgekehrte Implikation kann offensichtlich nicht wahr sein, wenn wir an  $A = \text{id}$  denken, denn  $\|\varphi\| \leq 0 \cdot \|H\varphi\| + \|\varphi\|$ .

**BEWEIS.** Neben der Schranke an  $\|A\psi\|$  für  $\psi \in \mathcal{D}(A)$  müssen wir die Inklusion  $\mathcal{D}(H) \subseteq \mathcal{D}(A)$  zeigen. Sei dazu  $\phi \in \mathcal{D}(A^*)$  und  $\varphi \in \mathcal{H}$ . Dann ist zunächst mit dem Spektralkalkül

$$-i(A^*\phi, (H - \lambda - i\epsilon)^{-1}\varphi) = \int_0^\infty (A^*\phi, e^{-iHt}\varphi)e^{i\lambda t}e^{-\epsilon t} dt \quad (8.16)$$

und daher (zwei mal) mit der Schwarzschen Ungleichung und der dynamischen Formulierung von  $H$ -Glattheit

$$\begin{aligned} |(A^*\phi, (H - \lambda - i\epsilon)^{-1}\varphi)|^2 &\leq \frac{1}{2\epsilon} \int_0^\infty |(A^*\phi, e^{-iHt}\varphi)|^2 dt \\ &\leq \frac{\|\phi\|^2}{2\epsilon} \int_0^\infty \|Ae^{-iHt}\varphi\|^2 dt \leq \frac{\pi}{\epsilon} \|A\|_H^2 \|\phi\|^2 \|\varphi\|^2. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Wir sehen also, dass für  $\varphi \in \mathcal{H}$  gilt, dass  $(H - \lambda - i\epsilon)^{-1}\varphi \in \mathcal{D}(A^{**}) \supseteq \mathcal{D}(A)$  und

$$\|A(H - \lambda - i\epsilon)^{-1}\varphi\|^2 \leq \frac{\pi}{\epsilon} \|A\|_H^2 \|\varphi\|^2.$$

Daraus folgt, dass  $\mathcal{D}(H) \subseteq \mathcal{D}(A)$  ist und für  $\psi = (H - i\epsilon)^{-1}\varphi \in \mathcal{D}(H)$  und  $\varphi \in \mathcal{H}$  gilt

$$\|A\psi\| \leq \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} \|A\|_H \|\varphi\| = \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} \|A\|_H (\|H\psi\| + \epsilon \|\psi\|). \quad (8.18)$$

Da  $\epsilon$  beliebig war, folgt die Behauptung.  $\square$

Wir können dieses Resultat sogar noch etwas verbessern.

**SATZ 8.9.** *Sei  $H$  selbstadjungiert und  $A$  sei  $H$ -glatt. Dann ist  $A$  auch  $|H|^\alpha$ -glatt für  $\alpha > 1/2$ .*

Folgendes Resultat sagt uns, dass  $H$ -Glattheit die Abwesenheit des singulären Spektrums zeigt.

**theorem:3.74**

**SATZ 8.10.** *Sei  $H$  selbstadjungiert und  $A$  sei  $H$ -glatt. Dann ist  $\text{Ran}(A^*) \subseteq \mathcal{H}_{ac}(H)$ .*

**BEWEIS.** Da  $\mathcal{H}_{ac}(H)$  abgeschlossen ist, genügt es  $\text{Ran}(A^*) \subset \mathcal{H}_{ac}(H)$  zu zeigen. Wir müssen dann lediglich zeigen, dass für  $\psi \in \text{Ran}(A^*)$  das zu  $H$  gehörige Spektralmaß bezüglich dieses Vektors,  $d\mu_\psi$ , absolut stetig bezüglich des Lebesgue-Maßes ist. Sei dazu  $\varphi \in \mathcal{D}(A^*)$  und  $\psi = A^*\varphi \in \text{Ran}(A^*)$ , sowie  $d\mu_\psi$  das Spektralmaß von  $H$  bezüglich  $\psi \in \text{Ran}(A^*)$ . Weiter definieren wir mit dem Spektralkalkül

$$F(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-itx} d\mu_\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (A^*\varphi, e^{-itH}\psi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{F}(x) e^{-itx} dx. \quad (8.19)$$

Dann ist  $|F(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\varphi\| \|Ae^{-iHt}\psi\|$  und mit dem Lemma folgt, da  $A$   $H$ -glatt ist, dass  $F \in L^2(\mathbb{R})$  ist. Mit dem gewöhnlichen Plancherel-Theorem folgt, dass auch  $\check{F} \in L^2(\mathbb{R})$  ist. Damit ist  $d\mu_\psi = \check{F}dx$  absolut stetig bezüglich des Lebesgue-Maßes, denn für  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  mit  $\lambda(A) = 0$  ( $\lambda$  sei das Lebesgue-Maß) ist

$$\mu_\psi(A) = \int_A \check{F}(x)dx \leq \|\check{F}\|_2 \sqrt{\lambda(A)} = 0. \quad (8.20)$$

□

Die dynamische Formulierung der  $H$ -Glattheit hat wichtige Konsequenzen für die Streutheorie.

**theorem:8.11**

SATZ 8.11. *Seien  $H$  und  $H_0$  selbstadjungierte Operatoren und nimm an, dass  $H = H_0 + \sum_{i=1}^n A_i^* B_i$  im folgenden Sinne:*

- (1)  $\mathcal{D}(H) \subseteq \mathcal{D}(A_i)$ ,  $\mathcal{D}(H_0) \subseteq \mathcal{D}(B_i)$  für alle  $i = 1, \dots, n$ .
- (2) Ist  $\varphi \in \mathcal{D}(H)$  und  $\psi \in \mathcal{D}(H_0)$ , dann ist

$$(H\varphi, \psi) = (\varphi, H_0\psi) + \sum_{i=1}^n (A_i\varphi, B_i\psi). \quad (8.21)$$

Ist jedes  $A_i$   $H$ -glatt und  $B_i$   $H_0$ -glatt, dann existieren die Wellenoperatoren  $s - \lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{iHt} e^{-iH_0t}$  und sind unitär.

Wir bemerken, dass der Limes in diesem Satz nicht von  $P_{ac}(H_0)$  abhängt. Daraus folgt, dass, wenn  $H_0\psi = E\psi$  ist, auch  $H\psi = E\psi$  ist. Dies folgt direkt aus der Voraussetzung, denn  $\text{Ran}(B^*) \subseteq \mathcal{H}_{ac}(H_0)$  impliziert, dass  $\mathcal{H}_{pp}(H_0) \subseteq \text{Ker}(B)$  ist, woraus  $H\psi = H_0\psi$  folgt.

Wir schließen die abstrakte Theorie der  $H$ -glatten Operatoren mit einer Liste von äquivalenten Formulierungen von  $H$ -Glattheit.

**equivcrit**

SATZ 8.12. *Sei  $H$  selbstadjungiert und  $A$  abgeschlossen, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- (i)  $A$  ist  $H$ -glatt, sprich für  $\varphi \in \mathcal{H}$  und jedes  $\epsilon \neq 0$  ist der Vektor  $(H - \lambda - i\epsilon)^{-1}\varphi \in \mathcal{D}(A)$  für fast alle  $\lambda$  und darüberhinaus

$$\sup_{\|\varphi\|=1, \epsilon>0} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \|A(H - \lambda - i\epsilon)^{-1}\varphi\|^2 + \|A(H - \lambda + i\epsilon)^{-1}\varphi\|^2 \right) d\lambda < \infty.$$

- (ii)  $e^{-iHt}\varphi \in \mathcal{D}(A)$  für alle  $\varphi \in \mathcal{H}$  und fast alle  $t$  und

$$c_1 := \sup_{\|\varphi\|=1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|Ae^{-iHt}\varphi\|^2 dt < \infty. \quad (8.22)$$

- (iii)  $\mathcal{D}(H) \subseteq \mathcal{D}(A)$  und

$$c_2 := \sup_{\|\varphi\|=1, -\infty < a < b < \infty} \frac{\|AP_{(a,b)}\varphi\|^2}{|b-a|} < \infty, \quad (8.23)$$

wobei  $P_\Omega$  die Spektralfamilie von  $H$  ist.

- (iv)

$$c_3 := \sup_{\|\varphi\|=1, \varphi \in \mathcal{D}(A^*), -\infty < a < b < \infty} \frac{\|P_{(a,b)}A^*\varphi\|^2}{|b-a|} < \infty. \quad (8.24)$$

(v)

$$c_4 := \frac{1}{2\pi} \sup_{\mu \notin \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{D}(A^*), \|\varphi\|=1} |(A^* \varphi, [(H - \mu)^{-1} - (H - \bar{\mu})^{-1}] A^* \varphi)| < \infty. \quad (8.25)$$

(vi)

$$c_5 := \frac{1}{\pi} \sup_{\mu \notin \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{D}(A^*), \|\varphi\|=1} \|(H - \mu)^{-1} A^* \varphi\|^2 |\operatorname{Im}(\mu)| < \infty. \quad (8.26)$$

(vii)  $\mathcal{D}(H) \subseteq \mathcal{D}(A)$  und

$$c_6 := \frac{1}{\pi} \sup_{\mu \notin \mathbb{R}, \|\varphi\|=1} \|A(H - \mu)^{-1} \varphi\|^2 |\operatorname{Im}(\mu)| < \infty. \quad (8.27)$$

(viii)  $\mathcal{D}(H) \subseteq \mathcal{D}(A)$  und

$$c_7 := \frac{1}{\pi} \sup_{\mu \notin \mathbb{R}, \|\varphi\|=1} (\|A(H - \mu)^{-1} \varphi\|^2 + \|A(H - \bar{\mu})^{-1} \varphi\|^2) |\operatorname{Im}(\mu)| < \infty \quad (8.28)$$

Ist eine (und damit alle) der Konstanten endlich, so sind  $c_1 = c_2 = \dots = c_7 = \|A\|_H^2$ .

BEWEIS. Siehe [ReedSimon1978](#) [RS78, Theorem XIII.25].  $\square$

BEMERKUNGEN 8.13.

- (1) In (vi) und (vii) kann man das Supremum über  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  durch das Supremum über  $0 < \operatorname{Im}(\mu) < \alpha$  für jedes  $\alpha > 0$  ersetzen. Insbesondere kann in (i) die Bedingung  $\epsilon > 0$  durch  $0 < \epsilon < \alpha$  ersetzt werden.
- (2) (iv) gibt eine weitere Möglichkeit zu beweisen, dass  $\operatorname{Ran}(A^*) \subseteq \mathcal{H}_{ac}$  ist, wenn  $A$   $H$ -glatt ist.
- (3) (vii) impliziert sofort, dass  $A$  relativ  $H$ -beschränkt mit relativer Schranke gleich Null ist.

Wir haben noch ein Kriterium für  $H$ -Glattheit, welches aus Bedingung (v) folgt.

KOROLLAR 8.14 (Super-Glattheit nach Kato–Yajima). *Ist  $A(H - \mu)^{-1} A^*$  für jedes  $\mu \notin \mathbb{R}$  beschränkt, in dem Sinne, dass*

$$\begin{aligned} & \sup_{\mu \notin \mathbb{R}, \psi, \varphi \in \mathcal{D}(A^*), \|\varphi\| = \|\psi\| = 1} |(A^* \varphi, (H - \mu)^{-1} A^* \psi)| < \infty \\ & \text{und } \Gamma := \sup_{\mu \notin \mathbb{R}} \| |A(H - \mu)^{-1} A^*| \| < \infty, \end{aligned} \quad (8.29)$$

dann ist  $A$   $H$ -glatt und  $\|A\|_H \leq \frac{\Gamma}{\pi}$ . In diesem Fall sagt man, dass  $A$  superglatt bezüglich  $H$  im Sinne von Kato und Yajima ist. Weiter braucht (wegen Polarisation) nur

$$\sup_{\mu \notin \mathbb{R}, \psi \in \mathcal{D}(A^*), \|\psi\|=1} |(A^* \psi, (H - \mu)^{-1} A^* \psi)| < \infty \quad (8.30)$$

angenommen werden.

Bevor wir uns den Anwendungen widmen, diskutieren wir zwei weitere Beispiele  $H$ -glatter Operatoren.

BEISPIEL 8.15. Sei  $H_0 = -\Delta$  auf  $L^2(\mathbb{R}^3)$  und  $A$  der Multiplikationsoperator mit  $V \in R$ . Wegen

$$\left\| \left\| |V|^{1/2} (-\Delta - \lambda)^{-1} |V|^{1/2} \right\| \right\| \leq \left\| |V|^{1/2} (-\Delta - \lambda)^{-1} |V|^{1/2} \right\|_{\mathcal{S}^2} \leq \frac{\|V\|_R}{4\pi} \quad (8.31)$$

und obigem Korollar, ist  $|V|^{1/2}$  eine  $-\Delta$ -glatte Störung.

BEISPIEL 8.16. Sei  $H$  der Multiplikationsoperator mit  $x$  auf  $\mathcal{H} = L^2([\alpha, \beta], dx)$ , wobei  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Sei  $A$  ein beschränkter Operator auf  $\mathcal{H}$ , sodass  $A^*A$  ein Integraloperator der Form

$$(A^*A\psi)(x) = \int_{\alpha}^{\beta} K(x, y)\psi(y)dy \quad (8.32)$$

ist, wobei  $\|K\|_{\infty} = \text{ess sup}_{[\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]} |K(x, y)| < \infty$ . Sei nun  $(a, b]$  ein Intervall und  $\|\varphi\| = 1$ , dann ist

$$\begin{aligned} \|AP_{(a,b]}(H)\varphi\|^2 &= (\varphi, P_{(a,b]}A^*AP_{(a,b]}\varphi) = \int_a^b \int_a^b K(x, y)\overline{\varphi}(x)\varphi(y)dx dy \\ &\leq \left( \int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 \right)^{1/2} \left( \int_a^b \int_a^b |\overline{\varphi}(x)\varphi(y)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq |b - a| \|K\|_{\infty} \|\varphi\|^2. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Nach dem dritten Kriterium ist damit  $\|A\|_H \leq \|K\|_{\infty}$  und damit ist  $A$   $H$ -glatte. Das Beispiel zeigt insbesondere, dass jeder beliebige Integraloperator

$$(A\psi)(x) = \int_{\alpha}^{\beta} A(x, y)\psi(y)dy$$

mit  $\|A\|_{\infty} < \infty$   $H$ -glatte ist. Wir haben damit sehr viele  $H$ -glatte Operatoren gefunden und insbesondere  $H$ -glatte Operatoren mit  $\text{Ker}(A) = \{0\}$ .

LEMMA 8.17. Sei  $H$  der Multiplikationsoperator mit  $x$  auf  $\mathcal{H} = L^2([\alpha, \beta], dx)$ , wobei  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und sei  $A$  ein beschränkter Operator auf  $\mathcal{H}$ . Dann gelten folgende Aussagen.

- Hat  $A^*A$  einen Integralkern  $K$ , so ist  $\|A\|_H^2 = \|K\|_{\infty}$  und  $A$  ist  $H$ -glatte.
- Ist  $A$   $H$ -glatte, so hat  $A^*A$  einen Integralkern  $K$  und  $(A^*A\psi)(x) = \int_{\alpha}^{\beta} K(x, y)\psi(y)dy$ .

**8.1. Schwach gekoppelte Quantensysteme.** Angenommen  $H_0$  ist ein positiver, selbstadjungierter Operator und  $C$  ist selbstadjungiert. Ist  $|C|^{1/2}(H_0 + \text{id})^{-1}|C|^{1/2}$  ein durch  $a$  beschränkter Operator, dann ist  $\left\| (H_0 + \text{id})^{-1/2} |C|^{1/2} \varphi \right\|^2 \leq a \|\varphi\|^2$  für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(|C|^{1/2})$ , womit auch  $(H_0 + \text{id})^{-1/2} |C|^{1/2}$  ein beschränkter Operator ist. Adjungiert man den Operator, so sieht man, dass  $\mathcal{Q}(H_0) \subseteq \mathcal{Q}(C)$  und  $\left\| |C|^{1/2} (H_0 + \text{id})^{-1/2} \right\|^2 \leq a$  ist. Daraus folgt, dass  $(\varphi, |C|\varphi) \leq a(\varphi, (H_0 + \text{id})\varphi)$  für alle  $\varphi \in \mathcal{Q}(H_0)$  ist. Daher ist  $C$   $H_0$ -formbeschränkt mit Formschanke  $a$ . Ist insbesondere  $a < 1$ , so ist die Formsumme  $H := H_0 + C$  selbstadjungiert. Der folgende Satz von Kato behandelt solche Formsummen.

SATZ 8.18 (Katos Glattheits-Satz). Sei  $H_0$  ein positiver, selbstadjungierter Operator auf  $\mathcal{H}$  und seien  $C_1, \dots, C_n$  selbstadjungierte Operatoren mit

$$\alpha_{ij} := \sup_{\mu \notin \mathbb{R}} \left\| |C_i|^{1/2} (H_0 - \mu)^{-1} |C_j|^{1/2} \right\| < \infty. \quad (8.34)$$

Angenommen  $A := \{\alpha_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}$  sei die Matrix eines Operators auf  $\mathbb{C}^n$  mit  $\|A\| < 1$ . Dann gilt:

- Die Formsumme  $H = H_0 + \sum_{i=1}^n C_i$  ist eine abgeschlossene Form auf  $\mathcal{Q}(H_0)$ .
- Die Wellenoperatoren  $s - \lim_{t \rightarrow \mp \infty} e^{iHt} e^{-iH_0 t}$  existieren und sind unitär.

Damit sind insbesondere  $H_0$  und  $H$  unitär äquivalent zueinander.

KOROLLAR 8.19. Sei  $V \in R$  mit  $\|V\|_R < 4\pi$ . Dann sind  $-\Delta$  und  $-\Delta + V$  unitär äquivalent zueinander.

Möchte man sich nicht zu viele Gedanken über detaillierte Abschätzungen machen, so ist es nützlich Katos Glattheits-Satz in folgender Form zu schreiben.

KOROLLAR 8.20. Sei  $H_0$  ein positiver, selbstadjungierter Operator auf  $\mathcal{H}$  und seien  $C_1, \dots, C_n$  selbstadjungierte Operatoren mit

$$\sup_{\mu \notin \mathbb{R}} \left\| |C_i|^{1/2} (H_0 - \mu)^{-1} |C_j|^{1/2} \right\| < \infty. \quad (8.35)$$

Dann gibt es  $\Lambda > 0$ , sodass für alle  $\lambda \in (-\Lambda, \Lambda)$  gilt:

- $H(\lambda) = H_0 + \lambda \sum_{i=1}^n C_i$  ist eine auf  $\mathcal{Q}(H_0)$  abgeschlossene Form.
- Die Wellenoperatoren  $\Omega_\lambda^\pm = s - \lim_{t \rightarrow \mp \infty} e^{iHt} e^{-iH_0 t}$  existieren und sind unitär und analytisch in  $\lambda$ .

Wir können damit „schwach gekoppelte“  $N$ -Teilchen Schrödingeroperatoren untersuchen.

SATZ 8.21 (Iorio-O'Carroll). Sei  $m \geq 3$ ,  $N \geq 2$  und

$$\tilde{H}_0 = \sum_{i=1}^N (-2\mu_i)^{-1} \Delta_i \quad (8.36)$$

auf  $L^2(\mathbb{R}^{Nm})$ , wobei  $\mu_i > 0$  und  $x = \langle x_1, \dots, x_N \rangle \in \mathbb{R}^{Nm}$  mit  $x_i \in \mathbb{R}^m$ . Sei  $H_0$  gleich  $\tilde{H}_0$  mit abseparierter Schwerpunktsbewegung. Sei  $V = \sum_{i < j} V_{ij}(x_i - x_j)$ , wobei jedes  $V_{ij} \in L^{m/2+\epsilon}(\mathbb{R}^m) \cap L^{m/2-\epsilon}(\mathbb{R}^m)$  für ein fixiertes  $\epsilon > 0$  sein soll. Dann ist für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit  $|\lambda|$  hinreichend klein die Formsumme  $H_0 + \lambda V$  unitär äquivalent zu  $H_0$ . Insbesondere hat  $H_0 + \lambda V$  keine gebundenen Zustände und kein singulär-stetiges Spektrum.

BEMERKUNG 8.22. (1) Es ist eigentlich nicht notwendig die Schwerpunktsbewegung abzuseparieren.

- Die Formsumme ist lediglich für  $m = 3$  notwendig, für  $m \geq 4$  haben wir bereits gelernt, dass die Operatorsumme  $H_0 + \lambda V$  auf  $C_0^\infty(\mathbb{R}^{m(N-1)})$  selbstadjungiert ist, wenn  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- Dieses Resultat kann nicht für  $m = 1, 2$  verwendet werden.
- Die Bedingungen an die  $V_{ij}$  können nicht besonders abgeschwächt werden. Hat  $V_{ij}$  nicht- $L^{m/2}$  lokale Singularitäten an endlichen Punkten (z. B.  $r^{-2-\epsilon}$ -Verhalten bei  $r = 0$ ), so ist die Selbstadjungiertheit verloren. Hat  $V_{ij}$  nicht- $L^{m/2}$  Verhalten im Unendlichen (z. B.  $r^{-2+\epsilon}$ -Abfall bei  $\infty$ ), so

kann es passieren, dass  $H_0 + \lambda V$  unabhängig von  $\lambda$  gebundene Zustände hat.

**8.2. Positive Kommutatoren und abstoßende Potentiale.** Wir werden im Folgenden zeigen, dass Operatoren mit repulsiven Potentialen nur absolut stetiges Spektrum haben. Die Methode die wir hier entwickeln wird uns später auch dabei helfen zu zeigen, dass es für repulsive Potentiale keine positiven Eigenwerte geben kann.

**SATZ 8.23 (Putnam-Kato).** *Seien  $H$  und  $A$  beschränkte, selbstadjungierte Operatoren. Angenommen  $C := i[H, A]$  ist positiv. Dann ist  $C^{1/2}$   $H$ -glatt. Ist darüberhinaus  $\text{Ker}(C) = \{0\}$ , so hat  $H$  rein absolut stetiges Spektrum.*

**BEWEIS.** Die zweite Aussage folgt sofort aus Satz <sup>theorem:3.74</sup> 8.10 und  $\text{Ker}(C^{1/2}) = [\text{Ran}(C^{1/2})]^\perp = \{0\}$ .

Wegen

$$\frac{d}{dt} e^{iHt} A e^{-iHt} \varphi = i e^{iHt} [H, A] e^{-iHt} \varphi = e^{iHt} C e^{-iHt} \varphi \quad (8.37)$$

ist

$$\int_s^t (\varphi, e^{iH\tau} C e^{-iH\tau} \varphi) d\tau = (\varphi, e^{iHt} A e^{-iHt} \varphi) - (\varphi, e^{iHs} A e^{-iHs} \varphi) \quad (8.38)$$

und deshalb

$$\int_s^t \left\| C^{1/2} e^{-iH\tau} \varphi \right\|^2 d\tau \leq 2 \|A\| \|\varphi\|^2. \quad (8.39)$$

Da  $s$  und  $t$  beliebig waren, ist  $C^{1/2}$   $H$ -glatt und  $\|C^{1/2}\|_H^2 \leq \frac{\|A\|}{\pi}$ .  $\square$

Wir wollen die Idee von positiven Kommutatoren anwenden, um zu zeigen, dass  $N$ -Teilchen Schrödingeroperatoren mit repulsiven Potentialen nur absolut stetiges Spektrum haben. Ein repulsives Potential erfüllt  $V(r\hat{e}) \leq V(r'\hat{e})$  für alle Einheitsvektoren  $\hat{e}$  und  $r < r'$ , das heißt repulsive Potentiale schieben Teilchen vom Ursprung weg, das heißt man erwartet intuitiv keine gebundenen Zustände. Es gibt noch eine weitere Möglichkeit das Abstoßverhalten von  $V$  zu beschreiben, die die Verbindung zu positiven Kommutatoren klarer macht. Sei  $U(\theta)$  die Familie von Dilatationen  $(U(\theta)\psi)(r) = e^{+m\theta/2}\psi(e^\theta r)$ . Dann ist  $[U(\theta)VU(\theta)^{-1}](r) = V(e^\theta r)$ , das heißt, wenn  $V$  repulsiv ist, so fällt  $V_\theta := U(\theta)VU(\theta)^{-1}$  monoton in  $\theta$ . Da  $U(\theta)(-\Delta)U(\theta)^{-1} = e^{-2\theta} - \Delta$ , fällt auch die kinetische Energie monoton unter Dilatationen. Daher ist formal

$$\frac{d}{d\theta} U(\theta)(-\Delta + V)U(\theta)^{-1} \leq 0. \quad (8.40)$$

Der Generator

$$D = \frac{i}{2} \sum_{i=1}^m \left( x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} x_i \right) \quad (8.41)$$

von  $U(\theta)$  (das heißt  $U(\theta) = e^{-i\theta D}$ ) erfüllt dann formal  $i[D, -\Delta + V] \geq 0$ .

**BEMERKUNG 8.24.** Der Satz von Putnam und Kato ist jedoch nicht direkt anwendbar.

- (1) Die vorigen Berechnungen waren formal; wir müssen wie immer Acht auf die Definitionsbereiche und determinierenden Bereiche geben. Es stellt sich jedoch glücklicherweise heraus, dass keine weiteren technischen Voraussetzungen gebraucht werden.
- (2)  $H = -\Delta + V$  ist im Allgemeinen nicht beschränkt. Da jedoch  $H$  positiv ist, ist dieses Problem nicht besonders schwerwiegend.
- (3) Der Generator  $D$  ist nicht beschränkt. Zwar ist die Ableitung  $\frac{d}{dx}$  wegen der  $H$ -Beschränktheit leicht zu kontrollieren, das geht jedoch für die Multiplikation mit  $x$  nicht mehr so leicht. Wir werden daher mittels eines Abschnitts regulieren müssen, was die Berechnungen erschwert. Da das Abstoß-Verhalten von  $V$  mit der Ableitung  $\frac{dV}{dr} \leq 0$  zusammenhängt, ist die Ableitung in  $D$  wichtiger als  $x$  – der Abschnitt von  $x$  wird daher die Eigenschaft  $i[A, H] \geq 0$  nicht zerstören.

**theorem:8.25**

SATZ 8.25 (Lavine). Sei  $H_0 = -\Delta$  auf  $L^2(\mathbb{R}^m)$  mit  $m \geq 3$  und  $V$  eine Funktion auf  $\mathbb{R}^m$ , sodass

- (i) der Multiplikationsoperator mit  $V$  relativ  $H_0$ -beschränkt ist mit relativer Schranke gleich Null und
- (ii) die schwache Ableitung  $\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial V}{\partial x_i}$  negativ ist, das heißt das Potential fällt aus allen Richtungen gleichmäßig ab.

Dann hat  $H = -\Delta + V$  rein absolut stetiges Spektrum.

BEWEIS. Wir wählen zunächst  $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}$  und definieren  $g(r) := \int_0^r (1 + \rho^2)^{-\alpha} d\rho$ . Sei  $A$  der durch

$$Af = i \sum_{k=1}^m \left[ x_k \frac{g(r)}{r} \frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( x_k \frac{g(r)f}{r} \right) \right] \quad (8.42)$$

definierte Operator. Da  $\frac{g(r)}{r} \in C^\infty$ , bildet  $A$  den Raum  $C_0^\infty$  in sich selbst ab. Würde man in obiger Definition  $g(r)$  durch  $r$  ersetzen, so wäre  $A$  der Erzeuger von Dilatationen.  $A$  ist also eine „abgeschnittene Version“ dieses Erzeugers. In der Tat hat  $A$  eine direkte geometrische Bedeutung, denn sei  $T_\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch die Bedingungen  $T_0(x) = x$  und  $y(\gamma) = T_\gamma x$  löst die Gleichung  $\dot{y} = \frac{g(|y|)}{|y|} y$ , definiert. Dann ist

$$(e^{-i\gamma A} f)(x) = N_\gamma(x) f(T_\gamma x), \quad (8.43)$$

wobei  $N_\gamma(x)$  ein Normierungsfaktor ist, nämlich die Wurzel der Jacobi-Determinante.

Unser erstes Ziel ist es zu zeigen, dass es  $c > 0$  gibt, sodass

$$i[A, H] \geq c(1 + r^2)^{-\alpha-1} \quad (8.44)$$

in demm Sinne, dass für alle  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  gilt, dass

$$i(A\varphi, H\varphi) - i(H\varphi, A\varphi) \geq c(\varphi, (1 + r^2)^{-1-\alpha}\varphi). \quad (8.45)$$

Wir berechnen dafür zunächst

$$\begin{aligned} i(A\varphi, V\varphi) - i(V\varphi, A\varphi) &= 2\operatorname{Re} \sum_{i=1}^m \int V(x) \left[ \overline{\varphi(x)} \left\{ \frac{x_i}{r} g(r) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{x_i}{r} g(r) \right) \right\} \right] dx \\ &= 2 \int V(x) \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{g(r)}{r} |\varphi(x)|^2 \right) dx \geq 0 \end{aligned} \quad (8.46)$$

wegen der zweiten Annahme. Wir müssen daher den Kommutator nur für den Fall  $V = 0$  nach unten abschätzen.

Zunächst beweisen wir folgende punktweisen Schranken an  $g$  und seine Ableitungen:

$$rg'(r) - g(r) \leq 0 \quad (8.47a)$$

$$g''(r) = -2\alpha r(1+r^2)^{-\alpha-1} \quad (8.47b)$$

$$g'''(r) + \frac{2\alpha+1}{r}g''(r) \leq 0. \quad (8.47c)$$

Um die erste Abschätzung zu beweisen bemerken wir, dass, da  $(1+r^2)^{-\alpha-1}$  monoton fällt, der Mittelwert  $\frac{g(r)}{r} = r^{-1} \int_0^r (1+\rho^2)^{-\alpha} d\rho$  ebenfalls monoton fällt. Die Ungleichung folgt dann aus  $rg' - g = r^2(r^{-1}g)'$ . Die anderen zwei Ungleichungen folgen aus expliziten Berechnungen

$$g''(r) = -2\alpha r(1+r^2)^{-\alpha-1}, \quad (8.48a)$$

$$g'''(r) + \frac{2\alpha+1}{r}g''(r) = -4\alpha(\alpha+1)(1+r^2)^{-\alpha-2}. \quad (8.48b)$$

Als Nächstes zeigen wir

$$-\Delta \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_j}{\partial x_j} \right) \geq c(1+r^2)^{-\alpha-1}, \quad (8.49)$$

wobei  $g_j(x) := x_j \frac{g(r)}{r}$ . Wir berechnen

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_k} = r^{-1}g(\delta_{jk} - r^{-2}x_j x_k) + r^{-2}x_j x_k g', \quad (8.50a)$$

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial g_j}{\partial x_j} = (n-1)r^{-1}g + g'. \quad (8.50b)$$

Da für sphärisch symmetrische Funktionen  $h$  gilt, dass

$$\Delta h = r^{-1}(rh)'' + \frac{n-3}{r}h' \quad (8.51)$$

ist, finden wir, dass

$$-\Delta \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_j}{\partial x_j} \right) = - \left( g''' + \frac{2\alpha+1}{r}g'' \right) - \frac{2n-2\alpha-3}{r}g'' = - \frac{(n-1)(n-3)}{r^3}(rg' - g). \quad (8.52)$$

Aus den Ungleichungen für die Ableitungen von  $g$  folgt wegen  $n \geq 3$  und  $\alpha < \frac{3}{2}$  dann  $-\Delta \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_j}{\partial x_j} \right) \geq c(1+r^2)^{-\alpha-1}$ .

Schließlich zeigen wir für  $C_0^\infty$ -Funktionen

$$- \left[ g_k \frac{\partial}{\partial x_k}, H_0 \right] = \sum_{i=1}^m \left[ g_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right] = \sum_{i=1}^m 2p_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i} p_k + i \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i^2} p_k, \quad (8.53)$$

wobei  $p_k = -i\partial_{x_k}$  ist. Mit

$$- \left[ g_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} g_k, H_0 \right] = - \left[ g_k \frac{\partial}{\partial x_k}, H_0 \right] - \left[ g_k \frac{\partial}{\partial x_k}, H_0 \right]^* \quad (8.54)$$

sieht man, dass

$$i[A, H_0] = \sum_{i,k} 2p_k \left( \frac{\partial g_i}{\partial x_k} + \frac{g_k}{x_i} \right) p_i - \Delta \left( \sum_j \frac{\partial g_j}{\partial x_j} \right). \quad (8.55)$$

Wegen  $-\Delta \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_j}{\partial x_j} \right) \geq c(1+r^2)^{-\alpha-1}$  müssen wir lediglich

$$\sum_{i,k} 2p_k \left( \frac{\partial g_i}{\partial x_k} + \frac{g_k}{x_i} \right) p_i \geq 0 \quad (8.56)$$

beweisen, um  $i[A, H] \geq c(1+r^2)^{-\alpha-1}$  zu zeigen. Die linke Seite ist, nach unserer Bestimmung von  $\frac{\partial g_j}{\partial x_k}$ ,

$$4 \sum_{i,k} \{ p_k [(r^{-1}g)(\delta_{ik} - r^{-2}x_i x_k)] p_i + p_k (r^{-2}g') x_i x_k p_i \}. \quad (8.57)$$

Für fixes  $x \in \mathbb{R}^m$  ist wegen Cauchy-Schwarz die Matrix  $\delta_{ik} - \frac{x_i x_k}{r^2}$  positiv definit. Außerdem ist  $\{ \frac{x_i x_k}{r^2} \}$  offensichtlich positiv definit, was unsere erste Zwischenbehauptung zeigt.

Als Nächstes zeigen wir, dass  $A$  infinitesimal  $H$ -beschränkt ist. Da wegen der ersten Annahme bereits  $V$  infinitesimal  $H_0$  beschränkt ist, müssen wir lediglich zeigen, dass  $A$  infinitesimal  $H_0$ -beschränkt ist. Dies folgt aber sofort aus  $\partial_{x_i} \ll H_0$ ,  $\frac{x_i}{r} g$  ist beschränkt und

$$A = 2i \sum_{i=1}^m \frac{x_i}{r} g \frac{\partial}{\partial x_i} + i \frac{n-1}{r} g + ig'. \quad (8.58)$$

Da  $C_0^\infty$  ein determinierender Bereich für  $H$  ist und  $A \ll H$  ist, gilt  $i[A, H] \geq c(1+r^2)^{-\alpha-1}$  für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(H)$ .

Sei nun  $\varphi \in \mathcal{D}(H)$  und  $B$  der Multiplikationsoperator mit  $c^{1/2}(1+r^2)^{-(\alpha+1)/2}$ . Dann behaupten wir, dass es ein  $d > 0$  gibt, sodass

$$\int_{\mathbb{R}} \|B e^{-itH} \varphi\|^2 dt \leq d \|(H + \text{id})\varphi\|^2, \quad (8.59)$$

das heißt  $B(H + \text{id})^{-1}$  ist  $H$ -glatt. Die folgt aber aus der unteren Schranke des Kommutators  $i[A, H]$ , denn

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \|B e^{-itH} \varphi\|^2 dt &= \int_{\mathbb{R}} (e^{-itH} \varphi, B^* B e^{-itH} \varphi) dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} i \{ (A e^{-itH} \varphi, H e^{-itH} \varphi) - (H e^{-itH} \varphi, A e^{-itH} \varphi) \} dt \\ &\leq 2 \sup_{-\infty < s < \infty} |(e^{-isH} \varphi, A e^{-isH} \varphi)| \\ &\leq 2 \|\varphi\| \| |A(H + \text{id})^{-1}| \| \|(H + \text{id})\varphi\| \end{aligned} \quad (8.60)$$

Der Beweis ist vollständig, da die Schranke an  $\int_{\mathbb{R}} \|B e^{-itH} \varphi\|^2 dt$  impliziert, dass  $B(H + \text{id})^{-1}$   $H$ -glatt ist. Da  $\text{Ran}(B^*)$  und  $\text{Ran}(H + \text{id})^{-1}$  dicht sind, ist der Abschluß von  $\text{Ran}[(H + \text{id})^{-1} B^*]$  gerade  $\mathcal{H}$ . Dies impliziert nach der allgemeinen Theorie aus Satz 8.10 wiederum  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_{ac}$ . Darum hat  $H$  rein absolut stetiges Spektrum.  $\square$

KOROLLAR 8.26. Sei  $m(N-1) \geq 3$ ,  $\tilde{H}_0 = \sum_{i=1}^N (-2\mu_i)^{-1} \Delta_i$  auf  $L^2(\mathbb{R}^{mN})$  und sei  $H_0$  gleich  $\tilde{H}_0$  mit abseparierter Schwerpunktsbewegung. Für  $1 \leq i, j \leq N$  sei  $V_{ij} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  und

- (i)  $V_{ij} \in L^p(\mathbb{R}^m) + L^\infty(\mathbb{R}^m)$  mit  $p = 2$ , wenn  $m \leq 3$ ,  $p > 2$ , wenn  $m = 4$  und  $p = m/2$ , wenn  $m \geq 5$  und
- (ii)  $\sum_{k=1}^m x_k \frac{\partial V_{ij}}{\partial x_k} \leq 0$  im distributionellen Sinne.

Dann hat  $H_0 + \sum_{1 \leq i < j \leq N} V_{ij}(x_i - x_j)$  auf  $L^2(\mathbb{R}^{m(N-1)})$  rein absolut stetiges Spektrum.

**8.3. Lokale  $H$ -Glattheit für abstoßende Potentiale.** Wir schließen diesen Abschnitt über  $H$ -glatte Potentiale mit der Bemerkung, dass Katos Satz <sup>ReedSimon1978</sup> 8.II „zu stark“ ist. Der Satz besagt, dass für hinreichend glatte Störungen die Operatoren  $H$  und  $H_0$  unitär äquivalent sind. Das bedeutet aber, dass der Satz nicht für Hamilton-Operatoren in der Atomphysik anwendbar ist, wo  $H$  bekanntermaßen (unendlich viele) Eigenwerte, und damit singuläres Spektrum hat. Aus diesem Grund schlug Lavine eine relaxierte, lokale Form der  $H$ -Glattheit vor.

DEFINITION 8.27. Sei  $H$  selbstadjungiert mit zugehöriger Spektralprojektion  $E_H$ . Ein Operator  $A$  heißt genau dann  $H$ -glatte auf  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ , wenn  $AE_H(\Omega)$  ein  $H$ -glatte Operator ist.

SATZ 8.28. Sei  $H$  selbstadjungiert mit Resolvente  $R$  und Spektralprojektion  $E_H$ . Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$  und  $\mathcal{D}(H) \subseteq \mathcal{D}(A)$ . Falls entweder

- a)  $\sup_{0 < |\epsilon| < 1, \lambda \in \Omega} |\epsilon| \|AR(\lambda + i\epsilon)\|^2 < \infty$  oder
- b)  $\sup_{0 < \epsilon < 1, \lambda \in \Omega} \|AR(\lambda + i\epsilon)A^*\| < \infty$ ,

dann ist  $A$  ein  $H$ -glatte Operator auf dem Abschluß  $\bar{\Omega}$ .

BEWEIS. Siehe <sup>ReedSimon1978</sup> [RS78, Theorem XIII.30]. □

SATZ 8.29. Seien  $H$  und  $H_0$  selbstadjungierte Operatoren mit Spektralprojektionen  $E_H$  und  $E_{H_0}$ . Angenommen,  $H - H_0 = A^*B$  im Sinne quadratischer Formen (mit  $\mathcal{D}(H) \subseteq \mathcal{D}(A)$  und  $\mathcal{D}(H_0) \subseteq \mathcal{D}(B)$ ), wobei  $A$  ein  $H$ -beschränkter und  $H$ -glatte Operator auf  $\Omega$  und  $B$  ein  $H_0$ -beschränkter und  $H_0$ -glatte Operator auf  $\Omega$  ist. Dann existieren die Grenzwerte

$$W_{\pm} = s - \lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{iHt} e^{-iH_0 t} E_{H_0}(\Omega) \quad \text{und} \quad \tilde{W}_{\pm} = s - \lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{iH_0 t} e^{-iHt} E_H(\Omega).$$

Darüberhinaus gelten

$$W_{\pm}^* = \tilde{W}_{\pm} \tag{8.61}$$

$$\tilde{W}_{\pm} W_{\pm} = E_{H_0}(\Omega) \quad \text{und} \quad W_{\pm} \tilde{W}_{\pm} = E_H(\Omega). \tag{8.62}$$

BEWEIS. Siehe <sup>ReedSimon1978</sup> [RS78, Theorem XIII.31]. □

KOROLLAR 8.30. Seien  $H$  und  $H_0$  selbstadjungierte Operatoren mit Spektralprojektionen  $E_H$  und  $E_{H_0}$ . Angenommen,  $H - H_0 = A^*B$  im Sinne quadratischer Formen, wobei  $A$  ein  $H$ -beschränkter und  $B$  ein  $H_0$ -beschränkter Operator ist. Seien  $\{\Omega_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$  offene, beschränkte Intervalle und  $S = \bigcup_i \Omega_i$ . Angenommen folgende Bedingungen sind erfüllt.

- (1)  $A$  ist ein  $H$ -glatte Operator auf jedem  $\Omega_i$  und  $B$  ist ein  $H_0$ -glatte Operator auf jedem  $\Omega_i$ .

(2) Sowohl  $\sigma(H) \setminus S$  als auch  $\sigma(H_0) \setminus S$  sind Lebesgue-Nullmengen. (Lediglich singuläres Spektrum von  $H$  und  $H_0$  wird nicht mitgenommen.)

Dann existieren die verallgemeinerten Wellenoperatoren  $s\text{-}\lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{iHt} e^{-iH_0 t} P_{H_0}^{ac}$  und sind vollständig.

Dieses Resultat kann sofort im Falle repulsiver Potentiale angewandt werden.

SATZ 8.31. Sei  $H$  ein Operator wie in Lavines Satz <sup>theorem:8.25</sup> 8.25. Angenommen jedes  $V_{ij}$  sei eine Funktion, die nur vom Abstand  $|x|$  abhängt und  $|V_{ij}(x)| \lesssim (1 + |x|)^{-5/2-\epsilon}$  für alle  $i, j$  und ein  $\epsilon > 0$  erfüllt. Dann existieren die Wellenoperatoren  $\Omega^\pm = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{iHt} e^{-iH_0 t}$  und sind unitär.

BEWEIS. Siehe <sup>ReedSimon1978</sup> [RS78, Theorem XIII.32]. □

### 9. Die Abwesenheit des singulär-stetigen Spektrums III: gewichtete $L^2$ -Räume

Wir haben bereits gesehen, dass, wenn es eine dichte Menge  $X \subseteq \mathcal{H}$  gibt, sodass  $(\varphi, (H - z)^{-1}\varphi)$  beschränkt für alle  $\varphi \in \mathcal{H}$  bleibt, wenn  $z \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ , dann  $\sigma_{sing}(H) = \emptyset$  ist. Es gibt einen natürlichen Weg diese Bedingung zu motivieren. Angenommen  $X \subseteq \mathcal{H}$  ist dicht und es gibt eine Norm  $\|\cdot\|_+$  auf  $X$ , sodass  $X$  ein Banachraum wird und  $\|\varphi\|_+ \geq \|\varphi\|$  für alle  $\varphi \in X$  erfüllt. Das innere Produkt auf  $\mathcal{H}$  erlaubt es dann  $\mathcal{H}$  als Teilmenge des Dualraums  $X^*$  von  $X$  aufzufassen. Sei  $\|\cdot\|_-$  die Norm auf  $X^*$ , dann ist  $\|\varphi\| \geq \|\varphi\|_-$  für alle  $\varphi \in \mathcal{H}$ . Sei nun  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\text{Im}(z) \neq 0$  und  $H$  beschränkt und selbstadjungiert auf  $\mathcal{H}$ . Dann bildet  $(H - z)^{-1} \mathcal{H}$  in sich selbst ab und daher  $X$  in  $X^*$ . Zwar divergiert  $\|(H - z)^{-1}\|$  als Abbildung auf  $\mathcal{H}$ , wenn  $z$  gegen das Spektrum läuft, aber wir können uns fragen, was passiert, wenn die Norm, verstanden als Abbildung von  $X$  nach  $X^*$  beschränkt bleibt. Dann ist

$$|(\varphi, (H - z)^{-1}\varphi)| \leq \|\varphi\|_+^2 \|(H - z)^{-1}\|_{+,-}, \quad (9.1)$$

wobei

$$\|A\|_{+,-} := \sup_{0 \neq \psi \in X} \frac{\|A\psi\|_-}{\|\psi\|_+}. \quad (9.2)$$

Wir können daher mit Satz <sup>theorem:3.59</sup> 7.4  $\sigma_{sc}(H) = \emptyset$  folgern.

Wir können nun natürlich probieren diese Idee mit Störungstheorie zu verbinden. Wir betrachten also den Schrödingeroperator  $H = H_0 + V = -\Delta + V$  und versuchen allgemeine Schranken an die Resolvente als Abbildung von  $X$  nach  $X^*$  zu erhalten. Um unsere Wahl von  $X$  zu motivieren, beginnen wir mit  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  und betrachten

$$\begin{aligned} & \lim_{y \searrow 0} (f, [(-\Delta - x + iy)^{-1} - (-\Delta - x - iy)^{-1}]f) \\ &= \lim_{y \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 \cdot 2i \text{Im}[(\xi^2 - x + iy)^{-1}] d\xi \\ &= -2\pi i \int |\hat{f}(\xi)|^2 \delta(\xi^2 - x) d\xi. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Hierbei haben wir

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{x - x_0 + i\epsilon} = \mathcal{P} \left( \frac{1}{x - x_0} \right) - i\pi \delta(x - x_0), \quad (9.4)$$

wobei

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right) : f \mapsto \lim_{\substack{\searrow 0 \\ |x| \geq \epsilon}} \int \frac{f(x)}{x} dx \quad (9.5)$$

für  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  verwendet. Damit also  $(f, (-\Delta - x + iy)^{-1}\varphi)$  für  $y \searrow 0$  einen Grenzwert hat, muss  $\hat{f}$  eine „natürliche“ Einschränkung auf die Sphäre vom Radius  $x^{1/2}$  haben. Es ist daher natürlich  $X$  als einen  $L^2_\delta$ -Raum (mit  $\delta > 1/2$ ) und daher  $X^*$  als  $L^2_{-\delta}$ -Raum zu wählen, wobei

$$L^2_\delta(\mathbb{R}^n) = \left\{ f(x) : \|f\|_\delta^2 := \int (1+x^2)^\delta |f(x)|^2 dx < \infty \right\} \quad (9.6)$$

ist. Wir werden folgende zwei Spurlemmata häufig brauchen.

**SATZ 9.1.** *Sei  $M$  eine regulär eingebettete, kompakte Untermannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$  mit Kodimension  $k$ , die durch  $k$  glatte Funktionen  $F_1, \dots, F_k \in C^\infty$ . Sei  $\omega$  das natürlich induzierte Maß auf  $M$  und  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Dann gelten folgende Aussagen.*

- Sei  $T_M f$  die Einschränkung von  $f$  auf  $M$ . Dann gibt es für alle  $m > k - 1/2$  eine Konstante  $C$  (die nicht von  $f$  abhängt), sodass  $\|T_M f\|_{L^2(M, d\omega)} \leq C \|f\|_{H^m}$ , das heißt  $T_M$  setzt sich eindeutig zu einer beschränkten Abbildung vom Sobolevraum  $H^m(\mathbb{R}^n)$  nach  $L^2(M, d\omega)$  fort.
- Sei  $f \in L^2(M, d\omega)$  und definiere

$$(\mathcal{F}_M f)(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_M e^{-ix \cdot \lambda} f(x) d\omega. \quad (9.7)$$

Dann ist

- $\mathcal{F}_M f$  die Fouriertransformierte der temperierten Distributionen auf  $\mathbb{R}^n$ ,
- $\mathcal{F}_M f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  und
- $\mathcal{F}_M f \in L^2_m(\mathbb{R}^n)$  für alle  $m < -k + 1/2$ .

**SATZ 9.2.** *Sei  $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}^n)$  für ein  $\alpha > 1/2$  und nimm an, dass die Einschränkung von  $\hat{f}$  auf die Sphäre vom Radius  $\lambda^{1/2}$  die Nullfunktion ist. Dann ist für alle  $\epsilon > 0$*

$$B_\lambda f := \mathcal{F}^{-1} \left( (\xi^2 - \lambda)^{-1} \hat{f} \right) \in L^2_{\alpha-1-2\epsilon} \quad (9.8)$$

Darüberhinaus gibt es für alle  $\epsilon, \lambda > 0, \alpha > 1/2$  eine Konstante  $C$ , sodass

$$\|B_\lambda f\|_{\alpha-1-2\epsilon} \leq C \|f\|_\alpha \quad (9.9)$$

für alle  $f \in L^2_\alpha(\mathbb{R}^n)$ , sodass  $\hat{f}$  auf  $S_{\lambda^{1/2}}^{n-1}$  verschwindet.  $C$  bleibt beschränkt, wenn  $\lambda$  auf Kompakta von  $(0, \infty)$  variiert.

**DEFINITION 9.3 (Agmon-Potential).** Ein Multiplikationsoperator  $V$  heißt *Agmon-Potential*, wenn  $V(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}-\epsilon} W(x)$  für ein  $\epsilon > 0$  und relativ  $-\Delta$ -kompaktes  $W$ .

**LEMMA 9.4.** *Die Menge aller Agmon-Potentiale formen einen Vektorraum von  $-\Delta$ -beschränkten Störungen mit relativer Schranke gleich Null.*

**LEMMA 9.5.** *Seien  $n/2 < p < \infty$  und  $p \geq 2$ . Falls  $W \in L^p(\mathbb{R}^n)$  oder  $W \in L^\infty_0$  (also beschränkt und im Unendlichen abfallend), dann ist  $W$  relativ  $-\Delta$ -kompakt.*

BEWEIS. Die erste Aussage folgt aus der Seiler–Simon-Ungleichung (die  $p \geq 2$  benötigt wegen Interpolation mit Hilbert–Schmidt)

$$\|V(-\Delta + 1)^{-1}\|_p \leq \|V\|_p \|(\xi^2 + 1)^{-1}\|_p.$$

(Insbesondere für  $p = 2$  mit  $2n - 4 < n$  (also  $n = 1, 2, 3$ ) folgt dies aus

$$\begin{aligned} \|V(-\Delta + 1)^{-1}\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} dy |V(x)|^2 \left| \int_{\mathbb{R}^n} d\xi e^{i\xi \cdot (x-y)} (\xi^2 + 1)^{-1} \right|^2 \\ &\sim \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} dy \frac{|V(x)|^2 e^{-2|x-y|}}{|x-y|^{2(n-2)}}. \end{aligned}$$

Für die Zweite approximieren wir  $W$  durch  $W_R(x) := W(x)\mathbf{1}_{B_0(R)}(x) \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty$  (für alle  $p \in [1, \infty]$ ), das heißt  $W_R$  ist bereits  $-\Delta$ -kompakt und insbesondere ist  $W_R(-\Delta + 1)^{-1} \in \mathcal{S}^p$  für  $p > n/2$ . Da  $W_R(-\Delta + 1)^{-1} \rightarrow W(-\Delta + 1)^{-1}$  in Operatornorm konvergiert (da  $\|W - W_R\|_\infty \rightarrow 0$ , da  $W$  im Unendlichen verschwindet), folgt die Aussage.  $\square$

BEISPIEL 9.6. Sei  $n/2 < p < \infty$ ,  $p \geq 2$  und  $V \in L^p(\mathbb{R}^n)$ . Dann ist jedes  $V$  mit  $(1 + x^2)^{\frac{1}{2} + \epsilon} V \in L^p(\mathbb{R}^n)$  ein Agmon Potential.

BEISPIEL 9.7. Sei  $W \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , dann ist  $U(x) := (1 + x^2)^{-\epsilon/2} W(x) \in L^p + (L^\infty)_\epsilon$  für alle  $p$  und somit insbesondere relativ  $-\Delta$ -kompakt (wegen vorigem Lemma). Somit ist  $V(x) := (1 + x^2)^{-\frac{1}{2} - \epsilon} W(x) = (1 + x^2)^{-1/2 - \epsilon/2} U(x)$  ein Agmon-Potential.

Folgendes Resultat ist die Kombination der Arbeiten von Agmon <sup>[Agmon1975]</sup>, Kato <sup>[Kat70]</sup> und Kato–Kuroda <sup>[KK70, KK71]</sup>. (Das Grenzwertabsorptionsprinzip und die Abwesenheit von  $\sigma_{sc}(H)$  wurde von Agmon gezeigt. (Damit könnte es nur eine diskrete Menge positiver Eigenwerte geben.) Die Existenz und Vollständigkeit der Wellenoperatoren wurde bereits von Kato und Kato–Kuroda gezeigt. Dies zeigte  $\sigma_{ac}(H) = [0, \infty)$ , schließt jedoch noch keine eingebetteten Eigenwerte aus! Dazu verwendet man ein Theorem von Kato, siehe bspw. Yafaev <sup>[Yaf10]</sup>, Kapitel 6, Theorem 1.1], welches besagt, dass es keine positiven Eigenwerte geben kann, wenn  $|V(x)| \lesssim \langle x \rangle^{-1-\epsilon}$ . Katos Theorem verwendet ein unique continuation theorem.)

SATZ 9.8 (Agmon–Kato–Kuroda). *Sei  $V$  ein Agmon-Potential und  $H = H_0 + V = -\Delta + V$ . Dann gilt:*

- Die Menge  $\mathcal{E}_+$  aller positiven Eigenwerte von  $H$  ist eine diskrete Teilmenge von  $(0, \infty)$  und jeder Eigenwert hat endliche Multiplizität.
- Sei  $C$  ein beliebiges, kompaktes Teilintervall von  $(0, \infty) \setminus \mathcal{E}_+$  und  $\delta > 1/2$ , dann ist

$$\sup_{\lambda \in C, 0 < y < 1} \sup_{\psi, \varphi \in L^2_\delta: \|\varphi\|_\delta \leq 1, \|\psi\|_\delta \leq 1} |(\psi, (H - \lambda - iy)^{-1} \varphi)| < \infty. \quad (9.10)$$

- $\sigma_{sc}(H) = \emptyset$ .
- Die Wellenoperatoren  $\Omega^\pm(H, H_0)$  existieren und sind vollständig.

Der Beweis von Agmons Theorem beruht auf dem klassischen Spurlemma

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} \lesssim \|f\|_{L^{2,\sigma}(\mathbb{R}^d)}$$

für  $\sigma > 1/2$ . (Wir erinnern an den formalen Grenzwert

$$\frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Im}((-\Delta - \lambda - i\epsilon)^{-1}) = dE_{-\Delta}(\lambda) = \frac{1}{2} \lambda^{(d-2)/2} R_{\sqrt{\lambda}\mathbb{S}^{d-1}}^* R_{\sqrt{\lambda}\mathbb{S}^{d-1}} d\lambda,$$

wobei  $R_S$  den Fourier-Restriktionsoperator auf eine Hyperfläche  $S$  bezüglich des euklidischen Flächenmaßes bezeichnet.) Andererseits gilt folgende Fourier-Restriktionsabschätzung von Stein [\[Ste86, Tom79\]](#) und Tomas [\[Tom75\]](#), nämlich

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} \lesssim \|f\|_{L^{\frac{2(d+1)}{d+3}}(\mathbb{R}^d)}.$$

Darauf aufbauend haben Ionescu und Schlag [\[IonescuSchlag2006, Theorem 1.3\]](#) folgendes Resultat bewiesen, welches insbesondere die Abwesenheit positiver Eigenwerte zeigt.

SATZ 9.9 (Ionescu–Schlag [\[IonescuSchlag2006\]](#)). Sei  $V$  eine zulässige Störung nach [\[IonescuSchlag2006, S. 402\]](#). Dann gelten folgende Aussagen.

- (1)  $H = -\Delta + V$  ist auf  $\mathcal{D}(H) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^d) : Hu \in L^2\}$  von unten beschränkt.
- (2) Die Menge der von Null verschiedenen Eigenwerte  $\mathcal{E} = \sigma_{pp} \setminus \{0\}$  von  $H$  ist diskret in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Insbesondere hat jeder Eigenwert in  $\mathcal{E}$  endliche Multiplizität.
- (3) Jede Eigenfunktion  $u$ , die zu einem Eigenwert  $\lambda \neq 0$  gehört, fällt schnell ab, in dem Sinne, dass für alle  $\mathbb{N} \ni N \geq 0$ ,

$$(1 + |x|)^N u \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

- (4) Abseits der Eigenwerte hat man ein Grenzabsorptionsprinzip. Sei  $I \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathcal{E}$  kompakt, dann gilt

$$\sup_{\lambda \in I, 0 < |\epsilon| \leq 1} \|(-\Delta + V - \lambda - i\epsilon)^{-1}\|_{X \rightarrow X^*} \lesssim_{d,V,I} 1,$$

wobei  $X$  und  $X^*$  in [\[IonescuSchlag2006, S. 400\]](#) definiert sind. Insbesondere ist das Spektrum in  $I$  absolut stetig.

- (5)  $\sigma_{sc}(H) = \emptyset$  und  $\sigma_{ac}(H) = [0, \infty)$ , das heißt, es gibt (wegen b)) keine eingebetteten Eigenwerte.
- (6) Die Wellenoperatoren  $\Omega^\pm(H, H_0) = s\text{-}\lim_{t \pm \infty} e^{-itH} e^{itH_0}$  (mit  $H_0 = -\Delta$ ) existieren und sind vollständig (sprich  $\text{ran}(\Omega^\pm) = \mathcal{H}^{ac}(H)$ ). Insbesondere sind  $H^{ac}$  und  $H_0^{ac}$  unitär äquivalent. (Die Existenz, sprich  $\text{ran}(\Omega^\pm) \subseteq \mathcal{H}^{ac}(H)$ , ist für den Beweis von  $[0, \infty) \subseteq \sigma_{ac}(H)$ , und damit für die Abwesenheit positiver Eigenwerte, entscheidend.)

Für die Abwesenheit eingebetteter Eigenwerte benötigt man normalerweise unique continuation Theoreme. Siehe dazu Goldberg–Schlag [\[GS04\]](#), welche das unique continuation theorem von Ionescu–Jerison [\[IJ03\]](#) (siehe auch Koch–Tataru [\[KT06\]](#)) verwendeten. Siehe auch das klassische Theorem von Kato (siehe Yafaev [\[Yaf10, Kapitel 6, Theorem 1.1\]](#)), welches so ein Theorem verwendet, um  $|V(x)| \lesssim \langle x \rangle^{-1-\epsilon}$  als hinreichende Bedingung für die Abwesenheit positiver Eigenwerte zu zeigen. Die klassische Theorie zur Abwesenheit positiver Eigenwerte wird in Abschnitt [\[4\]](#) behandelt.

BEMERKUNG 9.10. Die Strategie, um zu zeigen, dass  $\sigma_{ac}(H) = [0, \infty)$  ist, wenn man auf Grenzabsorptionsprinzipien (limap) baut, wie folgt. Für einen konkreten Beweis, siehe bspw. Ionescu–Schlag [\[IonescuSchlag2006, S. 427–431\]](#).

- (1) Zeige, dass die Menge der (positiven) Eigenwerte von  $H$  diskret ist, siehe [\[IonescuSchlag2006, S. 427–428\]](#).
- (2) Zeige ein limap auf allen Intervallen abseits der Eigenwerte, siehe [\[IonescuSchlag2006, S. 428\]](#). Daraus folgt, dass auf diesen Intervallen  $\sigma(H)$  absolut stetig ist.

Insbesondere folgt  $\sigma_{sc}(H) = \emptyset$ , da das limap lediglich bei den Eigenwerten fehlschlägt, diese aber keine Träger von  $\mu_{sc}$  sind, siehe ebenfalls [LionscuSchlag2006, S. 428].

- (3) Zeige die Existenz und Vollständigkeit der (verallgemeinerten) Wellenoperatoren  $\Omega^\pm = s - \lim_{t \pm \infty} e^{-itH} e^{itH_0} P_{H_0}^{ac}$ . (Falls  $\sigma(H_0) = \sigma_{ac}(H_0)$  rein absolut stetig ist, kann  $P_{H_0}^{ac}$  weggelassen werden.) Aus der Vollständigkeit folgt  $\text{ran}(\Omega^\pm) = \mathcal{H}^{ac}(H)$  und insbesondere, dass  $H^{ac}$  und  $H_0^{ac}$  unitär äquivalent sind. Falls  $\sigma_{ac}(H_0) = [0, \infty)$ , folgt also insbesondere  $\sigma_{ac}(H) = [0, \infty)$ . Die Existenz und Vollständigkeit wird mit Hilfe des Grenzwertabsorptionsprinzips und Katos Glattheitstheorie (siehe Abschnitt 8) gezeigt, siehe [LionscuSchlag2006, S. 428-431].
- (4) Um die Abwesenheit positiver Eigenwerte zu zeigen, verwendet man bspw. unique continuation theoreme; eine Anwendung solcher Theoreme ist Katos Theorem (Yafaef [Yaf10, Kapitel 6, Theorem 1.1], welches besagt, dass es keine positiven Eigenwerte gibt, wenn  $|V(x)| \lesssim \langle x \rangle^{-1-\epsilon}$ ).

### 10. Die Abwesenheit des singulär-stetigen Spektrums IV: dilatationsanalytische Potentiale

Bisher haben wir die Abwesenheit des singulär-stetigen Spektrums für drei Typen von Schrödinger-Operatoren bewiesen:

- (1) eine große Klasse von Zwei-Körper-Operatoren,
- (2) schwach gekoppelte  $N$ -Teilchen-Systeme und
- (3)  $N$ -Teilchen-Systeme mit repulsiven Potentialen.

Die gemeinsame Eigenschaft dieser Systeme war, dass sie nur einen einzigen Streukanal hatten, die Subsysteme also keine gebundenen Zustände hatten. In diesem letzten Abschnitt beweisen wir die Abwesenheit des singulär-stetigen Spektrums für  $N$ -Teilchen-Systeme ( $n \geq 3$ ), die mehrere Streukanäle aufweisen. Die Klasse der Wechselwirkungen, die wir damit beschreiben können ist zwar sehr klein, doch sie umfasst das Coulomb- und verallgemeinerte Yukawa-Potentiale.

DEFINITION 10.1 (Gruppe der Dilatationsoperatoren). Die Gruppe  $u(\theta)$  der unitären Operatoren auf  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , die durch

$$(u(\theta)\psi)(x) = e^{3\theta/2}\psi(e^\theta x) \tag{10.1}$$

gegeben ist, heißt *Gruppe der Dilatationsoperatoren*.

Die Idee, Dilatationen zu verwenden ist, dass die kinetische Energie  $-\Delta$  sich sehr einfach unter Dilatationen transformiert, nämlich

$$u(\theta)H_0u(\theta)^{-1} = e^{-2\theta}H_0 \equiv H_0(\theta). \tag{10.2}$$

Der letzte Ausdruck impliziert, dass  $u(\theta)H_0u(\theta)^{-1}$ , welcher a priori nur für  $\theta \in \mathbb{R}$  definiert ist, eine analytische Fortsetzung auf die komplexe Ebene besitzt. Wir werden also nur Potentiale  $V$  zulassen, sodass sich  $H_0 + V$  wie  $H_0$  unter Dilatationen transformiert. Wir werden weiter unten sehen, dass  $\sigma_{disc}(H(\theta))$  „lokal“ nicht von  $\theta$  abhängt. Das wesentliche Spektrum wird sich allerdings ändern, wenn wir  $\theta$  variieren, denn  $\sigma(H_0(\theta)) = \{z : \arg z = -2\text{Im}(\theta)\}$ . Dies erlaubt uns das stetige Spektrum von der reellen Achse abzuseparieren.

LEMMA 10.2. Sei  $H_0$  ein positiver, selbstadjungierter Operator und  $V$  ein symmetrischer Operator mit  $\mathcal{D}(H_0) \subseteq \mathcal{D}(V)$ . Ist der Operator  $V(H_0 + \text{id})^{-1}$  kompakt, so ist auch  $(H_0 + \text{id})^{-1/2}V(H_0 + \text{id})^{-1/2}$  kompakt.

BEWEIS. Mittels Interpolation.  $\square$

DEFINITION 10.3 (Dilatationsanalytische Potentiale). Sei  $\alpha > 0$ . Wir sagen, dass eine quadratische Form  $V$  auf  $L^2(\mathbb{R}^3)$  genau dann zur Klasse  $\mathcal{F}_\alpha$  gehört, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

- (i)  $V$  ist eine symmetrische Form mit  $\mathcal{Q}(H_0) \subseteq \mathcal{Q}(V)$ , wobei  $H_0 = -\Delta$ .
- (ii)  $(H_0 + \text{id})^{-1/2}V(H_0 + \text{id})^{-1/2}$  ist kompakt.
- (iii) Die Familie der Operatoren

$$F(\theta) := (H_0 + \text{id})^{-1/2}(u(\theta)Vu(\theta)^{-1})(H_0 + \text{id})^{-1/2}, \quad (10.3)$$

die für  $\theta \in \mathbb{R}$  definiert ist, lässt sich zu einer analytischen, beschränkten, operatorwertigen Funktion auf dem Streifen  $B_\alpha = \{\theta : |\text{Im}(\theta)| < \alpha\}$  fortsetzen. Hierbei ist  $V(\theta) \equiv u(\theta)Vu(\theta)^{-1}$  als Form zu verstehen, das heißt  $V(\theta)(\psi, \varphi) = V(u(-\theta)\psi, u(-\theta)\varphi)$ .

Die Menge  $\bigcup_{\alpha > 0} \mathcal{F}_\alpha$  heißt die Familie der dilatationsanalytischen Potentiale.

Hat  $F(\theta)$  eine Fortsetzung auf den abgeschlossenen Streifen  $\{\theta : |\text{Im}(\theta)| \leq \alpha\}$ , die analytisch im Innern und Norm-stetig bis zum Rand ist, so sagen wir, dass  $V$  zur Klasse  $\overline{\mathcal{F}}_\alpha$  gehört.

theorem:3.101

SATZ 10.4. Sei  $V \in \mathcal{F}_\alpha$  und  $H_0 = -\Delta$ . Für  $\theta \in B_\alpha$  sei  $H_0(\theta) = e^{-2\theta}H_0$ . Wir definieren die quadratische Form  $H(\theta) = H_0(\theta) + V(\theta)$  auf  $\mathcal{Q}(H_0)$  als die Summe der Formen  $H_0(\theta)$  und  $V(\theta)$ . Dann gilt:

- a)  $H(\theta)$  ist für alle  $\theta \in B_\alpha$  eine  $m$ -sektorielle Form, das heißt für alle  $\epsilon$  gibt es ein  $z_0$ , sodass

$$S_{z_0, \text{Im}\theta, \epsilon} = \{\omega : 2\text{Im}\theta - \epsilon < \arg(\omega - z_0) < 2\text{Im}\theta + \epsilon\} \quad (10.4)$$

ein Sektor von  $H(\theta)$  ist, das heißt der numerische Wertebereich von  $H(\theta)$  liegt in diesem Sektor.

- b)  $H(\theta)$  ist eine analytische Familie vom Typ (B) im Gebiet  $B_\alpha$ .
- c) Für alle reellen  $\varphi$  ist  $u(\varphi)H(\theta)u(\varphi)^{-1} = H(\theta + \varphi)$ .

BEWEIS. a) Sei  $A(\theta) := e^{2\theta}H(\theta) = H_0 + e^{2\theta}V$ . Da  $H_0$  selbstadjungiert und  $e^{2\theta}V$  eine formbeschränkte Störung von  $V$  mit Formschranke gleich Null ist (da  $(H_0 + \text{id})^{-1/2}V(H_0 + \text{id})^{-1/2}$  kompakt ist, man erinnere sich hier an das Korollar zu Weyls Satz 4.16), gibt es für alle  $\delta$  ein  $b$ , sodass

$$|(\varphi, e^{2\theta}V(\theta)\varphi)| < \delta(\varphi, (H_0 + b)\varphi). \quad (10.5)$$

Setzen wir nun  $\epsilon = \arcsin(\delta)$ , so ist  $\arg[(\varphi, (H_0 + e^{2\theta}V + b)\varphi)] < \epsilon$ .

- b) Offensichtlich ist  $A(\theta)$  analytisch vom Typ (B), deshalb ist auch  $H(\theta)$  analytisch vom Typ (B).
- c) Fixiere  $\varphi \in \mathbb{R}$  und bemerke, dass  $u(\varphi)H(\theta)u(\varphi)^{-1}$  und  $H(\theta + \varphi)$  analytisch in  $B_\alpha$  sind und sogar gleich, wenn auch  $\theta \in \mathbb{R}$ .

$\square$

Es gibt auch eine Version von dilatationsanalytischen Potentialen im Operator-Sinne.

DEFINITION 10.5. Ein Operator  $V$  auf  $L^2(\mathbb{R}^3)$  ist genau dann in der Klasse  $\mathcal{C}_\alpha$ , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

- (i)  $V$  ist symmetrisch mit  $\mathcal{D}(H_0) \subseteq \mathcal{D}(V)$ , wobei  $H_0 = -\Delta$ .
- (ii)  $V(H_0 + \text{id})^{-1}$  ist kompakt.
- (iii) Die Familie der Operatoren  $\tilde{F}(\theta) := u(\theta)Vu(\theta)^{-1}(H_0 + \text{id})^{-1}$ , die für  $\theta \in \mathbb{R}$  definiert ist, lässt sich zu einer analytischen, operator-wertigen Funktion auf dem Streifen  $\{\theta : \text{Im}\theta < \alpha\}$  fortsetzen.

SATZ 10.6. Es gilt  $\mathcal{C}_\alpha \subseteq \mathcal{F}_\alpha$  für alle  $\alpha > 0$ .

Wir widmen uns nun einigen Beispielen.

BEISPIEL 10.7. Sei  $V$  ein Zentralpotential, welches durch eine reellwertige Funktion  $V(r)$  gegeben ist. Dann ist  $V(\theta)$  für  $\theta \in \mathbb{R}$  der Multiplikationsoperator mit der Funktion  $V(e^\theta r)$ . Ist  $V(r)$  die analytische Fortsetzung  $V(z)$  auf dem Sektor  $\{z : |\arg z| < \alpha\}$  mit

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty, |\arg z| < \beta} V(z) = 0$$

und

$$\sup_{0 < |\varphi| < \beta} \int_{|x|, |x'| \leq 1} \frac{|V(e^{i\varphi} x)| |V(e^{i\varphi} x')|}{|x - x'|^2} dx dx' < \infty$$

für alle  $\beta < \alpha$ , so ist  $V$  dilatationsanalytisch.

Insbesondere ist  $V(\theta)$  für alle  $\theta \in B_\alpha$  der Multiplikationsoperator mit  $V(e^\theta r)$ , welcher in  $R + (L^\infty)_\epsilon$  ist. Das Coulomb-Potential  $\frac{1}{|\cdot|}$  ist in  $\mathcal{F}_\infty$  und das Yukawa-Potential  $\frac{e^{-\mu r}}{r}$  für  $\mu > 0$  ist in  $\overline{\mathcal{F}_{\pi/2}}$ .

BEISPIEL 10.8. Dilatationsanalytische Potentiale müssen nicht „lokal“, das heißt Multiplikationsoperatoren sein. Sei beispielsweise  $\psi \in L^2$  ein analytischer Vektor für den infinitesimalen Generator von  $u(\theta)$ . Dann hat  $\{u(\theta)\psi\}_{\theta \in \mathbb{R}}$  eine analytische Fortsetzung auf den Streifen  $\{\theta : |\text{Im}\theta| < \alpha\}$ . Sei also  $V$  der zugehörige Rang-Eins-Operator  $(\psi, \cdot)\psi$ , so ist  $V$  dilatationsanalytisch und  $V(\theta) = (\psi(\theta), \cdot)\psi(\theta)$ .

Unser großes Ziel dieses Abschnitts ist es das Spektrum eines  $N$ -Teilchen Hamilton-Operators  $H$  auf  $L^2(\mathbb{R}^{3(N-1)})$  zu untersuchen, der durch Abseparation der Schwerpunktsbewegung von  $\tilde{H} = -\sum_{i=1}^N (-2\mu_i)^{-1} \Delta_i + \sum_{i < j} V_{ij}$  entsteht. Hierbei soll  $V_{ij}$  ein auf  $L^2(\mathbb{R}^3)$  dilatationsanalytischer Operator sein. Wir untersuchen zunächst das Zwei-Körper-Problem und verwenden dann die Methode des Zwei-Körper-Problems in der allgemeinen Situation und verbinden diese mit den Weinberg–Van Winter-Gleichungen und dem Ichinose-Lemma.

SATZ 10.9. Sei  $H_0 = -\Delta$  auf  $L^2(\mathbb{R}^3)$  und sei  $V \in \mathcal{F}_\alpha$  für ein  $\alpha > 0$ . Angenommen,  $\theta \in B_\alpha$  und sei  $H(\theta) = e^{-2\theta} H_0 + V(\theta)$ , dann gelten folgende Aussagen.

- a) Das Spektrum  $\sigma(H(\theta))$  hängt nur von  $\text{Im}\theta$  ab.
- b)  $\sigma(H(\theta))$  besteht aus  $\{e^{-2\theta} \lambda : \lambda \in [0, \infty)\} \cup \sigma_d(\theta)$ , wobei  $\sigma_d(\theta)$  eine Menge ist, dessen einziger Häufungspunkt Null sein kann. Jedes  $\mu \in \sigma_d(\theta)$  ist ein Eigenwert endlicher Multiplizität.
- c)  $\sigma_d(\theta) = \overline{\sigma_d(\theta)}$ .
- d) Ist  $0 < \text{Im}\theta < \pi/2$ , so ist  $\sigma_d(\theta) \subseteq \mathbb{R} \cup \{\mu : -2\text{Im}\theta < \arg \mu < 0\}$  und  $\mathbb{R} \cap \sigma_d(\theta) = \sigma_{pp}(H(0)) \setminus \{0\}$ .
- e) Ist darüberhinaus  $0 < \text{Im}\varphi < \text{Im}\theta < \pi/2$ , so ist  $\sigma_d(\varphi) \subseteq \sigma_d(\theta)$ .

f)  $\sigma_{sc}(H(0)) = \emptyset$ .

BEWEIS. a) Folgt aus Satz [10.4](#), [theorem:3.101](#) welcher besagt, dass  $H(\theta)$  unitär äquivalent zu  $H(\theta + \varphi)$  ist, wenn  $\varphi \in \mathbb{R}$  und  $H(\theta)^* = H(\bar{\theta})$ .

b) [4.16](#) impliziert, dass  $\sigma_{ess}(e^{2\theta}H(\theta)) = \sigma_{ess}(H_0) = [0, \infty)$ . Dies zeigt die Behauptung mit der Ausnahme, dass  $\sigma_d(\theta)$  a priori irgendwo Häufungspunkte in  $e^{-2\theta}\mathbb{R}_+$  haben könnte.

c) Folgt aus Satz [10.4](#), [theorem:3.101](#) welcher besagt, dass  $H(\theta)$  unitär äquivalent zu  $H(\theta + \varphi)$  ist, wenn  $\varphi \in \mathbb{R}$  und  $H(\theta)^* = H(\bar{\theta})$ .

d)

e)

f)

□

Der Beweis dieses Satzes beruht auf dem Ergebnis von Weyl, welches uns erlaubte  $\sigma_{ess}(H(\theta))$  zu bestimmen. Im  $N$ -Teilchen Fall werden wir Weyls Satz durch den HVZ-Satz ersetzen. Hier sind die Potentiale  $V_{ij}(\theta)$  jedoch nicht mehr selbstadjungiert. Wir beweisen daher zunächst folgendes Resultat.

SATZ 10.10. Sei  $\tilde{H} = \tilde{H}_0 + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \tilde{V}_{ij}$ , wobei

(i)  $\tilde{H}_0 = -\sum_{i=1}^N (2\mu_i)^{-1} \Delta_i$ ,

(ii)  $\tilde{V}_{ij} = V_{ij} \otimes \text{id}$  unter der Zerlegung  $\mathbb{R}^{3N} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3(N-1)}$ , wobei  $\mathbb{R}^3$  zur Koordinate  $x_i - x_j$  korrespondiert und

(iii) jedes  $V_{ij}$  ist eine relative formkompakte Störung von  $-\Delta$  auf  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , aber nicht notwendigerweise symmetrisch.

Sei dann  $H$  gleich  $\tilde{H}$  mit abseparierter Schwerpunktbewegung. Definiere dann für jeden Cluster  $C \subseteq \{1, \dots, N\}$   $H(C_i)$ , wie beim HVZ-Satz. Wir nennen für jede Cluster-Zerlegung  $D = \{C_1, \dots, C_k\}$  die Familie der Zahlen  $\{E_1 + \dots + E_k : E_i \in \sigma_{disc}(H(C_i))\}$  die Menge der  $D$ -Thresholds, geschrieben als  $\Sigma_D$ . Sei  $\Sigma$  die Vereinigung über alle  $D$ -Thresholds  $\Sigma_D$ , die mindestens zwei Cluster enthält. Dann ist

$$\sigma_{ess}(H) \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Sigma} (\lambda + [0, \infty)).$$

Um die Notation des Hauptresultats zu vereinfachen führen wir Folgendes ein.

DEFINITION 10.11. Sei  $V_{ij} \in \mathcal{F}_\alpha$  für jedes Paar  $1 \leq i < j \leq N$  und sei  $\tilde{V}_{ij} = V_{ij} \otimes \text{id}$  auf  $L^2(\mathbb{R}^{3N})$  bezüglich der Zerlegung  $\mathbb{R}^{3N} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3(N-1)}$ , wobei die erste Koordinate  $x_i - x_j \in \mathbb{R}$  ist. Seien  $\tilde{H}_0 = -\sum_{i=1}^N (2\mu_i)^{-1} \Delta_i$  und  $\tilde{H} = \tilde{H}_0 + \sum \tilde{V}_{ij}$ . Sei für  $\theta \in B_\alpha$   $\tilde{H}(\theta) = e^{-2\theta} \tilde{H}_0 + \sum \tilde{V}_{ij}(\theta)$ . Seien  $H(\theta)$  bzw.  $\tilde{H}$  gleich den Operatoren  $\tilde{H}(\theta)$  bzw.  $\tilde{H}$  mit abseparierter Schwerpunktbewegung. Für jede Cluster-Zerlegung  $D = \{C_1, \dots, C_k\}$  seien  $\Sigma_D(\theta) := \{E_1 + \dots + E_k : E_i \in \sigma_{disc}(H_{C_i}(\theta))\}$  und sei  $\Sigma(\theta)L = \bigcup_{\#(D) \geq 2} \Sigma_D(\theta)$ . Sei schließlich  $\Sigma_{\min} = \min\{\lambda : \lambda \in \Sigma(0)\}$ .

**theorem:3.109**

SATZ 10.12. Sei  $H$  ein  $N$ -Teilchen Hamilton-Operator auf  $L^2(\mathbb{R}^{3(N-1)})$  mit dilatationsanalytischen Paar-Wechselwirkungen, wie aus voriger Definition. Dann gilt:

a)  $\sigma(H(\theta))$  und  $\Sigma(\theta)$  hängen lediglich von  $\text{Im}\theta$  ab.

b)  $\sigma(H(\theta)) = \sigma_{ess}(\theta) \cup \sigma_d(\theta)$ , wobei  $\sigma_{ess} = \{\mu + e^{-2\theta} \lambda : \mu \in \Sigma(\theta), \lambda \in [0, \infty)\}$  und  $\sigma_d(\theta)$  das diskrete Spektrum von  $\sigma(H(\theta))$  ist.

- c)  $\sigma_d(\bar{\theta}) = \overline{\sigma_d(\theta)}$  und  $\Sigma(\bar{\theta}) = \overline{\Sigma(\theta)}$ .  
d) (d1) Ist  $0 < \operatorname{Im}\theta < \min\{\alpha, \pi/2\}$ , so ist

$$\Sigma(\theta) \subseteq \mathbb{R} \cup \{\Sigma_{\min} + \mu : -2\operatorname{Im}\theta < \arg\mu < 0\} \quad (10.6)$$

und  $\mathbb{R} \cap \Sigma(\theta) = \Sigma(0)$ .

- (d2) Ist  $0 < \operatorname{Im}\varphi < \operatorname{Im}\theta < \pi/2$ , so ist  $\Sigma(\varphi) \subseteq \Sigma(\theta)$ .  
(d3) Ist  $0 < \operatorname{Im}\theta < \pi/2$ , so sind  $\sigma_d(\theta) \subseteq \mathbb{R} \cup \{\Sigma_{\min} + \mu : -2\operatorname{Im}\theta < \arg\mu < 0\}$   
und  $\mathbb{R} \cap \sigma_d(\theta) = \sigma_{pp}(H) \setminus \Sigma(0)$ .  
(d4) Ist  $0 < \operatorname{Im}\varphi < \operatorname{Im}\theta < \pi/2$ , so ist  $\sigma_d(\varphi) \subseteq \sigma_d(\theta)$ .  
e)  $\sigma_{sc}(H) = \emptyset$ .

**KOROLLAR 10.13.** *Jeder  $N$ -Teilchen-Hamilton-Operator mit Coulomb- oder Yukawa-Wechselwirkungen und abseparierter Schwerpunktsbewegung hat leeres singulär-stetiges Spektrum.*

Man nennt Eigenwerte von  $H(\theta)$ , die in  $\sigma_d(\theta) \setminus \sigma_d(0)$  sind *Resonanzen* von  $H$  und Punkte in  $\Sigma(\theta) \setminus \Sigma$  heißen *komplexe Thresholds* oder *resonante Thresholds*.

### 11. Aronszajn–Donoghue-Theorie und das Simon–Wolff-Kriterium zur Abwesenheit von singulär-stetigem Spektrum

Wir betrachten einen selbstadjungierten Operator  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$  mit einfachem Spektrum und untersuchen das Verhalten des Spektrums unter Rang-Einstörungen. Dazu sei  $\phi$  ein zyklischer Vektor für  $A$ , sprich die Menge  $\{p(A)\phi\}_p$ , wobei  $p$  durch die Menge aller Polynome auf  $\mathbb{R}$  läuft ist dicht in  $\mathcal{H}$ . Sei dann

$$A_\lambda = A + \lambda|\phi\rangle\langle\phi| \equiv A + \lambda P$$

definiert im Sinne quadratischer Formen. Sei weiter  $d\mu_0$  das zu  $A$  gehörende Spektralmaß das zu  $\phi$  assoziiert ist, sprich

$$\langle\phi, A\phi\rangle = \int_{\sigma(A)} = \int x d\mu_0(x).$$

Die Borel–Stieltjes-Transformation von  $d\mu_0$  ist dann

$$F_0(z) = \int \frac{d\mu_0(x)}{x - z},$$

welche bekanntermaßen eine Pick-Funktion ist. (Sprich, sie ist analytisch auf der oberen Halbebene und bildet diese wieder in sich selbst ab.) Mit der Theorie der Randwerte folgt, dass  $F_0(x + i0) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_0(x + i\epsilon)$  existiert und Lebesgue-fast überall endlich ist. Ähnlich ist

$$G(x) := \int \frac{d\mu_0(y)}{(x - y)^2}$$

mit inverser  $B(x) = G(x)^{-1}$  fast überall endlich. Wie üblich verwenden wir die Konvention  $\infty^{-1} = 0$ .

Typischerweise ist das absolut-stetige Spektrum von Operatoren recht stabil. Es ist beispielsweise bekannt, dass  $\sigma(A_\lambda) = \sigma(A_\lambda')$ . Allerdings kann es passieren, dass ein Teil des absolut-stetigen Spektrums von  $A$  in dichtes Punktspektrum übergeht. Typischerweise kann es passieren, dass dieses sogar in singulär-stetiges Spektrum übergeht. (Tatsächlich ist singulär-stetiges Spektrum “generisch”, siehe auch Del Rio et al [DRJMS94]).

Die beiden Hauptresultate dieses Abschnitts sind die Folgenden.

simonwolff1

SATZ 11.1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

- (1) *Für fast alle  $\lambda$  ist  $\sigma_{sc}(A_\lambda) = \emptyset$ .*
- (2) *Für fast alle  $x$  ist  $B(x) + \text{Im}(F_0(x + i0)) > 0$ .*

Die zweite Aussage besagt im Wesentlichen, dass

$$\{x : B(x) > 0\} \cup \{x : \text{Im}(F_0(x + i0)) > 0\}$$

volles Lebesgue-Maß hat, da  $B(x), \text{Im}(F_0(x + i0)) \geq 0$ . Tatsächlich sind die beiden Mengen disjunkt wegen der Schranke

$$\text{Im}F_0(x + i\epsilon) = \epsilon \int \frac{d\mu_0(y)}{(x - y)^2 + \epsilon^2} < \epsilon B(x)^{-1}.$$

simonwolff2

SATZ 11.2. *Seien  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  fixiert. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.*

- (1) *Für fast alle  $\lambda$  ist  $\sigma(A_\lambda) \cap (a, b) = \sigma_{pp}(A_\lambda) \cap (a, b)$ .*
- (2) *Für fast alle  $x \in (a, b)$  ist  $B(x) > 0$ .*

Die folgenden Resultate von Aronszajn [?] und Donoghue [?] sind der Schlüssel im Beweis der beiden Theoreme.

aronszajndonoghue

SATZ 11.3 (Aronszajn, Donoghue). *Seien*

$$\begin{aligned} L &:= \{x : \text{Im}F_0(x + i0) > 0\} \\ P_\lambda &:= \{x : B(x) > 0 \text{ und } F_0(x + i0) = -1/\lambda\} \\ S_\lambda &:= \{x : B(x) = 0 \text{ und } F_0(x + i0) = -1/\lambda\}. \end{aligned}$$

*Dann gilt für alle  $\lambda \neq 0$ , dass die Träger von  $\mu_\lambda^{ac}$ ,  $\mu_\lambda^{pp}$  bzw.  $\mu_\lambda^{sc}$  gerade  $L$ ,  $P_\lambda$  bzw.  $S_\lambda$  sind.*

Im Folgenden verwenden wir die folgende Konsequenz aus der Resolventen-Formel  $(A_\lambda - z)^{-1} - (A - z)^{-1} = -\lambda(A - z)^{-1}P(A_\lambda - z)^{-1}$ . Betrachtet man den Erwartungswert im Zustand  $\phi$  erhält man die Aronszajn-Krein-Formel

$$F_\lambda(z) = \frac{F_0(z)}{1 + \lambda F_0(z)}. \quad (11.1) \quad \text{eq: ak}$$

Für den Beweis von Satz 11.3 verwenden wir die folgende Zwischenbehauptung, die das Punktspektrum betrifft.

sigmapprank1

SATZ 11.4 (Punktspektrum von Rang-Eins-Störungen). *Sei  $\lambda \neq 0$  fest. Dann hat  $d\mu_\lambda$  bei  $x_0$  genau dann ein Atom, wenn*

- (1)  $\lim_{\epsilon \searrow 0} F_0(x_0 + i\epsilon) = -1/\lambda$  und
- (2)  $B(x_0) \neq 0$ .

*In diesem Fall ist  $\mu_0(\{x_0\}) = \lambda^{-2}B(x_0)$ .*

BEWEIS. Da

$$\text{Im}F_\lambda(x_0 + i\epsilon) = \epsilon \int \frac{d\mu_\lambda(y)}{(x_0 - y)^2 + \epsilon^2} \quad \text{und} \quad \text{Re}F_\lambda(x_0 + i\epsilon) = \int \frac{y - x_0}{(x_0 - y)^2 + \epsilon^2} d\mu_\lambda(y)$$

folgt aus monotoner Konvergenz

$$\mu_\lambda(x_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \text{Im}F_\lambda(x_0 + i\epsilon) \quad \text{mit} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \text{Re}F_\lambda(x_0 + i\epsilon) = 0. \quad (11.2) \quad \text{eq: auxpp}$$

Wir zeigen jetzt, dass (1) immer (2) impliziert und  $\mu_\lambda(\{x_0\}) = \lambda^{-2}B(x_0)$  gilt. Sobald wir das gezeigt haben, folgt der Rest der Aussage, denn wenn  $\mu_\lambda(\{x_0\}) \neq 0$ ,

dann gilt  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_\lambda(x + i\epsilon) = \infty$ , was, wegen der Aronszajn–Krein-Formel ([II.1](#)), bedeutet, dass  $F_0(x + i\epsilon) \rightarrow -1/\lambda$ . Die Rückrichtung ist trivial ((1) impliziert (2) mit der behaupteten Formel für  $\mu_\lambda(\{x_0\})$ ). Wir zeigen jetzt also, dass (2) aus (1) folgt. Wegen monotoner Konvergenz ist

$$B(x_0)^{-1} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d\mu_0(y)}{(x_0 - y)^2 + \epsilon^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \operatorname{Im} F_0(x + i\epsilon). \quad (11.3) \quad \text{eq:auxpp2}$$

Wenn also  $F_0(x + i\epsilon) \rightarrow -1/\lambda$ , dann folgt daraus und ([II.2](#))

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F_0}{\epsilon F_\lambda} = \frac{-1/\lambda}{i\mu_\lambda(\{x_0\})}$$

und damit

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im} \left( \frac{F_0}{\epsilon F_\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda\mu_\lambda(\{x_0\})}.$$

Mit der Aronszajn–Krein-Formel ([II.1](#)) ist die linke Seite aber gerade

$$\epsilon^{-1} \operatorname{Im}(1 + \lambda F_0) = \epsilon^{-1} \lambda \operatorname{Im} F_0 \rightarrow \lambda B(x_0)^{-1},$$

wobei wir ([II.3](#)) im letzten Schritt verwendet haben. Daraus folgt aber die behauptete Formel  $\mu_\lambda(\{x_0\}) = \lambda^{-2} B(x_0)$ .  $\square$

Für den Beweis von Satz [II.3](#) brauchen wir noch eine weitere Zutat, die zum Beispiel in [Simon2005](#), Abschnitt 11.1] (oder Katznelson [Kat76b](#)) gefunden werden kann.

BEHAUPTUNG 11.5. *Es gelten*

- (1)  $d\mu^{ac}(x) = \pi^{-1} \operatorname{Im}(F(x + i0)) dx$
- (2)  $d\mu^{sc}$  ist auf  $\{x : \limsup_{\epsilon \searrow 0} \operatorname{Im}(F(x + i\epsilon)) = \infty\}$  getragen. (Tatsächlich gilt das für  $d\mu^{sing} = d\mu^{sc} + d\mu^{pp}$ , da obige Menge keine Atome aufweist.)
- (3)  $B(x) > 0$  impliziert, dass  $\lim_{\epsilon \searrow 0} F(x + i\epsilon)$  existiert und reell ist.

Aus (2) und (3) dieser Behauptung folgt insbesondere, dass  $\mu_\lambda^{sc}$  auf

$$\{x : B_0(x) = 0\} \cup \{x : B(x) > 0 \text{ und } F_0(x + i0) = -1/\lambda\}$$

getragen ist (mit  $B_0(x) = B(x)$  unter „Missbrauch“ der Notation). Da aber die zweite Menge gerade der Träger von  $\mu_\lambda^{pp}$  ist, ist das singulär stetige Maß dieser Menge Null, da es keine Atome sieht. Daraus folgt, dass  $\mu_\lambda^{sc}$  tatsächlich nur auf  $\{x : B(x) = 0\}$  getragen ist. Es verbleibt damit zu zeigen, dass  $\mu_\lambda^{ac}$  auf  $\{x : \operatorname{Im}(F_0(x + i0)) > 0\}$  getragen ist. Aber das folgt aus der allgemeinen Theorie von Borelmaßen und der Aronszajn–Krein-Formel ([II.1](#)), denn

$$d\mu_\lambda^{ac} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im}(F_\lambda(x + i0)) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left( \frac{F_0}{1 + \lambda F_0} \right)$$

sowie der Tatsache, dass die Abbildung  $\omega \mapsto \omega/(1 + \lambda\omega)$  die obere Halbebene  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$  wieder in sich selbst abbildet (also eine Pick-Funktion ist). Daraus folgt

$$\{x : \operatorname{Im}(F_\lambda(x + i0)) > 0\} = \{x : \operatorname{Im}(F_0(x + i0)) > 0\} = L,$$

was den Beweis von Satz [II.3](#) schließt.  $\square$

Um die Simon–Wolff-Kriterien (Sätze [II.1](#) und [II.2](#)) zu zeigen, brauchen wir noch eine letzte Zutat. Für unser (Wahrscheinlichkeits)-Maß  $\mu_\lambda$  definieren wir für jedes  $\lambda$  (für  $\|\phi\| = 1$ ) das gewichtete Mittel

$$\eta(\Omega) = \int \mu_\lambda(\Omega) \frac{d\lambda}{1 + \lambda^2}, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}. \quad (11.4) \quad \boxed{\text{eq:defeta}}$$

SATZ 11.6.  $\eta$  und das Lebesgue-Maß sind miteinander äquivalent.

BEWEIS. Da  $|x - z|^{-1} \leq 1/|\text{Im } z|$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , gilt für alle  $z$  mit  $\text{Im } z > 0$ ,

$$H(z) := \int \frac{d\eta}{x - z} = \int \frac{d\lambda}{1 + \lambda^2} F_\lambda(z).$$

Nach einer elementarer Kontourintegration erhalten wir für  $\omega \in \mathbb{C}$  mit  $\text{Im } \omega > 0$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\lambda}{1 + \lambda^2} \frac{\omega}{1 + \lambda\omega} = \frac{\pi}{\omega^{-1} - i} \Rightarrow H(z) = \frac{\pi}{F_0(z)^{-1} - i}.$$

Aber da  $\text{Im}(F_0(z)) > 0$  in der oberen Halbebene ist, folgt, dass  $|H(z)| \leq \pi$  und insbesondere  $\text{Im}(H(z)) \leq \pi$ . Da aber (mit monotoner Konvergenz)

$$\frac{1}{\pi} \text{Im}(H(x + i\epsilon)) dx \rightarrow d\eta$$

folgt, dass  $d\eta \leq dx$ , sprich  $d\eta$  ist absolut stetig bzgl. Lebesgue.

Es verbleibt also die Umkehrung zu zeigen. Lässt man  $\epsilon \rightarrow 0$  in  $H(z) = \pi/(F_0(z)^{-1} - i)$  gehen, folgt

$$\{x : \text{Im}(H(x + i0)) = 0\} = \{x : F_0(x + i0) = 0\}.$$

Aber da die rechte Seite Lebesgue-Maß Null hat (wegen allgemeiner Prinzipien für Randwerte analytischer Funktionen) folgt, dass  $d\eta = \pi^{-1} \text{Im}(H(x + i0)) dx$  tatsächlich äquivalent zum Lebesgue-Maß ist.  $\square$

Wir kommen damit zum

BEWEIS VON SATZ [II.1](#). Aus Theorem [II.3](#) folgt bereits  $\mu_\lambda^{sc}(\mathbb{R}) = \mu_\lambda(\mathbb{R} \setminus (P_\lambda \cup L))$ . Das bedeutet, dass  $\sigma_{sc}(A_\lambda) = \emptyset$  für fast alle  $\lambda$  genau dann, wenn  $\mu_\lambda(\mathbb{R} \setminus (P_\lambda \cup L)) = 0$  für fast alle  $\lambda$ . Aber das passiert genau dann, wenn

$$\int \frac{d\lambda}{1 + \lambda^2} \mu_\lambda(\mathbb{R} \setminus (P_\lambda \cup L)) = \eta(\mathbb{R} \setminus (P_\lambda \cup L)) = 0.$$

Da aber das Maß  $\eta$  äquivalent zum Lebesgue-Maß ist, ist die Behauptung  $\sigma_{sc}(A_\lambda) = \emptyset$  für fast alle  $\lambda$  äquivalent dazu, dass das Lebesgue-Maß von  $\mathbb{R} \setminus (P_\lambda \cup L)$  Null ist. Dies ist aber äquivalent dazu, dass fast alle  $x \in \mathbb{R} \setminus (P_\lambda \cup L)$  sind. Nach nochmaliger Anwendung des Aronszajn–Donoghue-Satzes [II.3](#) folgt also die Behauptung.  $\square$

Analog folgt der

BEWEIS VON SATZ [II.2](#). Wir zeigen die Behauptung hier für  $a = -\infty$  und  $b = \infty$ . Die Verallgemeinerung erfolgt analog. Mit dem Aronszajn–Donoghue-Theorem [II.3](#) gilt  $\mu_\lambda^{sc}(\mathbb{R}) + \mu_\lambda^{ac} = \mu_\lambda(\mathbb{R} \setminus P_\lambda)$ . Jetzt können wir wie im Beweis von Theorem [II.1](#) fortfahren.  $\square$

### 11.1. Beispiele.

### 11.2. Anwendungen für zufällige Schrödingeroperatoren.

## 12. Eigenschaften von Eigenfunktionen

**12.1. Regularität von Eigenfunktionen.** In diesem Abschnitt untersuchen wir die Regularität und den Abfall von Eigenfunktionen. Von der Fouriertransformation wissen wir, dass je glatter eine Funktion ist, desto schneller fällt ihre Fouriertransformation ab, das heißt man kann bereits erahnen, dass diese beiden Eigenschaften stark voneinander abhängen werden. Wir betrachten zunächst die Glattheit, dann den Abfall im Sinne, dass  $\psi \in \mathcal{D}(e^{a|x|})$  unter bestimmten Umständen. Schließlich werden wir diese Ideen kombinieren, um punktweise Schranken  $|\psi(x)| \leq \text{const } e^{-a|x|}$  zu erhalten.

Um die Resultate über die Glattheit formulieren zu können, führen wir zunächst den Raum der gleichmäßig Hölder-stetigen Funktionen ein.

**DEFINITION 12.1** (Gleichmäßig Hölder-stetige Funktionen). Sei  $0 < \theta < 1$ . Dann heißt  $f \in C_\theta(\mathbb{R}^n)$  genau dann *gleichmäßig Hölder-stetig*, wenn  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt ist und

$$|f(x) - f(y)| \leq \text{const } |x - y|^\theta \quad (12.1)$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  erfüllt. Wir setzen

$$\|f\|_{(\theta)} := \|f\|_\infty + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\theta} \quad (12.2)$$

und bemerken, dass dies eine Semi-Norm ist.

Wir sagen, dass  $f \in C_\theta^1$  ist, wenn  $f$  beschränkt und stetig differenzierbar ist und für alle  $j = 1, \dots, n$  die partielle Ableitung  $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in C_\theta(\mathbb{R}^n)$  ist. Dann setzen wir

$$\|f\|_{\theta,1} := \|f\|_\infty + \sum_{j=1}^n \|D_j f\|_{(\theta)}. \quad (12.3)$$

Die Verbindung zwischen Hölder-Stetigkeit und der Fouriertransformation wird durch folgendes Lemma illustriert. Je stärker die Fouriertransformierte im Unendlichen abfällt, umso „besser“ ist ihre Hölder-Stetigkeit.

**LEMMA 12.2.** Sei  $(1 + \xi^2)^{\beta/2} \hat{f}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , dann gilt:

a) Ist  $0 < \beta < 1$ , so ist  $f \in C_\beta$  und man hat die Abschätzung

$$\|f\|_{(\beta)} \leq \text{const} \left\| (1 + \xi^2)^{\beta/2} \hat{f} \right\|_1. \quad (12.4)$$

b) Ist  $1 < \beta < 2$ , so ist  $f \in C_{\beta-1}^1$  und man hat die Abschätzung

$$\|f\|_{\beta-1,1} \leq c_n \left\| (1 + \xi^2)^{\beta/2} \hat{f} \right\|_1. \quad (12.5)$$

**BEWEIS.** a) Sei  $0 < \beta < 1$ . Für  $s \in \mathbb{R}$  ist  $|e^{is} - 1| \leq 2$  und  $|e^{is} - 1| \leq \left| \int_0^s e^{it} dt \right| \leq s$ , das heißt  $|e^{is} - 1| \leq s^\beta 2^{1-\beta}$ . Daher ist

$$|e^{ix\xi} - e^{iy\xi}| = \left| e^{i\xi(x-y)} - 1 \right| \leq 2^{1-\beta} |\xi|^\beta |x - y|^\beta, \quad (12.6)$$

sodass

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int |\hat{f}(\xi)| |e^{i\xi x} - e^{i\xi y}| d\xi \leq \left[ \frac{2^{1-\beta}}{(2\pi)^{n/2}} \int |\hat{f}(\xi)| |\xi|^\beta d\xi \right] |x - y|^\beta \\ &\leq \frac{2^{1-\beta}}{(2\pi)^{n/2}} \left\| (1 + \xi^2)^{\beta/2} \hat{f} \right\|_1 |x - y|^\beta. \end{aligned} \quad (12.7)$$

Da

$$\|f\|_\infty \leq \left\| \hat{f} \right\|_1 \leq \left\| (1 + \xi^2)^{\beta/2} \hat{f} \right\|_1 \left\| (1 + \xi^2)^{-\beta/2} \right\|_\infty$$

ist, folgt die Behauptung.

b) Analog zum Beweis von a), da  $\beta - 1 \in (0, 1)$ .

□

Wir können damit sehen, wie glatt eine Eigenfunktion von  $H = -\Delta + V$  sein wird, wenn  $V \in L^2 + L^\infty$  ist. In diesem Setup ist  $\mathcal{D}(-\Delta) = \mathcal{D}(H)$  nach Katos Satz [theorem:1.13](#) I.II. Wenn also  $\psi \in \mathcal{D}(-\Delta) = H^2(\mathbb{R}^3)$  ist, dann ist  $(1 + \xi^2)\hat{\psi} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ , das heißt  $(1 + \xi^2)^{\beta/2}\hat{\psi} \in L^1$  (da dann  $(1 + \xi^2)^{-(1-\beta/2)} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ ) für alle  $\beta < \frac{1}{2}$ . Daraus folgt, dass  $\mathcal{D}(H) \subseteq C_\theta$  für  $\theta < 1/2$ .

Intuitiv ist klar, dass die Eigenfunktionen von  $N$ -Teilchen-Hamilton-Operatoren mit Zwei-Körper-Potentialen keine schlimmeren Singularitäten als die Eigenfunktionen von 2-Teilchen-Hamilton-Operatoren mit Zwei-Körper-Potentialen haben. Um ein genaues Resultat formulieren zu können, führen wir eine spezielle Klasse von Potentialen ein.

DEFINITION 12.3. Sei  $n$  fix und nehme sowohl  $\sigma \geq 1$ , als auch  $\sigma > \frac{n}{2}$  an. Eine reellwertige, messbare Funktion  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann in der Klasse  $M_\sigma^{(n)}$ , wenn

$$\hat{V} \in L^{\sigma'} + L^1,$$

wobei  $\sigma' = \frac{1}{1-\sigma^{-1}}$  der zu  $\sigma$  duale Index ist, das heißt  $\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma'} = 1$ .

BEISPIEL 12.4. Sei  $V(r) = \frac{1}{r}$  das Coulomb-Potential in  $\mathbb{R}^3$ , dann ist  $\hat{V}(\xi) = \frac{c}{|\xi|^2} \in L^{\sigma'} + L^1$ , wenn  $\sigma' > 3/2$ , das heißt  $V \in M_\sigma^{(3)}$ , wenn  $\sigma < 3$ . Dasselbe Resultat erhält man für das Yukawa-Potential  $\frac{e^{-\mu r}}{r}$ .

SATZ 12.5. *Es gelten folgende Aussagen.*

- Ist  $\sigma \geq 2$  und  $\sigma > \frac{n}{2}$  und  $V \in M_\sigma^{(n)}$ , so ist  $V$  relativ  $-\Delta$ -beschränkt mit relativer Schranke gleich Null.
- Ist  $\sigma \geq 1$  und  $\sigma > \frac{n}{2}$  und  $V \in M_\sigma^{(n)}$ , so ist  $V$  relativ  $-\Delta$ -formbeschränkt mit relativer Form-Schranke gleich Null.

BEWEIS. a) Wir erinnern uns, dass, wenn  $V$  relativ  $-\Delta$ -kompakt ist, dann ist  $V$  relativ  $-\Delta$ -beschränkt mit relativer Schranke gleich Null. Mit dem Satz von Plancherel brauchen wir daher lediglich  $\left\| (\xi^2 + a)^{-1} (\hat{V} * \psi) \right\|_2 \leq c_a \|\psi\|_2$  (mit  $a > 0$ ) für alle  $\psi \in L^2$  zu zeigen, wobei  $c_a$  unabhängig von  $\psi$  ist, aber beliebig klein gemacht werden kann, wenn man  $a$  erhöht. Dies folgt aber aus der Young- und der verallgemeinerten Hölder-Ungleichung, denn mit  $\sigma' \leq 2$ ,  $\sigma' < \frac{n}{n-2}$ ,

$$\begin{aligned}
\hat{V} &= \hat{V}_1 + \hat{V}_{\sigma'}, \text{ wo } \hat{V}_1 \in L^1 \text{ und } \hat{V}_{\sigma'} \in L^{\sigma'}, \text{ ist für ein } R > 0 \\
\left\| (\xi^2 + a)^{-1} (\hat{V} * \psi) \right\|_2 &\leq \left\| (\xi^2 + a)^{-1} (\hat{V}_1 * \psi) \right\|_2 + \left\| (\xi^2 + a)^{-1} (\hat{V}_{\sigma'} * \psi) \right\|_2 \\
&\leq \left\| (\xi^2 + a)^{-1} \right\|_{\infty} \left\| \hat{V}_1 \right\|_1 \|\psi\|_2 + \left\| (\xi^2 + a)^{-1} \right\|_p \left\| \hat{V}_{\sigma'} \right\|_r \|\psi\|_2,
\end{aligned} \tag{12.8}$$

wobei  $p > \frac{n}{2}$  sein muss, weshalb wegen  $1 + \frac{1}{q} = \frac{3}{2} - \frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2}$ ,  $r = \frac{p}{p-1} < \frac{n}{n-2}$  ist.  $r$  erfüllt also sowohl  $r \leq 2$  (für  $n \geq 4$ ), als auch  $r < \frac{n}{n-2}$ , womit  $r = \sigma'$  erlaubt ist. Per Voraussetzung existieren alle Integrale in der letzten Abschätzung ( $\sigma > n/2$ ).

b) Analog zu a).

□

Das folgende Resultat gibt erste Eigenschaften über die Regularität von Eigenfunktionen, da jede Eigenfunktion von  $\tilde{H}$  sicherlich in  $C^\infty(\tilde{H})$  ist. Da  $C^\infty(\tilde{H})$  linksinvariant unter  $e^{-i\tilde{H}t}$  ist, propagieren die Regularitätseigenschaften von Lösungen der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung in der Zeit.

**SATZ 12.6 (Kato–Simon).** *Sei  $\tilde{H} = -\sum_{i=1}^N (2\mu_i)^{-1} \Delta_i + \sum_{i < j} V_{ij}(x_i - x_j)$  als Operator auf  $L^2(\mathbb{R}^{nN})$ . Angenommen, es ist  $\sigma \geq 1$ ,  $\sigma > \frac{n}{2}$  und, dass jedes  $V_{ij} \in M_\sigma^{(n)}$ . Dann gelten folgende Aussagen.*

- a) *Ist  $\psi \in C^\infty(\tilde{H})$ , so ist  $\psi \in C_\theta$  für alle  $\theta < \min\{1, 2 - \frac{n}{\sigma}\}$ .*  
b) *Ist  $\sigma > n$  und  $\psi \in C^\infty(\tilde{H})$ , so ist  $\psi \in C_\theta^1$  für alle  $\theta < 1 - \frac{n}{\sigma}$ .*

*Darüberhinaus sind die Einbettungen stetig, im Sinne, dass für gegebenes  $\theta$  Konstanten  $m$  und  $c$  gibt mit  $\|\psi\|_{(\theta)} \leq c \left( \left\| \tilde{H}^m \psi \right\| + \|\psi\| \right)$  für alle  $\psi \in C^\infty(\tilde{H})$ .*

*Identische Resultate sind wahr, wenn man  $\tilde{H}$  durch  $H$ , dem Operator auf  $L^2(\mathbb{R}^{3(N-1)})$  ersetzt, den man durch Abseparation der Schwerpunktsbewegung von  $\tilde{H}$  erhält.*

**BEWEIS.** Wir betrachten lediglich den Fall  $\sigma \geq 2$ , um quadratische Formen zu vermeiden. Sei  $H_0 = -\sum_{i=1}^N (2\mu_i)^{-1} \Delta_i$  und sei  $t_0(\xi)$  die Funktion  $\sum_{i=1}^N (2\mu_i)^{-1} \xi^2$  auf  $\mathbb{R}^{3nN}$ . Die Idee ist obiges Lemma zu verwenden.

Wir behaupten dann zunächst, dass

$$\left\| (t_0(\xi) + 1)^{-\beta} \hat{V}_{ij} * \eta \right\|_p \leq \text{const } \|\eta\|_p \tag{12.9}$$

für alle  $p \in [1, 2]$ ,  $\eta \in L^p(\mathbb{R}^{Nn})$  und  $\beta$  mit  $\beta > \frac{n}{2\sigma}$  wahr ist. Hierbei hängt die Konstante lediglich von  $t_0$ ,  $V_{ij}$  und  $\beta$  ab.

**BEWEIS DER ZWISCHENBEHAUPTUNG.** Sei  $f$  die  $\mathbb{R}^n$ -Fouriertransformation von  $V_{ij}$  (wohingegen  $\hat{V}_{ij}$  die Fouriertransformation in allen  $Nn$  Variablen ist), dann ist

$$(\hat{V}_{ij} * \eta)(\xi_1, \dots, \xi_N) = \frac{1}{(2\pi)^{(Nn-n)/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\kappa) \eta(\xi_1, \dots, \xi_i - \kappa, \dots, \xi_j + \kappa, \dots, \xi_N) d\kappa. \tag{12.10}$$

Für  $p \leq 2$  und  $\sigma \geq 2$  ist dann mit der Hölder- und der Young-Ungleichung zunächst

$$\left\| (\xi^2 + 1)^{-\beta} f * \varphi \right\|_p \leq \left\| (\xi^2 + 1)^{-\beta} \right\|_\sigma \|f\|_{\sigma'} \|\varphi\|_p \tag{12.11}$$

für  $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , denn wegen  $\beta > \frac{n}{2\sigma}$  ist  $(\xi^2 + 1)^{-\beta} \in L^\sigma$ . (Die verallgemeinerte Hölder-Ungleichung impliziert, dass  $\frac{1}{p} = \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{q}$ , womit  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\sigma}$  ist. Mit der Youngschen Ungleichung ist  $1 + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{\sigma} \stackrel{!}{=} \frac{1}{p} + \frac{1}{\sigma'}$ , was gerade passt, denn  $1 = \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma'}$ .) Aus dieser Ungleichung können wir sofort

$$\left\| [(\xi_i - \xi_j)^2 + 1]^{-\beta} \hat{V}_{ij} * \eta \right\|_p \leq \text{const } \|\eta\|_p \quad (12.12)$$

folgern, indem wir die obige Ungleichung hoch  $p$  nehmen und über Dummy-Variablen integrieren. Da  $[(\xi_i - \xi_j)^2 + 1]^\beta [t_0(\xi) + 1]^{-\beta}$  beschränkt ist, folgt die Zwischenbehauptung.  $\square$

Wir nehmen im Folgenden  $p \in [1, 2]$  und  $\beta > \frac{n}{2\sigma}$  an und erinnern uns, dass, wenn  $\psi \in \mathcal{D}(\tilde{H})$  ist, sowohl  $\hat{\psi}$ , als auch  $\mathcal{F}(\tilde{H}\psi)$  in  $L^p$  sind. Dann behaupten wir als Nächstes, dass  $(t_0(\xi) + 1)^{(1-\beta)}\hat{\psi} \in L^p$  ist.

BEWEIS DER ZWISCHENBEHAUPTUNG. Wir schreiben

$$\begin{aligned} \hat{\psi} &= \mathcal{F} \left[ (H_0 + \text{id})^{-1} (\tilde{H} + \text{id} - V) \psi \right] \\ &= (t_0(\xi) + 1)^{-1} (\mathcal{F}(\tilde{H}\psi) + \hat{\psi}) - \frac{1}{(2\pi)^{Nn/2}} (t_0(\xi) + 1)^{-1} \sum_{i < j} \hat{V}_{ij} * \hat{\psi} \\ (t_0(\xi) + 1)^{(1-\beta)}\hat{\psi} &= (t_0(\xi) + 1)^{-\beta} (\mathcal{F}(\tilde{H}\psi) + \hat{\psi}) - \frac{1}{(2\pi)^{Nn/2}} (t_0(\xi) + 1)^{-\beta} \sum_{i < j} \hat{V}_{ij} * \hat{\psi}. \end{aligned} \quad (12.13)$$

Aus der ersten Zwischenbehauptung folgt (da  $\hat{\psi}, \hat{V}_{ij} * \hat{\psi}, \mathcal{F}(\tilde{H}\psi) \in L^p$  sind) dann, dass  $(t_0(\xi) + 1)^{(1-\beta)}\hat{\psi} \in L^p$  ist.  $\square$

Wir können jetzt den Beweis schließen. Da  $\sigma > \frac{n}{2}$  ist, wählen wir  $\beta$  so, dass  $\frac{n}{2\sigma} < \beta < 1$ . Angenommen nun  $\psi \in C^\infty(\tilde{H})$ , dann ist wegen der zweiten Zwischenbehauptung

$$(\xi^2 + 1)^{1-\beta} \mathcal{F}(\tilde{H}^m \psi) \in L^2 \quad (12.14)$$

für alle  $m$ . Schreibt man nun  $\mathcal{F}(\tilde{H}^m \psi) = \mathcal{F}(\tilde{H}^m \psi) (\xi^2 + 1)^{1-\beta} (\xi^2 + 1)^{-1+\beta}$ , so sieht man, dass  $\mathcal{F}(\tilde{H}^m \psi) \in L^q$  (für  $q \geq 1$ ) ist, wenn  $(\xi^2 + 1)^{-1+\beta} \in L^r$  ist, wobei  $r$  die Gleichung  $\frac{1}{q} - \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$  erfüllen muss. Da  $(\xi^2 + 1)^{-1+\beta} \in L^r$  für alle  $r \in (r_0, \infty)$  mit einem  $r_0 < \infty$  ist, muss also  $\frac{1}{q} - \frac{1}{r_0} < \frac{1}{2}$  für  $q \geq 1$  gelten. Iteriert man dieses Argument nun  $j$  mal, so sieht man, dass  $\mathcal{F}(\tilde{H}^m \psi) \in L^q$  ist, solange  $\frac{1}{q} - \frac{j}{r_0} < \frac{1}{2}$  ist. Wählt man  $j$  geschickt, so kann man schließen, dass  $\mathcal{F}(\tilde{H}\psi)$  und  $\hat{\psi}$  in  $L^1$  sind. Verwendet man nun die zweite Zwischenbehauptung noch einmal, so sieht man, dass  $(\xi^2 + 1)^{1-\beta}\hat{\psi} \in L^1$  ist, solange  $\beta > \frac{n}{2\sigma}$  und  $\psi \in C^\infty(\tilde{H})$  ist. Man kann nun das Lemma verwenden, woraus folgt, dass  $\psi \in C_{2-2\beta}$ , das heißt  $\psi \in C_\theta$  mit  $\theta < \min \{1, 2 - \frac{n}{\sigma}\}$  ist. Analog folgt für  $1 - \beta \in (1, 2)$  und  $-\frac{n}{\sigma} < \beta < 0$ , dass  $\psi \in C_{1-2\beta}^1$ , das heißt  $\psi \in C_\theta^1$  für  $\theta < 1 - \frac{n}{\sigma}$  ist.  $\square$

BEMERKUNG 12.7. Wir sehen, dass die Eigenfunktionen Hölder-stetiger werden, je weniger schlimm die Singularität von  $\hat{V}$  am Ursprung ist, denn  $\theta$  fällt mit fallendem  $\sigma$ , also steigendem  $\sigma'$ , wobei  $\hat{V} \in L^{\sigma'} + L^1$  war. Fouriertransformiert

man also  $\hat{V}$  zurück, so wird in diesem Szenario die Singularität von  $V$  am Ursprung schlimmer.

**KOROLLAR 12.8.** *Sei  $H$  ein atomarer Hamilton-Operator, dann ist jedes  $\psi \in C^\infty(H)$  eine  $C^\infty$ -Funktion auf  $\mathbb{R}^{3(N-1)} \setminus \{\langle x_1, \dots, x_N \rangle : \text{ein } x_i = 0 \text{ oder ein } x_i = x_j\}$ . Zudem ist sie Hölder-stetig von der Ordnung  $\theta$  auf ganz  $\mathbb{R}^{3(N-1)}$ , wobei  $\theta < 1$ .*

**BEWEIS.** Dass

$$\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^{3(N-1)} \setminus \{\langle x_1, \dots, x_N \rangle : \text{ein } x_i = 0 \text{ oder ein } x_i = x_j\})$$

folgt aus der elliptischen Regularität des atomaren Hamilton-Operators, denn sowohl das Coulomb-Potential des Kerns, als auch die Coulomb-Wechselwirkungen, sind auf diesem Gebiet glatte Funktionen. Das zweite Resultat folgt aus dem vorigen Satz.  $\square$

## 12.2. Exponentieller Abfall von Eigenfunktionen von $N$ -Teilchenoperatoren.

Im zweiten Teil dieses Abschnitts beschäftigen wir uns mit dem (exponentiellen) Abfallverhalten von Eigenfunktionen im diskreten Spektrum. Wir beginnen zunächst mit  $L^2$ -Abschätzungen, ehe wir punktweise Schranken beweisen. Wir erinnern uns zunächst noch einmal an die Definition analytischer Vektoren.

**DEFINITION 12.9** (Analytischer Vektor). Sei  $A$  ein Operator auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$ . Man nennt die Menge  $C^\infty(A) := \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{D}(A^n)$  die  $C^\infty$ -Vektoren von  $A$ . Eigenvektoren von  $A$  sind damit automatisch in  $C^\infty(A)$ .

Ein Vektor  $\varphi \in C^\infty(A)$  heißt *analytischer Vektor von  $A$* , wenn

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n \varphi\|}{n!} t^n < \infty \quad (12.15)$$

für ein  $t > 0$ .

**theorem:3.120**

**SATZ 12.10.** *Sei  $\tilde{H} = -\sum_{i=1}^N (2\mu_i)^{-1} \Delta_i + \sum_{1 \leq i < j \leq N} V_{ij}(x_i - x_j)$  auf  $L^2(\mathbb{R}^{3N})$  und  $H$  gleich  $\tilde{H}$  mit abseparierter Schwerpunktsbewegung auf  $L^2(\mathbb{R}^{3(N-1)})$ . Wir nehmen an, dass jedes  $\tilde{V}_{ij}$  eine  $-\Delta$ -formbeschränkte Störung auf  $\mathbb{R}^3$  mit relativer Schranke gleich Null ist. Sei  $E \in \sigma_{disc}(H)$  ein Eigenwert mit  $H\psi = E\psi$ . Dann ist  $\psi \in \mathcal{D}(e^{ar})$  für ein  $a > 0$ , wobei  $r = \left(\sum_{j=1}^{3(N-1)} x_j^2\right)^{1/2}$  bezüglich einer Menge von Koordinaten in  $\mathbb{R}^{3(N-1)}$ .*

**BEWEIS.** Da

$$e^{ar} \leq \exp\left(a\sqrt{3(N-1)} \max |x_j|\right) \leq \sum_{j=1}^{3(N-1)} \exp\left(a\sqrt{3(N-1)} |x_j|\right) \quad (12.16)$$

ist, müssen wir lediglich zeigen, dass  $\psi$  ein analytischer Vektor für jeden Orts-Operator  $x_j$  ist.

Wir schreiben nun  $H = H_0 + V$  mit  $H_0 = t(p)$ , wobei  $p$  das  $3(N-1)$ -Tupel von Operatoren  $p_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j}$  sein soll und ganz allgemein  $t(v) = \sum_{i < j} a_{ij} v_i v_j$  und  $\{a_{ij}\}_{i,j}$  eine positiv definite Matrix sind. Die Idee ist es nun die Techniken der dilatationsanalytischen Potentiale, jedoch mit einer anderen Gruppe zu verwenden. Wir fixieren dazu zunächst  $j$  und definieren  $W(\alpha) := e^{i\alpha x_j}$ , sowie

$$H_0(\alpha) := W(\alpha)H_0W(\alpha)^{-1} = t(p_1, \dots, p_j - \alpha, \dots, p_{3(N-1)}) \quad (12.17)$$

und (da  $V$  lediglich ein Multiplikationsoperator ist)

$$V(\alpha) := W(\alpha)VW(\alpha)^{-1} = V. \quad (12.18)$$

Damit haben sowohl  $H_0(\alpha)$ , als auch  $V(\alpha)$  analytische Fortsetzungen auf die gesamte  $\alpha$ -Ebene. Darüberhinaus ist es leicht zu sehen, dass für jedes fixierte  $\alpha$ ,  $\frac{1}{2}H_0 \leq \operatorname{Re}(H_0(\alpha)) + c_\alpha$  ist. Daraus folgt, dass  $H(\alpha) := H_0(\alpha) + V(\alpha)$  eine ganze analytische Familie vom Typ (B) ist (siehe auch Korollar 4.8). Damit können wir die Theorie aus Abschnitt 2 verwenden. Das heißt, es gibt ein  $a > 0$  und Funktionen  $f_1, \dots, f_k$  in  $\{\alpha : |\alpha| < a\}$ , die höchstens algebraische Singularitäten bei  $\alpha = 0$  haben können, das heißt die Zweige von  $f_1(\alpha), \dots, f_k(\alpha)$  sind alle Eigenwerte von  $H(\alpha)$  nahe  $E$ . Man erinnere sich hier auch an die Sätze 4.17 und 4.23. Darüberhinaus gibt es eine projektorwertige, analytische Funktion  $P(\alpha)$  auf  $\{\alpha : |\alpha| < a\}$ , sodass  $\operatorname{Ran}(P(\alpha))$  die Menge der Eigenvektoren von  $H(\alpha)$  mit dazugehörigen Eigenwerten  $f_1(\alpha), \dots, f_k(\alpha)$  ist. Offensichtlich hat  $P(\alpha)$  endlichen Rang. Insbesondere ist für  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $H(\alpha) = W(\alpha)HW(\alpha)^{-1}$  und daher  $f_1(\alpha) = \dots = f_k(\alpha) = E$  und  $W(\alpha)P(0)W(\alpha)^{-1} = P(\alpha)$ . Aufgrund der Analytizität der  $f_i$  sind die  $f_i$  gleich  $E$  und

$$W(\alpha_0)P(\alpha)W(\alpha_0)^{-1} = P(\alpha + \alpha_0) \quad (12.19)$$

wenn  $\alpha_0 \in \mathbb{R}$  mit  $|\alpha| < a$  und  $|\alpha + \alpha_0| < a$ . Dass  $\psi$  dann ein analytischer Vektor von  $x_j$  ist, folgt aus dem folgenden Lemma von O'Connor.  $\square$

lemma:3.121

LEMMA 12.11 (O'Connor). Sei  $W(\alpha) = e^{i\alpha A}$  eine einparametrische unitäre Gruppe (das heißt  $A$  muss nach dem Satz von Stone selbstadjungiert sein) und sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein zusammenhängendes Gebiet mit  $0 \in D$ . Angenommen, dass es auf  $D$  eine projektorwertige, analytische Funktion  $P(\alpha)$  gibt, sodass  $P(0)$  endlichen Rang hat und

$$W(\alpha_0)P(\alpha)W(\alpha_0)^{-1} = P(\alpha + \alpha_0) \quad (12.20)$$

für alle Paare  $\langle \alpha, \alpha_0 \rangle$  mit  $\alpha_0 \in \mathbb{R}$  und  $\alpha, \alpha + \alpha_0 \in D$ , erfüllt. Sei  $\psi \in \operatorname{Ran}(P(0))$ . Dann hat die Funktion  $\psi(\alpha) := W(\alpha)\psi$  eine analytische Fortsetzung von  $D \cap \mathbb{R}$  nach  $D$ . Insbesondere ist  $\psi$  ein analytischer Vektor von  $A$ .

BEWEIS. Sei  $\mathcal{A}_D$  die Menge aller Vektoren  $\varphi$ , für die  $\varphi(\alpha) := W(\alpha)\varphi$  eine analytische Fortsetzung von  $D \cap \mathbb{R}$  nach  $D$  hat. Dann ist  $\mathcal{A}_D$  in dem zugrunde liegenden Hilbertraum, womit  $P(0)[\mathcal{A}_D]$  dicht in  $\operatorname{Ran}(P(0))$  liegt. Da  $P(0)$  endlichen Rang hat, ist  $P(0)[\mathcal{A}_D] = \operatorname{Ran}(P(0))$ . Daher müssen wir lediglich  $P(0)[\mathcal{A}_D] \subseteq \mathcal{A}_D$  zeigen. Sei dazu  $\varphi \in \mathcal{A}_D$  und sei  $\eta(\alpha) = P(\alpha)\varphi(\alpha)$  für  $\alpha \in D$ . Offensichtlich ist  $\eta(\alpha)$  analytisch und für  $\alpha \in D \cap \mathbb{R}$  gilt

$$\eta(\alpha) = P(\alpha)W(\alpha)\varphi = W(\alpha)(P(0)\varphi), \quad (12.21)$$

das heißt  $P(0)\varphi \in \mathcal{A}_D$ .  $\square$

Um genauere Aussagen über die Konstante  $a$  in  $\mathcal{D}(e^{aT})$  zu erhalten, beschäftigen wir uns zunächst ein wenig mit Kinematik.

DEFINITION 12.12. Gegeben seien Teilchen mit Massen  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$  an Punkten  $x_1, \dots, x_N$ . Dann definieren wir folgende kinematische Größen:

- (1) *Gesamtmasse*:  $M = \sum_{i=1}^N \mu_i > 0$
- (2) *Schwerpunkt*:  $R = M^{-1} \sum_{i=1}^N \mu_i x_i \in \mathbb{R}^3$
- (3) *Gyrationsradius*:  $r = \left( M^{-1} \sum_{i=1}^N \mu_i (x_i - R)^2 \right)^{1/2} > 0$

DEFINITION 12.13 (Normale Koordinaten). Sei  $\tilde{H}_0$  ein  $N$ -Teilchen Hamilton-Operator ohne externes Potential und ohne Wechselwirkungen auf  $L^2(\mathbb{R}^{3N})$ . Eine Menge von Koordinaten  $\zeta_1, \dots, \zeta_{N-1}$ , die orthogonal zum Schwerpunkt  $R$  sind, heißt genau dann eine *Menge von normalen Koordinaten*, wenn

$$\tilde{H}_0 = -\frac{1}{2M} \left( \Delta_R + \sum_{i=1}^{N-1} \Delta_{\zeta_i} \right). \quad (12.22)$$

Damit man sieht, dass solche normalen Koordinaten überhaupt existieren, gehen wir zunächst zu Jacobi-Koordinaten  $\xi_1, \dots, \xi_{N-1}$  über, sodass

$$\tilde{H}_0 = -\frac{1}{2M} \Delta_R - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{2\mu_j} \Delta_{\xi_j}. \quad (12.23)$$

Dann definiert man einfach  $\zeta_j := \sqrt{\frac{\mu_j}{M}} \xi_j$ .

Folgende Resultate betreffen die neuen kinematischen Größen.

SATZ 12.14. a) *Der Gyrationradius  $r$  hängt nur von den zum Schwerpunkt orthogonalen Koordinaten  $\{\zeta_i\}_{i=1}^{N-1}$  ab.*

b) *Ist  $\{\zeta_i\}_{i=1}^{N-1}$  eine Menge von normalen Koordinaten, so ist explizit*

$$r = \left( \sum_{i=1}^{N-1} |\zeta_i|^2 \right)^{1/2} \quad (12.24)$$

BEWEIS. Wir bemerken zunächst, dass

$$Mr^2 + MR^2 = \sum_{i=1}^N \mu_i x_i^2 \quad (12.25)$$

ist. Sei  $\eta_i = \left(\frac{\mu_i}{M}\right)^{1/2} x_i$ , sodass

$$\tilde{H}_0 = -\frac{1}{2M} \sum_{i=1}^N \Delta_{\eta_i} \quad (12.26a)$$

und

$$Mr^2 + MR^2 = M \sum_{i=1}^N \eta_i^2 \quad (12.26b)$$

ist. Wechselt man nun Koordinaten von  $\langle \eta_1, \dots, \eta_N \rangle$  zu  $\langle R, \zeta_1, \dots, \zeta_{N-1} \rangle$ , so sieht man anhand der ersten Gleichung, dass  $\langle \zeta_1, \dots, \zeta_{N-1} \rangle$  eine Menge orthogonaler Koordinaten ist für die nach der zweiten Gleichung

$$r^2 + R^2 = R^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \zeta_i^2 \quad (12.27)$$

gilt. □

**theorem:3.125**

SATZ 12.15 (O'Connor–Combes–Thomas). *Sei  $\tilde{H} = \tilde{H}_0 + \sum_{1 \leq i < j \leq N} V_{ij}$  ein  $N$ -Teilchen-Operator auf  $L^2(\mathbb{R}^{3N})$ , wobei jedes  $V_{ij} \in R+(L^\infty)_\epsilon$ , der Rollnik-Klasse, sein soll. Sei  $H$  der Operator auf  $L^2(\mathbb{R}^{3(N-1)})$ , den man durch Abseparation der*

Schwerpunktsbewegung von  $\tilde{H}$  erhält. Sei  $\Sigma = \inf \sigma_{\text{ess}}(H)$  und sei  $\psi$  eine Eigenfunktion von  $H$  mit Eigenwert  $E < \Sigma$ . Dann ist  $\psi \in \mathcal{D}(e^{ar})$ , wobei  $r$  der Gyrationradius ist, wann immer  $a^2 < 2M(\Sigma - E)$  ist.

BEWEIS. Siehe [ReedSimon1978](#) [RS78].  $\square$

Sind die Potentiale sogar dilatationsanalytisch, so kann der exponentielle Abfall auch von Eigenfunktionen bewiesen werden, deren Eigenwerte im wesentlichen Spektrum liegen, bei Schrödingeroperatoren also positiv sind. Dies wird besonders im nächsten Abschnitt wichtig sein.

**theorem:3.126**

SATZ 12.16. Sei  $\tilde{H} = \tilde{H}_0 + \sum_{i < j} V_{ij}$ , wobei jeder Multiplikationsoperator  $V_{ij} \in \mathcal{F}_\beta$  für ein  $\beta > 0$  dilatationsanalytisch sein soll. Dann gelten folgende Aussagen.

- $\psi \in \mathcal{D}(e^{ar})$  für ein  $a > 0$ .
- Ist  $U(\theta)$  eine Familie von Dilatationen und  $\beta_0 = \min\{\beta, \frac{\pi}{2}\}$ , so hat  $U(\theta)\psi := \psi(\theta)$  eine analytische Fortsetzung auf den Streifen  $\{\theta : \text{Im}\theta < \beta_0\}$  und  $\psi(\theta) \in \mathcal{D}(e^{ar})$  für ein  $a > 0$ .
- Ist  $E$  größer als der größte Threshold (also im Kontinuum eingebettet), so kann  $\beta_0$  aus b) als  $\beta_0 = \min\{\beta, \pi\}$  gewählt werden.
- Hat jedes  $V_{ij}(\theta)$  eine Fortsetzung auf den Streifen  $\{\theta : \text{Im}\theta \leq \beta\}$ , die analytisch im Interior des Streifens und stetig auf dem gesamten Streifen ist, und, wenn  $\beta < \frac{\pi}{2}$  (bzw., wenn  $E$  größer als der größte Threshold ist,  $\beta < \pi$ ), dann hat  $\psi(\theta)$  eine Fortsetzung auf diesen Streifen, die analytisch im Interior und stetig auf dem gesamten Streifen ist, sodass  $\psi(\theta) \in \mathcal{D}(e^{ar})$  für ein  $a > 0$ .

BEWEIS. Siehe [ReedSimon1978](#) [RS78].  $\square$

BEMERKUNG 12.17. Es gibt auch von diesem Satz eine „scharfe“ Version, die eine Abschätzung an die Konstante  $a$  liefert.

Schließlich beweisen wir noch punktweise exponentielle Schranken. Diese folgen im Allgemeinen sehr einfach aus den exponentiellen  $L^2$ -Schranken, wenn das Potential in einer hinreichend großen  $M_\sigma$ -Klasse ist.

SATZ 12.18. Sei  $H$  ein  $N$ -Teilchen-Operator auf  $L^2(\mathbb{R}^{3(N-1)})$  mit Potentialen, die in der Klasse  $M_\sigma^{(3)}$  für ein  $\sigma > \frac{3}{2}$  sein sollen (Coulomb ist damit enthalten). Angenommen,  $\psi \in C^\infty(H)$  und  $H^n\psi \in \mathcal{D}(e^{ar})$  für ein  $a$  und alle  $n$ , wobei  $r$  der Gyrationradius ist. Dann gibt es für alle  $\epsilon > 0$  eine Konstante  $c_\epsilon$ , sodass

$$|\psi(\zeta)| \leq c_\epsilon e^{-(a-\epsilon)r} \quad (12.28)$$

für alle  $\zeta$  erfüllt ist. Sind darüberhinaus alle  $V_{ij} \in M_\sigma^{(3)}$ ,  $V_{ij} \in R+(L^\infty)_\epsilon$  und  $\psi$  eine Eigenfunktion zum Eigenwert  $E < \Sigma = \inf \sigma_{\text{ess}}(H)$  (das heißt die Voraussetzungen von Satz [12.15](#) ([O'Connor–Combes–Thomas](#)) sind erfüllt), so ist

$$|\psi(\zeta)| \leq c_a e^{-ar} \quad (12.29)$$

für alle  $a < \sqrt{2M(\Sigma - E)}$ .

BEWEIS. Der Beweis stützt sich auf den Beweis des Paley-Wiener-Satzes, verwendet also Eigenschaften der Fouriertransformation. Wir gehen zunächst in normale Koordinaten über, sodass  $r = \left(\sum_{i=1}^{N-1} |\zeta_i|^2\right)^{1/2}$ . Für  $\varphi \in \mathcal{D}(e^{ar})$  ist auch  $\varphi_\xi := e^{-i\xi\zeta}\varphi(\zeta) \in L^1(\mathbb{R}^{3(N-1)})$  für alle  $\xi \in \mathbb{C}^{3(N-1)}$  mit  $|\text{Im}\xi| < a$ , da  $e^{-br} \in L^2$

für alle  $b > 0$ . Darüberhinaus ist die Abbildung  $\xi \mapsto \varphi_\xi$  als  $L^1$ -Funktion in  $\xi$  analytisch. Daher ist auch die „Fouriertransformierte“

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{3(N-1)/2}} \int \varphi_\xi(\zeta) d\zeta \quad (12.30)$$

analytisch in der Röhre  $\{\xi \in \mathbb{C}^{3(N-1)} : |\xi| < a\}$ . Wegen des Plancherel-Satzes gibt es für alle  $b < a$  eine Konstante  $c_b$  mit

$$\int_{\mathbb{R}^{3(N-1)}} |\hat{\varphi}(\xi + i\kappa)|^2 d\xi < c_b, \quad (12.31)$$

wobei  $|\kappa| \leq b$  sein muss. Wir verwenden nun die Techniken des Beweises vom Satz von Kato und Simon über die Glattheit von Eigenfunktionen. Zunächst erfüllt  $\hat{\varphi}(\xi)$  nach analytischer Fortsetzung die Gleichung

$$\frac{1}{2M} \xi^2 \hat{\varphi}(\xi) + \frac{1}{(2\pi)^{3(N-1)/2}} \int_{\mathbb{R}^{3(N-1)}} \hat{V}(\eta) \hat{\varphi}(\xi - \eta) d\eta = \widehat{H\varphi}(\xi) \quad (12.32)$$

für alle  $\xi$  mit  $|\operatorname{Im}\xi| < a$  und  $\varphi, H\varphi \in \mathcal{D}(e^{ar})$ . Man kann damit zeigen, dass es für alle  $b < a$  eine Konstante  $D_b$  gibt mit

$$\int_{\mathbb{R}^{3(N-1)}} |\hat{\psi}(\xi + i\kappa)| d\xi < D_b, \quad (12.33)$$

wobei wieder  $|\kappa| \leq b$  und  $\psi, H\psi, \dots, H^m\psi \in \mathcal{D}(e^{ar})$  für geeignetes  $m$  sind. Da  $\hat{\psi}(\cdot + i\kappa)$  die Fouriertransformierte von  $e^{\kappa\zeta}\psi(\zeta)$  ist, impliziert die letzte Gleichung, dass  $(\|\phi\|_\infty \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|\hat{\phi}\|_1)$

$$|e^{\kappa\zeta}\psi(\zeta)| \leq \frac{D_b}{(2\pi)^{3(N-1)/2}}, \quad (12.34)$$

wobei  $|\kappa| \leq b$  ist. Bildet man über beide Seiten das Supremum über alle  $\kappa$ , erhält man

$$|e^{br}\psi(\zeta)| \leq \frac{D_b}{(2\pi)^{3(N-1)/2}}, \quad (12.35)$$

wobei  $b = a - \epsilon < a$  für ein  $\epsilon > 0$  ist.  $\square$

**KOROLLAR 12.19.** *Sei  $H$  ein atomarer Hamilton-Operator. Dann erfüllt jede Eigenfunktion  $\psi$  zu einem Eigenwert aus dem diskreten Spektrum die punktweise Abschätzung*

$$|\psi(\zeta)| \leq c_a e^{-ar} \quad (12.36)$$

für ein  $a > 0$ .

### 12.3. Exponentieller Abfall von Eigenfunktionen von Ein-Teilchenoperatoren.

In [Agm82] entwickelte Agmon robuste Methoden, mit denen er den exponentiellen Abfall von Eigenfunktionen von Schrödingeroperatoren zeigen konnte, sofern der zugehörige Eigenwert unterhalb des wesentlichen Spektrums liegt. Für einen Überblick über weitere Ergebnisse verweisen wir auf Simon [Sim]. In diesem Abschnitt halten wir folgendes Resultat von Frank [RS21, Appendix B] fest, welches den exponentiellen Abfall unter minimalen Bedingungen zeigt. Im Folgenden sei

$$E_\infty := \inf \sigma_{\text{ess}}(-\Delta + V) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad (12.37)$$

das Infimum des wesentlichen Spektrums des Schrödingeroperators  $-\Delta + V$ , wann immer er sinnvoll definiert ist.

expdecayminimalassum

**SATZ 12.20.** Sei  $V$  reellwertig und messbar sodass  $V_+ \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$  und  $V_-$  relativ  $-\Delta$ -formbeschränkt mit Formschranke  $< 1$  ist. Dann gibt es für jedes  $E' < E_\infty$  eine Konstante  $C_{E'} < \infty$ , sodass für alle  $E \leq E'$  und jede Eigenfunktion  $\psi \in \mathcal{D}(-\Delta + V)$  mit  $(-\Delta + V)\psi = E\psi$  gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{2\sqrt{E'-E}|x|} (|\nabla\psi|^2 + V_+|\psi|^2 + (E' - E)|\psi|^2) dx \leq C_{E'} \|\psi\|_2^2. \quad (12.38)$$

- BEMERKUNGEN 12.21.** (1) Wir betonen, dass  $E_\infty = \infty$  erlaubt ist (wie z.B. beim harmonischen Oszillator). In diesem Fall kann  $E'$  beliebig groß gewählt werden. Für  $E_\infty < \infty$  kann der Exponent  $\sqrt{E' - E}$  als jede beliebige Zahl  $< \sqrt{E_\infty - E}$  gewählt werden.
- (2) Unter den gegebenen Annahmen ist  $\psi$  nicht notwendigerweise (wesentlich) beschränkt. Aus diesem Grund kann keine Aussage über einen *punktweisen* exponentiellen Abfall gemacht werden. Der exponentielle Abfall wird stattdessen im "Energieform"-Sinne gemessen.

Der Beweis von Satz <sup>expdecayminimalassum</sup> 12.20 beruht auf folgender geometrischer Charakterisierung des Infimums des wesentlichen Spektrums von Persson <sup>Persson1960</sup> [Per60]. Für ein Kompaktum  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  definieren wir

$$E_1(-\Delta + V|_{\mathbb{R}^d \setminus K}) := \inf \left\{ \frac{\langle \psi, (-\Delta + V)\psi \rangle}{\|\psi\|^2} : \psi \in \mathcal{D}(-\Delta + V), \psi|_K = 0 \right\}. \quad (12.39)$$

Offenbar ist  $E_1(-\Delta + V|_{\mathbb{R}^d \setminus K})$  nicht-fallend, wenn  $K$  vergrößert wird. Ergo existiert  $\sup_{K \subseteq \mathbb{R}^d \text{ kompakt}} E_1(-\Delta + V|_{\mathbb{R}^d \setminus K})$  und nimmt einen Wert in  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  an. Wir haben dann folgende Charakterisierung von  $E_\infty$ .

**SATZ 12.22.** Sei  $V$  reellwertig und messbar sodass  $V_+ \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$  und  $V_-$  relativ  $-\Delta$ -formbeschränkt mit Formschranke  $< 1$  ist. Dann ist das Infimum des wesentlichen Spektrums von  $-\Delta + V$  durch

$$E_\infty = \sup_{K \subseteq \mathbb{R}^d \text{ kompakt}} E_1(-\Delta + V|_{\mathbb{R}^d \setminus K}) \quad (12.40)$$

gegeben.

### 13. Die Einfachheit des Grundzustandes

In diesem Abschnitt betrachten wir einen selbstadjungierten Operator  $H$ , der von unten beschränkt ist und dessen tiefster Punkt im Spektrum ein Eigenwert ist. Wir werden dann Kriterien finden, aus denen folgt, dass der zugehörige Eigenraum eindimensional ist und die zugehörige Eigenfunktion echt positiv ist. Der tiefste Eigenwert wird *Grundzustandsenergie* und die zugehörige Eigenfunktion wird *Grundzustand* genannt.

In der Praxis werden die gefundenen Kriterien mit Hilfe der Störungstheorie verifiziert. Das mag auf den ersten Blick etwas erstaunen, da wir an Schrödingeroperatoren  $-\Delta + V$  auf  $\mathbb{R}^d$  interessiert sind,  $-\Delta$  jedoch gar keine Eigenfunktionen besitzt. Die Resultate werden daher oftmals lauten: „Entweder hat  $H$  keine Eigenwerte unterhalb des wesentlichen Spektrums, oder  $H$  hat eine entartete Grundzustandsenergie, dessen zugehörige Eigenfunktion echt positiv ist.“

Wie immer ist es dabei einfacher die beschränkten Operatoren  $e^{-tH}$  und  $(H + 1)^{-1}$  anstatt  $H$  selbst zu untersuchen. Ist  $E_0$  die Grundzustandsenergie, so ist

$e^{-tE_0}$  der größte Eigenwert von  $e^{-tH}$ . Wir beginnen mit der Untersuchung eines beschränkten Operators  $A$  und seinem größten Eigenwert.

DEFINITION 13.1. Sei  $\langle M, \mu \rangle$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum.

- (i)  $f \in L^2(M, d\mu)$  heißt genau dann *positiv*, wenn  $f$  fast überall nicht-negativ und nicht die Null-Funktion ist.
- (ii)  $f \in L^2(M, d\mu)$  heißt genau dann *echt positiv*, wenn  $f(x) > 0$  fast überall ist.
- (iii) Ein beschränkter Operator  $A$  auf  $L^2$  heißt genau dann *positiv-erhaltend*, wenn  $Af$  positiv für  $f$  positiv ist.
- (iv) Ein beschränkter Operator  $A$  auf  $L^2$  heißt genau dann *positiv-verbessernd*, wenn  $Af$  echt positiv ist für  $f$  positiv.
- (v) Ein beschränkter Operator  $A$  auf  $L^2$  heißt genau dann *ergodisch*, wenn  $A$  positiv-erhaltend ist und es für positive  $u, v \in L^2$  ein  $n > 0$  gibt, sodass  $(u, A^n v) \neq 0$  ist.

BEMERKUNG 13.2. (i) Per Definition ist die Null-Funktion nicht positiv.

- (ii) Jede positiv-verbessernde Abbildung ist auch ergodisch. Dies folgt aus folgender Umformulierung:  $g \in L^2(M, d\mu)$  ist genau dann streng positiv, wenn  $(f, g) > 0$  für alle positive Funktionen  $f$  gilt. Ein beschränkter Operator  $A$  ist also genau dann positiv-verbessernd auf  $L^2(M, d\mu)$ , wenn  $(u, Av) > 0$  für alle positiven Funktionen  $u, v \in L^2(M, d\mu)$  wahr ist. Damit ist  $A$  ergodisch mit  $n = 1$ .

BEISPIEL 13.3. Sei  $A = (-\Delta + 1)^{-1}$  auf  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . Bekanntermaßen ist

$$(f, Ag) = \int \overline{f(x)g(x)} \frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|} dx dy. \quad (13.1)$$

Da  $\frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|} > 0$  echt positiv ist, ist  $A$  positiv-verbessernd. Analog sieht man, dass auch  $e^{t\Delta}$  auf  $L^2(\mathbb{R}^n)$  positiv-verbessernd ist, denn nach [\[LiebLoss2001\]](#) [\[LL01\]](#) ist nach Polarisation (Formel (3) in 7.12)

$$(f, g) + (f, e^{-t(-\Delta)^s} g) = \int \frac{(\overline{f(x) - f(y)})(g(x) - g(y))}{(t^2 + |x - y|^2)^{(d+2s)/2}} dx dy, \quad (13.2)$$

insbesondere ist (Formel (4) in 7.9)

$$e^{t\Delta}(x, y) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{4t}\right). \quad (13.3)$$

Das Hauptwerkzeug dieses Abschnitts ist folgendes Resultat.

SATZ 13.4. Sei  $A$  ein beschränkter, positiver Operator auf  $L^2(M, d\mu)$ , der die Positivität erhält und einen Eigenwert  $\|A\|$  hat. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- a)  $\|A\|$  ist ein einfacher Eigenwert und der zugehörige Eigenvektor ist echt positiv.
- b)  $A$  ist ergodisch.
- c)  $L^\infty(M) \cup \{A\}$  wirkt irreduzibel, das heißt kein nicht-trivialer, abgeschlossener Unterraum ist links-invariant unter  $A$  und jedem beschränkten Multiplikationsoperator.

BEWEIS. Wir zeigen  $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow a)$ .

a)  $\Rightarrow$  b): Wir definieren  $B := \frac{A}{\|A\|}$  mit zugehörigen Spektralprojektionen  $\{P_\Omega\}$ . Da  $x^n \rightarrow 0$  für  $0 \leq x < 1$  und  $x^n \rightarrow 1$  für  $x = 1$ , folgt aus dem Funktionalkalkül, dass

$$s - \lim_{n \rightarrow \infty} B^n = P_{\{1\}}. \quad (13.4)$$

Da wir angenommen haben, dass  $A$  positiv ist, ist  $P_{\{1\}} = (\psi, \cdot)\psi$  für eine positive Funktion  $\psi$ . Daher gilt für alle positiven  $u, v$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u, B^n v) = (u, \psi)(\psi, v) > 0, \quad (13.5)$$

womit gezeigt ist, dass  $B$ , und damit auch  $A$ , ergodisch ist.

b)  $\Rightarrow$  c): Angenommen c) wäre nicht wahr, das heißt  $L^\infty(M) \cup \{A\}$  wirkt nicht irreduzibel. Dann gibt es eine nicht-triviale, abgeschlossene Teilmenge  $S$ , die unter  $L^\infty(M) \cup \{A\}$  links-invariant ist. Für beliebiges  $f \in S$  definieren wir  $h = \frac{\bar{f}}{|f|} \in L^\infty(M)$ . Dann ist auch  $|f| = hf \in S$ . Analog ist für  $g \in S^\perp$  auch  $|g| \in S^\perp$ . Wir wählen nun  $f \in S$  und  $g \in S^\perp$  so, dass  $f \neq 0 \neq g$  ist. Da  $A$  die Teilmenge  $S$  invariant lässt, ist  $A^n |f| \in S$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und damit ist  $(|g|, A^n |f|) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Damit ist  $A$  nicht ergodisch, was der Voraussetzung widerspricht.

c)  $\Rightarrow$  a): □

Um diese Äquivalenzen auf den Grundzustand anwenden zu können, bemerken wir zunächst, das man entweder die Resolvente, oder die erzeugte Halbgruppe des Operators verwenden kann.

LEMMA 13.5. *Sei  $H$  ein von unten beschränkter, selbstadjungierter Operator und  $E := \inf \sigma(H)$ . Dann ist  $e^{-tH}$  genau dann positiv-erhaltend für alle  $t > 0$ , wenn  $(H - \lambda)^{-1}$  für alle  $\lambda < E$  positiv-erhaltend ist.*

BEWEIS. Die Behauptung folgt aus den Formeln

$$(H - \lambda)^{-1} \varphi = \int_0^\infty e^{\lambda t} e^{-tH} \varphi dt \quad (13.6a)$$

$$e^{-tH} \varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n} H\right)^{-n} \varphi, \quad (13.6b)$$

die sowohl für Halbgruppen, als auch für selbstadjungierte Operatoren mittels des Funktionalkalküls, hergeleitet werden können. □

Wir sind nun in der Lage das Hauptresultat für das Einteilchenproblem aufzustellen.

SATZ 13.6. *Sei  $H$  ein von unten beschränkter, selbstadjungierter Operator auf  $L^2(M, d\mu)$  mit  $E := \inf \sigma(H)$ . Sei  $e^{-tH}$  positiv-erhaltend für alle  $t > 0$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- a)  $E$  ist ein einfacher Eigenwert und der Grundzustand ist echt positiv.
- b)  $(H - \lambda)^{-1}$  ist für ein  $\lambda < E$  ergodisch.
- c)  $e^{-tH}$  ist für ein  $t > 0$  ergodisch.
- d)  $(H - \lambda)^{-1}$  ist positiv-erhaltend für ein  $\lambda < E$ .
- e)  $e^{-tH}$  ist positiv-erhaltend für ein  $t > 0$ .

BEWEIS. Wegen Satz [NOCH EINFUEGEN] sind a), b), c) äquivalent und man hat die Implikationen d)  $\Rightarrow$  b) und e)  $\Rightarrow$  c), weshalb es verbleibt c)  $\Rightarrow$  d) und c)  $\Rightarrow$  e) zu zeigen.

c)  $\Rightarrow$  d): Seien  $u, v$  positiv. Da  $e^{-tH}$  für ein  $t > 0$  ergodisch ist, ist  $(u, e^{-sH}v) > 0$  für ein  $s > 0$ . Da  $(u, e^{-sH}v)$  stetig ist, gibt es  $\delta > 0$ , sodass auch  $(u, e^{-tH}v) > 0$  für  $t \in (s - \delta, s + \delta)$ . Daher, dem Mittelwertsatz und dem Funktionalkalkül aus obigem Lemma ist

$$(u, (H - \lambda)^{-1}v) = \int_0^\infty e^{\lambda s} (u, e^{-sH}v) ds > 0. \quad (13.7)$$

c)  $\Rightarrow$  e): Seien  $u, v$  positiv und  $B := \{t > 0 : (u, e^{-tH}v) > 0\}$ . Da  $B \neq \emptyset$  und  $(u, e^{-tH}v)$  in einer Umgebung um die positive reelle Achse analytisch ist, kann  $(0, \infty) \setminus B$  nur 0 als Häufungspunkt haben. Insbesondere enthält  $B$  beliebig kleine Zahlen. Wenn wir zeigen können, dass aus  $t > s$  und  $s \in B$  folgt, dass auch  $t \in B$  ist, so folgte  $B = (0, \infty)$ . Dazu fixieren wir  $s \in B$ . Dazu erinnern wir uns an die Halbgruppeneigenschaft von  $e^{-tH}$  mit  $t = s + \tau$ . Ist  $(u, e^{-sH}v) > 0$ , so ist  $u(\cdot)(e^{-sH})(\cdot)$  nicht die Null-Funktion. Sei  $w := \min\{u, e^{-sH}v\}$ , dann ist auch  $w(m)$  nicht identisch Null. Da  $e^{-\tau H}$  positiv-erhaltend ist (da  $e^{-\tau H}$  ergodisch ist), gilt

$$(u, e^{-\tau H}(e^{-sH}v)) \geq (u, e^{-\tau}w) = (e^{-\tau H}u, w) \geq (e^{-\tau H}w, w) = \|e^{-\tau H/2}w\| > 0. \quad (13.8)$$

Hierbei haben wir verwendet, dass  $w$  positiv ist und auch  $e^{-\tau H/2}$  positiv-erhaltend ist, um  $e^{-\tau H/2}w \neq 0$  zu folgern. Damit ist auch  $s \in B$  und  $\tau > 0$  impliziert, dass  $s + \tau \in B$ .  $\square$

Um dieses Resultat anwenden zu können, verwendet man oft zunächst Störungstheorie, um das Problem zu vereinfachen.

**SATZ 13.7.** *Seien  $H_0$  und  $H$  halbbeschränkte, selbstadjungierte Operatoren auf  $L^2(M, d\mu)$ . Angenommen, es existiert eine Folge von beschränkten Multiplikationsoperatoren  $V_n$ , sodass  $H_0 + V_n$  gegen  $H$  im starken Resolventen-Sinne konvergiert und  $H - V_n$  gegen  $H_0$  im starken Resolventen-Sinne konvergiert. Weiter nehmen wir an, dass sowohl  $H - V_n$ , als auch  $H_0 + V_n$  gleichmäßig von unten beschränkt sind. Dann gilt:*

- a)  $e^{-tH}$  ist genau dann positiv-erhaltend, wenn  $e^{-tH_0}$  Positivitäts-erhaltend ist.  
b)  $L^\infty(M, d\mu) \cup \{e^{-tH}\}$  wirkt genau dann irreduzibel auf  $L^2(M, d\mu)$ , wenn  $L^\infty(M, d\mu) \cup \{e^{-tH}\}$  auf  $L^2(M, d\mu)$  irreduzibel wirkt.

**BEWEIS.** Wegen der Trotter-Produktformel und der Stetigkeit des Funktionalkalküls ist

$$e^{-tH} = s - \lim_{n \rightarrow \infty} \left( s - \lim_{m \rightarrow \infty} [e^{-tH_0/m} e^{-tV_n/m}]^m \right) \quad (13.9a)$$

$$e^{-tH_0} = s - \lim_{n \rightarrow \infty} \left( s - \lim_{m \rightarrow \infty} [e^{-tH/m} e^{+tV_n/m}]^m \right). \quad (13.9b)$$

Da  $e^{-tH_0}$  und  $e^{\pm tV_n/m}$  jeweils positiv-erhaltend sind, folgt a). Darüberhinaus folgt aus den beiden Formeln und dem Fakt, dass  $e^{\pm tV_n/m} \in L^\infty(M)$ , dass jede Teilmenge, die unter  $e^{-tH_0}$  und  $L^\infty(M)$  links-invariant ist, auch unter  $e^{-tH}$  links-invariant ist. Die umgekehrte Richtung folgt trivialerweise.  $\square$

Wir können nun Satz [NOCH EINFUEGEN] auf Schrödingeroperatoren und räumlich abgeschnittene  $P(\varphi)_2$ -Hamilton-Operatoren anwenden.

**SATZ 13.8.** *Sei  $H$  ein Hamilton-Operators eines  $N$ -Teilchen-Schrödinger-Systems mit entfernter Schwerpunktsmasse. Weiter nehmen wir an, dass die Potentiale*

$V_{ij} \in R + (L^\infty)_\epsilon$  sind. Ist dann  $\inf \sigma(H)$  ein Eigenwert, so ist dieser nicht-entartet und die zugehörige Grundzustandswellenfunktion ist echt positiv.

BEWEIS. Wegen den Sätzen [NOCH EINFUEGEN] müssen wir lediglich zeigen, dass  $e^{-tH}$  positiv-erhaltend ist und  $L^\infty(\mathbb{R}^{3(N-1)}) \cup \{e^{-tH}\}$  irreduzibel wirkt. Wegen des Beispiels zu Beginn des Abschnitts und Satz [NOCH EINFUEGEN] ist dies für  $e^{-tH_0}$  wahr. Definiert man

$$V_{ij}^{(n)}(x) := \begin{cases} V_{ij}(x) & \text{für } |V_{ij}(x)| \leq n \\ n & \text{für } V_{ij}(x) > n \\ -n & \text{für } V_{ij}(x) < -n, \end{cases} \quad (13.10)$$

so weist man leicht nach, dass  $V_{ij}^{(n)} \rightarrow V_{ij}$  in der Rollnik-Norm konvergiert. Wegen Satz 2.17 Teil a/(iv) theorem: A23 konvergieren  $H_0 + \sum V_{ij}^{(n)} \rightarrow H$  und  $H - \sum V_{ij}^{(n)} \rightarrow H_0$  im Norm-Resolventen-Sinne. Damit ist Satz [NOCH EINFUEGEN] anwendbar und die Behauptung folgt.  $\square$

KOROLLAR 13.9.  $H$  erfülle obige Bedingungen und es gebe ein  $\psi$ , sodass  $H\psi = E\psi$  mit  $E = \inf \sigma(H)$ . Sei  $U$  ein positiv-erhaltender unitärer Operator, der mit  $H$  kommutiert. Dann gilt  $U\psi = \psi$ .

BEWEIS. Da  $[U, H] = 0$ , ist  $H(U\psi) = EU\psi$ . Da  $E$  nicht entartet ist, ist  $U\psi = \alpha\psi$  mit  $\alpha = 1$ , da  $\psi$  positiv und  $U$  unitär und positiv-erhaltend ist.  $\square$

- BEMERKUNG 13.10. (1) Sind beispielsweise alle  $V_{ij}$  sphärisch symmetrisch und  $\inf \sigma(H)$  ist ein Eigenwert, so ist die Grundzustandswellenfunktion invariant unter Rotationen und Reflexionen.
- (2) Der letzte Satz behandelt lediglich den tiefsten Eigenwert von  $H$  als Operator auf dem gesamten  $L^2(\mathbb{R}^{3(N-1)})$ . Kommutiert also  $H$  mit einer Familie  $\mathcal{P}$  von Permutationen der  $N - 1$  Koordinaten und restringieren wir das Problem auf einen Unterraum von  $L^2(\mathbb{R}^{3(N-1)})$ , der eine gewisse Permutationssymmetrie aufweist, so kann der tiefste Eigenwert des restringierten Operators entartet sein. Betrachten wir nicht den Teilraum, der punktweise von  $\mathcal{P}$  invariant gelassen wird, so ist wegen des obigen Korollars der Grundzustand des restringierten Operators ein angeregter Zustand des nicht-restringierten Operators. Hieraus folgt, dass Grundzustände von Bose-Systemen immer nicht-entartet sind, wohingegen Grundzustände von Fermi-Systemen entartet sein können.

Die Resultate für den Grundzustand sind auch für lokalisierende Potentiale wahr.

SATZ 13.11. Sei  $V \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^m)$  positiv und erfülle  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$ . Dann hat  $-\Delta + V$  einen nicht-entarteten, echt positiven Grundzustand.

BEWEIS. Wie wir im übernächsten Abschnitt sehen werden, hat der Operator unter diesen Bedingungen an das Potential nur diskretes Spektrum, das heißt  $\inf \sigma(H)$  ist sicher ein Eigenwert. Der Beweis ist dann analog zu dem von Satz [NOCH EINFUEGEN] mit einer Ausnahme. Sei  $V_n := \min\{V, n\}$ . Dann sind  $-\Delta$ ,  $-\Delta + V$ ,  $-\Delta + V_n$  und  $-\Delta + (V - V_n)$  alle auf  $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$  wesentlich selbstadjungiert. Darüberhinaus theorem: A23 konvergiert  $V_n\psi \rightarrow V\psi$  in  $L^2$  für alle  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ . Damit kann man Satz 2.17, Teil b/(i) verwenden, der uns starke Resolventen-Konvergenz gibt.  $\square$

Sollte  $V$  sehr singular am Ursprung sein, so kann  $-\Delta + V$ , aufgefasst als Formsumme, einen entarteten Grundzustand haben.

SATZ 13.12. Sei  $G$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  mit Maß Null und sei  $V \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus G)$  mit  $V \geq 0$ . Sei  $H = -\Delta + V$  durch die Summe der quadratischen Formen definiert. Dann gilt:

- a) Ist  $\mathbb{R}^n \setminus G$  zusammenhängend und ist  $\inf \sigma(H)$  ein Eigenwert, so ist dieser einfach und die zugehörige Grundzustandswellenfunktion ist echt positiv.
- b) Ist  $\mathbb{R}^n \setminus G$  nicht zusammenhängend, so kann  $V$  so gewählt werden, dass  $H$  einen entarteten Grundzustand hat.

s:absenceposeig

**14. Die Abwesenheit positiver Eigenwerte und  $\sigma_{pp}(H) = \sigma_{disc}(H)$**

Wir widmen uns nun der Frage, ob es möglich ist, dass positive Eigenwerte im wesentlichen Spektrum von Schrödinger-Operatoren eingebettet sein können, sprich, ob es  $\lambda > 0$  gibt mit  $\lambda \in \sigma_{pp} \cap \sigma_{ac}$ . Um diese beantworten zu können, wir sehr genaue Annahmen über das System benötigen.

Intuitiv sollte es in physikalischen Systeme keine eingebetteten Eigenwerte geben. Man könnte folgendes System betrachten: wir haben ein Potential  $V(x)$ , welches im Unendlichen verschwindet. Von der klassischen Physik wissen wir, dass, wenn wir eine Potential-Barriere aufstellen, die größer als die Energie des Teilchens ist, dass das Teilchen wegen Energieerhaltung reflektiert wird. Von der Quantenmechanik wissen wir, dass Teilchen durch endliche Potential-Barrieren tunneln können (die Wahrscheinlichkeit das Teilchen hinter der Barriere zu finden ist umso größer, je höher die Energie des Teilchens ist), weshalb man meinen könnte, dass es keine gebundenen Zustände mit positiver Energie geben kann. Diese Intuition ist jedoch falsch. Wir betrachten daher das berühmte Beispiel von Wigner und Neumann.

BEISPIEL 14.1 (Wigner–Von Neumann Potential). Wir wollen im Folgenden ein Potential  $V$  finden, sodass es ein  $\psi \in L^2$  gibt, das  $(-\Delta + V)\psi = \psi$  erfüllt. Wir versuchen dazu  $\psi$  zu erraten. Ist  $u$  sphärisch symmetrisch und  $u(r) = r\psi(r)$ , dann erfüllt  $-u'' + Vu = u$  bzw. das Potential  $V = 1 + u''u^{-1}$ . Damit  $V$  im Unendlichen verschwindet, muss  $u''u^{-1}$  gegen  $-1$  im Unendlichen konvergieren. Dies motiviert den Ansatz  $u(r) = w(r) \sin(r)$ . Damit ist

$$V(r) = \frac{w''(r)}{w(r)} + 2\frac{w'(r)}{w(r)} \cot(r). \tag{14.1}$$

Damit  $V$  nicht singular ist, muss  $w'$  an den Polen von  $\cot(r) = \sin(2r)/(2\sin(r)^2)$  verschwinden. Außerdem muss  $w \in L^2$  sein, damit  $\psi \in L^2$ . Wir machen daher den Ansatz  $w = \frac{1}{(1+g(r)^2)}$ . Da der Zähler von  $w'$  wie  $2gg' = (g^2)'$  geht und dieser gerade  $\sin(r)^2$  (vom  $\cot(r)$ ) eliminieren muss, wählen wir

$$g(r) = 4 \int_0^r \sin^2 x dx = 2r - \sin(2r). \tag{14.2}$$

Mit dieser Wahl von  $w$  und  $g$  ist also

$$V(r) = -32 \sin(r) \frac{g(r)^3 \cos r - 3g(r)^2 \sin^3 r + g(r) \cos r + \sin^3 r}{(1 + g(r)^2)^2} \tag{14.3}$$

und  $V$  hat die Eigenschaft, dass  $-\Delta + V$  einen Eigenwert bei  $+1$  mit zugehörigem Eigenvektor

$$\psi(r) = \frac{\sin(r)}{r(1+g(r)^2)} \quad (14.4)$$

hat. Gleichzeitig ist  $V$  beschränkt und verschwindet im Unendlichen, weshalb  $[0, \infty) \subseteq \sigma(-\Delta + V)$  mit Weyls Satz.

Wir bemerken, dass  $V$  der Asymptotik

$$V(r) = -8 \frac{\sin(2r)}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}) \quad (14.5)$$

für  $r \rightarrow \infty$  genügt. Das heißt, dass  $V$  im Unendlichen oszilliert und langsam abfällt. Wir werden bald sehen, dass diese beiden Eigenschaften eine kritische Rolle bei der Entstehung von positiven Eigenwerten ist.

Dieses Beispiel wurde auf beliebig hohe Dimensionen beispielsweise von Frank und Simon [\[FS17, Theorem 2.2\]](#) verallgemeinert.

Warum war die eingangs genannte Intuition nun falsch? Der kritische Aspekt ist offenbar das oszillatorische Verhalten von  $V$  insbesondere im Unendlichen. Wir wissen bereits, dass quantenmechanische Teilchen an Huppeln reflektiert werden.  $V$  ist nun derart konstruiert worden, dass diese Reflektionen für besondere Muster von stehenden Wellen (der zu einem Eigenwert gehörenden Eigenfunktion) in einer kohärenten Weise auftreten. Diese Interpretation suggeriert, dass das Auftreten positiver Eigenwerte recht unüblich ist und detailliert von den „Kohärenzeigenschaften“ des Potentials abhängt. Dies bedeutet aber auch, dass es schwer werden wird simple und allgemeine Bedingungen zu formulieren, die garantieren, dass es keine gebundenen Zustände mit positiven Energien geben wird.

SATZ 14.2 (Ionescu–Jerison [\[IJ03\]](#)). *Für alle  $d \in \{2, 3, \dots\}$  gibt es eine Folge von Potentials  $V_n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sodass 1 ein Eigenwert von  $-\Delta + V_n$  in  $L^2(\mathbb{R}^d)$  ist. Weiterhin erfüllen die Potentiale*

$$|V_n(x)| \lesssim \frac{1}{n + |x_1| + |x'|^2}$$

und insbesondere  $\|V_n\|_p \rightarrow 0$  für alle  $p > (d+1)/2$ .

Die Idee ist es wieder ein Potential zu finden, das auch für große Abstände noch oszilliert. Das Beispiel zeigt aber, dass es genügt, dass diese Oszillationen nur in einer Richtung stattfinden. Insbesondere zeigt das Theorem, dass es, egal wie klein das Potential ist, es immer einen eingebetteten Eigenwert geben wird. Wir bemerken, dass die Grenze  $p > (d+1)/2$  scharf ist, da Koch und Tataru [\[KT06\]](#) tatsächlich die Abwesenheit eingebetteter Eigenwerte für  $V \in L^{d/2+\gamma}$  mit  $\gamma \in (0, 1/2)$  gezeigt haben. Die Abwesenheit positiver Eigenwerte für  $\gamma = 0$  in  $d \geq 3$  wurde von Ionescu und Jerison [\[IJ03\]](#) gezeigt.

BEWEIS. Wir folgen der Vereinfachung von Frank–Simon [\[FS17, Theorem 2.1\]](#).

Wie beim Wigner–Neumann-Beispiel wollen wir  $V_n$  so finden, dass  $(-\Delta + V_n)\psi = \psi$ . Ähnlich wie vorhin machen wir den Ansatz  $\psi(x) = w_n(x) \sin(x_1)$  und erhalten

$$-\Delta\psi = \psi - 2\partial_1 w_n(x) \cos(x_1) - (\Delta w_n) \sin(x_1),$$

sprich, formal würden wir

$$V_n(x) = -\frac{(-\Delta - 1)\psi}{\psi} = 2\frac{\partial_1 w_n}{w_n} \cot(x_1) + \frac{\Delta w_n}{w_n}$$

wählen. Wir finden nun  $w_n$  so, dass

- (1)  $\partial_1 w_n$  an den Polen von  $\cot(x_1) = \sin(2x_1)/(1 - \cos(2x_1))$  verschwindet,
- (2)  $w \in L^2$ , womit auch  $\psi \in L^2$ , und
- (3)  $|V_n(x)| \lesssim \frac{1}{n+|x_1|+|x'|^2}$ . Dies zeigt insbesondere  $V_n \in L^p(\mathbb{R}^d)$  mit  $p > (d+1)/2$  und, durch Skalieren  $x_1 \mapsto nx_1$ ,  $x' \mapsto n^{1/2}x'$ , dass  $\|V_n\| \lesssim n^{-1+(d+1)/(2p)} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Wir machen daher den Ansatz

$$w_n(x) = (n^2 + g(x_1)^2 + |x'|^4)^{-\alpha},$$

wobei  $\alpha$  so gewählt wird, dass  $w \in L^2$ . Damit der Nenner von  $\cot(x_1) = \sin(2x_1)/(1 - \cos(2x_1)) = \sin(2x_1)/(2 \sin(x_1)^2)$  eliminiert wird, brauchen wir  $2g(x_1)g'(x_1) = (g(x_1)^2)' = \sin(x_1)^2$ . (Dies steckt im Zähler von  $\partial_1 w_n(x)$ .) Dies motiviert also

$$g_n(x_1) = 4 \int_0^{x_1} \sin^2 y \, dy = 2x_1 - \sin(2x_1).$$

Wir verifizieren nun die obigen Bedingungen an  $w_n$ .

- (1) Dass  $\partial_1 w_n$  bei den Polen von  $\cot(x_1)$  verschwindet, haben wir gerade bei der Konstruktion von  $g$  besprochen.
- (2) Die  $L^2$ -Norm von  $w_n$  ist

$$\|w_n\|^2 = 2|\mathbb{S}^{d-2}| \int_0^\infty dx_1 (n^2 + g(x_1)^2)^{-2\alpha+(d-1)/2} \int_0^\infty dr \frac{r^{d-2}}{(1+r^4)^{2\alpha}}$$

und diese ist endlich für  $\alpha > d/4 > 1/2$ .

- (3) Wir zeigen schließlich die behauptete punktweise Schranke. Ausrechnen liefert

$$\begin{aligned} V_n(x) &= -\frac{4\alpha}{m_n} gg' \cot(x_1) + \frac{4\alpha(\alpha+1)}{m_n^2} (g^2(g')^2 + 4|x'|^6) \\ &\quad - \frac{2\alpha}{m_n} ((g')^2 + gg'' + 2(d+1)|x'|^2), \end{aligned}$$

wobei

$$m_n := n^2 + g(x_1)^2 + |x'|^4.$$

Wir bemerken dabei nochmals, dass  $g' \cot(x_1) = 4 \sin(x_1) \cos(x_1)$  beschränkt ist. Außerdem sind  $|g|, |x'|^2 \leq m_n^{1/2}$  und  $|g'|, |g''| \lesssim 1$ , weshalb

$$|V_n(x)| \lesssim m_n^{-1/2} + m_n^{-1}.$$

Für  $n \geq 1$  ist  $m_n^{-1} \leq n^{-1} m_n^{-1/2} \leq m_n^{-1/2}$ , sprich

$$|V_n(x)| \lesssim m_n^{-1/2} \sim \frac{1}{n + |x_1| + |x'|^2},$$

was behauptet war. □

BEISPIEL 14.3 (Eingebettete Eigenwerte für  $(-\Delta)^m + V$ ). Wir folgen Feng et al [Feng et al 2020, Abschnitt 7].

Wir betrachten den polyharmonischen Operator  $H = (-\Delta)^m + V$  mit  $m \in \{2, 4, 6, \dots\}$  in  $L^2(\mathbb{R}^d)$  mit  $d \geq 3$  und behaupten, dass bereits kompakt getragene Potentiale zu eingebetteten Eigenwerten führen. Wie vorhin suchen wir  $V$  und  $\psi > 0$  so, dass  $H\psi = \psi$ , sprich,

$$V = \frac{\psi - (-\Delta)^m \psi}{\psi}.$$

Für ein beliebiges, radiales  $0 < \psi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  und ein radiales  $\phi > 0$ , welches  $\phi(x) = (-\Delta)^m \phi(x)$  für  $|x| > r_0 > 0$  erfüllt, machen wir den Ansatz

$$\psi(x) = \begin{cases} \phi(|x|) & \text{für } |x| > r_0, \\ \psi_0(|x|) & \text{für } |x| \leq r_0. \end{cases}$$

Dies würde zeigen, dass  $V = (\psi - (-\Delta)^m \psi)/\psi$  tatsächlich kompakt getragen ist. Zusätzlich folgt aus Weyls Satz, dass  $\sigma_{ess}((-\Delta)^m) = \sigma_{ess}(H)$ , wir also tatsächlich einen eingebetteten Eigenwert vorliegen haben.

Das Ziel ist es also ein  $\phi > 0$  zu finden, sodass  $((-\Delta)^m - 1)\phi(x) = 0$  für hinreichend großes  $|x|$ . An dieser Stelle ist es kritisch, dass  $m = 2n$  eine gerade Zahl ist (für  $n \in \mathbb{N}$ ), denn in diesem Fall kann man

$$(1 - \Delta^m) = (1 + \Delta^2 + \Delta^4 + \dots + \Delta^{m-2})(1 - \Delta^2)$$

schreiben. Wir verwenden jetzt  $(1 - \Delta^2) = (1 + \Delta)(1 - \Delta)$  und wenden  $(1 - \Delta^m)$  auf das Bessel-Potential  $\phi(x) = (1 - \Delta)^{-1}(x)$  an. Offenbar ist  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$  und erfüllt  $0 < \phi(x) \lesssim |x - y|^{-d+2} e^{-|x|}$ , d.h.  $\phi \in \mathcal{D}((-\Delta)^m)$  normierbar und wir können dadurch teilen. Außerdem ist  $\phi$  offenbar eine Fundamentallösung von  $(1 - \Delta)$ , womit  $(1 - \Delta)\phi(x) = \delta(x)$ , also insbesondere  $(1 - \Delta)\phi(x) = 0$  für alle  $|x| > 0$ .

BEISPIEL 14.4. Betrachte  $V(x) = \frac{1}{\|x|-1}$  auf  $\mathbb{R}^3$ . Obwohl  $V$  nicht einmal in  $L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$  ist, ist  $\mathcal{Q}(V) \cap \mathcal{Q}(-\Delta)$  dicht, weshalb  $-\Delta + V$  als Summe quadratischer Formen definiert werden kann. Dieser Operator wird aus einem einfachen Grund positive gebundene Zustände haben: jedes  $\psi \in \mathcal{Q}(-\Delta) \cap \mathcal{Q}(V)$  wird auf der Einheitssphäre in einem gewissen Sinne verschwinden, weshalb  $-\Delta + V$  die Einschränkung  $\mathcal{H}_1 := L^2(\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1\})$  invariant lässt. Wir zerlegen also natürlich  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$  und  $H = H_1 \oplus H_2$ , wobei  $H_1$  wegen obigem Argument ein diskretes Spektrum hat.

Wir sehen, dass die Frage, ob  $-\Delta + V$  positive Eigenwerte hat, auch damit zusammenhängt, ob die zugehörige Eigenfunktion kompakt getragen ist. Diesen Aspekt werden wir später noch ausführlicher untersuchen.

Das folgende Beispiel illustriert, dass es nicht ungewöhnlich ist Lösungen zu bekommen, deren Energien gerade Null im Ein-Körper-Problem bzw. der Threshold im  $N$ -Körper-Problem, sind.

BEISPIEL 14.5. Sei

$$V(x) = \begin{cases} -c & \text{für } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$$

ein sphärisch symmetrischer Brunnen. Wir wollen Lösungen  $\psi$  finden, die  $(-\Delta + V)\psi = 0$  erfüllen. Da das Problem rotationsinvariant ist, setzen wir  $\psi(x) = \frac{u(r)}{r} Y_{\ell, m} \left( \frac{x}{|x|} \right)$

an. Die Gleichung für  $u$  lautet dann

$$-u''(r) + \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2}u(r) + V(r)u(r) = 0. \tag{14.6}$$

Für  $r > 1$  wird die Gleichung durch  $u(r) = r^{-\ell}$  bzw.  $u(r) = r^{\ell+1}$  (unphysikalisch) gelöst. Wenn die Lösung  $u$ , die bei Null regulär ist, nur  $r^{-\ell}$  für  $r > 1$ , und  $\ell \geq 1$  ist, so wird die Gleichung  $(-\Delta + V)\psi = 0$  quadratintegrierbare Lösungen haben.

Schließlich betrachten wir noch einmal das Helium-Atom als Beispiel eines 2-Teilchen-Systems noch einmal.

BEISPIEL 14.6.

$$H(\beta) = -\Delta_1 - \Delta_2 - \frac{2}{|x_1|} - \frac{2}{|x_2|} + \frac{\beta}{|x_1 - x_2|}$$

Für  $\beta = 0$  gibt es eine hohe Multiplizität der Eigenwerte im wesentlichen Spektrum. Dies liegt daran, dass die Zustände, die eine geeignete Energie zum Zerfallen hatten, nicht zerfallen konnten, da hierfür ein Energietransfer zwischen den zwei Teilchen nötig war. Für  $\beta = 0$  gibt es jedoch keine Wechselwirkung zwischen den Teilchen, weshalb auch kein Energietransfer stattfinden kann. Aber auch für  $\beta \neq 0$  bleiben eingebettete Eigenwerte aufgrund einer „tieferen“ Symmetrie, nämlich der Parität. Diese eingebetteten Eigenwerte traten alle bei negativen Energien auf!

Wir sehen, dass es besonders im  $N$ -Teilchen-Fall schwer sein wird zu zeigen, dass es keine eingebetteten Eigenwerte gibt, das heißt insbesondere solche, die zwar negativ sind, aber größer als der Threshold sind. Die Frage ist also: wie können wir zeigen, dass es im  $N$ -Teilchen-Problem keine „versteckten Symmetrien“ gibt, die Eingebettete Eigenwerte erzeugen können?

Wir sehen, warum dieses Thema so delikate ist. Intuitiv sollten keine eingebetteten Eigenwerte in „physikalischen“ Situationen auftauchen, jedoch können diese unter „pathologischen“ Umständen auftreten. Wir diskutieren vier verschiedene Zugänge zu diesem Problem.

- (1) Zwei-Körper-Problem mit Zentralpotential: in diesem Fall kann die Schrödinger-Gleichung zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung umgeformt werden.
- (2) Zwei-Körper-Problem mit nicht-rotationssymmetrischem Potential
- (3)  $V$  erfüllt die Kriterien für den Virialsatz, aus welchem  $2(\psi, -\Delta\psi) = (\psi, x \cdot \nabla V\psi)$  folgt. Dieser Zugang ist für repulsive und homogene ( $\alpha \in (-2, 0)$ ) Potentiale gedacht.
- (4) Dilatationsanalytische Potentiale

Wir starten mit dem ersten Punkt und beweisen dazu folgendes Resultat für Zentralpotentiale.

SATZ 14.7. Sei  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sphärisch symmetrisch,  $V \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  und erfülle

$$\int_a^\infty |V(r)| dr < \infty \tag{14.7}$$

für ein  $a > 0$ . Sei  $H$  eine beliebige selbstadjungierte Erweiterung von  $-\Delta + V$  auf  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ , die mit Rotationen kommutiert. Dann hat  $H$  keine positiven Eigenwerte.

BEWEIS. Angenommen es gäbe einen Eigenwert  $E > 0$  mit dazugehöriger Eigenfunktion  $\psi$ , sodass  $(-\Delta + V)\psi = E\psi$  erfüllt ist. Wegen der Rotationssymmetrie zerlegen wir wieder  $\psi(x) = \frac{u(r)}{r} Y_{\ell,m} \left( \frac{x}{|x|} \right)$  (partielle Wellen-Entwicklung). Dann gibt es eine partielle Welle, die nicht verschwindet und eine distributionelle Lösung von

$$-u'' + \frac{c}{r^2}u + Vu = Eu \quad (14.8)$$

auf  $(0, \infty)$ , die quadratintegrierbar ist. Hierbei hängt  $c$  vom Wellenindex (dem Drehimpuls  $l$ ) ab. Wegen  $\int_a^\infty |V(r)|dr < \infty$  und, da  $E > 0$  ist, gibt es zwei voneinander unabhängige Jost-Lösungen zu der dazugehörigen Integralgleichung. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass jede Lösung der distributionellen Gleichung eine Linearkombination dieser beiden Jost-Lösungen sein muss. Da aber keine Linearkombination im Unendlichen quadratintegrierbar sein kann, muss  $u \equiv 0$  identisch sein, womit es keinen positiven Eigenwert  $E > 0$  geben kann.  $\square$

Obwohl das Wigner–Von Neumann Potential die Bedingung  $\int_a^\infty |V(r)|dr < \infty$  nicht erfüllt, ist es trotzdem gerade von der Form, zu der man Jost-Lösungen für Potentiale der Form

$$V(x) = \sum_{i=1}^N c_i \frac{\sin(\alpha_i r)}{r} + \mathcal{O}(r^{-1-\epsilon}) \quad (14.9)$$

für alle  $k^2 \neq 0, \frac{\alpha_1^2}{4}, \dots, \frac{\alpha_N^2}{4}$  konstruieren kann. Wegen obigem Argument sehen wir, dass das Wigner–Von Neumann Potential nur bei 1 einen positiven Eigenwert haben kann, bei der es einen gebundenen Zustand hat.

Als Nächstes studieren wir Potentiale, die nicht sphärisch symmetrisch sind. Ein wichtiges Element hierbei ist das „eindeutige Fortsetzungstheorem für Schrödinger-Operatoren“<sup>1</sup>. Für mehr details, siehe Abschnitt 7. Wie gehen solche Resultate hierbei ein? Wir betrachten hierzu beispielsweise  $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  mit  $\text{supp}(V) \subseteq \{x : |x| < R\}$ . Ist  $(-\Delta + V)u = Eu$ , so erfüllt  $u$  offenbar  $-\Delta u = Eu$  auf  $\{x : |x| > R\} =: \Omega$ . Man kann nun  $u$  auf  $\Omega$  wieder in Drehimpulskanäle zerlegen und dann folgern, dass  $u = 0$  auf  $\Omega$  sein muss. Um dann zu folgern, dass  $u$  identisch verschwindet, benötigen wir noch folgendes Resultat.

SATZ 14.8 (Eindeutiger Fortsetzungssatz). *Sei  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , die folgende Bedingungen erfüllt:*

- (i) *Der zu  $V$  gehörige Multiplikationsoperator ist relativ  $-\Delta$ -beschränkt mit  $-\Delta$ -Schranke  $< 1$ .*
- (ii) *Es gibt eine abgeschlossene Menge  $S$  mit Maß gleich Null, sodass das Komplement  $\mathbb{R}^n \setminus S$  zusammenhängend und, sodass  $V$  auf jedem Kompaktum von  $\mathbb{R}^n \setminus S$  beschränkt ist.*

<sup>1</sup>Siehe auch Salos-Notizen [Sal14] für eine Auswahl der Literatur. Moderne Entwicklungen von Garrigue [Gar18, Gar19, Gar20] für N-Teilchen-Systeme. Klassische Theoreme finden sich beispielsweise in Hörmander [Hör85, Theoreme 17.2.1 und 17.2.6], auf  $L^2$ -Carleman-Abschätzungen aufbauend [Hör83, Proposition 14.7.1] und [Hör85, Proposition 17.2.3], sowie Kenig–Ruiz–Sogge [KRS87, Corollary 3.1] auf  $L^p$ -Carleman-Abschätzung [KRS87, Theorem 3.1] aufbauend, sowie Jerison–Kenig [JK85], der die Grundlage von [KRS87] war. Anwendungen in Abwesenheit von positiven Eigenwerten z.B. in Hörmander [Hör83, Theorem 14.7.2] und [Hör85, Theorem 17.2.8]

Sei dann  $H = -\Delta + V$  und  $Hu = Eu$  für ein  $E$  und  $u \in L^2$ . Verschwindet dann  $u$  auf einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ , so verschwindet  $u$  identisch auf ganz  $\mathbb{R}^n$ .

BEWEIS. □

BEMERKUNG 14.9. (1) Der Beweis dieser Behauptung zeigt, dass dieses Resultat lokal ist, da es mit distributionellen Lösungen von  $(-\Delta + V)u = Eu$  zu tun hat, die lokal in  $\mathcal{D}(-\Delta)$  liegen. Die Bedingung, dass  $V$  relativ  $-\Delta$ -beschränkt ist, ist hauptsächlich dazu da, dass die Eigenfunktionen lokal in  $\mathcal{D}(-\Delta)$  sind.

(2) Dieses Resultat und die Vorüberlegung zeigen, dass  $\sigma_{pp}(-\Delta + V) \cap (0, \infty) = \emptyset$  für  $V \in C_0^\infty$  ist. Dies ist ein Spezialfall des folgenden Satzes.

**theorem:3.137**

SATZ 14.10 (Kato–Agmon–Simon). Sei  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , welches sich als  $V = V_1 + V_2$  schreiben lässt, und folgende Bedingungen erfüllt:

- (i) Der zu  $V$  gehörige Multiplikationsoperator ist relativ  $-\Delta$ -beschränkt mit  $-\Delta$ -Schranke  $< 1$ .
- (ii) Es gibt eine abgeschlossene Menge  $S$  mit Maß gleich Null, sodass das Komplement  $\mathbb{R}^n \setminus S$  zusammenhängend und, sodass  $V$  auf jedem Kompaktum von  $\mathbb{R}^n \setminus S$  beschränkt ist.
- (iii)  $V_1$  ist auf  $\{x : |x| \geq R_0\}$  für ein  $R_0$  beschränkt und  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| V_1(x) = 0$  („ $V_1$  ist short-range“).
- (iv)  $V_2$  ist auf  $\{x : |x| \geq R_0\}$  für ein  $R_0$  beschränkt und  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V_2(x) = 0$  („ $V_2$  ist long-range“).
- (v) Geht man in sphärische Koordinaten über und betrachtet  $V_2$  als Abbildung  $V_2 : (0, \infty) \rightarrow L^\infty(S^{n-1})$ ,  $r \mapsto V_2(r, \cdot)$ , so ist  $V_2$  für  $|x| > R_0$  als  $L^\infty$ -wertige Funktion differenzierbar und erfüllt  $\limsup_{r \rightarrow \infty} r \frac{\partial V_2}{\partial r} \leq 0$ , das heißt  $V_2$  fällt in einem gewissen Sinne gleichmäßig im Unendlichen ab und hat keine Oszillationen.

In diesem Fall hat  $H = -\Delta + V$  keine positiven Eigenwerte.

BEWEIS. Betrachten wir die alternativen Hypothesen

- (iv')  $V_2(x) < 0$  für  $|x| > R_0$  ersetzt  $V_2(x) \rightarrow 0$ .
- (v')  $\frac{\partial V_2(x)}{\partial r} \leq -r^{-1} V_2$  für  $|x| > R_0$  ersetzt  $\lim_{r \rightarrow \infty} r \frac{\partial V_2}{\partial r} \leq 0$ .

und nehmen an, dass aus (i) bis (iv') und (v') das Resultat folgt. Angenommen  $V_2$  erfüllt (iv) und (v), so erfüllt  $\tilde{V}_2 := V_2 - \epsilon$  (iv') und (v') für hinreichend großes  $R_0$ . Wendet man also das vermutliche Resultat, dass aus (i) bis (iv') und (v') folgen würde, auf  $-\Delta + V_1 + \tilde{V}_2$  an, so sieht man, dass  $-\Delta + V$  in  $(\epsilon, \infty)$  keine Eigenwerte hat. Da  $\epsilon > 0$  beliebig war, können wir den Beweis des Satzes schließen. Wir nehmen daher von nun an, dass (i) bis (iv') und (v') gelten.

Angenommen,  $\psi$  wäre eine reelle Eigenfunktion von  $-\Delta$  mit Eigenwert  $E > 0$ . Dann definieren wir

$$w(r, \Omega) := r^{(n-1)/2} \psi(r\Omega) \tag{14.10}$$

als Funktion auf  $(0, \infty)$  mit Werten in  $L^2(S^{n-1}, d\Omega)$  und

$$\int_0^\infty \|w(r)\|_{L^2(S^{n-1}, d\Omega)}^2 dr < \infty. \tag{14.11}$$

Von nun an lassen wir den Index bei der Norm von  $w(r)$  weg. Allgemein definieren wir für  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$   $w_\varphi \in L^2((0, \infty), L^2(S^{n-1}, d\Omega), dr)$  durch obige Gleichung für  $\psi$

durch  $\varphi$  ersetzt. Ist  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , so ist

$$w_{H\varphi} = -w_\varphi'' - r^{-2}Bw_\varphi + \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2}w_\varphi + Vw_\varphi, \quad (14.12)$$

wobei  $B$  der Laplace-Beltrami-Operator auf  $L^2(S^{n-1})$  ist. Die Gleichung leitet man am einfachsten her, indem man  $w_\varphi$  durch Kugelflächenfunktionen ausdrückt. Wir benötigen hier den Fakt, dass  $-B$  ein positiver Operator auf  $L^2(S^{n-1})$  ist.

Für  $r > R_0$  definieren wir mittels  $w$

$$F(r) := (w', w') + r^{-2}(w, Bw) + (w, (E - V_2(r))w), \quad (14.13)$$

wobei alle inneren Produkte in  $L^2(S^{n-1})$  gemeint sind. Die Summanden sind für sich alle wohldefiniert, z.B. (für  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ):

$$\int_0^\infty [(\dot{w}_\varphi, \dot{w}_\varphi) - r^{-2}(w_\varphi, Bw_\varphi)]dr = \|\nabla\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2, \quad (14.14)$$

wobei  $\dot{w}_\varphi = r^{(n-1)/2} \frac{d}{dr}(r^{-(n-1)/2}w_\varphi)$ . Hieraus folgt, dass  $w'_\varphi$  und  $(w_\varphi, Bw_\varphi)$  fast überall auf  $(0, \infty)$  wohldefiniert sind, wenn  $\varphi \in \mathcal{Q}(-\Delta)$ .

Wählen wir nun  $R_1 > R_0$  so, dass

$$|rV_1(r)| + \frac{(n-1)(n-3)}{4r} < k \equiv \sqrt{E} \quad (14.15)$$

für  $r > R_1$  ist. So ein  $R_1$  existiert wegen Annahme (iii). Wir behaupten zunächst, dass

$$F(r) \geq \frac{r_1}{r}F(r_1), r > r_1 > R_1 \quad (14.16)$$

fast überall wahr ist. Formal haben wir für  $r > R_1$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(rF(r)) &= 2r(w', w'' + r^{-2}Bw + (E - V_2)w) + \|w'\|^2 - r^{-2}(w, Bw) + E\|w\|^2 - (w, (rV_2)'w) \\ &\geq 2(w', [rV_1 + \frac{1}{4}(n-1)(n-3)r^{-1}]w) + \|w'\|^2 + E\|w\|^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (14.17)$$

Die erste Ungleichung folgt dabei aus der formalen Eigenwertgleichung und den Tatsachen, dass  $-B$  positiv ist und  $(rV_2)' = rV_2' + V_2 \leq 0$  wegen  $(v')$  ist. Die letzte Ungleichung folgt aus der Wahl von  $R_1$ . Die Behauptung folgt dann durch Integration dieser Ungleichung.

Wir beweisen die Ungleichung nun rigoros. Sei dazu  $\varphi \in C_0^\infty$  und definiere  $F_\varphi$  durch entsprechendes Ersetzen von  $w$  durch  $w_\varphi$  in der Definition von  $F$ . Die obigen formalen Ableitungen von  $F$  sind für  $F_\varphi$  legitim und implizieren

$$\frac{d}{dr}(rF_\varphi) \geq 2r(w'_\varphi, [Ew_\varphi - w_{H\varphi}]) \quad (14.18)$$

für  $r > R$ . Daher haben wir für  $r > r_1 > R_1$

$$rF_\varphi(r) \geq r_1F_\varphi(r_1) + \int_{r_1}^r 2t(w'_\varphi(t), [Ew_\varphi(t) - w_{H\varphi}(t)])dt. \quad (14.19)$$

Wir wählen nun  $\varphi_n \in C_0^\infty$ , sodass  $\varphi_n \rightarrow \psi$  und  $-\Delta\varphi_n \rightarrow -\Delta\psi$ . So eine Folge gibt es, da  $C_0^\infty$  ein determinierender Bereich von  $-\Delta$  ist. Dann konvergiert auch  $H\varphi_n \rightarrow H\psi = E\psi$ , weshalb auch  $w_{\varphi_n} \rightarrow w$ ,  $w_{H\varphi_n} \rightarrow Ew$  und  $w'_{\varphi_n} \rightarrow w'$  in  $L^2((0, \infty), L^2(S^{n-1}, d\Omega), dr)$ . Nach Übergang zu einer Teilfolge konvergiert auch  $F_{\varphi_n} \rightarrow F$  punktweise fast überall, was die Behauptung zeigt.

Aus  $F(r) \geq \frac{r_1}{r} F(r_1), r > r_1 > R_1$  folgern wir  $F(r) \leq 0$  für  $r > R_1$ , denn,

wäre dies nicht wahr, so wäre die linke Seite von  $F(r) = (w', w') + r^{-2}(w, Bw) + (w, (E - V_2(r))w)$  nicht integrierbar. Der Ausdruck ist jedoch, da  $\psi \in \mathcal{D}(-\Delta)$  ist, integrierbar.

Wir zeigen nun die Hauptbehauptung, nämlich, dass es ein  $R_2$  gibt, sodass  $w = 0$  für  $r > R_2$ . Dies zeigt, dass  $\psi$  außerhalb einer Kugel verschwindet. Mit Hilfe des eindeutigen Fortsetzungssatzes folgt dann, dass  $\psi$  identisch Null ist. Von nun an sind alle Berechnungen nur formal, es ist ein Leichtes sie rigoros zu machen, indem man mit  $F_\varphi$ , statt mit  $F$  rechnet.

Für  $m \geq 0$  sei  $w_m := r^m w$  und

$$G(m, r) = \|w'_m\|^2 + (k^2 - k^2 R_1 r^{-1} + m(m+1)r^{-2}) \|w_m\|^2 + r^{-2}(w_m, Bw_m) - (w_m, V_2(r)w_m). \quad (14.20)$$

$w_m$  erfüllt dann

$$w''_m - 2mr^{-1}w'_m + r^{-2}[m(m+1) - \frac{1}{4}(n-1)(n-3) + B]w_m + (k^2 - V)w_m = 0. \quad (14.21)$$

Mit Hilfe der Ungleichung

$$-(r^2 V_2)' = -rV_2 - r(rV_2)' \geq 0 \quad (14.22)$$

rechnet man leicht nach, dass für  $r > R_0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(r^2 G(m, r)) &\geq 2r \left[ (2m+1) \|w'_m\|^2 + k^2 \left(1 - \frac{R_1}{2r}\right) \|w_m\|^2 \right. \\ &\quad \left. + (w'_m, [rV_1 + \frac{1}{4}(n-1)(n-3)r^{-1} - k^2 R_1]w_m) \right] \end{aligned} \quad (14.23)$$

gilt. Daher hat man für  $r > R_1$

$$\frac{d}{dr}(r^2 G(m, r)) \geq 2r \left[ (2m+1) \|w'_m\|^2 + \frac{k^2}{2} \|w_m\|^2 - (k + k^2 R_1) \|w'_m\| \|w_m\| \right]. \quad (14.24)$$

Daher gibt es ein  $m_0 \geq 0$ , sodass  $r^2 G(m, r)$  auf  $(R_1, \infty)$  monoton wächst, wenn  $m > m_0$ .

Angenommen nun, es wäre  $w(r_0) \neq 0$  für ein  $r_0 > R_1$ . Schreibt man nun

$$G(m, r) = r^{2m} \left[ \|w' + mr^{-1}w\|^2 + (k^2 - k^2 R_1 r^{-1} + m(m+1)r^{-2}) \|w\|^2 - (w, V_2 w) + r^{-2}(w, Bw) \right], \quad (14.25)$$

so sieht man, dass  $G(m, r_0) > 0$  für hinreichend großes  $m$  ist. Zusammen mit der Monotonie von  $r^2 G(m, r)$  für  $m > m_0$  folgert man: ist  $w(r_0) \neq 0$  für ein  $r_0 > R_1$ , so gibt es ein  $M(r_0)$ , sodass  $G(m, r) > 0$  für alle  $m > M(r_0)$  und  $r > r_0$ .

Wir können den Beweis nun schließen. Für gegebenes  $r_0$ , sodass  $w(r_0) \neq 0$  und  $r_0 > R_1$  wählen wir  $m_0 > M$  und dann  $R_2 > r_0$  so, dass für  $r > R_2$

$$-k^2 R_1 r^{-1} + m_0(2m_0 + 1)r^{-2} < 0. \quad (14.26)$$

Da  $\int_{R_2}^{\infty} \|w\|^2 dr < \infty$ , wächst  $\|w\|$  nicht streng monoton auf allen  $[R_2, \infty)$ . Das heißt es gibt ein  $r_1 > R_2$ , sodass

$$\frac{d}{dr} \|w\|^2 \Big|_{r=r_1} = 2(w', w) \leq 0. \quad (14.27)$$

Insbesondere ist bei  $r = r_1$

$$\|w' + mr^{-1}w\|^2 \leq \|w'\|^2 + m^2 r^{-2} \|w\|^2, \quad (14.28)$$

weshalb wegen

$$G(m, r) = r^{2m} \left[ \|w' + mr^{-1}w\|^2 + (k^2 - k^2 R_1 r^{-1} + m(m+1)r^{-2}) \|w\|^2 - (w, V_2 w) + r^{-2}(w, Bw) \right]$$

gilt, dass

$$0 < r_1^{-2m_0} G(m_0, r_1) \leq \|w'\|^2 + k^2 \|w\|^2 - (w, V_2 w) + r^{-2}(w, Bw) = F(r_1). \quad (14.29)$$

Wegen  $F(r) \geq r^{-1} r_1 F(r_1)$  für  $r > r_1 > R_1$  impliziert dies, dass  $\int \|w\|^2 dr = \infty$  oder  $\|w\|^2 = 0$ , weshalb  $w(r_0) = 0$  für alle  $r_0 > R_1$  ist. Mit dem eindeutigen Fortsetzungssatz ist damit  $\psi$  identisch Null.  $\square$

**KOROLLAR 14.11.** Sei  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , welches die folgende Bedingungen erfüllt.

- (i) Der zu  $V$  gehörige Multiplikationsoperator ist relativ  $-\Delta$ -beschränkt mit  $-\Delta$ -Schranke  $< 1$ .
- (ii) Es gibt eine abgeschlossene Menge  $S$  mit Maß gleich Null, sodass das Komplement  $\mathbb{R}^n \setminus S$  zusammenhängend und, sodass  $V$  auf jedem Kompaktum von  $\mathbb{R}^n \setminus S$  beschränkt ist.

Ist  $V$  zusätzlich

- a) kompakt getragen oder
  - b) abstoßend im Unendlichen, das heißt  $\frac{\partial V}{\partial r} \leq 0$ , und verschwindet dort,
- dann gibt es keine gebundenen Zustände mit positiver Energie.

**BEMERKUNG 14.12.** Das Wigner-Von Neumann Potential erfüllt weder  $\limsup_{r \rightarrow \infty} r \frac{\partial V_2}{\partial r} \leq 0$ , noch  $r V_1 \rightarrow 0$ .

Die dritte Methode, um positive Eigenwerte zu kontrollieren verwendet den Virial-Satz. Das Resultat wird besagen, dass, wenn  $\psi$  eine Eigenfunktion von  $H = -\Delta + V$  ist, dann erfüllt sie unter bestimmten Annahmen an  $V$

$$2(\psi, -\Delta \psi) = (\psi, x \cdot \nabla V \psi). \quad (14.30)$$

Diese Gleichung ist extrem hilfreich beim Studium von gebundenen Zuständen. Ist beispielsweise  $V$  repulsiv, so ist  $x \cdot \nabla V \leq 0$ , so kann  $H$  keine gebundenen Zustände haben, da die rechte Seite der Gleichung negativ, wohingegen die linke Seite positiv ist.

Die obige Gleichung kann formal aus folgendem Argument hergeleitet werden. Sei

$$D = \frac{in}{2} + i \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (14.31)$$

dann ist

$$i[D, H] = 2(-\Delta) - x \cdot \nabla V. \quad (14.32)$$

Ist  $\psi$  eine Eigenfunktion von  $H$  mit Eigenwert  $E$ , so ist

$$2(\psi, -\Delta\psi) - (\psi, x \cdot \nabla V\psi) = (\psi, i[D, H]\psi) = -iE[(\psi, D\psi) - (\psi, D\psi)] = 0, \quad (14.33)$$

da  $H$  hermitesch ist. Das Argument ist deshalb formal, da  $D$  unbeschränkt und  $\psi$  nicht notwendigerweise im Definitionsbereich von  $D$  liegt.

Der Schlüssel zum Beweis des Virial-Satzes ist, dass die durch  $D$  erzeugte Gruppe gerade die Gruppe der Dilatationen aus dem Abschnitt über dilatationsanalytische Potentiale ist. Wir definieren für  $a > 0$  die unitäre Familie

$$(U_a\psi)(x) := (e^{-iD \log a}\psi)(x) = a^{n/2}\psi(ax) =: \psi_a(x) \quad (14.34)$$

und setzen  $V_a(x) := V(ax)$ , sodass  $V_a = U_a V U_a^{-1}$  für einen Multiplikationsoperator  $V$  ist.

**SATZ 14.13 (Virialsatz).** *Sei  $V$  ein Multiplikationsoperator auf  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , sodass:*

- (i)  *$V$  ist relativ  $-\Delta$ -beschränkt mit  $-\Delta$ -Schranke  $< 1$ .*
- (ii) *Es gibt einen Multiplikationsoperator  $W$  auf  $L^2(\mathbb{R}^n)$  mit  $\mathcal{D}(-\Delta) \subseteq \mathcal{D}(W)$ , sodass für alle  $\psi \in \mathcal{D}(-\Delta)$*

$$\frac{V_a - V}{a - 1} \psi \xrightarrow{a \rightarrow 1} W\psi. \quad (14.35)$$

Gibt es dann ein  $\psi \in \mathcal{D}(-\Delta)$  mit  $(-\Delta + V)\psi = E\psi$ , so ist

$$2(\psi, -\Delta\psi) = (\psi, W\psi) = 2(\psi, (E - V)\psi). \quad (14.36)$$

**BEWEIS.** Wegen  $U_a(-\Delta)U_a^{-1} = a^{-2}(-\Delta)$  gilt

$$(-\Delta + a^2 V_a)\psi_a = a^2 E\psi_a \quad (14.37)$$

neben  $(-\Delta + V)\psi = E\psi$ . Subtrahiert man die beiden Gleichungen voneinander und nimmt das Skalarprodukt mit  $\psi$ , erhält man mit der Unitarität von  $U_a$

$$E(a^2 - 1)(\psi_a, \psi) = ((-\Delta + a^2 V_a)\psi_a, \psi) - (\psi_a, (-\Delta + V)\psi_a) = a^2(V_a\psi_a, \psi) - (\psi_a, V\psi), \quad (14.38)$$

da  $-\Delta$  symmetrisch ist. Daher ist

$$(a + 1)(\psi_a, V_a\psi) + (a - 1)^{-1}(\psi_a, (V_a - V)\psi) = E(a + 1)(\psi_a, \psi). \quad (14.39)$$

Lässt man nun  $a \rightarrow 1$  gehen, folgt die Behauptung.  $\square$

**BEMERKUNG 14.14.** (1) Formal ist  $W$  gerade  $x \cdot \nabla V$ , verstanden als Ableitung von  $V_a(x) = V(ax)$  nach  $a$ , ausgewertet bei  $a = 1$ . Da  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{D}(-\Delta)$  ist und  $\frac{V_a - V}{a - 1} \psi \xrightarrow{a \rightarrow 1} W\psi$  gilt, ist  $W$  tatsächlich  $x \cdot \nabla V$  im Sinne von Distributionen.

- (2) Man beweist die Konvergenz  $\frac{V_a - V}{a - 1} \psi \xrightarrow{a \rightarrow 1} W\psi$  üblicherweise so: man zeigt zunächst die punktweise Konvergenz und nimmt dann an, dass es einen Multiplikationsoperator  $\tilde{W}$  mit  $\mathcal{D}(-\Delta) \subseteq \mathcal{D}(\tilde{W})$  gibt, sodass

$$\left| \frac{V_a - V}{a - 1} \right| \leq \tilde{W}$$

punktweise für fast alle  $a$  nahe Eins gilt. Dann folgt die Konvergenz aus dem Satz der majorisierten Konvergenz und  $\mathcal{D}(-\Delta) \subseteq \mathcal{D}(W)$ .

Dieses Hilfsmittel erlaubt uns nun die Nicht-Existenz positiver Eigenwerte zu zeigen.

SATZ 14.15. Sei  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  relativ  $-\Delta$ -beschränkt mit  $-\Delta$ -Schranke  $< 1$ . Dann hat  $-\Delta + V$  keine positiven Eigenwerte, wenn wenigstens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.

- a)  $V$  erfüllt die Konvergenzbedingung (ii) aus vorigem Satz und  $V$  ist abstoßend, das heißt  $V(ar) \leq V(r)$  für alle  $r$  und  $a > 1$ .
- b)  $V$  ist homogen vom Grade  $-\alpha$ , wobei  $\alpha \in (0, 2)$ , das heißt  $V(ar) = a^{-\alpha}V(r)$ .
- c)  $V$  ist die Summe eines repulsiven Potentials und eines homogenen Potentials vom Grade  $-\alpha$  mit  $\alpha \in (0, 2)$ .
- d)  $V$  erfüllt die Konvergenzbedingung (ii) aus vorigem Satz und für ein  $b > 0$  gilt

$$-\Delta - \frac{1+b}{2}W - bV \geq 0. \quad (14.40)$$

BEWEIS. Es ist einfach zu sehen, dass, wenn (ii) wahr ist, dass die Bedingungen des Virial-Satzes erfüllt sind. Sei also von nun an  $W$  wie im Virial-Satz, dann gilt

$$(\psi, -\Delta\psi) = \frac{1}{2}(\psi, W\psi) \quad (14.41)$$

für eine Eigenfunktion  $\psi$ .

- a) Aus der Definition von  $W$  als Limes von  $\frac{V_a - V}{a-1}$  folgt, dass  $W \leq 0$  ist. Damit muss  $\psi \equiv 0$  sein, da  $H_0 \geq 0$  und  $\text{Ker}(H_0) = \{0\}$ .
- b) In diesem Fall ist  $W(r) = -\alpha V(r)$  und der Virialsatz und  $(\psi, -\Delta\psi) = \frac{1}{2}(\psi, W\psi)$  geben

$$2E(\psi, \psi) = (2 - \alpha)(\psi, V\psi) = -\frac{2 - \alpha}{\alpha}(\psi, W\psi) = -2\frac{2 - \alpha}{\alpha}(\psi, H_0\psi) < 0, \quad (14.42)$$

wegen  $\alpha < 2$ .

- c)
- d) Für jede Eigenfunktion  $\psi$  gilt

$$\begin{aligned} -bE(\psi, \psi) + (1+b) \cdot 0 &= -b(\psi, (H_0 + V)\psi) + (1+b) \left( \psi, \left[ H_0 - \frac{1}{2}W \right] \psi \right) \\ &= \left( \psi, \left[ H_0 - \frac{1+b}{2}W - bV \right] \psi \right) \geq 0. \end{aligned} \quad (14.43)$$

wegen der Voraussetzung in d), womit  $E \leq 0$  ist. □

BEMERKUNG 14.16. (1) Dieses Resultat setzt nicht voraus, dass die Potentiale im Unendlichen verschwinden, weshalb es für Vielteilchen-Schrödinger-Operatoren angewandt werden kann.

- (2) Punkt b) ist wieder interessant, wenn wir uns an die Bedingung erinnern, für welche (anziehenden) Potentiale es unendlich viele Eigenwerte gab. Das geschah gerade für homogene Potentiale vom Grade  $-\alpha$ , wo  $\alpha < 2$  war, da in diesem Fall das Potential im Unendlichen „stärker“ war als die kinetische Energie. Ähnlich verhält es sich hier – der Fall, wo  $V$  abstoßend ist, ist bereits in a) behandelt; ist  $V$  anziehend, so kann es nur gebundene Zustände mit negativer Energie geben.

BEISPIEL 14.17 (Coulomb-Systeme I). Wir betrachten ein  $N$ -Teilchen-System, bei dem alle Wechselwirkungen durch das Coulomb-Potential beschrieben werden,

das heißt die Wechselwirkung ist von der Form  $a_{ij}|x_i - x_j|^{-1}$ . Da das Coulomb-Potential homogen vom Grad  $-1$  ist, erfüllt es die Bedingung (ii) des obigen Satzes, weshalb Coulomb-Systeme keine positiven Eigenwerte aufweisen.

BEISPIEL 14.18. Bedingung d) aus dem Satz ist anfangs etwas schwer zu begreifen, weshalb wir dies durch ein Beispiel illustrieren. Sei  $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit  $n \geq 3$ . Wir haben bereits früher gesehen, dass  $-\Delta + \lambda V$  keine negativen Eigenwerte hat, wenn  $\lambda$  hinreichend klein war. Wegen des Kato-Agmon-Simon-Satzes existieren auch keine positiven Eigenwerte, unabhängig vom Wert von  $\lambda$ , da  $V$  kompakt getragen ist. Man kann dies für kleine  $\lambda$  auch anders beweisen, denn auch  $-x \cdot \nabla V - V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Damit hat auch  $-\Delta - \lambda(x \cdot \nabla V + V)$  keine negativen Eigenwerte, das heißt der Operator ist positiv. Dies ist aber gerade die Bedingung d) aus dem Satz, welcher besagt, dass es keine positiven Eigenwerte (für kleine  $\lambda$ ) gibt.

Für einige Potentiale ist es möglich zu zeigen, dass es keine Eigenwerte in einem Intervall  $(a, \infty)$  für ein  $a > 0$  gibt.

BEISPIEL 14.19 (Yukawa I). Wir betrachten ein Atom mit Yukawa-Wechselwirkungen

$$H = -\sum_{j=1}^N \Delta_j + \sum_{j=1}^N V_j(x_j) + \sum_{1 \leq i < j \leq N} V_{ij}(x_i - x_j) \quad (14.44)$$

auf  $L^2(\mathbb{R}^{3N})$ , wobei

$$V_j(x_j) = -\frac{b_j}{|x_j|} e^{-a_j|x_j|} \text{ und } V_{ij}(x) = \frac{b_{ij}}{|x|} e^{-a_{ij}|x|}, \quad (14.45)$$

wobei alle  $a$  und  $b$  positive Konstanten sind. Sei  $U(r) = \frac{\exp(-ar)}{r}$ , dann ist  $r \frac{dU}{dr} = -U - a \exp(-ar)$ . Das heißt für  $V = \sum_{j=1}^N V_j + \sum_{i < j} V_{ij}$  ist (wir vernachlässigen die negativen Beiträge  $a_{ij}b_{ij}$  und verwenden  $e^{-x} \leq 1$  für  $x \geq 0$ )

$$x \cdot \nabla V + V \leq \sum_{j=1}^N a_j b_j. \quad (14.46)$$

Gilt nun  $(-\Delta + V)\psi = E\psi$ , so ist

$$E(\psi, \psi) = -(\psi, H_0\psi) + (\psi, (x \cdot \nabla V + V)\psi) \leq \sum_{j=1}^N a_j b_j (\psi, \psi), \quad (14.47)$$

das heißt  $H$  hat keine Eigenwerte im Intervall  $(\sum_{j=1}^N a_j b_j, \infty)$ .

BEMERKUNG 14.20. Der Kato-Agmon-Simon-Satz <sup>theorem: 3.137</sup> 14.10 ist eng mit dem Virialsatz verbunden. Nehmen wir an, dass  $V$  für alle  $x$  negativ und homogen vom Grade  $-\alpha$  ist, wo  $\alpha \leq 1$ . Dann gelten wegen (iv) und (v) auch

$$(iv') \quad V_2(x) < 0 \text{ für } |x| > R_0 \text{ ersetzt } V_2(x) \rightarrow 0$$

$$(v') \quad \frac{\partial V_2(x)}{\partial r} \leq -\frac{V_2}{|x|} \text{ für } |x| > R_0 \text{ ersetzt } \lim_{r \rightarrow \infty} r \frac{\partial V_2}{\partial r} \leq 0$$

und man kann somit mit beiden Methoden folgern, dass  $-\Delta + V$  keine positiven Eigenwerte hat. Der Vorteil der Methode von Kato, Agmon und Simon ist, dass sie lediglich Bedingungen an das Potential im Unendlichen stellt, wohingegen der Virialsatz globale Bedingungen benötigt.

Die vierte und letzte Methode beschäftigt sich mit dilatationsanalytischen Potentialen. Wir betrachten dazu zunächst noch einmal den Fall des Coulomb-Potentials.

example:3.148

BEISPIEL 14.21 (Coulomb-Systeme II). Wir untersuchen zunächst einen Hamilton-Operator  $H$  eines  $N$ -Teilchen-Systems mit Zwei-Körper-Potentialen, die alle homogen vom Grade  $-\alpha$  sein sollen, wobei  $0 < \alpha < 1$ . Dann sind alle diese Potentiale dilatationsanalytisch, denn

$$U(\theta)VU(\theta)^{-1} = e^{-\alpha\theta}V, \quad (14.48)$$

wobei  $U(\theta)$ , die auf  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$  wie  $(U(\theta)\psi)(x) = e^{3\theta/2}\psi(e^\theta x)$  wirkt, die Gruppe der Dilatationsoperatoren auf  $\mathbb{R}^3$  ist. Nehmen wir an,  $E_0$  sei der größte Threshold von  $H_0 + V$  (wir werden später  $E_0 = 0$  beweisen) und, dass  $E > E_0$  ein Eigenwert von  $H$  sei. Durch unsere bisherige, allgemeine Untersuchung von dilatationsanalytischen Hamilton-Operatoren wissen wir, dass  $E$  solange ein diskreter Eigenwert von  $H(\theta)$  sein wird, wie  $0 < \text{Im}\theta < \pi$  erfüllt ist, siehe dazu auch Satz II.12. Schreiben wir mit  $\theta_0 = \frac{i\pi}{2-\alpha}$

$$H(\theta) = e^{-2\theta}(H_0 - e^{-(\alpha-2)(\theta-\theta_0)}V), \quad (14.49)$$

so sieht man, dass

$$H(\theta_0) = e^{-2\theta_0}(H_0 - V). \quad (14.50)$$

Das heißt, dass das Argument jedes Eigenwerts von  $H(\theta_0)$  gerade  $2i\theta_0 \neq 0$  oder  $\pi + 2i\theta_0 \neq 0$  erfüllen muss. Daher kann  $E$  kein Eigenwert von  $H(\theta_0)$  und damit auch kein Eigenwert von  $H$  sein. Die Bedingung  $\alpha < 1$  ist notwendig um  $\text{Im}\theta_0 < \pi$  sicherzustellen.

Wir zeigen schließlich noch per Induktion, dass tatsächlich  $E_0 = 0$  ist. Dies ist offenbar für den Zwei-Körper-Fall wahr. Ist dies auch für alle  $k < N$  wahr, so sieht man mit dem obigen Argument, dass alle  $k$ -Körper-Systeme mit  $k < N$  keine positiven Eigenwerte haben. Damit kann aber das  $N$ -Teilchen-System keinen positiven Threshold haben und  $E_0 = 0$ .

Wir bemerken, dass man mit dem obigen Argument sogar zeigen kann, dass  $H(\theta)$  keine Eigenwerte in  $\{E : 0 \leq \arg E < 2\text{Im}\theta\}$  hat, wenn  $-\pi < \text{Im}\theta < 0$  ist.

Sei nun explizit  $V = \frac{1}{|x|}$  das Coulomb-Potential und  $V_\alpha$  das Potential, dass wir durch Ersetzen von  $\frac{1}{|x_i - x_j|}$  durch  $\frac{1}{|x_i - x_j|^\alpha}$  erhalten. Angenommen nun,  $H_0 + V$  hätte einen positiven Eigenwert, dann wird, z.B. für  $\theta = -i\pi/3$  der Operator  $H_0(\theta) + V_\alpha(\theta)$  einen Eigenwert haben, der nahe der positiven reellen Achse sitzt, wenn  $\alpha - 1$  klein ist. Für reelle  $\alpha$  kann dieser Eigenwert jedoch kein kleines, negatives Argument haben. Aus dem obigen Argument folgt jedoch auch, dass der gestörte Eigenwert kein kleines, positives oder verschwindendes Argument haben kann, wenn  $\alpha$  reell und kleiner als Eins ist. Dieser Widerspruch zeigt, dass  $H_0 + V$  keine positiven Eigenwerte haben kann.

BEISPIEL 14.22 (Coulomb-Systeme III). Es gibt ein weiteres Argument, mit dem man zeigen kann, dass Potentiale, die alle vom gleichen negativen Grade  $\alpha \in (0, 2)$  homogen sind, keine positiven Eigenwerte erzeugen. Wieder ist  $H_0(\theta) = e^{-2\theta}H_0$  und  $V(\theta) = e^{-\alpha\theta}V$ . Damit ist das Argument von  $(\varphi, H_0(\theta)\varphi)$  gleich  $2\pi - 2\text{Im}\theta$ , wohingegen das Argument von  $(\varphi, V(\theta)\varphi)$  gleich  $2\pi - \alpha\text{Im}\theta$  oder  $\pi - \alpha\text{Im}\theta$  für alle  $\varphi \in \mathcal{Q}(H_0)$  ist. Da aber  $\alpha < 2$  ist, liegt das Argument von  $(\varphi, H(\theta)\varphi)$  zwischen  $\pi - \alpha\text{Im}\theta$  und  $2\pi - \alpha\text{Im}\theta$  für alle kleinen und positiven  $\text{Im}\theta$ . Insbesondere kann das Argument von  $(\varphi, H(\theta)\varphi)$  nicht Null sein, weshalb  $H(\theta)\varphi \neq E\varphi$  mit  $E > 0$  ist. Da  $H(\theta)$  für alle  $|\text{Im}\theta| \in (0, \pi)$  keinen positiven Eigenwert hat, hat auch  $H$  keinen positiven Eigenwert.

**BEMERKUNG 14.23.** Obiges Argument zeigt, dass es wichtig ist negative und positive Eigenwerte voneinander zu unterscheiden. Der Grenzfall tritt gerade bei  $\text{Im}\theta = \pm\frac{\pi}{2}$  ein. Für  $|\text{Im}\theta| < \frac{\pi}{2}$  ist jeder Eigenwert von  $H$ , der nicht der Treshold ist, auch ein diskreter Eigenwert von  $H(\theta)$ . Lässt man  $\text{Im}\theta$  gegen  $\pm\frac{\pi}{2}$  gehen, so rotiert das wesentliche Spektrum in die Richtung der negativen Eigenwerte, weshalb wir nicht sicher sagen können, dass die Eigenwerte für  $\text{Im}\theta > \frac{\pi}{2}$  bleiben (und insbesondere für  $\theta = \theta_0$ ). Die positiven Eigenwerte bleiben jedoch vom wesentlichen Spektrum für  $|\text{Im}\theta| \in (0, \pi)$  fern.

Die Bemerkung zeigt, dass dilatationsanalytische Potentiale, die eine Fortsetzung bis  $\text{Im}\theta = \frac{\pi}{2}$  erlauben speziell sind. Dies motiviert die folgende

**DEFINITION 14.24.** Wir sagen, dass ein Potential genau dann in  $\overline{\mathcal{F}}_{\pi/2}$  liegt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

- (i)  $V$  ist eine quadratische Form mit Formbereich  $\mathcal{Q}(-\Delta)$ .
- (ii)  $(-\Delta + 1)^{-1/2}(U(\theta)VU(\theta)^{-1})(-\Delta + 1)^{-1}$ , definiert als Operator für  $\theta \in \mathbb{R}$ , ist die Einschränkung einer kompakten, operator-wertigen Funktion, die auf dem Streifen  $|\text{Im}\theta| < \frac{\pi}{2}$  analytisch und Norm-stetig auf  $|\text{Im}\theta| \leq \frac{\pi}{2}$  ist, auf die reelle Achse.

Wir werden bald sehen, dass sowohl das Coulomb- als auch das Yukawa-Potential in  $\overline{\mathcal{F}}_{\pi/2}$  liegen und, dass  $N$ -Teilchen-Systeme, deren Potentiale in  $\overline{\mathcal{F}}_{\pi/2}$  sind, keine positiven Eigenwerte haben.

Dazu brauchen wir folgendes Hilfsmittel.

**LEMMA 14.25 (Carlson).** Sei  $f$  eine komplex-wertige Funktion, die auf  $\{z : \text{Re}z > 0\}$  analytisch und auf  $\{z : \text{Re}z \geq 0\}$  stetig ist. Angenommen es ist zudem

$$|f(z)| \leq Me^{A|z|} \quad \text{für } z \text{ mit } \text{Re}z \geq 0 \quad (14.51a)$$

$$|f(iy)| \leq Me^{-B|y|} \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}, \quad (14.51b)$$

wobei  $B > 0$  ist. Dann verschwindet  $f$  identisch.

**BEWEIS.** Siehe [ReedSimon1978](#) **[RS78]**. □

**SATZ 14.26 (Balslev–Simon).** Sei  $H$  ein  $N$ -Teilchen-Schrödinger-Operator auf  $L^2(\mathbb{R}^{(n-1)N})$ , den man durch Abseparation der Schwerpunktsbewegung von

$$\tilde{H} = - \sum_{i=1}^N (2m_i)^{-1} \Delta_i + \sum_{i < j} V_{ij}(x_i - x_j) \quad (14.52)$$

erhält. Hierbei fassen wir alle  $V_{ij}$  als quadratische Formen auf  $\mathcal{Q}(-\Delta)$  auf. Sind alle  $V_{ij} \in \overline{\mathcal{F}}_{\pi/2}$ , lokal (das heißt haben die Form von Multiplikationsoperatoren) und symmetrisch, so hat  $H$  keine Eigenwerte in  $(0, \infty)$ .

**BEWEIS.** Wie wir in Beispiel [example:3.148](#) **[4.21]** gesehen haben, müssen wir lediglich zeigen, dass  $H$  keine Eigenwerte in  $(0, \infty)$  hat unter der Bedingung, dass  $H$  keine positiven Thresholds hat, um zu sehen, dass  $H$  keine positiven Eigenwerte hat.

Wir nehmen im ersten Schritt also an, dass  $H$  keinen positiven Threshold, aber einen positiven Eigenwert  $E > 0$  mit zugehöriger Eigenfunktion  $\psi$  hat. Wir müssen also zeigen, dass  $\psi = 0$  ist. Da  $E$  ein Eigenwert von  $H$  ist, ist  $E$  auch ein Eigenwert

von  $H(\theta)$  für  $|\operatorname{Im}\theta| \leq \frac{\pi}{2}$ . Darüberhinaus ist die Projektion

$$P(\theta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda-E|=\epsilon} (H(\theta) - \lambda)^{-1} d\lambda, \quad (14.53)$$

welche für  $|\operatorname{Im}\theta| > 0$  definiert ist, analytisch für  $|\operatorname{Im}\theta| < \frac{\pi}{2}$  und gleich der Spektralprojektion  $P_{\{E\}}(H)$  für  $\theta = 0$ . Wegen O'Connors Lemma 12.11 folgt, dass jeder Eigenvektor  $\psi$ , der  $H\psi = E\psi$  erfüllt, die Eigenschaft hat, dass  $U(\theta)\psi$  sich zu einer auf  $\{\theta : |\operatorname{Im}\theta| < \frac{\pi}{2}\} =: N$  analytischen und in  $\bar{N}$  stetigen Funktion fortsetzen lässt. Darüberhinaus wissen wir aus Satz 12.16, dass  $U(\pm \frac{i\pi}{2})\psi$  exponentiell abfällt, in dem Sinne, dass es ein  $b > 0$  gibt, sodass  $e^{br}U(\pm \frac{i\pi}{2})\psi \in L^2$  ist; dies liegt daran, dass  $E$  auch ein isolierter Eigenwert von  $H(\pm \frac{i\pi}{2})$  ist.

Heuristisch gesprochen, verläuft das Argument nun wie folgt: intuitiv heißt  $\psi$  ist dilatationsanalytisch, dass  $\psi(x)$  als Funktion von  $|x|$  und  $\Omega = \frac{x}{|x|}$  für fixes  $\Omega$  in  $|x|$  analytisch auf dem Gebiet  $\operatorname{Re}|x| > 0$  ist und

$$e^{-\frac{1}{2}n(N-1)i\theta}(U(\theta)\psi)(|x|, \Omega) = \psi(|x|e^{i\theta}, \Omega) \quad (14.54)$$

gilt. Da  $\psi \in L^2$  ist, ist  $\psi(z, \Omega)$  mehr oder weniger beschränkt ist und, da  $U(\pm \frac{i\pi}{2})\psi \in \mathcal{D}(e^{\mathbb{R}})$  ist, fällt  $\psi(z, \Omega)$  exponentiell, wenn  $\arg z = \pm \frac{\pi}{2}$  ist. Daher ist mit Carlsons Satz  $\psi = 0$ .

Mit dieser Intuition für den  $L^2$  im Hinterkopf können wir den Beweis schließen. Fixiere dazu  $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n(N-1)} \setminus \{0\})$ , deren Träger den Ursprung nicht enthält, also z.B.  $\operatorname{supp}(g) \subseteq \{x : |x| > R\}$ . Dann definieren wir für  $z \in (0, \infty)$

$$F(z) := z^{nN/2} \int_{\mathbb{R}^{n(N-1)}} \overline{g(x)} \psi(zx) dx = z^{n/2} (g, U(\log z)\psi). \quad (14.55)$$

Durch diese Darstellung können wir  $F$  zu einer auf  $\{z : \operatorname{Re}z > 0\}$  analytischen und auf  $\{z : \operatorname{Re}z \geq 0\}$  stetigen Funktion fortsetzen.

Da  $U(\theta)$  für  $\theta \in \mathbb{R}$  unitär ist, ist erstens

$$|F(z)| \leq |z|^{n/2} \|g\| \sup_{|y| \leq \pi/2} \|U(iy)\psi\| \quad (14.56)$$

für alle  $z$  mit  $\operatorname{Re}z \geq 0$ . Darüberhinaus ist für positives und reelles  $\beta$

$$\begin{aligned} |F(i\beta)| &= \left| \beta^{nN/2} \int \overline{g(x)} \left[ U\left(\frac{i\pi}{2}\right) \psi \right] (\beta x) dx \right| = \beta^{n/2} \int_{|x| \geq \beta R} \overline{f(\beta^{-1}x)} \left[ U\left(\frac{i\pi}{2}\right) \psi \right] (x) dx \\ &\leq e^{-\beta Rb} |\beta|^{nN/2} \|g\| \left\| e^{br} U\left(\frac{i\pi}{2}\right) \psi \right\| \end{aligned} \quad (14.57)$$

und analog für  $F(-i\beta)$ . Die Voraussetzungen für Carlsons Satz sind also erfüllt, weshalb  $F$  identisch verschwindet, das heißt auch  $(g, \psi) = 0$ . Da  $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n(N-1)} \setminus \{0\})$  in  $L^2$  dicht ist, folgt, dass  $\psi = 0$  sein muss, das heißt es gibt keinen positiven Eigenwert  $E$ .  $\square$

**BEISPIEL 14.27 (Yukawa II).**  $V(r) = \frac{e^{-ar}}{r}$  ist in  $\overline{\mathcal{F}}_{\pi/2}$  mit  $V_\theta(r) = e^{-\theta \frac{\exp(-ae^\theta r)}{r}}$ . Daher hat das Atom mit Yukawa-Wechselwirkungen keinen Eigenwert in  $(0, \infty)$ , was eine Verbesserung des Resultats ist, was wir mit Hilfe des Virialsatzes erhalten haben.

Es gibt jedoch auch Fälle, wo der Virialsatz Aussagen gibt, wohingegen der Balslev–Simon-Satz keine Aussagen gibt. Ist z.B.  $V(r) = be^{-ar}$  mit  $b > 0$ , so hat  $-\Delta + V$  nach dem Virialsatz keine positiven Eigenwerte, aber  $V$  ist *nicht* in  $\overline{\mathcal{F}}_{\pi/2}$ , da  $\exp(-ae^\theta r)$  kein relativ kompakter Multiplikationsoperator ist, weshalb  $V_\theta(r)$  keine *Norm-stetige* Fortsetzung auf  $\{\theta : |\operatorname{Im}\theta| = \frac{\pi}{2}\}$  hat.

BEISPIEL 14.28. Seien alle  $V_{ij}$  homogen vom Grade  $\beta_{ij}$  mit  $\beta_{ij} \in (0, 2)$ , dann hat  $H$ , der Operator, der aus  $\tilde{H} = -\sum_{i=1}^N \Delta_i + \sum_{i < j} V_{ij}$  durch Abseparation der Schwerpunktsbewegung entsteht, keine gebundenen Zustände positiver Energie. Dieses Resultat ist zwar vom Standpunkt des Virialsatzes, jedoch nicht mit diesem zu erhalten.

## 15. Kriterien für Kompaktheit und Operatoren mit kompakter Resolvente

Bisher hatten wir es immer mit Schrödinger-Operatoren zu tun, die wesentliches Spektrum hatten und deren Potentiale im Unendlichen verschwinden. In diesem Abschnitt wollen wir Kriterien finden, sodass ein Operator nur diskretes Spektrum besitzt.

Als Erstes zeigen wir, dass ein halbbeschränkter, selbstadjungierter Operator  $A$  genau dann nur diskretes Spektrum besitzt, wenn seine Resolvente kompakt ist. Um dieses Resultat anwenden zu können, brauchen wir Kriterien, die garantieren, dass bestimmte Teilmengen von  $L^2$  kompakt sind. Zusammen mit Resultaten von Rellich und Riesz können wir diese Techniken anwenden, um zu zeigen, dass Schrödinger-Operatoren, deren Potentiale im Unendlichen wachsen, rein diskretes Spektrum haben.

Diese Ideen stehen eng im Zusammenhang mit Einbettungssätzen von Sobolew-Räumen, welche in Anwendungen von partiellen Differentialgleichungen benötigt werden. Diese Einbettungssätze werden wir in der Mitte dieses Abschnitts erörtern.

Als eine weitere Anwendung werden wir den Hamilton-Operator eines Systems in einer Box aus der statistischen Mechanik untersuchen und zeigen, dass  $e^{-\beta H}$  Spurklasse ist. Dies zeigt insbesondere, dass solche Systeme eine Zustandssumme besitzen.

Wir schließen den Abschnitt mit Kriterien, die garantieren, dass das Spektrum eines selbstadjungierten Operators einen diskreten Anteil besitzt.

### 15.1. Rein diskretes Spektrum und Eigenschaften der zugehörigen Eigenfunktionen.

theorem:3.156

SATZ 15.1. *Sei  $A$  ein von unten beschränkter, selbstadjungierter Operator. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (i)  $(A - \mu)^{-1}$  ist für ein  $\mu \in \rho(A)$  kompakt.
- (ii)  $(A - \mu)^{-1}$  ist für alle  $\mu \in \rho(A)$  kompakt.
- (iii) Die Menge  $\{\psi \in \mathcal{D}(A) : \|\psi\| \leq 1, \|A\psi\| \leq b\}$  ist kompakt für alle  $b$ .
- (iv) Die Menge  $\{\psi \in \mathcal{Q}(A) : \|\psi\| \leq 1, (\psi, A\psi) \leq b\}$  ist kompakt für alle  $b$ .
- (v) Es gibt eine vollständige Orthonormalbasis  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{D}(A)$ , sodass  $A\varphi_n = \mu_n \varphi_n$  mit  $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$  und  $\mu_n \rightarrow \infty$ .
- (vi)  $\mu_n(A) \rightarrow \infty$ , wobei  $\mu_n(\cdot)$  durch das Min-Max-Prinzip für Operatoren aus Satz 1.1 gegeben ist.

BEWEIS. Wir beweisen  $(i) \Leftrightarrow (ii)$ , dann  $(v) \Leftrightarrow (vi)$  und schließlich  $(v) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (v)$ .  $(i) \Leftrightarrow (ii)$  haben wir bereits in ähnlicher Form in Lemma 4.8 bewiesen. Die Äquivalenz  $(v) \Leftrightarrow (vi)$  folgt direkt aus dem Min-Max-Prinzip aus Satz 1.1.

$(v) \Rightarrow (iv)$ : Sei

$$F_b := \{\psi \in \mathcal{Q}(A) : \|\psi\| \leq 1, (\psi, A\psi) \leq b\}, \quad (15.1)$$

dann werden wir im Folgenden zeigen, dass  $F_b$  abgeschlossen und für alle  $\epsilon > 0$  durch endlich viele offene Bälle vom Radius  $\epsilon$  überdeckt werden kann, woraus folgt (nachprüfen!), dass  $F_b$  kompakt ist.

Zunächst zur Abgeschlossenheit: sei dazu  $\psi_n \in F_b$  eine Folge, die in Norm gegen ein  $\psi$  konvergiert. Dann ist auch  $\|\psi\| \leq 1$ , und wir müssen nur noch zeigen, dass  $\psi \in \mathcal{Q}(A)$  und  $(\psi, A\psi) \leq b$ . Dazu genügt es zu zeigen, dass für alle  $\lambda < \infty$ ,  $(\psi, AP_{(-\infty, \lambda)}\psi) \leq b$  ist, wobei  $P_\Omega$  die Familie der Spektralprojektionen von  $A$  ist. Da  $AP_{(-\infty, \lambda)}$  ein beschränkter Operator ist, ist

$$(\psi, AP_{(-\infty, \lambda)}\psi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\psi_n, AP_{(-\infty, \lambda)}\psi_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\psi_n, A\psi_n) \leq b, \quad (15.2)$$

da  $\psi_n \in F_b$ , woraus folgt, dass  $F_b$  abgeschlossen ist. Für die Abgeschlossenheit dieser Menge benötigen wir lediglich, dass  $A$  von unten beschränkt ist.

Sei nun  $-a$  die untere Schranke von  $A$ , das heißt  $B := A + a \geq 0$  und für  $\psi \in F_b$  gilt  $(\psi, B\psi) \leq b + a$ . Für gegebenes  $\epsilon > 0$  wählen wir  $N$ , sodass  $\mu_N + a \geq \frac{2(b+a)}{\epsilon}$ , das heißt  $\frac{\epsilon}{2} \geq \frac{b+a}{\mu_N + a} \geq \frac{b+a}{\mu_{N+1} + a} \geq \dots > 0$ . Aus  $(\psi, B\psi) \leq b + a$  und der Bedingung, dass es eine vollständige Orthonormalbasis  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{D}(A)$  gibt, folgt dann (am besten von rechts nach links lesen)

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq N} |(\psi, \varphi_n)|^2 &\leq \frac{\sum_{n \geq N} (\mu_n + a) |(\psi, \varphi_n)|^2}{\mu_N + a} \leq \frac{\sum_{n \geq N} (\psi_n, \varphi_n)(\varphi_n, (A + a)\psi)}{\mu_N + a} \leq \frac{(\psi, (A + a)\psi)}{\mu_N + a} \\ &\leq \frac{b + a}{\mu_N + a} \leq \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \quad (15.3)$$

Geometrisch gesehen ist also  $\psi \in F_b$  innerhalb  $\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$  eines Punktes in der Einheitskugel, die durch die  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}\}$  aufgespannt wird. Da dieser Ball durch endlich viele  $\sqrt{\epsilon/2}$ -Bälle überdeckt werden kann, kann auch  $F_b$  durch endlich viele  $\epsilon$ -Bälle überdeckt werden.

$(iv) \Rightarrow (iii)$ : Mit einem ähnlichen Argument wie oben kann gezeigt werden, dass auch die Menge

$$D_b := \{\psi \in \mathcal{D}(A) : \|\psi\| \leq 1, \|A\psi\| \leq b\} \quad (15.4)$$

abgeschlossen ist. Mit der Schwarzschen Ungleichung folgt, dass  $D_b \subseteq F_b$ , das heißt, wenn  $F_b$  kompakt ist, so muss auch  $D_b$  kompakt sein.

$(iii) \Rightarrow (i)$ : Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass  $A$  positiv ist und definiere  $M_1 := \{\psi = (A + 1)^{-1}\varphi : \|\varphi\| \leq 1\}$ . Dann ist für  $\psi \in M_1$  und  $\varphi = (A + 1)\psi \in \mathcal{H}$

$$\|\psi\| \leq \| (A + 1)^{-1} \| \|\varphi\| \leq \|\varphi\| \leq 1 \quad (15.5a)$$

und

$$\|A\psi\| \leq \| A(A + 1)^{-1} \| \|\varphi\| \leq \|\varphi\| \leq 1, \quad (15.5b)$$

das heißt  $\psi \in D_1$ . Daher ist  $\overline{M_1} \subseteq \overline{D_1}$ , das heißt  $\overline{M_1}$  ist kompakt, da  $D_1$  kompakt ist, was wiederum heißt, dass  $M_1$  präkompakt ist. Damit ist  $(A+1)^{-1}$  ein kompakter Operator, da er die beschränkte Menge  $\{\varphi \in \mathcal{H} : \|\varphi\| \leq 1\}$  in eine präkompakte Menge, nämlich  $M_1$  abbildet.

(i)  $\Rightarrow$  (v): Wegen (i)  $\Rightarrow$  (ii) können wir annehmen, dass  $(A+a)^{-1}$  kompakt ist, wobei  $-a \in \mathbb{R}$  die eine strenge untere Schranke von  $A$  ist. Da  $(A+a)^{-1}$  kompakt ist, gibt es wegen des Hilbert-Schmidt-Satzes <sup>theorem: A48</sup> 4.20 eine vollständige Orthonormalbasis  $\{\varphi_n\}$  mit  $(A+a)^{-1}\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$  und  $\lambda_n \rightarrow 0$ . Da  $(A+a)^{-1}$  positiv ist, sind auch alle  $\lambda_n \geq 0$ , weshalb wir die  $\lambda_n$  und  $\varphi_n$  so ordnen können, dass  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ . Mit  $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n} - a$  folgt (v).  $\square$

Um die Kriterien (iii) und (iv) aus vorigem Satz benutzen zu können, brauchen wir Kriterien die sicherstellen, dass eine Teilmenge  $S$  von  $L^2(\mathbb{R}^n)$  kompakt ist. Wir erklären anhand eines Beispiels, warum diese Kriterien nützlich sind.

BEISPIEL 15.2. Sei  $\mathcal{H} = L^2(-\pi, \pi)$  und  $A$  die selbstadjungierte Erweiterung von  $i \frac{d}{dx} \upharpoonright C_c^\infty(-\pi, \pi)$  mit periodischen Randbedingungen  $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$ . Sei

$$S := \{\psi \in L^2(-\pi, \pi) : \|\psi\| \leq 1, \|A\psi\| \leq 1\}. \tag{15.6}$$

Mittels Fouriertransformation von  $\psi \in S$  kann man  $S$  isometrisch auf

$$\hat{S} := \{\{a_n\} \in \ell^2(-\infty, \infty) : \sum |a_n|^2 \leq 1, \sum n^2 |a_n|^2 \leq 1\} \tag{15.7}$$

abbilden. Die zweite Bedingung sagt insbesondere, dass die Schwänze der Folgen in  $\hat{S}$  gleichmäßig klein sind. Damit kann gezeigt werden, dass  $\hat{S}$  und damit auch  $S$  selbst kompakt sind.

Dieses Szenario erinnert an den Satz von Ascoli, wo die Kompaktheit des Trägers, die gleichmäßige Beschränktheit und die gleichgradige Stetigkeit die Kompaktheit einer Menge von Funktionen garantieren. In diesem Fall wird die gleichgradige Stetigkeit durch die Glattheits-Bedingung, also  $\|A\psi\| \leq 1$  für alle  $\psi \in S$ , ersetzt, welche, wie oben gesehen, zur Abfallbedingung  $\sum n^2 |a_n|^2 \leq 1$  äquivalent ist.

Wollen wir diese Idee nun auf den  $L^2(\mathbb{R})$  erweitern, so ist klar, dass die Glattheits-Bedingung nicht ausreichen wird. Für gegebenes  $f \in C_0^\infty(-\pi, \pi)$  kann die Menge der Translatierten  $f_n(x) = f(x + 2\pi n)$  nie eine konvergente Teilfolge haben. Die Schwierigkeit ist, dass diese Funktionen nicht gleichmäßig klein werden für große  $x$ .

Um also kompakte Mengen in  $L^2(\mathbb{R})$  zu erhalten, sollten wir also verlangen, dass die Funktionen sowohl im Orts- als auch im Impuls-/Fourierraum „gleichmäßig klein“ im Unendlichen sind. Dies ist gerade die Bedingung von Rellichs Kriterium.

DEFINITION 15.3. Sei  $F$  eine Funktion auf  $\mathbb{R}^n$ , die messbar und fast überall nicht-negativ ist. Wir sagen genau dann  $F \rightarrow \infty$ , wenn es für alle  $N > 0$  ein  $R_N > 0$  gibt, sodass  $F(x) \geq N$  für fast alle  $x$  mit  $|x| \geq R_N$  ist.

**theorem: 3. 159**

SATZ 15.4 (Rellichs Kriterium). Seien  $F$  und  $G$  zwei Funktionen auf  $\mathbb{R}^n$ , sodass  $F, G \rightarrow \infty$ . Dann ist

$$S := \left\{ \psi \in L^2(\mathbb{R}^n) : \int |\psi(x)| dx \leq 1, \int F(x) |\psi(x)|^2 dx \leq 1, \int G(\xi) |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \leq 1 \right\} \tag{15.8}$$

eine kompakte Teilmenge von  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Daraus folgt insbesondere, dass die Resolvente  $\frac{1}{F(x)+G(\xi)+\mu}$  (für  $\mu > 0$  oder komplex) von  $A = F(x) + G(\xi)$ , aufgefasst

als Formsumme auf  $\mathcal{Q}(F(x)) \cap \mathcal{Q}(G(\xi))$ , kompakt ist, und, dass  $F(x) + G(\xi)$  rein diskretes Spektrum hat.

BEWEIS. Wir werden die Aussage nicht mit der obigen Intuition aus der Theorie über die Fourierreihen, sondern mit Hilfe des Weylschen Satzes beweisen.

Wir können zunächst ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $F(x) \leq x^2$  und  $G(\xi) \leq \xi^2$  ist, indem wir  $F$  durch  $\min\{x^2, F(x)\}$  bzw.  $G$  durch  $\min\{G(\xi), \xi^2\}$  ersetzen. Wir können damit einen selbstadjungierten Operator  $A = F(x) + G(\xi)$  definieren, indem wir  $A$  zunächst als auf  $\mathcal{Q}(F(x)) \cap \mathcal{Q}(G(\xi))$  dicht definierte Summe von Formen auffassen. Ähnlich wie im vorigen Beweis kann man zeigen, dass  $S$  abgeschlossen ist. Wegen

$$S \subseteq \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^n) : \|\psi\| \leq 1, (\psi, A\psi) \leq 2\} \quad (15.9)$$

genügt es aufgrund der Äquivalenz  $(iv) \Leftrightarrow (vi)$  zu zeigen, dass  $\mu_m(A) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty$ , wobei  $\mu_m(A)$  die Min-Max-Eigenwerte von  $A$  sind.

Sei dazu  $V$  eine beschränkte und kompakt getragene Funktion. Dann behaupten wir zunächst, dass  $V(x)(G(\xi) + 1)^{-1}$  kompakt ist. Dazu stellen wir zunächst fest, dass  $V(x)(G(\xi) + 1 + \epsilon\xi^n)^{-1}$  ein Hilbert-Schmidt-Operator ist, da  $(G(\xi) + 1 + \epsilon\xi^n)^{-1}$  in  $L^2$  ist. Da  $G \rightarrow \infty$ , konvergiert  $(G(\xi) + 1 + \epsilon\xi^n)^{-1} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} (G(\xi) + 1)^{-1}$  in  $L^\infty$ . Dies zeigt, dass  $V(x)(G(\xi) + 1)^{-1}$  der Norm-Grenzwert einer Folge von Hilbert-Schmidt-Operatoren ist und damit selbst wieder Hilbert-Schmidt, also insbesondere kompakt ist.

Aus dem Weylschen Satz [4.16](#) corollary:3.44 sehen wir, dass  $V(x) + G(\xi)$  diskretes Spektrum in  $(-\infty, 0)$  hat, das heißt insbesondere ist  $\mu_m(V(x) + G(\xi)) \geq -1$  für hinreichend großes  $m$ .

Für gegebenes  $\alpha > 0$  definieren wir nun  $V_\alpha$  durch

$$V_\alpha(x) = \min\{F(x), \alpha + 1\} - \alpha - 1. \quad (15.10)$$

Dann hat  $V_\alpha$  kompakten Träger, da  $F \rightarrow \infty$ , und  $V_\alpha$  ist natürlich beschränkt. Mit obigem Argument und  $V_\alpha(x) \leq F(x) - \alpha - 1$  ist

$$\mu_m(A) \geq \mu_m(G(\xi) + V_\alpha(x)) + \alpha + 1, \quad (15.11)$$

womit  $\mu_m(A) \geq \alpha$  für hinreichend großes  $m$  ist. Da  $\alpha > 0$  beliebig war, geht  $\mu_m(A) \rightarrow \infty$  für  $m \rightarrow \infty$  und die Behauptung folgt.  $\square$

SATZ 15.5 (Riesz' Kriterium). Sei  $p < \infty$  und  $L^p(\mathbb{R}^n)_1$ , die Einheitskugel in  $L^p$  und sei  $S \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$ . Dann ist der Norm-Abschluß von  $S$  genau dann Norm-kompakt, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

- (i)  $f \rightarrow 0$  gleichmäßig im  $L^p$ -Sinne im Unendlichen, das heißt es gibt für alle  $\epsilon > 0$  eine beschränkte Menge  $K_\epsilon \subseteq \mathbb{R}^n$ , sodass

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus K_\epsilon} |f(x)|^p dx \leq \epsilon^p \quad (15.12)$$

für alle  $f \in S$ .

- (ii)  $f(\cdot - y) \xrightarrow{y \rightarrow 0} f$  gleichmäßig in  $S$  für  $y \rightarrow 0$ , das heißt es gibt für alle  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , sodass  $f \in S$  und  $|y| < \delta$  implizieren, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y) - f(x)|^p dx \leq \epsilon^p. \quad (15.13)$$

BEWEIS.  $\Rightarrow$ : Für  $\bar{S}$  kompakt fixieren wir zunächst ein  $\alpha$  und finden  $f_1, \dots, f_n$ , sodass die  $\frac{\alpha}{3}$ -Bälle, um die  $f_i$  gerade  $S$  überdecken. Dann finden wir  $K = K_\epsilon$  und  $\delta$ , sodass die Integralbedingungen in (i) und (ii) für  $f = f_1, \dots, f_n$  und  $\epsilon = \frac{\alpha}{3}$  erfüllt sind. Dies ist möglich, denn für alle  $g \in L^p$  ist  $\lim_{K \nearrow \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n \setminus K} |g|^p(x) dx = 0$  und  $g(\cdot - y) \rightarrow g$ . Mit einem  $\alpha/3$ -Argument folgen die Integralbedingungen.

$\Leftarrow$ : Angenommen  $S$  erfüllt die Integralbedingungen, dann ist für alle  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  die Menge

$$T(\Omega, \alpha, \beta) := \{f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) : \text{supp}(f) \subseteq \Omega, \|f\|_\infty \leq \alpha, \|\nabla f\|_\infty \leq \beta\} \quad (15.14)$$

wegen dem Satz von Ascoli (die  $f$  sind alle gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig mit dem Mittelwertsatz) präkompakt in  $C(\Omega)$ , und daher a fortiori präkompakt in  $L^p(\mathbb{R}^n)$ . Mit einem Dichtheitsargument genügt es daher für gegebenes  $\epsilon > 0$ , die Ingredienzien  $\Omega$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  zu finden, so dass es für gegebenes  $f \in S$  ein  $g \in T(\Omega, \alpha, \beta)$  gibt mit  $\|f - g\|_p < \epsilon$ . Denn, da  $T$  durch endliche viele  $\epsilon$ -Bälle überdeckt werden kann, kann  $S$  durch endlich viele  $2\epsilon$ -Bälle überdeckt werden.

Für gegebenes  $\epsilon > 0$  finden wir zunächst  $K = K_\epsilon$  und  $\delta$ , sodass für  $f \in S$  und  $|y| \leq \delta$

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus K} |f(x)|^p dx \leq \left(\frac{\epsilon}{4}\right)^p \quad (15.15a)$$

$$\|f(\cdot - y) - f\|_p \leq \frac{\epsilon}{4} \quad (15.15b)$$

erfüllt sind. Sei nun  $\eta$  eine  $C^\infty$ -Funktion, die auf  $\{y : |y| < \delta\}$  getragen ist und  $\int \eta(x) dx = 1$  erfüllt, später also die Rolle eines Weichmachers erfüllen wird. Sei  $\chi$  die charakteristische Funktion auf  $K' := \{y : \text{dist}(y, K) < \delta\}$ . Seien  $\Omega = \{y : \text{dist}(y, K) < 2\delta\}$ ,  $\alpha = \|\eta\|_q$  und  $\beta = \|\nabla \eta\|_q$ , wobei  $q$  der zu  $p$  konjugierte Hölder-Exponent sein soll. Wir behaupten, dass dann für  $f \in S$ ,  $g := \eta * (\chi f)$  gerade die gewollte Abschätzung

$$\|g - f\|_p \leq \epsilon \quad (15.16)$$

erfüllt und  $g \in T(\Omega, \alpha, \beta)$ . Die letzte Aussage folgt sofort, da  $\text{supp}(g) \subseteq \Omega$  und die Norm-Bedingungen in  $T$  aus der Youngschen Ungleichung folgen. Können wir diese Abschätzung zeigen, sehen wir mit dem Dichtheitsargument, dass  $\bar{S}$  kompakt ist. Wegen der Wahl von  $K$  und der Definition von  $K'$  ist für  $|y| < \delta$

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus K'} |f(x - y)|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus K} |f(x)|^p dx \leq \left(\frac{\epsilon}{4}\right)^p \quad (15.17)$$

und daher

$$\|(\chi f)(\cdot - y) - \chi f\|_p \leq \|f(\cdot - y) - f\|_p + \|(1 - \chi)f\|_p + \|[1 - \chi(\cdot - y)]f(\cdot - y)\|_p \leq \frac{3\epsilon}{4}. \quad (15.18)$$

Daher ist auch

$$\|\eta * \chi f - \chi f\|_p \leq \int \eta(y) \|\chi f(\cdot - y) - \chi f\|_p dy \leq \frac{3\epsilon}{4} \quad (15.19)$$

und daher endlich

$$\|g - f\|_p \leq \|g - \chi f\|_p + \|(1 - \chi)f\|_p \leq \epsilon. \quad (15.20)$$

□

Mit den Kriterien von Rellich und Riesz können wir das gesamte Spektrum eines Schrödinger-Operators, dessen Potential im Unendlichen gegen Unendlich geht, analysieren. Der folgende Satz ist stärker als [4.29](#). [theorem:3.56](#)

**SATZ 15.6.** *Sei  $V \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  von unten beschränkt und erfülle  $V \rightarrow \infty$ . Dann ist  $H = -\Delta + V$ , definiert als Summe quadratischer Formen, ein Operator mit kompakter Resolvente. Insbesondere hat  $H$  nur diskretes Spektrum und eine vollständige Menge von Eigenfunktionen.*

**BEWEIS.** Wegen Satz [15.1](#) [theorem:3.156](#) müssen wir lediglich zeigen, dass die Menge

$$F_H := \{\psi \in \mathcal{Q}(H) : \|\psi\| \leq 1, (\psi, H\psi) \leq b\} \quad (15.21)$$

für alle  $b$  kompakt ist. Ähnlich wie im Beweis dieses Satzes gezeigt, kann man auch hier wieder zeigen, dass  $F_H$  abgeschlossen ist und müssen daher nur noch zeigen, dass  $F_H$  in einer kompakten Menge enthalten ist. Da  $-\Delta$  und  $V$  positiv definit sind, impliziert  $(\psi, H\psi) \leq b$ , dass  $(\psi, -\Delta\psi) \leq b$  und  $(\psi, V\psi) \leq b$ , womit

$$F_H \subseteq \left\{ \psi : \|\psi\| \leq 1, \int V(x)|\psi(x)|^2 dx \leq b, \int \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \leq b \right\}. \quad (15.22)$$

Die Menge auf der rechten Seite ist aber gerade mit dem Kriterium von Rellich kompakt.  $\square$

Um das Ergebnis auf den Fall, wo  $V$  negative Singularitäten hat zu erweitern, beweisen wir zunächst ein Resultat aus der Störungstheorie.

**SATZ 15.7.** *Sei  $A$  ein halbbeschränkter, selbstadjungierter Operator mit kompakter Resolvente. Sei  $b$  eine symmetrische, Form-beschränkte Störung von  $A$  mit relativer Form-Schranke  $< 1$ . Sei  $C = A + b$ , definiert als Summe quadratischer Formen, dann hat auch  $C$  kompakte Resolvente.*

**BEWEIS.** Per Voraussetzung ist

$$|b(\psi, \psi)| \leq \alpha(\psi, A\psi) + \beta\|\psi\|^2 \quad (15.23)$$

mit  $\alpha < 1$ . Daher ist für alle  $\psi \in \mathcal{Q}(C) = \mathcal{Q}(A)$

$$(\psi, C\psi) \geq (1 - \alpha)(\psi, A\psi) - \beta(\psi, \psi). \quad (15.24)$$

Aus dem Min-Max-Prinzip für Formen folgt, dass

$$\mu_n(C) \geq (1 - \alpha)\mu_n(A) - \beta. \quad (15.25)$$

Da  $A$  kompakte Resolvente hat, gehen wegen Kriterium (vi) aus Satz [15.1](#) [theorem:3.156](#)  $\mu_n(A) \rightarrow \infty$  und damit  $\mu_n(C) \rightarrow \infty$ . Mit eben demselben Kriterium folgt, dass dann auch  $C$  kompakte Resolvente hat.  $\square$

**SATZ 15.8.** *Seien  $n \geq 3$  und  $V \equiv V_1 + V_2$ , wobei  $0 < V_1 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ,  $V_1 \rightarrow \infty$  und  $V_2 \in L^{n/2}(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n)$  der Anteil mit den negativen Singularitäten sein soll. Dann ist  $H = -\Delta + V_1 + V_2$ , definiert durch die Summe der quadratischen Formen, ein Operator mit kompakter Resolvente.*

**BEWEIS.** Wegen der Form-Version des Satzes von Strichartz [2.35](#) [theorem:1.47](#) ist  $V_2$  relativ  $-\Delta$ -Form-beschränkt mit relativer Schranke gleich Null. Da  $V_1 > 0$  ist, ist  $V_2$  auch  $-\Delta + V_1$ -Form-beschränkt mit relativer Schranke gleich Null. Die Behauptung folgt mit den letzten beiden Sätzen.  $\square$

Mit den obigen Resultaten haben wir nun eine vollständige qualitative Beschreibung von  $-\Delta + V$ , wenn  $V \rightarrow \infty$  im Unendlichen geht. Die Eigenwerte  $\lambda_n(V) \equiv \mu_n(-\Delta + V)$ , sowie die zugehörigen Eigenfunktionen  $\psi_n(x)$ , werden natürlich vom detaillierten Verhalten von  $V$ , und wie sich  $V$  lokal ändert, abhängen. Wir können jedoch hoffen qualitative Aussagen über  $\lambda_n(V)$  für  $n \rightarrow \infty$  bzw.  $\psi_n(x)$  für  $x \rightarrow \infty$  zu erhalten, wenn wir das qualitative Verhalten von  $V$  im Unendlichen kennen. Das asymptotische Verhalten der Eigenwerte werden wir im nächsten Abschnitt diskutieren, aber mit den Methoden von früher können wir das Verhalten von  $\psi_n(x)$  studieren, wenn  $x \rightarrow \infty$ .

**SATZ 15.9.** *Seien  $n \geq 3$  und  $V \equiv V_1 + V_2$ , wobei  $0 < V_1 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ,  $V_1 \rightarrow \infty$  und  $V_2 \in L^{n/2}(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n)$  der Anteil mit den negativen Singularitäten sein soll. Dann gilt für jede Eigenfunktion von  $H$ , dass  $\psi(x) \in \mathcal{D}(e^{a|x|})$  für alle  $a > 0$ . Ist  $V \geq 0$ , so gibt es für alle  $a > 0$  eine Konstante  $c_a$ , sodass*

$$|\psi(x)| \leq c_a e^{-a|x|} \quad (15.26)$$

**BEWEIS.** Wir müssen, wie im Beweis von Satz [Theorem 3.120](#) [II.2.10](#), nur zeigen, dass  $\psi$  ein ganzer Vektor für  $W(\alpha) = e^{i\alpha x_j}$  für alle  $j$  ist, um schließen zu können, dass  $\psi \in \mathcal{D}(e^{a|x|})$  für alle  $a > 0$  ist. Wie in diesem Satz ist

$$W(\alpha)HW(\alpha)^{-1} = -\sum_{i \neq j} \partial_i^2 + (i\partial_j + \alpha)^2 + V \quad (15.27)$$

für reelle  $\alpha$ . Man sieht, dass die rechte Seite der Gleichung wieder eine ganze Familie vom Typ (B) für alle komplexen  $\alpha$  definiert. Da  $(H(\alpha) - \lambda)^{-1}$  kompakt für reelle  $\alpha$  ist, so ist diese Resolvente für alle  $\alpha$  komplex. Darüberhinaus hat, wie im Beweis von Satz [Theorem 3.120](#) [II.2.10](#),  $H(\alpha)$  lokal konstantes Spektrum. Mittels der Kompaktheit der Resolvente kann man sogar zeigen, dass das Spektrum von  $H(\alpha)$  gar nicht von  $\alpha$  abhängt. Mit O'Connors Lemma [Lemma 3.121](#) [II.2.11](#) sind die Eigenfunktionen von  $H(\alpha)$  damit ganz, was die erste Behauptung zeigt.

Sei nun für die zweite Behauptung  $V \geq 0$ . Sei  $k \in \mathbb{N}$ , dann ist für  $a \in \mathbb{R}$

$$H_0(a) = (i\partial_k - ia)^2 - \sum_{j \neq k} \partial_j^2 = e^{ax_k} H_0 e^{-ax_k}, \quad (15.28)$$

weshalb der Kern von  $\exp(-tH_0(a))$  gerade

$$e^{ax_k} \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-ax_k} \quad (15.29)$$

ist. Er erhält damit offensichtlich Positivität. Da der Kern eine  $L^2$ -Funktion in  $|x-y|$  ist, erhält man mit der Youngschen Ungleichung für alle  $t > 0$

$$\left\| e^{-tH_0(a)} \psi \right\|_\infty \leq c_{a,t} \|\psi\|_2. \quad (15.30)$$

Sei nun  $V_n$  eine monoton steigende Folge von beschränkten Multiplikationsoperatoren mit  $V_n \nearrow V$ . Dann konvergiert  $H_0(a) + V_n$  gegen  $H_0(a) + V$  im starken Resolventen-Sinne (durch einen Satz für monotone Konvergenz für Formen), weshalb

$$\exp(-t(H_0(a) + V)) = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} s\text{-}\lim_{m \rightarrow \infty} \left[ e^{-tH_0(a)/m} e^{-tV_n/m} \right]^m. \quad (15.31)$$

Da  $e^{-tH_0(a)/m}$  die Positivität erhält und  $0 \leq e^{-tV_n/m} \leq 1$  ist, schließen wir

$$\left| e^{-t(H_0(a)+V)} f \right| \leq e^{-tH_0(a)} |f| \quad (15.32)$$

punktweise fast überall. Wegen  $\|e^{-tH_0(a)}\psi\|_\infty \leq c_{a,t} \|\psi\|_2$  ist  $e^{-tH_0(a)}|f| \in L^\infty$ , womit für alle  $f \in L^2$ , der Vektor  $e^{-t(H_0(a)+V)}f \in L^\infty$  ist. Insbesondere sind Eigenfunktionen von  $H_0(a) + V$  in  $L^\infty$ . Ist nun  $\psi$  eine Eigenfunktion von  $H_0 + V$ , so ist  $e^{ax_k}\psi$  eine Eigenfunktion von  $H_0(a) + V$  und damit ist  $e^{ax_k}\psi \in L^\infty$  für alle  $a > 0$ . Dies zeigt die zweite Behauptung.  $\square$

Die Eigenfunktionen des isotropen, harmonischen Oszillators  $-\Delta + x^2$  sind Gaußsche Funktionen mal Hermite-Polynome, also

$$\psi_n(x) = \mathcal{N}_n e^{-\frac{x^2}{4}} H_n \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right). \quad (15.33)$$

Das vorige Resultat über exponentiellen Abfall ist also alles andere als optimal und wir erwarten stärkere Resultate zu erhalten, wenn  $V$  schnell genug gegen Unendlich geht. Als Erstes kann man die Methoden von Combes–Thomas (Satz [12.15](#)) etwas verallgemeinern.

**SATZ 15.10.** *Seien  $n \geq 3$  und  $V \equiv V_1 + V_2$ , wobei  $0 < V_1 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ,  $V_1 \rightarrow \infty$  und  $V_2 \in L^{n/2}(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n)$  der Anteil mit den negativen Singularitäten sein soll. Sei  $W(x) = \int_0^{|x|} \sqrt{V_0(s)} ds$ , wobei  $V_0(r) := \text{ess inf}_{|x|=r} V_1(x)$ . Dann gilt für alle Eigenfunktionen  $\psi$  von  $-\Delta + V$ , dass  $\psi \in \mathcal{D} \left( e^{\frac{\beta}{2}W(x)} \right)$  für alle  $\beta < \sqrt{5} - 1 \approx 1,24$ .*

**BEWEIS.** Sei dazu  $U(\alpha) := e^{i\alpha W(x)}$ . Dann transformiert sich

$$U(\alpha)(-\Delta)U(\alpha)^{-1} = (i\nabla + \alpha\nabla W)^2 = -\Delta + \alpha^2(\nabla W)^2 + \alpha(\nabla W) \cdot (i\nabla) + \alpha(i\nabla) \cdot (\nabla W). \quad (15.34)$$

Da aber  $|\nabla W| = V_0^{1/2} \leq V_1^{1/2}$  ist, sind

$$\alpha^2(\nabla W)^2 \leq \alpha^2(-\Delta + V_2 + C) + \alpha^2(\nabla W)^2 \leq \alpha^2(-\Delta + V + \text{const}) \quad (15.35)$$

und

$$\pm[\alpha(\nabla W) \cdot (i\nabla) + \alpha(i\nabla) \cdot (\nabla W)] \leq (|\alpha| + \epsilon)(-\Delta + V + \text{const}). \quad (15.36)$$

Das heißt,  $U(\alpha)(-\Delta + V)U(\alpha)^{-1}$  setzt sich zu einer analytischen Familie auf dem Gebiet  $|\alpha|^2 + \alpha < 1$  fort. Die Behauptung folgt nun, indem man den Beweis des vorigen Resultats nachahmt.  $\square$

Mit völlig unterschiedlichen Methoden kann man folgendes, schärferes Resultat beweisen.

**SATZ 15.11.** *Sei  $0 \leq V \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  und  $H = -\Delta + V$ , sowie  $\psi$  eine Eigenfunktion von  $H$ . Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) *Ist  $V(x) \geq c|x|^{2n} - d$  für ein  $c$  und  $d$ , dann gibt es für alle  $\epsilon > 0$  eine Konstante  $D_\epsilon$ , sodass*

$$|\psi(x)| \leq D_\epsilon e^{-\frac{\sqrt{c-\epsilon}}{n+1}|x|^{n+1}} \quad (15.37)$$

für alle  $x$ .

b) Ist  $V(x) \leq c|x|^{2n} + d$  für ein  $c$  und  $d$ , sowie  $\psi$  die Grundzustandswellenfunktion, dann gibt es für alle  $\epsilon > 0$  ein  $E_\epsilon$ , sodass

$$\psi(x) \geq E_\epsilon e^{-\frac{\sqrt{c+\epsilon}}{n+1}|x|^{n+1}} \quad (15.38)$$

BEWEIS. Siehe [\[CarmonaSimon1981, CS81\]](#). □

Die letzten beiden Resultate sollten uns hier an die WKB-Approximation

$$\psi \sim \exp\left(-\int \sqrt{V - E} dx\right) \quad (15.39)$$

erinnern.

### 15.2. Einbettungssätze für lokale Sobolew-Räume.

DEFINITION 15.12 (Lokale Sobolew-Räume). Sei  $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge.  $H^m(\Lambda)$  ist die Menge aller Funktionen  $f \in L^2(\Lambda)$ , deren schwache/distributionelle Ableitungen  $D^\alpha f$  in  $L^2(\Lambda)$  liegen, wobei  $|\alpha| \leq m$  ist.  $H^m(\Lambda)$  ist unter der Norm

$$\|f\|_m := \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_2^2 \right)^{1/2} \quad (15.40)$$

ein Hilbertraum.

$H_0^m(\Lambda)$  ist als die Vervollständigung von  $C_c^\infty(\Lambda)$  unter der Norm  $\|\cdot\|_m$  definiert, also  $H_0^m(\Lambda) := \overline{C_c^\infty(\Lambda)}^{\|\cdot\|_m}$ . Das heißt, jedes Element  $f \in H_0^m(\Lambda)$  ist der Grenzwert einer Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C_c^\infty(\Lambda)$  bezüglich der  $\|\cdot\|_m$ -Norm.  $H_0^m(\Lambda)$  und  $H^m(\Lambda)$  heißen *lokale Sobolew-Räume*.

BEMERKUNG 15.13. Im Allgemeinen ist  $H_0^m(\Lambda) \subsetneq H^m(\Lambda)$ , wie das folgende Beispiel illustriert.

BEISPIEL 15.14. Sei  $\Lambda = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ ,  $g(x) = e^x$  und  $f \in C_c^\infty(\Lambda)$ . Mit dem natürlichen inneren Produkt auf  $H^1(\Lambda)$  ist

$$(g, f)_1 = \left( \left( -\frac{d}{dx} + 1 \right) g, f \right)_{L^2} = 0. \quad (15.41)$$

Wir sehen also, dass  $H_0^1(\Lambda) \subseteq \{g\}^\perp$ , das heißt  $H_0^1(\Lambda) \neq H^1(\Lambda)$ .

BEMERKUNG 15.15. (1) Wir haben bereits früher gesehen, dass  $-\frac{d^2}{dx^2}$  auf  $C_0^\infty(0, 1)$  nicht wesentlich selbstadjungiert ist. Man kann sogar zeigen, dass  $-\frac{d^2}{dx^2}$  nie auf  $C_0^\infty(\Lambda)$  wesentlich selbstadjungiert ist, wenn  $\Lambda$  beschränkt ist. Damit kann man zeigen, dass  $H_0^1(\Lambda)$  immer von  $H^1(\Lambda)$  für beschränkte  $\Lambda$  verschieden ist.

(2)  $H_0^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}((-\Delta)^{m/2})$

Wir zeigen nun einige Einbettungssätze für lokale Sobolew-Räume.

SATZ 15.16. Seien  $\Lambda$  und  $\Lambda'$  offene Mengen mit  $\Lambda \subseteq \Lambda'$ , sowie  $0 \leq j \leq m$ . Dann gilt:

- (i)  $H_0^m(\Lambda) \subset H^m(\Lambda)$ .
- (ii)  $H^m(\Lambda) \subset H^j(\Lambda)$ .
- (iii)  $H_0^m(\Lambda) \subset H_0^j(\Lambda)$ .

- (iv) Sei  $f \in H(\Lambda')$ , dann ist  $f \upharpoonright_{\Lambda} \in H(\Lambda)$ .  
 (v) Ist  $f \in H^m(\Lambda)$  und  $f = 0$  auf  $\Lambda \setminus K$ , wobei  $K \subseteq \Lambda$  kompakt ist, so ist  $f \in H_0^m(\Lambda)$ . Das heißt, kompakt getragene Funktionen, die in einem Sobolew-Raum  $H^m(\Lambda)$  liegen, liegen automatisch im lokalen Sobolew-Raum  $H_0^m(\Lambda)$ .  
 (vi) Sei  $-\Delta$  der Operator auf  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Ist  $f \in \mathcal{D}((-\Delta)^{m/2})$ , so ist  $f \upharpoonright_{\Lambda} \in H^m(\Lambda)$ .  
 Alle Inklusionen sind nicht-steigend in Norm.

BEWEIS. (i) Folgt aus der Definition.

(ii) Folgt aus der Definition.

(iii) Folgt aus der impliziten Norm-Ungleichung in (ii) und durch Abschließen von  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

(iv) Folgt aus der Definition.

(v) Folgt durch Approximation der Identität.

(vi) Folgt durch Fourier-Transformation, um jeden Term in  $\|f\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}$  durch  $\|f\|_{L^2}$  und  $\|(-\Delta)^{m/2}f\|_{L^2}$  abzuschätzen.  $\square$

Wir beweisen nun zwei einfache Kompaktheitsresultate.

SATZ 15.17. Sei  $A$  die Friedrichs-Erweiterung des Dirichlet-Laplace-Operators  $-\Delta$  auf  $C_0^\infty(\Lambda)$ . Angenommen,  $\Lambda$  ist beschränkt, dann gilt:

- a)  $H_0^m(\Lambda) \subseteq \mathcal{D}(A^{m/2})$  und die Normen sind äquivalent.  
 b) Ist  $j < m$ , so ist der Einheitsball in  $H_0^m(\Lambda)$  eine kompakte Teilmenge von  $H_0^j(\Lambda)$ .

BEWEIS. a) Sei dazu  $f \in C_0^\infty(\Lambda)$ , dann sind die Normen  $\|f\|_m$  und  $\|(-\Delta)^{m/2}f\|_{L^2} \equiv \|(-\Delta)^{m/2}f\|$  äquivalent zueinander, da man sich  $f$  als Element in  $L^2$  vorstellen kann. In diesem Fall erfüllen die Ableitungen von  $f$ , dass  $\mathcal{F}(D^\alpha f) = (i\xi)^\alpha \hat{f}$  und

$$\xi^{2m} \leq c_1 \sum_{|\alpha| \leq m} (\xi^\alpha)^2 \leq c_2 (\xi^{2m} + 1). \quad (15.42)$$

Da  $C_0^\infty(\Lambda) \subseteq \mathcal{D}(A^n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $A^n f = (-\Delta)^n f$  ist, ist

$$\|(-\Delta)^{m/2}f\|^2 = (f, (-\Delta)^m f) = (f, A^m f) = \|A^{m/2}f\|^2 \quad (15.43)$$

Die Vervollständigung von  $C_0^\infty(\Lambda)$  in der  $\|\cdot\|_m$ -Norm ist also in  $\mathcal{D}(A^{m/2})$ , womit der erste Punkt bewiesen ist.

- b) Als Nächstes behaupten wir, dass die Resolvente des Operators  $A$  kompakt ist. Wir müssen daher zeigen, dass  $F_b := \{\psi \in \mathcal{Q}(A) : \|\psi\| \leq 1, (\psi, A\psi) \leq b\}$  in  $L^2(\Lambda)$  kompakt ist. Dazu reicht es klarerweise aus zu zeigen, dass  $F_b$  in einer kompakten Teilmenge von  $L^2(\mathbb{R}^n)$  enthalten ist. Wie zuvor ist  $\mathcal{Q}(A) \subseteq \mathcal{Q}(-\Delta)$  mit  $(\psi, A\psi) = (\psi, -\Delta\psi)$ , wobei  $-\Delta$  der übliche Laplace-Operator auf  $L^2(\mathbb{R}^n)$  ist. Sei nun  $F$  eine beliebige Funktion, die auf  $\Lambda$  gleich 1 ist und  $F \rightarrow \infty$  erfüllt. Dann ist

$$F_b \subseteq \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^n) : \|\psi\| \leq 1, (\psi, -\Delta\psi) \leq b, (\psi, F\psi) \leq 1\}. \quad (15.44)$$

Nach Rellichs Kriterium <sup>theorem: 3.159</sup> 15.4 ist die Menge auf der rechten Seite kompakt ( $-\Delta \rightarrow \infty$  und  $F \rightarrow \infty$ ), weshalb  $F_b$  in einer kompakten Teilmenge von  $L^2(\mathbb{R}^n)$  enthalten ist.

Da  $(A + 1)^{-1}$  als Abbildung von  $L^2(\Lambda)$  nach  $L^2(\Lambda)$  kompakt ist, ist sie ebenfalls kompakt als Abbildung von  $\mathcal{D}(A^{m/2})$  nach  $\mathcal{D}(A^{m/2})$  für alle  $m$ , denn

die unitäre Abbildung  $(A+1)^{-m/2} : L^2(\Lambda) \rightarrow \mathcal{D}(A^{m/2})$  kommutiert mit  $(A+1)^{-1}$  (Schreibe dazu  $(A+1)^{-1} = (A+1)^{-m/2}(A+1)^{-1}(A+1)^{m/2}$ ). Wegen  $(A+1)^{-1/2} = ((A+1)^{1/2})^*$  und, da  $(A+1)^{-1} = (A+1)^{-1/2}(A+1)^{-1/2} = (A+1)^{-1/2}((A+1)^{1/2})^*$  kompakt ist, ist auch  $(A+1)^{-1/2}$  kompakt. Der abgeschlossene Einheitsball in  $\mathcal{D}(A^{(m+1)/2})$  ist wegen  $\|\cdot\|_{\Gamma(A^{m/2})} \leq \|\cdot\|_{\Gamma(A^{(m+1)/2})}$  auch in  $\mathcal{D}(A^{m/2})$  abgeschlossen. Da  $(A+1)^{-1/2} : \mathcal{D}(A^{m/2}) \rightarrow \mathcal{D}(A^{(m+1)/2})$  kompakt ist, ist auch  $((A+1)^{-1/2})^* = (A+1)^{1/2} : \mathcal{D}(A^{(m+1)/2}) \rightarrow \mathcal{D}(A^{m/2})$  kompakt, das heißt das Bild des Einheitsballs unter  $(A+1)^{1/2}$  ist präkompakt in  $\mathcal{D}(A^{m/2})$ . Damit ist die Einheitskugel von  $\mathcal{D}(A^{(m+1)/2})$  kompakt in  $\mathcal{D}(A^{m/2})$ . Da  $H_0^j(\Lambda) \subseteq \mathcal{D}(A^{j/2})$  ist, folgt das Kompaktheitsresultat für  $H_0^j$  mit  $j < m$ .  $\square$

**BEMERKUNG 15.18.** Obwohl  $H_0^1(\Lambda) = \mathcal{D}(A^{1/2})$  per Definition von  $A$  ist, so sind  $H_0^m(\Lambda)$  und  $\mathcal{D}(A^{m/2})$  für  $m > 1$  voneinander verschieden!

**KOROLLAR 15.19.** Sei  $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$  beschränkt und offen. Dann hat der Dirichlet-Laplace-Operator  $-\Delta_D^\Lambda$  kompakte Resolvente.

**BEWEIS.** Wegen vorherigem Satz ist die Menge

$$\{\psi \in \mathcal{Q}(-\Delta_D^\Lambda) : \|\psi\| \leq 1, (\psi, -\Delta_D^\Lambda \psi) \leq 1\} \quad (15.45)$$

in  $L^2(\Lambda)$  kompakt, weshalb  $-\Delta_D^\Lambda$  nach Satz [15.1](#) <sup>[theorem:3.156](#)</sup> kompakte Resolvente hat.  $\square$

**LEMMA 15.20.** Sei  $\Lambda$  eine offene und beschränkte Teilmenge und  $\Lambda'$  offen mit  $\bar{\Lambda} \subseteq \Lambda'$ . Dann gibt es eine Bump-Funktion  $\eta \in C_0^\infty(\Lambda')$  mit  $\eta \equiv 1$  auf  $\Lambda$ .

**BEWEIS.** Per Voraussetzung  $\bar{\Lambda} \subseteq \Lambda'$  finden wir für alle  $x \in \bar{\Lambda}$  einen Radius  $r_x > 0$ , sodass der Ball vom Radius  $2r_x$  um  $x$  immer noch in  $\Lambda'$  liegt. Da  $\bar{\Lambda}$  kompakt ist, können wir  $\bar{\Lambda}$  mit endlich vielen Bällen  $B_1, \dots, B_m$  mit Radi  $r_{x_i}$  überdecken. Wir finden dann Funktionen  $\eta_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit  $\eta_i \equiv 1$  auf  $B_i$  und  $\text{supp}(\eta_i) \subseteq B_{x_i}(2r_{x_i})$ . Dann definieren wir  $\eta = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - \eta_i)$ , welches die gewünschte Eigenschaft hat.  $\square$

**SATZ 15.21.** Sei  $\Lambda$  eine offene und beschränkte Teilmenge und  $\Lambda'$  offen mit  $\bar{\Lambda} \subseteq \Lambda'$  und sei  $j < m$ . Dann ist die Einbettung

$$\text{id} : H^m(\Lambda') \rightarrow H^j(\Lambda) \quad (15.46)$$

$$\varphi \mapsto \varphi \quad (15.47)$$

eine kompakte Abbildung. Man sagt,  $H^m(\Lambda')$  ist kompakt in  $H^j(\Lambda)$  eingebettet und schreibt  $H^m(\Lambda') \subset\subset H^j(\Lambda)$ .

**BEWEIS.** Wir wählen ein  $\eta \in C_0^\infty(\Lambda')$  mit  $\eta \equiv 1$  auf  $\Lambda$  und betrachten eine Folge  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \in H^m(\Lambda')$  mit  $\|f_k\|_m \leq 1$  und definieren  $g_k := \eta f_k$ . Dann gibt es eine Konstante  $c > 0$ , sodass  $\|g_k\|_m \leq c$  und insbesondere ist die Einschränkung  $g_k \in H_0^m(\Lambda')$ . Es gibt daher eine Teilfolge  $g_{k,n}$  die in  $H_0^j(\Lambda')$  konvergiert. Damit konvergiert aber  $g_{k,n} \upharpoonright_\Lambda = f_{k,n} \upharpoonright_\Lambda$  in  $H^j(\Lambda)$ , womit die Restriktion bzw. Einbettung von  $H^m(\Lambda')$  auf  $H^j(\Lambda)$  kompakt ist.  $\square$

**KOROLLAR 15.22.** Sei  $-\Delta$  der Laplace-Operator auf  $\mathbb{R}^m$  und sei  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{Q}(-\Delta)$  eine Folge von Funktionen, die  $\|\nabla u_n\| \leq c$  und  $\|u_n\| \leq c$  für ein  $c > 0$

erfüllt. Dann gibt es für gegebenes  $R > 0$  eine Teilfolge von  $u_n$ , die in der Norm  $\left(\int_{|x|\leq R} |v(x)|^2 dx\right)^{1/2}$  konvergiert.

Ist  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}(-\Delta)$  eine Folge, die  $\|\nabla u_n\| \leq c$  und  $\|-\Delta u_n\| \leq c$  erfüllt, so gibt es eine Teilfolge von  $u_n$ , die in der Halbnorm  $\left(\int_{|x|\leq R} |\nabla v(x)|^2 dx\right)^{1/2}$  konvergiert.

BEWEIS. Man wählt hierzu  $\Lambda = \{x : |x| \leq R\}$  und  $\Lambda' = \mathbb{R}^m$ . Da  $\mathcal{Q}(-\Delta) = H^1(\mathbb{R}^m)$  und  $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^m)} \leq \|\nabla u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}$  ist, folgt der erste Teil der Aussage aus dem vorigen Einbettungs-Satz.

Der zweite Teil folgt aus dem ersten, denn wegen  $\sum_j (\xi_j \xi_i)^2 \leq \xi^2$  folgt mittels Fouriertransformation, dass  $\|\nabla \partial_i u\| \leq \|\Delta u\|$ .  $\square$

KOROLLAR 15.23. Sei  $K \subseteq \mathbb{R}^m$  kompakt (ein Hindernis) und  $-\Delta_D$  der Dirichlet-Laplace-Operator auf  $L^2(\mathbb{R}^m \setminus K)$ . Sei  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{Q}(-\Delta_D)$  eine Folge von Funktionen, die  $(u_n, (-\Delta_D)u_n) \leq c^2$  und  $\|u_n\| \leq c$  für ein  $c > 0$  erfüllt. Dann gibt es für einen vorgegebenen Radius  $R > 0$  eine Teilfolge von  $u_n$ , die in der Norm  $\left(\int_{\{|x|\leq R\}\setminus K} |v(x)|^2\right)^{1/2}$  konvergiert.

Ist  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}(-\Delta_D)$  eine Folge, die  $(u_n, (-\Delta_D)u_n) \leq c^2$  und  $\|-\Delta_D u_n\| \leq c$  erfüllt, so hat  $u_n$  für  $m \geq 3$  eine Teilfolge, die in der Halbnorm  $\left(\int_{\{|x|\leq R\}\setminus K} |\nabla v(x)|^2\right)^{1/2}$  konvergiert.

BEMERKUNG 15.24. Das erste Korollar wird für die Streutheorie nach Lax und Phillips in inhomogenen Medien gebraucht. Das Zweite wird für Streuung an einem Hindernis verwendet, wenn man Dirichlet-Randbedingungen fordert. Die Angelegenheit ist nochmal schwieriger, wenn man Neumann-Randbedingungen voraussetzt.

**15.3. Statistische Quantenmechanik endlicher Systeme.** Operatoren mit kompakter Resolvente treten häufig in statistischer Quantenmechanik auf, bei der das System in einer endlich großen Box ist. Die physikalisch wichtige Größe  $Z$ , die Zustandssumme eines statistischen Systems muss existieren, um physikalische Eigenschaften, wie die freie Energie oder die Wärmekapazität aus ihr zu extrahieren. Sei dazu  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  offen und beschränkt,  $\Omega_N := \Omega \times \dots \times \Omega \subseteq \mathbb{R}^{3N}$  der Lebensraum von  $N$  Teilchen und  $\mathcal{H} = L^2(\Omega_N, d^{3N}x)$  der zugehörige Zustandsraum. Für Bosonen bzw. Fermionen muss man jedoch  $\mathcal{H}_s$ , den Raum aller symmetrischen, bzw.  $\mathcal{H}_a$ , den Raum aller antisymmetrischen Funktionen verwenden. Die Ergebnisse, die wir hier erhalten, gelten sowohl für Bosonen als auch für Fermionen.

Sei  $H_0$  die Friedrichs-Erweiterung von  $-\Delta$  auf  $C_0^\infty(\Omega_N)$  und damit die gesamte kinetische Energie. Sei  $W$  eine infinitesimal kleine Form-Störung von  $-\Delta$  auf  $\mathbb{R}^3$ , also z.B.  $W \in R$ , der Rollnik-Klasse. Sei

$$V := \sum_{1 \leq i < j \leq N} W(x_i - x_j) \quad (15.48)$$

der zugehörige Multiplikationsoperator auf  $\mathcal{H}$ . Es ist leicht zu sehen, dass dann  $V$  eine infinitesimale Form-Störung von  $H_0$  ist. Wir zeigen als Erstes, dass die Zustandssumme für  $H_0 + V$  existiert.

SATZ 15.25.  $H = H_0 + V$  hat kompakte Resolvente und  $e^{-\beta H}$  ist für alle  $\beta > 0$  ein Spurklasse-Operator.

BEWEIS. Da  $V$  eine infinitesimale Form-Störung von  $H_0$  ist, ist es leicht zu sehen, dass es für alle  $\epsilon > 0$  eine Konstante  $c > 0$  gibt, sodass

$$(1 - \epsilon)(H_0 - c) \leq H \leq (1 + \epsilon)(H_0 + c), \quad (15.49)$$

womit für die Min-Max-Eigenwerte  $\mu_n(H)$

$$(1 - \epsilon)[\mu_n(H_0) - c] \leq \mu_n(H) \leq (1 + \epsilon)[\mu_n(H_0) + c] \quad (15.50)$$

gilt. Aus der ersten Ungleichung und Punkt (vi) aus Satz 15.1 folgt, dass  $H$  genau dann kompakte Resolvente hat, wenn  $H_0$  kompakte Resolvente hat, was aber wegen Rellichs Kriterium klar ist.

Die Aussage, dass  $e^{-\beta A}$  Spurklasse ist gleichbedeutend mit  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta \mu_n(A)} < \infty$ . Die zweite Abschätzung der Min-Max-Eigenwerte von oben zeigt also, dass  $e^{-\beta H}$  genau dann Spurklasse für alle  $\beta > 0$  ist, wenn  $e^{-\beta H_0}$  für alle  $\beta > 0$  Spurklasse ist. Wir haben damit den Beweis auf den Fall  $V = 0$  reduziert.

Da wir sogleich größere Boxen  $\Omega' \supset \Omega$  einführen werden, machen wir die  $\Omega_N$ -Abhängigkeit von  $H_0$  durch Schreiben von  $H_0(\Omega_N)$  explizit. Da per Definition der Friedrichs-Erweiterung  $C_c^\infty(\Omega_N)$  ein determinierender Bereich von  $H_0(\Omega_N)$  ist und  $C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(\Omega')$  für  $\Omega \subset \Omega'$ , folgt aus dem Min-Max-Prinzip, dass

$$\mu_n(H_0(\Omega'_N)) \leq \mu_n(H_0(\Omega_N)) \quad (15.51)$$

für  $\Omega \subset \Omega'$ . Jedes  $\Omega_N$  kann in eine Box  $\Omega'_N \subseteq \mathbb{R}^{3N}$  eingebettet werden, weshalb wir lediglich

$$\sum_n e^{-\beta \mu_n[H_0(\Omega'_N)]} < \infty \quad (15.52)$$

zeigen müssen. Hat  $\Omega'_N$  die Kantenlängen  $l_1, \dots, l_{3N}$ , so sind die Eigenwerte gerade

$$E_{m_1, \dots, m_{3N}} = \sum_{i=1}^{3N} m_i^2 \cdot \left(\frac{\pi}{l_i}\right)^2, \quad (15.53)$$

wobei  $m_i \in \mathbb{N}$ . Sei  $a := \min \left\{ \frac{\pi^2}{l_i^2} : i = 1, \dots, 3N \right\}$ , dann ist  $E_{m_1, \dots, m_{3N}} \geq a \sum_{i=1}^{3N} m_i^2 \geq a \sum_{i=1}^{3N} m_i$ , weshalb

$$\sum_n \exp(-\beta \mu_n[H_0(\Omega'_N)]) \leq \sum_{m_i \geq 1} \exp\left(-a\beta \sum_{i=1}^{3N} m_i\right) = \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \exp(-\beta a m) \right]^{3N} < \infty, \quad (15.54)$$

da die geometrische Reihe konvergiert.  $\square$

**15.4. Kriterien für das Auftreten von diskretem Spektrum.** Wir schließen diesen Abschnitt mit Kriterien, die garantieren, dass ein selbstadjungierter Operator diskretes Spektrum hat.

SATZ 15.26. Sei  $A$  ein selbstadjungierter Operator. Der Teil des Spektrums von  $A$  im Intervall  $(a, b)$  ist genau dann diskret, wenn  $f(A)$  kompakt ist, für alle  $f \in C_c(\mathbb{R})$  mit  $\text{supp}(f) \subseteq (a, b)$ .

BEWEIS. Sei dazu  $\text{supp}(f) \subseteq [c, d]$ , wobei  $a < c \leq d < b$ .

„ $\Rightarrow$ “: Hat  $A$  rein diskretes Spektrum in  $(a, b)$ , so gibt es nur endlich viele Punkte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \sigma(A) \cap [c, d]$ , da kein Punkt in  $[c, d]$  ein Häufungspunkt von  $\sigma(A)$  ist. Darüberhinaus sind die Spektralprojektionen  $P(\lambda_i)$  alle endlichdimensional. Daher ist

$$f(A) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i)P(\lambda_i) \quad (15.55)$$

ein Operator, der auf dem orthogonalen Komplement eines endlich-dimensionalen Raumes verschwindet. Da  $f(A)$  offensichtlich beschränkt und nur auf einem endlich-dimensionalen Raum nicht verschwindet, ist  $f(A)$  kompakt.

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $f$  eine beliebige stetige Funktion mit  $\text{supp}(f) \subseteq (a, b)$ , sodass  $f(A)$  kompakt ist und sei wieder  $[c, d] \subset (a, b)$ . Sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit  $0 \leq f \leq 1$  und  $f(x) = 1$ , wenn  $x \in [c, d]$ . Dann gilt für die Spektralprojektion  $P([c, d])$  auf das Intervall  $[c, d]$ , dass  $P([c, d]) = P([c, d])f(A)$ , das heißt  $P([c, d])$  ist wegen der Ideal-Eigenschaft kompakter Operatoren wieder kompakt. Daher hat  $P([c, d])$  endlichen Rang, das heißt jeder Punkt  $\lambda \in [c, d]$  ist wegen des analytischen Fredholm-Satzes entweder in  $\rho(A)$  oder in  $\sigma_{disc}(A)$ .  $\square$

KOROLLAR 15.27. Sei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge selbstadjungierter Operatoren, die rein diskretes Spektrum im Intervall  $(a, b)$  haben. Konvergiert  $A_n$  gegen ein  $A$  im Norm-Resolventen-Sinne, so hat auch  $A$  rein diskretes Spektrum in  $(a, b)$ .

BEWEIS. Sei  $f$  stetig mit  $\text{supp}(f) \subseteq (a, b)$  mit  $f(A_n)$  kompakt für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Da  $f$  stetig ist und auf  $(a, b)$  getragen ist, konvergiert aufgrund Satz 2.5  $f(A_n) \rightarrow f(A)$  in Norm, wenn  $A_n$  gegen  $A$  im Norm-Resolventen-Sinne konvergiert. Da der Norm-Limes  $f(A)$  kompakter Operatoren wieder kompakt ist, folgt aus obigem Satz, dass auch  $A$  rein diskretes Spektrum in  $(a, b)$  hat.  $\square$

KOROLLAR 15.28. Sei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge selbstadjungierter Operatoren mit  $\sigma_{ess}(A_n) = [\Sigma_n, \infty)$ . Konvergiert  $A_n$  gegen ein  $A$  im Norm-Resolventen-Sinne, so konvergiert  $\Sigma_n$  gegen ein  $\Sigma$  (welches auch  $\infty$  sein kann) und dieses  $\Sigma$  ist der Threshold von  $A$ , das heißt  $\sigma_{ess}(A) = [\Sigma, \infty)$ .

BEWEIS. Durch Übergang zu einer Teilfolge, können wir  $\Sigma_n \rightarrow \Sigma$  annehmen. Wegen des vorigen Korollars ist  $\sigma_{ess}(A) \subseteq [\Sigma, \infty)$ . Wegen Punkt (ii) aus Satz 2.13 ist  $(\Sigma, \infty) \subseteq \sigma_{ess}(A)$ . Daher ist  $\sigma_{ess}(A) = [\Sigma, \infty)$ . Insbesondere ist  $\inf \sigma_{ess}(A)$  der einzig mögliche Häufungspunkt der ursprünglichen Folge  $\Sigma_n$ , weshalb  $(\Sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert.  $\square$

## 16. Die asymptotische Verteilung von Eigenwerten

Wir beschreiben in diesem Abschnitt eine Methode, um qualitative Informationen über das Punktspektrum eines Operators zu erhalten. Ihre Ursprünge liegen in der Bestimmung der Zahl der Eigenwerte  $N(\lambda) := \dim P_{(-\infty, \lambda)}(A)$  für  $\lambda \rightarrow \infty$ , wobei  $A$  ein selbstadjungierter Operator ist, der in einem Randwert-Problem auftaucht.

Das bekannteste Beispiel eines solchen Resultats ist Weyls Beweis für den Dirichlet-Laplace-Operator  $-\Delta_D^\Omega$  auf  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$  beschränkt, das besagt, dass asymptotisch  $N(\lambda) \sim C_m \lambda^{m/2}$  für  $\lambda \rightarrow \infty$  ist. Hierbei ist  $C_m = [m2^{m-1}\pi^{m/2}\Gamma(m/2)]^{-1}$ ,

wobei  $\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) = \begin{cases} (k-1)! & \text{für } m = 2k \\ 2^{-2k}(2k)!\pi^{1/2}/k! & \text{für } m = 2k+1 \end{cases}$  und  $k \in \mathbb{N}$ .

Die Methode wird unter anderem Antworten auf folgende Fragen geben:

- (1) Wie schnell wächst  $\dim P_{(-\infty, E)}(-\Delta + V)$  für  $E \rightarrow \infty$ , wenn  $-\Delta + V$  kompakte Resolvente hat, es also nur diskretes Spektrum gibt?
- (2) Angenommen,  $V$  ist ein Potential, das im Unendlichen verschwindet, aber es verschwindet so langsam, dass  $\dim P_{(-\infty, 0)}(-\Delta + V) = \infty$  (bildlich gesprochen ist  $V$  ein langreichweitiges Potential). Wie schnell wächst dann  $\dim P_{(-\infty, 0)}(-\Delta + V)$  für  $E \rightarrow 0$ ?
- (3) Angenommen,  $W$  ist ein kurzreichweitiges Potential. Wie schnell wächst  $\dim P_{(-\infty, 0)}(-\Delta + \lambda W)$  für  $\lambda \rightarrow \infty$ ?

Teile dieser Methoden waren sehr nützlich bei der Untersuchung des Drucks in statistischen quantenmechanischen Systemen, der Fock-Raum-Energie pro Einheitsvolumen in konstruktiver Feldtheorie und der Gültigkeit der Thomas-Fermi-Theorie in Atomphysik.

Die Probleme sind an eine Intuition gebunden, die wesentlich für das Verständnis der Struktur der zu entwickelnden Maschinerie ist. Wir betrachten dazu zunächst Weyls Ergebnis. Wenn  $\tau_m$  das Volumen des Einheitsballs in  $\mathbb{R}^m$  ist, so ist  $C_m = \frac{\tau_m}{(2\pi)^m}$ , weshalb

$$N(\lambda) \sim \frac{\tau_m}{(2\pi)^m} \cdot \text{vol}(\Omega) \cdot \lambda^{m/2}. \quad (16.1)$$

$N(\lambda)$  ist also mit einem Volumen in  $\mathbb{R}^{2m}$  verknüpft. Wegen  $\tau_m \lambda^{m/2} = \text{vol}\{p \in \mathbb{R}^m : p^2 < \lambda\}$ , sieht man sogar, dass

$$N(\lambda) \sim \frac{\text{vol}\{\langle x, p \rangle : x \in \Omega, p^2 < \lambda\}}{(2\pi)^m}. \quad (16.2)$$

Das heißt,  $(2\pi)^m N(\lambda)$  ist asymptotisch gerade das Phasenraumvolumen, das einem freien Teilchen mit kinetischer Energie  $p^2 < \lambda$  semiklassisch zur Verfügung steht. Für  $\lambda \rightarrow \infty$  ist die Zahl der möglichen Quantenzustände gerade das gesamte klassische Phasenraumvolumen, geteilt durch  $(2\pi)^m$ . Dies steht im Einklang mit der „alten Quantentheorie“ nach Bohr und Sommerfeld, in dem jeder Quantenzustand eine Box im Phasenraum besetzen kann. Das Volumen dieser Box ist gerade  $(2\pi)^m$  (bzw.  $h^m$  in klassischen Einheiten).

Die Antworten auf die obigen Fragen werden alle mit dem Phasenraumvolumen interpretiert werden. Ist beispielsweise  $W$  ein kurzreichweitiges Potential, so ist

$$\frac{\text{vol}\{\langle p, x \rangle \in \mathbb{R}^{2m} : p^2 + \lambda W(x) < 0\}}{(2\pi)^m} = \frac{\tau_m}{(2\pi)^m} \int_{x: W(x) < 0} \lambda^{m/2} |W(x)|^{m/2} \quad (16.3)$$

Dies wird gerade der asymptotische Ausdruck für  $\dim P_{(-\infty, 0)}(-\Delta + \lambda W)$  sein für  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Die Idee der Methode ist mit den Überlegungen zum Phasenraum eng verknüpft. Die Eigenwerte des Laplace-Operators mit Dirichlet-Randbedingungen,  $-\Delta_D$ ,

oder Neumann-Randbedingungen,  $-\Delta_N$ , können im Falle von Würfeln explizit bestimmt werden, womit sich die Weyl-Asymptotik verifizieren lässt. Die Aussage der Formel ist im Wesentlichen, dass das Volumen einer großen Kugel in  $\mathbb{R}^m$  ungefähr der Zahl der Punkte in ihr ist. Ist  $\Omega$  die Vereinigung von Würfeln (zusammen mit gemeinsamen Rändern) ist zwar etwas komplizierter, aber der Fakt, dass Phasenraumvolumina „lokal im Ortsraum“ sind, das heißt, dass  $N(\lambda : \Omega_1 \cup \Omega_2)$  asymptotisch gleich  $N(\lambda, \Omega_1) + N(\lambda, \Omega_2)$  ist, suggeriert, dass man die Würfel in  $\Omega$  entlang ihrer gemeinsamen Ränder zerlegt und das Problem für jeden Würfel getrennt untersucht. Hierbei hilft uns ein bemerkenswertes Ergebnis über Randbedingungen. Es gibt zwei Operatoren, die wir mit  $-\Delta_D^\Omega$  vergleichen können: ein Operator,  $-\tilde{\Delta}_D$  beinhaltet zusätzlich die Randbedingungen an den gemeinsamen Rändern, wohingegen der andere,  $-\tilde{\Delta}_N^\Omega$  an den gemeinsamen Rändern Neumann-Randbedingungen hat. Man kann zeigen, dass es Zerlegungen von  $-\tilde{\Delta}_D$  und  $-\tilde{\Delta}_N$  gibt, in dem Sinne, dass  $-\tilde{\Delta}_D = \bigoplus_\alpha (-\Delta_D^{\Omega_\alpha})$  bzw.  $-\tilde{\Delta}_N = \bigoplus_\alpha (-\Delta_N^{\Omega_\alpha})$ . Darüberhinaus kann man  $N(\lambda, -\Delta_D^\Omega)$  zwischen  $N(\lambda, -\tilde{\Delta}_D)$  und  $N(\lambda, -\tilde{\Delta}_N)$  sandwichen, das heißt

$$N(\lambda, -\tilde{\Delta}_D) \leq N(\lambda, -\Delta_D^\Omega) \leq N(\lambda, -\tilde{\Delta}_N). \quad (16.4)$$

Diese Technik wird als *Dirichlet-Neumann-Bracketing* bezeichnet.

Wir beginnen unsere formale Diskussion mit der Untersuchung von Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen.

### 16.1. Dirichlet-Neumann-Bracketing.

DEFINITION 16.1 (Dirichlet- und Neumann-Laplace-Operator). Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$  offen mit zusammenhängenden Komponenten  $\Omega_1, \dots$  (endlich oder unendlich).

Der *Dirichlet-Laplace-Operator*,  $-\Delta_D^\Omega$ , ist der eindeutige selbstadjungierte Operator auf  $L^2(\Omega, dx)$ , dessen quadratische Form der Abschluß der Form  $q(f, g) = \int \nabla \bar{f} \cdot \nabla g dx$  auf dem Formbereich  $C_0^\infty(\Omega)$  ist.

Der *Neumann-Laplace-Operator*,  $-\Delta_N^\Omega$ , ist der eindeutige selbstadjungierte Operator auf  $L^2(\Omega, dx)$ , dessen quadratische Form der Abschluß der Form  $q(f, g) = \int \nabla \bar{f} \cdot \nabla g dx$  auf dem Formbereich

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : \nabla f \in L^2(\mathbb{R}^m)\}. \quad (16.5)$$

Hierbei ist  $\nabla f$  der schwache/distributionelle Gradient, das heißt es ist

$$\int (\nabla f) \varphi dx = - \int f \nabla \varphi dx \quad (16.6)$$

für alle Testfunktionen  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ . Wenn  $\Omega$  fest ist, vernachlässigen wir das Superskript  $\Omega$  bei den Dirichlet- bzw. Neumann-Laplace-Operatoren.

BEMERKUNG 16.2.  $-\Delta_D^\Omega$  und  $-\Delta_N^\Omega$  lassen sich auch anders definieren. Per Definition ist  $-\Delta_D^\Omega$  die Friedrichs-Erweiterung mit Formbereich  $\mathcal{Q}(-\Delta_D^\Omega) = H_0^1(\Omega)$ . Aus den Untersuchungen des vorigen Abschnitts folgt, dass

$$\{f \in H^1(\Omega) : \text{supp}(f) \text{ ist kompakt in } \Omega\} \subseteq \mathcal{Q}(-\Delta_D^\Omega). \quad (16.7)$$

Für beliebiges  $\Omega$  kann man  $-\Delta_{D/N}^\Omega$  auch so definieren: sei  $D$  der Operator-Abschluß des Gradienten  $\nabla$  auf  $C_0^\infty(\Omega)$ . Dann ist  $-\Delta_D^\Omega = D^*D$ , wohingegen  $-\Delta_N^\Omega = DD^*$ . Für „nette“ Gebiete ist

$$\{f \in H^1(\Omega) : f \text{ ist bis auf } \partial\Omega \text{ glatt}\} \quad (16.8)$$

ein determinierender Formbereich von  $-\Delta_N^\Omega$ . Wenn  $\Omega$  einen „netten“ Rand hat, besteht der determinierende Bereich des Operators  $-\Delta_D$  aus Funktionen, die bis auf  $\partial\Omega$  glatt sind und auf  $\partial\Omega$  verschwinden und der determinierende Bereich von  $-\Delta_N$  besteht aus Funktionen, die bis auf  $\partial\Omega$  glatt sind, deren normale Ableitungen auf dem Rand aber gerade verschwinden. Die letzten beiden Definitionen gaben die Namen Dirichlet- bzw. Neumann-Laplace-Operator. Im Falle der Würfel werden wir diese Beschreibung benötigen.

SATZ 16.3. Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$  ein Würfel. Dann gilt:

- a)  $D_D := \{f : f \text{ ist bis auf } \partial\Omega \text{ glatt und } f|_{\partial\Omega} = 0\}$  ist ein determinierender Bereich für  $-\Delta_D$  und für  $f \in D_D$  gilt

$$-\Delta_D f = -\sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}. \quad (16.9)$$

- b)  $D_N := \left\{f : f \text{ ist bis auf } \partial\Omega \text{ glatt und } \frac{\partial f}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0\right\}$  ist ein determinierender Bereich für  $-\Delta_N$  und für  $f \in D_N$  gilt

$$-\Delta_N f = -\sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}. \quad (16.10)$$

Hierbei bezeichnet  $\frac{\partial}{\partial n}$  die normale Ableitung auf dem Rand.

BEWEIS. □

BEMERKUNG 16.4. Es mag verwundern, dass die ursprüngliche Definition von  $-\Delta_N^\Omega$  nichts mit dem Rand  $\partial\Omega$  oder Normalenableitungen zu tun hatte, nun aber trotzdem die Neumann-Randbedingungen erfüllt. Intuitiv kann man das trotzdem auf verschiedene Weisen verstehen.

- (1) Damit  $f$  im Definitionsbereich von  $-\Delta_N^\Omega = DD^*$  sein kann, muss  $D^*f$  im Definitionsbereich von  $D$  liegen. Dieser besteht intuitiv nur aus Funktionen, die auf  $\partial\Omega$  verschwinden.
- (2) Betrachten wir das Problem nur in einer Dimension und sei  $\Omega = (a, b)$  ein offenes Intervall. Der Operator  $C$ , der durch die quadratische Form des Neumann-Operators definiert wird, sollte die selbstadjungierte Erweiterung von  $-\frac{d^2}{dx^2}$  auf  $C_0^\infty(a, b)$  sein, der folgende zwei Eigenschaften erfüllt:
  - a) Für eine beliebige Funktion  $f$ , die auf  $[a, b]$  glatt ist, muss es eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}(C)$  geben, sodass  $f_n \rightarrow f$  in der  $H_1$ -Norm Konvergiert.
  - b) Für alle  $f \in \mathcal{D}(C)$  ist die Wirkung von  $C$  durch  $(f, Cf) = \left\| \frac{df}{dx} \right\|^2$  gegeben.

Wir bemerken, dass  $C$  keine Dirichlet-Randbedingungen erfüllen kann, da dann die  $f_n$  bei  $a$  und  $b$  verschwinden müssten. Dies hieße aber, dass  $\frac{d(f_n - f)}{dx}$  sehr groß bei den Endpunkten sein müsste. Damit wären periodischen Randbedingungen, die die zwei Endpunkte miteinander verbinden, ebenfalls nicht möglich.

Bedingung a) schließt zwar nicht Randbedingungen der Form  $\frac{df}{dx} + \alpha f = 0$  aus, jedoch muss wegen Bedingung b) dann  $\alpha = 0$  sein.

Der große Vorteil dieser äquivalenten Beschreibung von  $-\Delta_{D,N}^\Omega$  ist, dass man die Eigenwerte und Eigenvektoren explizit bestimmen kann. Sei dazu  $\mathbf{z}_{++}$  die Menge

aller echt positiven ganzen Zahlen und  $\mathbf{z}_+ = \mathbf{z}_{++} \cup \{0\}$  die Menge aller nicht-negativen ganzen Zahlen.

Die Eigenvektoren und Eigenwerte von  $-\Delta_D$  auf dem Würfel  $(-a, a)^m$  durch  $\mathbf{z}_{++}^m$  indiziert. Die Eigenvektoren sind dann

$$\Phi_{n,a}(x) = a^{-m/2} \prod_{i=1}^m \varphi_{n_i} \left( \frac{x_i}{a} \right), \quad (16.11)$$

wobei

$$\varphi_k(x) = \cos \left( \frac{k\pi x}{2} \right) \quad \text{für } k = 1, 3, 5, \dots \quad (16.12a)$$

$$\varphi_k(x) = \sin \left( \frac{k\pi x}{2} \right) \quad \text{für } k = 2, 4, 6, \dots \quad (16.12b)$$

Die Eigenwerte sind durch

$$E_n(a) = \left( \frac{\pi}{2a} \right)^2 \sum_{i=1}^m n_i^2 \quad (16.13)$$

gegeben.

Die Eigenvektoren und Eigenwerte von  $-\Delta_N$  auf dem Würfel  $(-a, a)^m$  durch  $\mathbf{z}_+^m$  indiziert. Die Eigenvektoren sind dann

$$\Psi_{n,a}(x) = a^{-m/2} \prod_{i=1}^m \psi_{n_i} \left( \frac{x_i}{a} \right), \quad (16.14)$$

wobei

$$\psi_0(x) = 0 \quad (16.15a)$$

$$\psi_k(x) = \sin \left( \frac{k\pi x}{2} \right) \quad \text{für } k = 1, 3, 5, \dots \quad (16.15b)$$

$$\psi_k(x) = \cos \left( \frac{k\pi x}{2} \right) \quad \text{für } k = 2, 4, 6, \dots \quad (16.15c)$$

die Rollen von Sinus und Kosinus sind also gerade vertauscht. Die Eigenwerte sind durch

$$E_n(a) = \left( \frac{\pi}{2a} \right)^2 \sum_{i=1}^m n_i^2 \quad (16.16)$$

gegeben, also die selben wie für Dirichlet-Randbedingungen. Man kann somit das Resultat von Weyl im Falle von Würfeln direkt verifizieren.

**theorem:3.188**

**SATZ 16.5.** Sei  $N_{D,N}(a, \lambda)$  die Dimension der Spektralprojektion  $P_{[0,\lambda]}$  für  $-\Delta_{D,N}$  auf dem Würfel  $(-a, a)^m$ . Dann hat man für alle  $a, \lambda$  die Abschätzungen

$$\left| N_D(a, \lambda) - \tau_m \left( \frac{2a}{2\pi} \right)^m \lambda^{m/2} \right| \leq C \left[ 1 + (a^2 \lambda)^{(m-1)/2} \right] \quad (16.17a)$$

$$\left| N_N(a, \lambda) - \tau_m \left( \frac{2a}{2\pi} \right)^m \lambda^{m/2} \right| \leq C \left[ 1 + (a^2 \lambda)^{(m-1)/2} \right] \quad (16.17b)$$

wobei  $\tau_m$  das Volumen der Einheitskugel in  $\mathbb{R}^m$  und  $C$  eine geeignete Konstante sind. Man erhält also die selbe Asymptotik für die Zahl der Eigenwerte im Intervall  $[0, \lambda)$  sowohl für Dirichlet- als auch für Neumann-Randbedingungen.

BEMERKUNG 16.6. Bevor wir das Resultat beweisen, machen wir zwei Bemerkungen. Die Erste erklärt, warum das Resultat wahr ist, die Zweite, wie man den Beweis vereinfacht.

- (1) Wegen  $E_n(a) = \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 \sum_{i=1}^m n_i^2$  sehen wir, dass  $N_{D,N}(a, \lambda)$  gerade die Zahl der Punkte in  $\mathbf{z}_{++}$ , bzw.  $\mathbf{z}_+$  ist, die in einer Kugel vom Radius  $\frac{2a}{\pi} \lambda^{1/2}$  leben, denn

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m n_i^2} = \frac{2a}{\pi} \sqrt{\lambda}. \quad (16.18)$$

Für große  $\lambda$  sollte dies ungefähr das Volumen eines „Oktanten“ dieser Kugel (also  $2^{-m}$  der Kugel) sein, also gerade  $2^{-m} \tau_m \left(\frac{2a}{\pi} \sqrt{\lambda}\right)^m$ . Der dabei entstandene Fehler sollte ein „Oberflächen-Term“, also von der Ordnung  $(a\lambda^{1/2})^{m-1}$  sein.

- (2)  $-\Delta_D$  auf  $(-1, 1)^m$  ist durch Skalieren unitär äquivalent zu  $a^2(-\Delta_D)$  auf  $(-a, a)^m$ , das heißt  $N_D(a, \lambda) = N_D(1, a^2\lambda)$ . Es genügt also die Abschätzungen für  $a = 1$  zu zeigen.

BEWEIS. Sei wegen obiger Bemerkung  $a = 1$  und  $S_\lambda$  die Kugel vom Radius  $\frac{2}{\pi} \lambda^{1/2}$ . Für alle  $n \in \mathbf{z}_{++}^m \cap S_\lambda$  ist der Einheitswürfel  $\{x : n_i - 1 \leq x_i \leq n_i\}$  im oberen Oktanten von  $S_\lambda$  enthalten, weshalb

$$N_D(\lambda) \leq \tau_m \left(\frac{2}{2\pi}\right)^m \lambda^{m/2} \quad (16.19)$$

ist. Da der obere Oktant von  $S_\lambda$  durch Einheitswürfel  $\{x : n_i \leq x_i \leq n_i + 1\}$ , wobei  $n$  durch  $\mathbf{z}_+^m \cap S_\lambda$  läuft, überdeckt wird, ist andererseits

$$\tau_m \left(\frac{2}{2\pi}\right)^m \lambda^{m/2} \leq N_N(\lambda). \quad (16.20)$$

Wir müssen also nur noch die Differenz der Zahl der Dirichlet- und Neumann-Eigenwerte abschätzen. Zunächst ist klar, dass

$$N_N(\lambda) - N_D(\lambda) = \#\{S_\lambda \cap (\mathbf{z}_+^m \setminus \mathbf{z}_{++}^m)\} = \bigcup_{k=0}^{m-1} M_k(\lambda) \quad (16.21)$$

ist, wobei

$$M_k(\lambda) = \{n \in \mathbf{z}_+^m \cap S_\lambda : \text{genau } k \text{ der } n_i \text{ sind von Null verschieden}\}. \quad (16.22)$$

Wie in der Schranke an  $N_D$  ist  $\#(M_k(\lambda))$  durch das  $k$ -dimensionale Volumen von  $\binom{m}{k}$  Oktanten von  $\frac{2}{\pi} \sqrt{\lambda}$ -Kugeln im  $k$ -Raum. Daher ist

$$\sum_{k=1}^{m-1} M_k(\lambda) \leq \text{const} \left( \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^{k/2} \right) \leq C \left[ 1 + \lambda^{(m-1)/2} \right], \quad (16.23)$$

weshalb

$$N_N(\lambda) - N_D(\lambda) \leq C \left[ 1 + \lambda^{(m-1)/2} \right]. \quad (16.24)$$

Die Schranken an  $N_D(\lambda)$ ,  $N_N(\lambda)$  und an  $N_N(\lambda) - N_D(\lambda)$  zeigen das Ergebnis.  $\square$

Die Dirichlet- und Neumann-Laplace-Operatoren sind hilfreiche Werkzeuge in allgemeinen Eigenwertproblemen aufgrund zweier wichtigen Konsequenzen, die auftreten, wenn man eine Dirichlet- oder Neumann-Oberfläche einbaut. Wir betrachten dazu zwei disjunkte Mengen  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$ , sowie  $\Omega := (\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2})^{\text{int}}$ . Die zwei Eigenschaften, die wir gleich zeigen werden, sind

- (1) Dirichlet- und Neumann-Oberflächen entkoppeln.
- (2) Dirichlet-Oberflächen erhöhen die Energie, wohingegen Neumann-Oberflächen die Energie kleiner machen.

Bevor wir fortfahren, präzisieren wir das „Entkoppeln“ der Dirichlet- und Neumann-Oberflächen. Wir studieren dazu die direkte Summe von selbstadjungierten Operatoren.

DEFINITION 16.7. Sei  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ ,  $A_1$  ein selbstadjungierter Operator auf  $\mathcal{H}_1$  und  $A_2$  ein selbstadjungierter Operator auf  $\mathcal{H}_2$ . Dann definieren wir

$$\begin{aligned} A &:= A_1 \oplus A_2 : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H} \\ \langle \varphi, \psi \rangle &\mapsto A\langle \varphi, \psi \rangle = \langle A_1\varphi, A_2\psi \rangle, \end{aligned} \quad (16.25)$$

wobei  $\mathcal{D}(A) := \{\langle \varphi, \psi \rangle : \varphi \in \mathcal{D}(A_1), \psi \in \mathcal{D}(A_2)\}$ .

$A_1 \oplus A_2$  hat dann einige schöne Eigenschaften.

SATZ 16.8. Sei  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ ,  $A_1$  ein selbstadjungierter Operator auf  $\mathcal{H}_1$  und  $A_2$  ein selbstadjungierter Operator auf  $\mathcal{H}_2$ . Sei  $A = A_1 \oplus A_2$  wie oben definiert. Dann gelten folgende Aussagen.

- a)  $A$  ist auf  $\mathcal{H}$  selbstadjungiert.
- b) Ist  $D_1$  ein determinierender Bereich für  $A_1$  und  $D_2$  ein determinierender Bereich für  $A_2$ , so ist

$$D_1 \oplus D_2 := \{\langle \varphi, \psi \rangle : \varphi \in D_1, \psi \in D_2\} \quad (16.26)$$

ein determinierender Bereich für  $A$ .

- c) Sei  $\mathcal{Q}(A) = \mathcal{Q}(A_1) \oplus \mathcal{Q}(A_2)$ . Ist  $\langle \varphi, \psi \rangle \in \mathcal{Q}(A)$ , ist die Wirkung von  $A$  als Form durch

$$(\langle \varphi, \psi \rangle, A\langle \varphi, \psi \rangle) = (\varphi, A_1\varphi) + (\psi, A_2\psi) \quad (16.27)$$

gegeben.

- d) Für alle Borel-Mengen  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ , zerlegt sich die Spektralprojektion  $P_\Omega(A)$  als

$$P_\Omega(A) = P_\Omega(A_1) \oplus P_\Omega(A_2) \quad (16.28)$$

- e) Sei  $N(\lambda, A) = \dim P_{(-\infty, \lambda)}(A)$ , dann ist

$$N(\lambda, A) = N(\lambda, A_1) + N(\lambda, A_2). \quad (16.29)$$

BEWEIS. □

**theorem:3.192**

SATZ 16.9. Seien  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  zwei disjunkte, offene Mengen und  $\Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2$ , sodass  $L^2(\Omega) = L^2(\Omega_1) \oplus L^2(\Omega_2)$ . Durch diese Zerlegung zerfällt der Dirichlet- bzw. der Neumann-Laplace-Operator wie folgt:

$$-\Delta_D^\Omega = -\Delta_D^{\Omega_1} \oplus -\Delta_D^{\Omega_2} \quad (16.30a)$$

$$-\Delta_N^\Omega = -\Delta_N^{\Omega_1} \oplus -\Delta_N^{\Omega_2} \quad (16.30b)$$

$$(16.30c)$$

BEWEIS. Wir betrachten lediglich den Dirichlet-Fall, der Neumann-Fall geht analog. Für gegebenes  $f \in C_0^\infty(\Omega)$  sei  $f_i := f \upharpoonright_{\Omega_i}$  die Einschränkung auf eins der beiden Gebiete. Dann ist  $f_i \in C_0^\infty(\Omega_i)$  und

$$\int_{\Omega} \overline{\nabla f} \cdot \nabla g dx = \int_{\Omega_1} \overline{\nabla f_1} \cdot \nabla g + \int_{\Omega_2} \overline{\nabla f_2} \cdot \nabla g. \quad (16.31)$$

Da sich diese Relation auf die Abschlüsse der korrespondierenden Formen erweitern lässt, sind die quadratischen Formen auf der linken Seite gleich den Formen auf der rechten Seite und die Behauptung folgt.  $\square$

KOROLLAR 16.10. Sei  $N_{D,N}(\Omega, \lambda) = \dim P_{[0,\lambda]}(-\Delta_{D,N}^\Omega)$ . Sind  $\Omega_1, \dots, \Omega_k$  alle disjunkt voneinander, so sind

$$N_D \left( \bigcup_{i=1}^k \Omega_i, \lambda \right) = \sum_{i=1}^k N_D(\Omega_i, \lambda) \quad (16.32a)$$

$$N_N \left( \bigcup_{i=1}^k \Omega_i, \lambda \right) = \sum_{i=1}^k N_N(\Omega_i, \lambda) \quad (16.32b)$$

Um Monotonizitätseigenschaften für die Laplace-Operatoren bezüglich des Gebiets zu beschreiben, geben wir eine erweiterte Definition von  $A \leq B$  im Sinne von Operatoren.

DEFINITION 16.11. Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum und  $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}$  ein Unter-Hilbertraum. Seien  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$  und  $B : \mathcal{D}(B) \rightarrow \mathcal{H}$  selbstadjungiert und nicht-negativ mit  $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{H}$  dicht und  $\mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{H}_1$  dicht. Wir schreiben  $A \leq B$  genau dann, wenn folgende zwei Eigenschaften erfüllt sind:

- (i)  $\mathcal{Q}(B) \subseteq \mathcal{Q}(A)$ .
- (ii) Für alle  $\psi \in \mathcal{Q}(B)$  ist  $0 \leq (\psi, A\psi) \leq (\psi, B\psi)$ .

Diese Definition eignet sich hervorragend, um das Min-Max-Prinzip anzuwenden, damit wir die Eigenwerte dieser Operatoren miteinander vergleichen können.

LEMMA 16.12. Seien  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$  und  $B : \mathcal{D}(B) \rightarrow \mathcal{H}_1$  von oben und  $A \leq B$ . Dann gilt:

- a)  $\mu_n(A) \leq \mu_n(B)$  für alle  $n$ , wobei  $\mu_n$  die jeweiligen Min-Max-Eigenwerte sind.
- b)  $\dim P_{[0,\lambda]}(B) \leq \dim P_{[0,\lambda]}(A)$  für alle  $\lambda > 0$ .

Die Min-Max-Eigenwerte von  $A$  sind kleiner als die von  $B$  und  $A$  hat mindestens genauso viele Eigenwerte in einem bestimmten Intervall wie  $B$ .

BEWEIS. a) Da  $\mathcal{Q}(A)$  mehr Testfunktionen beinhaltet, ist wegen des Min-Max-Prinzips

$$\begin{aligned} \mu_n(A) &= \min_{\varphi \in \mathcal{Q}(A), \varphi \perp \psi_1, \dots, \psi_n} (\varphi, A\varphi) \leq \min_{\varphi \in \mathcal{Q}(B), \varphi \perp \psi_1, \dots, \psi_n} (\varphi, A\varphi) \\ &\leq \min_{\varphi \in \mathcal{Q}(B), \varphi \perp \psi_1, \dots, \psi_n} (\varphi, B\varphi) = \mu_n(B). \end{aligned} \quad (16.33)$$

- b) Folgt aus a) und dem Min-Max-Prinzip [theorem:3.2](#) II.2

$\square$

**theorem:3.196**

SATZ 16.13. Wir haben folgende Monotonizitätsresultate für den Dirichlet- bzw. Neumann-Laplace-Operator.

- a) Ist  $\Omega \subseteq \Omega'$ , so ist  $0 \leq -\Delta_D^{\Omega'} \leq -\Delta_D^\Omega$ . Die Energie ist umso kleiner, je größer das Gebiet ist, in dem sich das Teilchen bewegen kann. Daraus folgt insbesondere  $\dim P_{[0,\lambda]}(-\Delta_D^\Omega) \leq \dim P_{[0,\lambda]}(-\Delta_D^{\Omega'})$ .
- b) Für alle  $\Omega$  gilt  $0 \leq -\Delta_N^\Omega \leq -\Delta_D^\Omega$ . Neumann-Randbedingungen verringern die Energie, wohingegen Dirichlet-Randbedingungen sie erhöhen.
- c) Seien  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  offen und disjunkt voneinander, sodass  $\Omega_{1,2} \subseteq \Omega := (\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2})^{\text{int}}$  und  $\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$  Maß Null hat. Man kann sich  $\Omega$  als große Menge vorstellen, die im Wesentlichen aus zwei kleinere Mengen  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  besteht. Diese sind nur durch eine Menge vom Maß Null, also z.B. eine Trennlinie oder -fläche, voneinander getrennt. Dann gilt

$$0 \leq -\Delta_D^\Omega \leq -\Delta_D^{\Omega_1 \cup \Omega_2} \quad (16.34a)$$

$$0 \leq -\Delta_N^{\Omega_1 \cup \Omega_2} \leq -\Delta_N^\Omega. \quad (16.34b)$$

Die Energie wird also erhöht, wenn man eine „Dirichlet-Trennfläche“ einfügt, wohingegen die Energie verkleinert wird, wenn man eine „Neumann-Trennfläche“ einfügt. Durch das Einfügen der Dirichlet-Trennfläche gibt es eine weitere Bedingung, nämlich, dass die Wellenfunktionen auf ihr verschwinden müssen, weshalb die Eigenwerte hoch gehen. Entfernt man hingegen eine Neumann-Trennfläche, so ist die neue Bedingung, dass die Wellenfunktionen an der entfernten Trennfläche „glatt ineinander übergehen“, wodurch die Eigenwerte hoch gehen.

BEWEIS. a) Ist  $f \in L^2(\Omega)$  und  $\tilde{f} \in L^2(\Omega')$  mit  $\tilde{f}|_\Omega = f$  und  $\tilde{f} = 0$  sonst. Durch diese Definition sieht man schnell ein, dass  $C_0^\infty(\Omega) \subseteq C_0^\infty(\Omega')$ . Mit  $-\Delta_D^{\Omega'}|_{C_0^\infty(\Omega) \times C_0^\infty(\Omega)} = -\Delta_D^\Omega$  im Sinne quadratischer Formen und dem Min-Max-Prinzip folgt die Behauptung. Die Folgerung folgt aus dem obigen Lemma.

- b) Folgt sofort aus  $C_0^\infty(\Omega) \subseteq H^1(\Omega)$  und dem Min-Max-Prinzip.
- c) Da  $\Omega_1 \cup \Omega_2 \subseteq \Omega$  ist, ist  $C_0^\infty(\Omega_1 \cup \Omega_2) \subseteq C_0^\infty(\Omega)$ . Die erste Ungleichung ist also nur ein Spezialfall von a).

Sei nun  $f \in H^1(\Omega)$ , so ist die Restriktion  $f|_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \in H^1(\Omega_1) \oplus H^1(\Omega_2)$ . Wir sind nun in der Lage Satz 16.9 zu verwenden. Da  $\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$  Maß Null hat, ist

$$\int_\Omega |\nabla f|^2 dx = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} |\nabla f|^2 dx. \quad (16.35)$$

Die Formen haben also die selbe Wirkung. Jedoch ist  $\mathcal{Q}(-\Delta_N^\Omega) \subseteq \mathcal{Q}(-\Delta_N^{\Omega_1 \cup \Omega_2})$ , woraus  $-\Delta_N^{\Omega_1 \cup \Omega_2} \leq -\Delta_N^\Omega$  folgt. □

Als erste Anwendung zeigen wir Weyls Resultat, welches die asymptotische Dichte der Eigenwerte von  $-\Delta_D^\Omega$  mit dem Volumen von  $\Omega$  verknüpft, wenn  $\Omega$  hinreichend „nett“ ist.

DEFINITION 16.14 (Standard-Würfel). Ein *Standard- $2^{-n}$ -Würfel* im  $\mathbb{R}^m$  hat die Form

$$\left[ \frac{a_1}{2^n}, \frac{a_1 + 1}{2^n} \right) \times \cdots \times \left[ \frac{a_m}{2^n}, \frac{a_m + 1}{2^n} \right) \subset \mathbb{R}^m, \quad (16.36)$$

wobei  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{N}$ .

Für gegebenes  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$  sei  $W_n^-(\Omega)$  das Volumen von Standard- $2^{-n}$ -Würfeln, die in  $\Omega$  enthalten sind, wohingegen  $W_n^+(\Omega)$  das Volumen von Standard- $2^{-n}$ -Würfeln sei, die  $\Omega$  schneiden.

Ist  $\Omega$  Lebesgue-messbar, so ist daher

$$W_n^-(\Omega) \leq W_{n+1}^-(\Omega) \leq \mu(\Omega) \leq W_{n+1}^+(\Omega) \leq W_n^+(\Omega). \quad (16.37)$$

Die Grenzwerte  $W_\infty^-(\Omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} W_n^-(\Omega)$ , bzw.  $W_\infty^+(\Omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} W_n^+(\Omega)$  heißen *innerer* bzw. *äußerer Jordan-Inhalt* von  $\Omega$ . Ist  $W_\infty^+(\Omega) = W_\infty^-(\Omega)$ , so heißt  $\Omega$  eine *inhaltlicher* Menge und  $W(\Omega) := W_\infty^\pm(\Omega)$  heißt der *Inhalt* von  $\Omega$ .

LEMMA 16.15. *Ist  $\Omega$  inhaltlich, so ist  $\Omega$  Lebesgue-messbar. In diesem Fall ist  $W(\Omega) = \mu(\Omega)$ , was sofort aus der obigen Abschätzung für  $n \rightarrow \infty$  folgt.*

SATZ 16.16 (Weyl-Asymptotik für  $-\Delta_D^\Omega$ ). *Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$  offen und beschränkt und  $N_D(\Omega, \lambda) = \dim P_{[0, \lambda]}(-\Delta_D^\Omega)$ . Ist  $\Omega$  inhaltlich, so ist*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_D(\Omega, \lambda)}{\lambda^{m/2}} = \frac{\tau_m}{(2\pi)^m} W(\Omega). \quad (16.38)$$

BEWEIS. Die Behauptung folgt, wenn wir für alle  $n$  die Abschätzungen

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_D(\Omega, \lambda)}{\lambda^{m/2}} \leq \frac{\tau_m}{(2\pi)^m} W_n^+(\Omega) \quad (16.39a)$$

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_D(\Omega, \lambda)}{\lambda^{m/2}} \geq \frac{\tau_m}{(2\pi)^m} W_n^-(\Omega) \quad (16.39b)$$

zeigen. Sei dazu  $\Omega_n^\pm$  die Vereinigung der Standard- $2^{-n}$ -Würfel aus der Definition von  $W_n^\pm(\Omega)$  und seien  $\{C_{n,\alpha}^\pm\}$  die Interiors der eigentlichen Würfel, sodass  $\bar{\Omega}_n^\pm = \bigcup_\alpha \bar{C}_{n,\alpha}^\pm$ . Wegen a) und c) aus dem Monotonizitätsresultat <sup>theorem:3.196</sup> ~~16.13~~ ist

$$-\Delta_D^\Omega \leq -\Delta_D^{\Omega_n^-} \leq -\Delta_D^{\bigcup_\alpha C_{n,\alpha}^-} = \bigoplus_\alpha \left( -\Delta_D^{C_{n,\alpha}^-} \right), \quad (16.40)$$

wobei wir das Zerlegungsresultat <sup>theorem:3.192</sup> ~~16.9~~ in der letzten Gleichung verwendet haben. Aus der Folgerung in Punkt a) aus Satz <sup>theorem:3.196</sup> ~~16.13~~ und dieser Abschätzung folgt

$$N_D(\Omega, \lambda) \geq \sum_\alpha N_D(C_{n,\alpha}^-, \lambda) = (\#\alpha) \cdot N_D(2^{-n-1}, \lambda) = W_n^-(\Omega) 2^{nm} N_D(2^{-n-1}, \lambda). \quad (16.41)$$

Aus der Asymptotik für  $N_D(-\Delta_D)$  im Falle eines Würfels folgt dann

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} N_D(2^{-n-1}, \lambda) \lambda^{-m/2} = \frac{\tau_m}{(2\pi)^m} 2^{-nm}, \quad (16.42)$$

weshalb die zweite geforderte Ungleichung stimmt. Mit dem Bracketing und den Monotonie-Resultaten a) bis c) aus Satz <sup>theorem:3.196</sup> ~~16.13~~ ist

$$-\Delta_D^\Omega \geq -\Delta_D^{\Omega_n^+} \geq -\Delta_N^{\Omega_n^+} \geq -\Delta_N^{\bigcup_\alpha C_{n,\alpha}^+} = \bigoplus_\alpha \left( -\Delta_N^{C_{n,\alpha}^+} \right) \quad (16.43)$$

und die erste geforderte Ungleichung folgt mit derselben Strategie.  $\square$

Die Struktur des Dirichlet-Neumann-Bracketings ist nun klar: man verwendet die Monotonizitäts-Resultate beim Einfügen Dirichlet- bzw. Neumann-Trennflächen, sowie die Entkopplungsresultate, um das eigentliche Problem auf ein Problem auf

Würfeln zu reduzieren. Phasenraumvolumina treten dann in der Asymptotik von  $N_{D,N}(\Omega, \lambda)$  auf.

### 16.2. Anwendungen des Dirichlet-Neumann-Bracketings.

SATZ 16.17. Seien  $V \in C_0^0(\mathbb{R}^m : \mathbb{R})$  und  $N(\lambda) = \dim P_{(-\infty, 0)}(-\Delta + \lambda V)$  die Zahl der negativen Eigenwerte bei Kopplungsstärke  $\lambda$ . Dann ist diese Zahl für starke Kopplung asymptotisch

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{m/2}} = \frac{\tau_m}{(2\pi)^m} \int [V(x)_-]^{m/2} dx, \quad (16.44)$$

wobei der Negativ-Teil positiv definiert ist.

BEWEIS. Für alle  $n$  sei  $\{C_{n,\alpha}\}$  wieder die Menge aller Standard- $2^{-n}$ -Würfel. Wir definieren dann  $V_n^\pm$  als die Funktion, die stückweise auf jedem  $C_{n,\alpha}$  konstant ist und dort den Wert  $\max\{V(x) : x \in C_{n,\alpha}\}$  bzw.  $\min\{V(x) : x \in C_{n,\alpha}\}$  annimmt. Können wir dann

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{m/2}} \leq \frac{\tau_m}{(2\pi)^m} \int [V_n^-(x)_-]^{m/2} dx \quad (16.45a)$$

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{m/2}} \geq \frac{\tau_m}{(2\pi)^m} \int [V_n^+(x)_-]^{m/2} dx \quad (16.45b)$$

zeigen. Aufgrund der Stetigkeit von  $V$  können wir den Grenzwert in das Integral ziehen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int [V_n^\pm(x)_-]^{m/2} dx = \int [V(x)_-]^{m/2} dx \quad (16.46)$$

und mit den obigen beiden Ungleichungen folgt dann die Behauptung.

Angenommen, dass  $\text{supp}(V) \subseteq (-k, k)^m$ , wobei  $k$  eine ganze Zahl ist. Sei  $-\Delta_\pm^n$  der Laplace-Operator auf  $\mathbb{R}^m$  aber mit Dirichlet- bzw. Neumann-Randbedingungen auf den Rändern aller  $2^{-n}$ -Würfel in  $(-k, k)^m$ . Wegen  $V_n^- \leq V \leq V_n^+$  und  $-\Delta_-^n \leq -\Delta \leq -\Delta_+^n$  (wegen Satz [theorem:3.196](#) [16.13](#)) ist

$$-\Delta_-^n + V_n^- \leq -\Delta + V \leq -\Delta_+^n + V_n^+. \quad (16.47)$$

Mit  $N_n^\pm(\lambda) = \dim P_{(-\infty, 0)}(-\Delta_\pm^n + V_n^\pm)$  und

$$N_n^+(\lambda) \leq N(\lambda) \leq N_n^-(\lambda) \quad (16.48)$$

reicht es also aus

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N_n^\pm(\lambda)}{\lambda^{m/2}} = \frac{\tau_m}{(2\pi)^m} \int [V_n^\pm(x)_-]^{m/2} dx, \quad (16.49)$$

um die obigen Ungleichungen zu zeigen.

Wegen der Zerlegung von Dirichlet- und Neumann-Randflächen, lassen sich  $-\Delta_\pm^n + \lambda V_n^\pm$  als direkte Summe von Operatoren der Form  $-\Delta_D^\Omega + \lambda c$  oder  $-\Delta_N^\Omega + \lambda c$  schreiben, wobei  $c$  konstant,  $\Omega$  ein Würfel ist und der Laplace-Operator jeweils auf  $\mathbb{R}^m \setminus (-k, k)^m$  gegeben ist. Da für jeden positiven Operator

$$\dim(\text{Ran}(P_{(-\infty, 0)}(A + \lambda c))) = \dim(\text{Ran}(P_{[0, -\lambda c]}(A))) \quad (16.50)$$

ist, folgen die letzten beiden Limiten aus Satz [theorem:3.188](#) [16.5](#).  $\square$

BEMERKUNG 16.18. Die Methode aus dem Beweis lässt sich nicht auf Potentiale erweitern, die nicht mindestens lokal beschränkt sind. Man kann die Grenzwert-Sätze jedoch erweitern, indem man nicht-glatte Potentiale durch glatte Potentiale approximiert. Der Punkt bei dieser Approximation ist, dass man Schranken an  $N(V)$  hat, die das richtige Kopplungsverhalten haben, wie etwa bei der Cwikel–Lieb–Rosenbljum-Schranke aus Satz [3.20](#).

LEMMA 16.19. *Sei  $A$  ein beliebiger selbstadjungierter Operator und sei  $\tilde{N}(A) := \dim(E_{(-\infty,0)}(A))$ , wobei  $E_\Omega(A)$  die Spektralfamilie von  $A$  ist. Sei des weiteren  $A$  nach unten beschränkt und auch  $B$  ein selbstadjungierter, nach unten beschränkter Operator. Sei  $\mathcal{Q}(A) \cap \mathcal{Q}(B)$  dicht und  $A+B$  durch die Formsumme definiert. Dann ist*

$$\tilde{N}(A+B) \leq \tilde{N}(A) + \tilde{N}(B). \quad (16.51)$$

BEWEIS. Sind  $\tilde{N}(A), \tilde{N}(B) < \infty$ , so sei  $\psi_1, \dots, \psi_{\tilde{N}(A)}$  eine Basis für  $E_{(-\infty,0)}(A)$  und

$\psi_{\tilde{N}(A)+1}, \dots, \psi_{\tilde{N}(A)+\tilde{N}(B)}$  eine Basis für  $E_{(-\infty,0)}(B)$ . Ist  $\varphi \in \mathcal{Q}(A) \cap \mathcal{Q}(B)$  in  $[\psi_1, \dots, \psi_{\tilde{N}(A)+\tilde{N}(B)}]^\perp$ , so ist  $(\varphi, A\varphi) \geq 0$  und  $(\varphi, B\varphi) \geq 0$ . Mit dem Min-Max-Prinzip ist also  $\mu_{\tilde{N}(A)+\tilde{N}(B)+1}(A+B) \geq 0$ .  $A+B$  kann also höchstens  $\tilde{N}(A) + \tilde{N}(B)$  negative Eigenwerte haben, was die Behauptung zeigt.  $\square$

Wir sind nun in der Lage die eine Asymptotik an die Zahl der Eigenwerte zu geben, wenn die Kopplung unendlich stark wird, was die dritte Frage beantwortet.

SATZ 16.20. *Seien  $m \geq 3$ ,  $V \in L^{m/2}(\mathbb{R}^m)$  und  $N(\lambda V) = \dim P_{(-\infty,0)}(-\Delta + \lambda V)$  die Zahl der negativen Eigenwerte bei Kopplungsstärke  $\lambda$ . Dann ist auch hier diese Zahl für starke Kopplung asymptotisch*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N(\lambda V)}{\lambda^{m/2}} = \frac{\tau_m}{(2\pi)^m} \int [V(x)_-]^{m/2} dx. \quad (16.52)$$

BEWEIS. Aufgrund der Hypothese ist wegen des Satzes von Strichartz für Formen [2.35](#)  $V$  relativ  $-\Delta$ -Form-beschränkt mit relativer Formschranke gleich Null. Man kann also den KLMN-Satz [2.14](#) anwenden, um  $-\Delta + V$  über Formen als selbstadjungierten Operator zu definieren.

Sei  $\epsilon > 0$  klein und wähle  $V_k \in C_0^\infty$  so, dass  $V_k \rightarrow V$  in  $L^{m/2}(\mathbb{R}^m)$  konvergiert. Dann ist

$$-\Delta + \lambda V = [-(1-\epsilon)\Delta + \lambda V_k] + [\epsilon(-\Delta) + \lambda(V - V_k)]. \quad (16.53)$$

Dann haben wir mit der Cwikel–Lieb–Rosenbljum-Schranke [3.20](#) und dem vorigen Lemma mit  $\tilde{N}(-\alpha\Delta + V) = N(\alpha^{-1}V)$ , dass

$$N(\lambda V) \leq N\left(\frac{\lambda}{1-\epsilon}V_k\right) + N\left(\frac{\lambda}{\epsilon}(V - V_k)\right) \leq N\left(\frac{\lambda}{1-\epsilon}V_k\right) + \text{const} \frac{\lambda^{m/2}}{\epsilon^{m/2}} \|V - V_k\|_{m/2}^{m/2}. \quad (16.54)$$

Mit dem Grenzwert-Resultat, welches wir im vorigen Satz insbesondere für  $V_k \in C_0^\infty$  bewiesen haben, ist

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N(\lambda V)}{\lambda^{m/2}} \leq \frac{\tau_m}{(2\pi)^m} \cdot \frac{1}{(1-\epsilon)^{m/2}} \int [V_k(x)_-]^{m/2} dx + \text{const} \epsilon^{-m/2} \|V - V_k\|_{m/2}^{m/2}. \quad (16.55)$$

Lässt man nun erst  $k \rightarrow \infty$  und dann  $\epsilon \rightarrow 0$  gehen, erhält man

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N(\lambda V)}{\lambda^{m/2}} \leq \frac{\tau_m}{(2\pi)^m} \int [V(x)_-]^{m/2} dx. \quad (16.56)$$

Ähnlich erhält man eine untere Schranke an  $\liminf N(\lambda V)$ , wenn man

$$-\Delta + \lambda V_k = [-(1 - \epsilon)\Delta + \lambda V] + [\epsilon(-\Delta) + \lambda(V_k - V)] \quad (16.57)$$

schreibt. Dann ist

$$N(\lambda V_k) \leq N\left(\frac{\lambda}{1 - \epsilon} V\right) + N\left(\frac{\lambda}{\epsilon}(V - V_k)\right) \leq N\left(\frac{\lambda}{1 - \epsilon} V\right) + \text{const } \epsilon^{-m/2} \|V - V_k\|_{m/2}^{m/2} \quad (16.58)$$

und wieder mit dem Grenzwert-Resultat aus dem vorigen Satz

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N(\lambda V)}{\lambda^{m/2}} (1 - \epsilon)^{m/2} \geq \frac{\tau_m}{(2\pi)^m} \int [V_k(x)_-]^{m/2} dx - \text{const } \epsilon^{-m/2} \|V - V_k\|_{m/2}^{m/2}. \quad (16.59)$$

Lässt man nun wieder erst  $k \rightarrow \infty$  und dann  $\epsilon \rightarrow 0$  gehen, erhält man die umgekehrte Schranke, also

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N(\lambda V)}{\lambda^{m/2}} \geq \frac{\tau_m}{(2\pi)^m} \int [V_k(x)_-]^{m/2} dx. \quad (16.60)$$

Beide Schranken zusammen zeigen die Behauptung.  $\square$

Angenommen nun,  $-\Delta + V$  hätte kompakte Resolvente, das heißt  $-\Delta + V$  hätte rein diskretes Spektrum. Um die Frage nach der asymptotischen Zahl der Eigenwerte im Intervall  $(-\infty, E)$  für  $E \rightarrow \infty$  beantworten zu können, brauchen wir noch etwas stärkere Bedingungen an das Potential.

**SATZ 16.21.** *Sei  $m \geq 2$  und  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine messbare Funktion, die den Abschätzungen*

$$c_1(|x|^\beta - 1) \leq V(x) \leq c_2(|x|^\beta + 1) \quad (16.61a)$$

$$|V(x) - V(y)| \leq c_3 \frac{[\max\{|x|, |y|\}]^{\beta-1}}{|x - y|} \quad (16.61b)$$

für ein  $\beta > 1$  und geeigneten, positiven Konstanten  $c_1$ ,  $c_2$  und  $c_3$  genügt. Seien

$$N(E) = \dim(\text{Ran}(P_{(-\infty, E]}(-\Delta + V))) \quad (16.62)$$

und

$$g(E) := \frac{\tau_m}{(2\pi)^m} \int [V(x) - E]_-^{m/2} dx. \quad (16.63)$$

Dann ist

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \frac{N(E)}{g(E)} = 1, \quad (16.64)$$

das heißt die Zahl der Eigenwerte ist für  $E \rightarrow \infty$  asymptotisch dem semiklassisch erlaubten Phasenraumvolumen.

BEWEIS. Sie hierzu  $\{\Omega_\alpha\}$  die Menge aller Einheitswürfel, deren Zentren an ganzzahligen Gitterpunkten liegen. Sei  $V^\pm$  die stückweise konstante Funktion mit Wert  $\sup_{\Omega_\alpha} V(x)$  bzw.  $\inf_{\Omega_\alpha} V(x)$  im Würfel  $\Omega_\alpha$ . Sei  $-\Delta^\pm$  der Laplac-Operator mit Dirichlet- bzw. Neumann-Randbedingungen an den Oberflächen der Würfel  $\Omega_\alpha$ . Sei  $N_\pm(E) = \dim(\text{Ran}(P_{(-\infty, E]}(-\Delta^\pm + V^\pm)))$ . Sei  $g^\pm(E)$  wie oben  $g(E)$  definiert, nur, dass  $V$  durch  $V^\pm$  ersetzt wird. Mit dem Dirichlet-Neumann-Bracketing gilt dann (der Neumann-Operator mit kleinerem Potential hat tiefere und mehr Eigenwerte)

$$N_-(E) \geq N(E) \geq N_+(E). \quad (16.65)$$

Aufgrund der ersten Bedingung an das Potential sieht man, dass es  $c_4$  gibt, sodass

$$c_3(E^\gamma - 1) \leq g_+(E) \leq g(E) \leq g_-(E) \leq c_4(E^\gamma + 1), \quad (16.66)$$

wobei  $\gamma := \frac{m}{2} + \frac{m}{\beta}$  ist. Aufgrund der zweiten Bedingung an das Potential und der Abschätzung

$$\left| (E-a)^{m/2} - (E-b)^{m/2} \right| \leq \frac{m}{2} \max \left\{ (E-a)^{\frac{m}{2}-1}, (E-b)^{\frac{m}{2}-1} \right\} |b-a| \quad (16.67)$$

gibt es  $c_5$ , sodass

$$|g_-(E) - g_+(E)| \leq c_5(E^{\gamma-\beta-1} + 1). \quad (16.68)$$

Die letzten drei Abschätzungen zeigen, dass, wenn wir

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \frac{N_\pm(E)}{g_\pm(E)} = 1 \quad (16.69)$$

beweisen können, die Behauptung folgt.

Wegen der Entkopplungseigenschaften im Raum des Dirichlet- und Neumann-Laplace-Operators kann man  $N_\pm(E)$  auch als

$$N_\pm(E) = \sum_{\alpha: V_\pm \upharpoonright_{\Omega_\alpha} \leq E} \eta_\pm(E - V_\pm \upharpoonright_{\Omega_\alpha}) \quad (16.70)$$

schreiben, wobei  $\eta_\pm(\lambda) = \dim(\text{Ran}(P_{[0, \lambda]}(-\Delta)))$  ist, wobei  $+$  für Dirichlet- und  $-$  für Neumann-Randbedingungen steht. Wegen des räumlichen Entkopplungsergebnisses aus Satz 16.9 gibt es  $c_6$ , sodass

$$\left| \eta_\pm(\lambda) - \frac{\tau_m}{(2\pi)^m} \lambda^{m/2} \right| \leq c_6 \left( 1 + \lambda^{\frac{m-1}{2}} \right). \quad (16.71)$$

Da

$$\sum_{\alpha: V_\pm \upharpoonright_{\Omega_\alpha} \leq E} \frac{\tau_m}{(2\pi)^m} (E - V_\pm \upharpoonright_{\Omega_\alpha})^{m/2} = g_\pm(E) \quad (16.72)$$

müssen wir lediglich zeigen, dass der Fehler

$$\epsilon_\pm(E) := \sum_{\alpha: V_\pm \upharpoonright_{\Omega_\alpha} \leq E} \left[ 1 + (E - V_\pm \upharpoonright_{\Omega_\alpha})^{\frac{m-1}{2}} \right] \quad (16.73)$$

im Vergleich zu  $g_\pm(E)$  klein ist. Wir können aber  $\epsilon_\pm(E)$  aber durch

$$\epsilon_\pm(E) \leq (1 + E^{\frac{m-1}{2}}) \text{vol}\{x : V_\pm(x) \leq E\} \quad (16.74)$$

abschätzen. Wegen der ersten Bedingung an das Potential ist dieses Phasenraumvolumen durch  $\text{const} (1 + E^{1/\beta})^m$  beschränkt, weshalb

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_\pm(E)}{g(E)} = 0, \quad (16.75)$$

was

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \frac{N_{\pm}(E)}{g_{\pm}(E)} = 1 \quad (16.76)$$

und damit die Behauptung zeigt.  $\square$

BEMERKUNG 16.22. Mit einigen einfachen Veränderungen kann man das Resultat und den Beweis auch auf den Fall  $m = 1$  erweitern.

Schließlich betrachten wir die Situation, bei der wir unendlich viele Eigenwerte im Intervall  $(-\infty, 0)$  haben (siehe Abschnitt 8.3.1) und fragen, wie schnell die Zahl der Eigenwerte im Intervall  $(-\infty, E)$  für  $E \rightarrow 0$  divergiert.

SATZ 16.23. Sei  $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  messbar und erfülle

$$-c_1(|x| + 1)^{-\beta} \leq V(x) \leq -c_2(|x| + 1)^{-\beta} \quad (16.77a)$$

$$|V(x) - V(y)| \leq c_3 \frac{[\min\{|x|, |y|\} + 1]^{-\beta-1}}{|x - y|} \quad (16.77b)$$

für ein  $\beta < 2$  und geeignete, positive Konstanten  $c_1, c_2$  und  $c_3$ . Sei

$$N(E) = \dim(\text{Ran}(P_{(-\infty, E]}(-\Delta + V))) \quad (16.78)$$

die Zahl der Eigenwerte im Intervall  $(-\infty, E]$  mit  $E < 0$  und

$$g(E) = \frac{\tau_m}{(2\pi)^m} \int [V(x) + E]_-^{m/2} dx. \quad (16.79)$$

Dann ist

$$\lim_{E \nearrow 0} \frac{N(E)}{g(E)} = 1, \quad (16.80)$$

das heißt die Zahl der Eigenwerte ist für  $E \nearrow 0$  asymptotisch dem semiklassisch erlaubten Phasenraumvolumen.

BEWEIS. Ähnlich wie eben.  $\square$

BEMERKUNG 16.24. Das asymptotische Verhalten von  $N(E)$  in diesem Fall bleibt erhalten, wenn man zu  $-\Delta + V$  ein Potential  $W$  dazuaddiert, wobei  $W$  sich so verhält, dass  $-\Delta + \lambda W$  nur endlich viele negative Eigenwerte für alle  $\lambda$  hat. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn  $W \in C_0^\infty$  oder  $W \in L^{m/2}(\mathbb{R}^m)$  für  $m \geq 3$ .

Schließlich diskutieren wir noch ein Beispiel zum asymptotischen Verhalten der Eigenwerte  $E_n$  selbst.

SATZ 16.25. Sei  $H_0 = -\frac{d^2}{dx^2}$  auf  $L^2(0, 1)$  mit Dirichlet-Randbedingungen  $u(0) = u(1) = 0$ . Sei  $V \in L^\infty((0, 1))$  und  $E_n(V)$  der  $n$ -te Eigenwert von  $H_0 + V$ . Dann verhalten sich die Eigenwerte  $E_n$  für  $n \rightarrow \infty$  asymptotisch wie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ E_n(V) - (n\pi)^2 - \int_0^1 V(x) dx \right] = 0. \quad (16.81)$$

BEWEIS. Zu  $V \in L^\infty$  betrachten wir  $E_n(a) \equiv E_n(aV)$  mit zugehörigem Eigenvektor  $\psi_n(a)$  des Hamilton-Operators  $H(a) \equiv H_0 + aV$ . Da  $H(a)$  nur einfache

Eigenwerte hat, sind die Funktionen  $E_n(a)$ , als Resultate des Abschnitts über analytische Störungstheorie [2.2](#), reell und analytisch. Insbesondere gilt mit den expliziten Formeln aus Abschnitt [1](#), dass

$$\frac{dE_n}{da}(a) = (\psi_n(a), V\psi_n(a)) \tag{16.82a}$$

$$\frac{d^2E_n}{da^2}(a) = -(V\psi_n(a), R_n(a)V\psi_n(a)), \tag{16.82b}$$

wobei  $R_n(a) = (\text{id} - P_n(a))(H(a) - E_n(a))^{-1}$  (als Operator) und  $P_n$  die Projektion auf  $\psi_n$  ist. Durch Integration der ersten Formel folgt, dass  $|E_n(1) - E_n(0)| \leq \|V\|_\infty$  und insbesondere, da  $E_n(0) = (n\pi)^2$ , dass

$$|E_n(a) - E_{n-1}(a)| \geq (2n - 1)\pi^2 - 2a\|V\|_\infty. \tag{16.83}$$

Man kann daher den Erwartungswert von  $R_n(a)$  für ein  $N_0$  und alle  $a \in (0, 1)$  durch

$$R_n(a) = \max \left\{ |E_n(a) - E_{n-1}(a)|^{-1}, |E_n(a) - E_{n+1}(a)|^{-1} \right\} \leq \frac{c}{n} \tag{16.84}$$

für alle  $n \geq N_0$  abschätzen. Für solche  $a$  und  $n$  ist  $\frac{d^2E_n(a)}{da^2} \leq c \frac{\|V\|_\infty}{n}$ . Mit dem Satz von Taylor mit Restgliedabschätzung ist daher

$$\left| E_n(1) - (n\pi)^2 - \frac{dE_n}{da}(0) \right| \leq \frac{c}{2} \cdot \frac{\|V\|_\infty}{n}. \tag{16.85}$$

Da  $\psi_n(0) = \sqrt{2} \sin(n\pi x)$ , ist

$$\frac{dE_n}{da} \Big|_{a=0} = \tilde{V}(0) - \frac{1}{2}\tilde{V}(2n) - \frac{1}{2}\tilde{V}(-2n) \tag{16.86}$$

schließen, wobei  $\tilde{V}(m) = \int_0^1 V(x)e^{-im\pi x} dx$  ist. Mit dem Riemann–Lebesgue-Lemma [lemma:1.9](#) [1.7](#) folgt, dass  $\tilde{V}(m) \rightarrow 0$  für  $m \rightarrow \infty$  und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{dE_n}{da} \Big|_{a=0} = \tilde{V}(0). \tag{16.87}$$

□

## 17. Grundlagen der Streutheorie

s:scattering

**17.1. Klassifikation des Spektrums.** Siehe Yafaev [\[Yaf10, Abschnitt 0.1\]](#) oder Aizenman–Warzel [\[AW15, Kapitel 2\]](#) oder Reed–Simon [\[RS78, Mehr zu Grenzaabsorptionsprinzipien bspw. in \[ABdMG96, Kapitel 7\] oder \[Ric16, Kapitel 6\].](#)

17.1.1. *Konsequenzen des Spektralsatzes, Boreltransformation des Spektralmaßes.* Sei  $H : \mathcal{D}(H) \rightarrow \mathcal{H}$  ein dicht definierter selbstadjungierter Operator mit zugehörigem Spektralmaß  $E_H : \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ . (Wir kürzen manchmal  $E \equiv E_H$  ab.) Das Spektrum  $\sigma(H)$  kann entweder durch  $\rho(H)^c$  oder durch  $\sigma(H) = \text{supp} E_H$  definiert werden. Mit Hilfe des Spektralsatzes können wir Funktionen  $\phi(H)$  definieren, solange diese messbar und fast überall endlich (bezüglich des Spektralmaßes  $E$ ) sind. Der Definitionsbereich  $\mathcal{D}(\phi(H))$  des Operators  $\phi(H)$  besteht aus den Elementen  $f \in \mathcal{H}$ , sodass

$$\int_{\mathbb{R}} |\phi(\lambda)|^2 d(E(\lambda)f, f) < \infty, \quad \text{wobei } E(\lambda) := E((-\infty, \lambda)).$$

Man kann zeigen, dass auch  $\mathcal{D}(\phi(H))$  dicht in  $\mathcal{H}$  ist. Für  $f \in \mathcal{D}(\phi(H))$  und  $g \in \mathcal{H}$  definieren wir die Sesquilinearform des Operators  $\phi(H)$  durch die Gleichheit

$$(\phi(H)f, g) = \int_{\mathbb{R}} \phi(\lambda) d(E(\lambda)f, g).$$

Wir betrachten nun zwei wichtige Beispiele;  $\phi(\lambda) = e^{-i\lambda t}$  sowie  $\phi(\lambda) = (\lambda - z)^{-1}$ . Die unitäre Zeitentwicklung, sprich der Evolutionsoperator,  $U(t) = e^{-iHt}$  erfüllt

$$(U(t)f, g) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda t} d(E(\lambda)f, g)$$

und die Resolvente ist durch das Cauchy–Stieltjes-Integral

$$(R(z)f, g) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d(E(\lambda)f, g)}{\lambda - z}$$

gegeben. Aus diesen beiden Darstellungen folgt, dass  $R(z)$  die Laplace-Transformation der Halbgruppe  $e^{-tH}$  ist (wir erinnern an Lemma 8.3, den Satz von Plancherel für vektorwertige Funktionen), denn

$$(R(\lambda \pm i\epsilon)f, g) = \pm i \int_0^{\infty} e^{-\epsilon t \pm i\lambda t} (U(\pm t)f, g) dt,$$

sprich

$$(R(z)f, g) = \int_0^{\infty} (e^{-tH}f, g)e^{tz} dt, \quad \text{für } \operatorname{Re}(z) < 0.$$

Andererseits kann diese Relation umgekehrt werden und man erhält für beliebiges  $c < 0$ , dass

$$(e^{-tH}f, g) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (R(z)f, g)e^{-tz} dt.$$

Da  $\mu_{f,g}(B) := (E(B)f, g)$  für  $B \in \mathfrak{B}$  ein (komplexwertiges) Maß definiert, können wir den Erwartungswert  $(R(\lambda)f, f)$  (welcher nicht-negativ ist) auch als Boreltransformierte von  $\mu_{f,f}(B)$  verstehen. Wir definieren daher

$$F_f(z) := \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_{f,f}(\lambda)}{\lambda - z} = (R(z)f, f). \quad (17.1)$$

(Insbesondere ist  $F_f$  eine Pick- oder Herglotz-Funktion, das heißt, ihr Träger befindet sich in der oberen komplexen Halbebene;  $F_f$  ist dort holomorph, und bildet die obere Halbebene wieder in sich selbst ab. Insbesondere kann das Maß  $d\mu_{f,f}$  durch die inverse Borel–Stieltjes-Transformation aus  $F_f$  wiedergewonnen werden; im Rahmen der Spektraltheorie spricht man dann von der Stoneschen Formel, die wir gleich sehen werden.) Der Imaginärteil

$$\operatorname{Im}(F_f(z)) = \operatorname{Im}(z) \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_f(\lambda)}{|\lambda - z|^2} = \frac{1}{2i} [(R(z)f, g) - (R(\bar{z})f, g)]$$

spielt im Folgenden eine große Rolle. Dies ist sofort ersichtlich, wenn man  $z = E + i\epsilon$  mit  $\epsilon > 0$  setzt, denn in diesem Fall ist

$$\operatorname{Im}(F_f(E + i\epsilon)) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\epsilon}{(\lambda - E)^2 + \epsilon^2} d\mu_{f,f}(\lambda),$$

das heißt der Integrand ist nichts weiter als der (mit  $\pi$  multiplizierte) Poisson-Kern. (Insbesondere ist, wegen Fubini,  $\int_{\mathbb{R}} \text{Im}(F_f(E)) dE = 1$ , falls  $\int d\mu = 1$ .) Dieser dient bekanntermaßen als Approximation der Eins, weshalb sofort

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi(E) \text{Im}(F_f(E + i\epsilon)) dE = \int \phi(\lambda) d\mu_{f,f}(\lambda)$$

für alle stetigen, kompakt getragenen Funktionen  $\phi$  folgt. Insbesondere erhält man so die Stonesche Formel

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}((E(\Lambda)f, f) + (E(\overline{\Lambda})f, f)) &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}(\mathbf{1}_{\Lambda}(E) + \mathbf{1}_{\overline{\Lambda}}(E)) \text{Im}(F_f(E + i\epsilon)) dE \\ &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\Lambda}(E) \text{Im}(F_f(E + i\epsilon)) dE \\ &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda} ([R(\lambda + i\epsilon) - R(\lambda - i\epsilon)]f, f) d\lambda \end{aligned} \tag{17.2}$$

eq:stone

für alle Intervalle  $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ .

BEMERKUNGEN 17.1. (1) Tatsächlich herrscht Gleichheit zwischen der linken und rechten Seite, wenn eines der  $f$  durch  $g$  ersetzt wird, was durch Polarisation ersichtlich ist.

(2) Die zweite Gleichheit gilt, da die Menge, auf der das Maß  $\text{Im}(F_f(E + i\epsilon))dE$  für  $\epsilon \rightarrow 0$  divergiert, tatsächlich eine Lebesgue-Nullmenge ist. Wir werden das in den kommenden beiden Abschnitten sehen, da das Spektralmaß (wie jedes Borelmaß) in einen absolut stetigen und einen singulären Teil zerlegt werden kann, wobei der singuläre Teil lediglich auf Lebesgue-Nullmengen getragen ist. Insbesondere stellt sich heraus, dass der Träger des absolut stetigen Teils gerade die Menge aller  $E$  ist, für die  $\lim_{\epsilon \searrow 0} \text{Im}(F_f(E + i\epsilon)) < \infty$  gilt.

Da die Randwerte von  $(R(z)f, g) = \int_{\mathbb{R}} (\lambda - z)^{-1} d(E(\lambda)f, g)$  existieren, folgt aus dem Satz von Fatou (bzw. der Approximation der Eins durch den Poisson-Kern)

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi} \text{Im}(F_f(\lambda + i\epsilon)) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \searrow 0} \|R(\lambda \pm i\epsilon)f\|^2 = \frac{(dE(\lambda)f, f)}{d\lambda}$$

für fast alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Die Menge vollen Maßes, für die beide Seiten dieser Gleichheit korrekt definiert sind und tatsächlich Gleichheit gilt, hängt von  $f$  ab. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, dass  $f \in \mathcal{H}^{(a)}$ , dem absolut-stetigen Teilraum von  $H$  genügt.

### 17.1.2. Abstrakte Maßtheorie.

DEFINITION 17.2 (Reguläres Maß). Sei  $X$  ein Hausdorff-Raum und  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ , die die Borelsche  $\sigma$ -Algebra enthält. Dann liegen alle offenen und abgeschlossenen Teilmengen von  $X$  in  $\mathcal{A}$ . Da  $X$  hausdorffsch ist, liegen auch alle kompakten Teilmengen in  $\mathcal{A}$ . Ein Maß  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  heißt

(i) *von innen regulär*, wenn für jedes  $A \in \mathcal{A}$  gilt:

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A, K \text{ kompakt}\} \tag{17.3}$$

(ii) *von außen regulär*, wenn für jedes  $A \in \mathcal{A}$  gilt:

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subseteq U, U \text{ offen}\} \tag{17.4}$$

(iii) *regulär*, wenn es von innen und außen regulär ist.

BEMERKUNG 17.3. Das Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}^n$  ist regulär.

Im Folgenden wollen wir etwas abstrakte Maßtheorie anhand klassischer Beispiele wiederholen. Sei dazu  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine monoton steigende Funktion, das heißt die Grenzwerte

$$\underbrace{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \alpha(x + |\epsilon|)}_{=: \alpha(x+0)}, \quad \underbrace{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \alpha(x - |\epsilon|)}_{=: \alpha(x-0)}$$

existieren. Dann definieren wir  $\mu_\alpha((a, b)) = \alpha(b - 0) - \alpha(a + 0)$ . Für paarweise disjunkte Borelmengen  $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  ist dann  $\mu_\alpha : \mathfrak{B} \rightarrow [0, \infty]$  mit

$$\mu_\alpha\left(\bigcup_i B_i\right) = \sum_i \mu(B_i) \quad \text{und} \quad \mu_\alpha(\emptyset) = 0$$

ein Borelmaß, das heißt, es besitzt die obigen Regularitätseigenschaften

$$\begin{aligned} \mu_\alpha(B) &= \sup\{\mu(C) : C \subseteq B, C \text{ kompakt}\} \\ &= \inf\{\mu(O) : B \subseteq O, O \text{ offen}\}. \end{aligned}$$

Man kann daher, wie beim Lebesgueintegral, durch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{n} \mu\left(f^{-1}\left[\left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right]\right]\right)$$

ein Integral

$$f \mapsto \int f d\mu_\alpha \equiv \int f d\alpha$$

konstruieren mit den klassischen Linearitätseigenschaften  $f + g \in L^1((a, b), d\mu)$ , wenn  $f, g \in L^1((a, b), d\mu)$ ,  $\lambda f \in L^1((a, b), d\mu)$ ,  $|g| \leq f \in L^1 \Rightarrow g \in L^1$ ,  $\int(f + g) = \int f + \int g$ ,  $|\int f| \leq \int |f|$ ,  $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$ ,  $|\int_a^b f| \leq |b - a| \|f\|_\infty$ , monotoner und majorisierter Konvergenz, etc.. Dieses Integral wird Lebesgue–Stieltjes-Integral genannt. Wir stellen nun einige Beispiele vor.

BEISPIEL 17.4 (Absolut stetiges Maß). Sei  $\alpha \in C^1$ , dann ist

$$\mu_\alpha((a, b)) = \int_a^b \frac{d\alpha}{dx} dx \quad \text{und daher} \quad \int f d\mu_\alpha = \int f \cdot \left(\frac{d\alpha}{dx}\right) dx.$$

BEISPIEL 17.5 (Dirac-Delta). Sei  $\alpha(x) = \mathbf{1}_{[0, \infty)}(x)$ , dann ist

$$\mu_\alpha((a, b)) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \in (a, b) \\ 0 & \text{falls } 0 \notin (a, b) \end{cases}, \quad \text{sprich} \quad \mu_\alpha(B) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \in B \\ 0 & \text{falls } 0 \notin B \end{cases}.$$

Insbesondere gilt  $\int f d\mu_\alpha = f(0)$ , sprich  $d\mu_\alpha$  ist das Dirac-Maß.

BEISPIEL 17.6 (Cantor). Sei  $\alpha$  die Cantor-Funktion. Wir definieren  $S \subseteq [0, 1]$  durch

$$S = \underbrace{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)}_{\text{mittleres Drittel von } [0,1]} \cup \underbrace{\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)}_{\text{mittleres Drittel von } [1/3, 2/3]} \cup \underbrace{\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)}_{\text{symmetrisieren}} \cup \left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right) \cup \dots$$

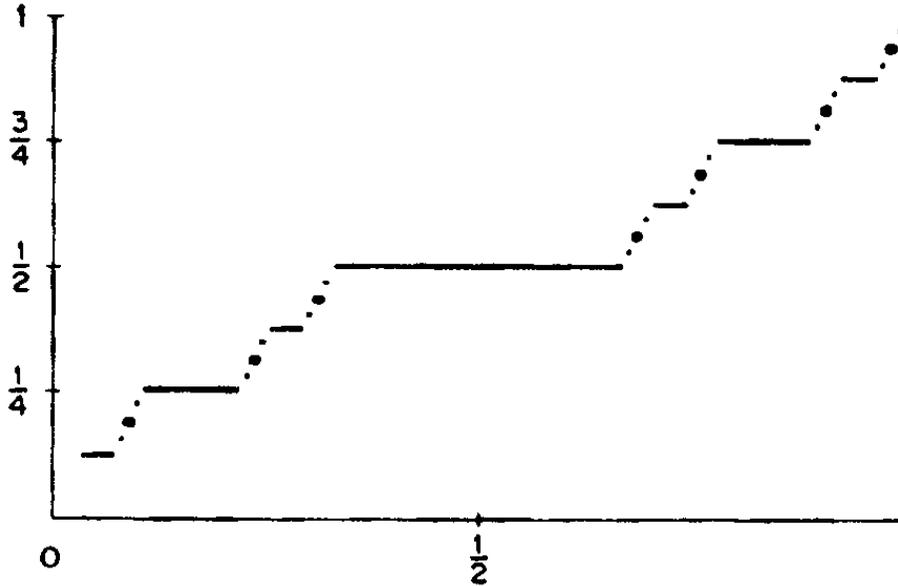
Das Lebesguemaß von  $S$  ist daher

$$\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 3^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{3^{-1}}{1 - 2/3} = \frac{1/3}{1/3} = 1.$$

Die Cantormenge ist dann durch

$$C = [0, 1] \setminus S$$

definiert, sprich  $|C| = 0$ . Wir konstruieren nun die Cantor-Funktion. Sei  $\alpha(x) = 1/2$  auf  $(1/3, 2/3)$ ,  $\alpha(x) = 1/4$  auf  $(1/9, 2/9)$ ,  $\alpha(x) = 3/4$  auf  $(7/9, 8/9)$ , etc. und setze  $\alpha$  auf  $[0, 1]$  stetig fort. Dann ist  $\alpha$  eine nicht-konstante, stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass  $\alpha'(x)$  Lebesgue-fast-überall existiert und  $\alpha'(x) = 0$  Lebesgue-fast-überall.



Da  $\alpha$  stetig ist, ist  $\mu_\alpha(\{x\}) = 0$  für jede einpunktige Menge  $\{x\}$ . Andererseits ist  $\mu_\alpha$  auf der Lebesgue-Nullmenge  $C$  konzentriert, in dem Sinne, dass  $\mu_\alpha([0, 1] \setminus C) = \mu_\alpha(S) = 0$ .

Diese drei Beispiele sind klassisch für möglichst allgemeine Lebesgue-Stieltjes-Maße. Angenommen,  $\mu$  sei ein Borelmaß auf  $\mathbb{R}$ . Wir bezeichnen dann die Menge der reinen Punkte von  $\mu$  mit  $P = \{x \in X : \mu(\{x\}) \neq 0\}$ . Da  $\mu$  Borel ist (sprich  $\mu(C) < \infty$  für kompakte Mengen  $C$ ), folgt, dass  $P$  eine abzählbare Menge ist. Wir definieren dann das *Punktmaß*

$$\mu_{pp}(X) = \sum_{x \in X \cap P} \mu(\{x\}) = \mu(X \cap P).$$

Dann ist  $\mu_{pp}$  wieder ein Maß und  $\mu_c := \mu - \mu_{pp} \geq 0$  hat die Eigenschaft, dass  $\mu_c(\{x\}) = 0$  für alle einzelnen Punkte. Sprich,  $\mu_c$  hat keine reinen Punkte und  $\mu_{pp}$  hat nur reine Punkte, in dem Sinne, dass  $\mu_{pp}(X) = \sum_{x \in X} \mu_{pp}(\{x\})$ . Dies führt auf die

DEFINITION 17.7. Sei  $\mu$  ein Borelmaß auf  $\mathbb{R}$ .

- (1)  $\mu$  heißt *reines Punktmaß*, wenn  $\mu(X) = \sum_{x \in X} \mu_{pp}(\{x\})$  für alle Borelmengen  $X$ .
- (2)  $\mu$  heißt auf  $\mathbb{R}$  *stetig*, wenn es keine reinen Punkte hat.

(3)  $\mu$  heißt *absolut stetig bezüglich Lebesgue*, wenn es  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  gibt, sodass

$$\int g d\mu = \int g \cdot f dx \quad \text{für alle } g \in L^1(\mathbb{R}, d\mu).$$

Man schreibt dann  $d\mu = f dx$ .

(4)  $\mu$  heißt *singulär bezüglich Lebesgue*, wenn  $\mu(S) = 0$  für alle Mengen  $S$  für die  $|\mathbb{R} \setminus S| = 0$ .

17.1.3. *Statische Charakterisierung des Spektrums.* Für einen Überblick über Spektratypen und der Zusammenhang mit den Randwerten analytischer Funktionen (hier die Borel–Stieltjes-Transformation des Spektralmaßes) siehe auch Last [Las1996] [Las96].

Nach dem Satz von Lebesgue können Borelmaße in drei zueinander singuläre Teilmaße zerlegt werden, sprich

$$d\mu = d\mu_{ac} + \underbrace{d\mu_s}_{=d\mu_{sc}+d\mu_{pp}}.$$

Dabei ist  $\mu_{ac}$  *absolut stetig* bezüglich des Lebesgue-Maßes, das heißt  $\mu_{ac}(B) = 0$ , wenn  $|B| = 0$ ; insbesondere „ignoriert“ es einzelne Punkte/Atome, in dem Sinne, dass  $\mu_{ac}(\{x\}) = 0$ .  $\mu_s$  ist *singulär* bezüglich des Lebesgue-Maßes, das heißt  $\mu_s$  ist auf Lebesgue-Nullmengen getragen, sprich  $\mu_s(\mathbb{R} \setminus B) = 0$  für Borelmengen  $B$  mit  $|B| = 0$ . Insbesondere ist  $\mu_{sc}$  stetig auf  $\mathbb{R}$  (das heißt  $\mu_{sc}(\{x\}) = 0$  für einzelne Atome); wir nennen dieses Maß deshalb *singulär stetig*. Das *Punktmaß*  $\mu_{pp}$  ist eine Linearkombination aus Treppenfunktionen, das heißt  $\mu_{pp}(\{x\}) \neq 0$  und  $\mu_{pp}$  ist auf  $P = \{x \in X : \mu(\{x\}) \neq 0\}$  getragen. Da die drei Maße singulär bezüglich einander sind, sind ihre Träger  $M_{ac}$ ,  $M_{sc}$  und  $M_{pp}$  disjunkt. Diese Mengen sind jedoch *nicht eindeutig*. Wir wählen sie so, dass  $M_{pp}$  die Menge aller Sprünge von  $\mu(\lambda)$  ist und, dass  $|M_{sc}| = 0$ .

Für den selbstadjungierten Operator  $H$  bezeichnen wir die auf diese Mengen  $M_{ac}$ ,  $M_{sc}$  und  $M_{pp}$  gehörigen Projektionen mit  $E^{ac} = E_H(M_{ac})$ , etc.. Insbesondere gilt  $E^{ac} + E^{sc} + E^{pp} = \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ , das heißt  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, d\mu) = L^2(\mathbb{R}, d\mu_{ac}) \oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu_{sc}) \oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu_{pp})$  und entsprechend zerlegt sich das Spektrum von  $H$  in  $\sigma_{ac}(H) = \sigma(\mu_{ac})$ , etc.. Dabei besteht  $\sigma_{pp}(H)$  aus dem *Abschluß der Menge aller Eigenwerte*. Wir geben ein kurzes Beispiel, welches zeigt, dass  $\sigma_{pp}$  im Allgemeinen *nicht* mit der Menge aller Eigenwerte übereinstimmt.

BEISPIEL 17.8. Sei  $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$  der zugrundeliegende Hilbertraum und

$$A = \begin{pmatrix} 1/1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

das heißt  $A\delta_n = n^{-1}\delta_n$ , wobei  $\delta_n = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$ , wobei die 1 an der  $n$ -ten Stelle steht. Dann gilt offenbar, dass die Menge der Eigenwerte von  $A$  durch  $\sigma_p = \{n^{-1} : n \in \mathbb{N}\}$  gegeben ist. Wir zeigen jetzt, dass  $\sigma_{pp} = \sigma_p \cup \{0\}$ . Dazu zeigen wir, dass  $0 \in \sigma(A)$  und  $\sigma_{ac}(A) = \sigma_{sc}(A) = \emptyset$ . Die letzte Aussage ist klar, da stetige Maße nicht auf einzelnen Punkten und daher auch nicht auf abzählbaren Mengen leben. Wir zeigen nun, dass  $0 \notin \rho(A)$ . Die Resolvente von  $A$  wirkt auf  $\delta_n$  durch  $(A-z)^{-1}\delta_n = (1/n-z)^{-1}\delta_n = n/(1-nz)\delta_n$  (da  $\delta_n$  gerade die Eigenvektoren von  $A$

sind). Für  $z \rightarrow 0$  folgt daraus  $A^{-1}\delta_n = n\delta_n$ . Das heißt, die Resolvente existiert zwar bei  $z = 0$ , aber sie ist für  $z = 0$  nicht beschränkt, also  $0 \notin \rho(A)$ , sprich  $0 \in \sigma_{pp}(A)$ .

Folgendes Beispiel zeigt, dass Multiplikationsoperatoren  $V$  rein absolut stetiges Spektrum haben, wenn  $V$  stetig differenzierbar ist. Wir erinnern, dass die Eigenfunktionen von  $V$  die Projektionen auf das Urbild sind, also  $V\psi(x) = \lambda\psi(x)$  genau dann, wenn  $\psi(x) = \mathbf{1}_{V^{-1}\{\lambda\}}(x)$ .

BEISPIEL 17.9. Sei  $H$  der selbstadjungierte Operator auf  $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ , der durch  $H\psi(x) = V(x)\psi(x)$  gegeben ist, wobei  $V(x)$  eine reellwertige, messbare Funktion auf  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ . Der Bildbereich von  $E(\lambda)$  sind dann alle  $\psi \in \mathcal{H}$  für die  $\psi(x) = 0$  ist, wenn  $V(x) > \lambda$ , sprich

$$\|E(\Lambda)\psi\|_2^2 = \int_{V^{-1}(\Lambda)} |\psi(x)|^2 dx$$

für  $\Lambda \subseteq \Omega$ . Falls  $V \in C^1(\Omega)$  mit  $\nabla V \neq 0$  Lebesgue-fast-überall auf  $\Omega$ , dann folgt aus dem Satz von der impliziten Funktion, dass  $H$  rein absolut stetiges Spektrum hat, da

$$\|E(\Lambda)\psi\|_2^2 = \int_{\Lambda} |\psi(V^{-1}(\lambda))|^2 D[V^{-1}](\lambda) d\lambda$$

und die zugehörige Jacobi-Determinante

$$D[V^{-1}](\lambda) = \frac{1}{D[V(V^{-1}(\lambda))]}$$

Lebesgue-integrierbar ist, da auch die Umkehrfunktion  $V^{-1}$  stetig differenzierbar ist.

Mit Hilfe der Boreltransformation  $F(z) = \int (\lambda - z)^{-1} d\mu(z)$  lassen sich die Maße  $d\mu_{ac}$ ,  $d\mu_{sc}$  und  $d\mu_{pp}$  und deren Träger, sprich die Spektren, wie folgt charakterisieren.

BEHAUPTUNG 17.10. Sei  $\mu$  ein Borelmaß auf  $\mathbb{R}$ . Dann gilt für die Träger

- (1)  $M_{ac} = \{\lambda : 0 < \limsup_{\epsilon \searrow 0} \text{Im}(F(\lambda + i\epsilon)) < \infty\}$
- (2)  $M_s = \{\lambda : \limsup_{\epsilon \searrow 0} \text{Im}(F(\lambda + i\epsilon)) = \infty\}$  (Satz von de La Vallée Poussin)
- (3)  $M = M_{ac} + M_s = \{\lambda : 0 < \limsup_{\epsilon \searrow 0} \text{Im}(F(\lambda + i\epsilon))\}$
- (4)  $\sigma(\mu) = \overline{M}$
- (5)  $\sigma(\mu_{ac}) = \overline{M_{ac}}^{ess} \equiv \{\lambda \in \mathbb{R} : |(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon) \cap M_{ac}| > 0, \forall \epsilon > 0\}$  (der wesentliche Abschluss)

Für die Spektralmaße gilt

- (1)  $d\mu_{ac}(\lambda) = \pi^{-1} \text{Im}(F(\lambda + i0)) d\lambda$
- (2)  $\mu(\{E_0\}) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon \cdot \text{Im}(F(E_0 + i\epsilon))$
- (3)  $\pi^{-1} \text{Im}(F(E + i\epsilon)) dE \rightarrow d\mu(E)$  im Sinne, dass

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \pi^{-1} \int f(E) \cdot \text{Im}(F(E + i\epsilon)) dE = \int f(\lambda) d\mu(\lambda)$$

für alle kompakt getragenen, stetigen  $f$ .

BEWEIS. Siehe beispielsweise Simon <sup>Simon2005</sup> [Sim05, Abschnitt 11.1] oder Teschl <sup>Teschl2014</sup> [Tes14, Kapitel 3]. □

Für alle  $f, g \in \mathcal{H}$  ist die monotone Funktion  $\lambda \mapsto (E(\lambda)f, g)$  für fast alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  differenzierbar (wegen des Satzes von Lebesgue) mit

$$\frac{d(E(\lambda)f, f)}{d\lambda} = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \searrow 0} \operatorname{Im}(F_f(\lambda + i\epsilon)) \in L^1(\mathbb{R}) \quad \text{für fast alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Diese Aussage ist auch als Fatous Theorem bekannt und folgt aus der Stoneschen Formel (siehe (17.2)) <sup>eq:stone</sup>

$$((E(\lambda)f, f) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\lambda} \operatorname{Im}(F_f(E + i\epsilon)) dE.$$

BEMERKUNGEN 17.11.

- (1)  $\lim_{\epsilon \searrow 0} \operatorname{Im}(F_f(\lambda + i\epsilon)) \in L^1(\mathbb{R})$ , da der Grenzwert entweder endlich ist und gegen  $d\mu_{ac}$  konvergiert oder aber divergiert, aber in dem Fall nur auf einer Lebesgue-Nullmenge getragen ist. Die Ableitung nach  $\lambda$  kann wegen monotoner Konvergenz (da der Imaginärteil gerade der Poissonkern ist, welcher punktweise monoton wächst, wenn  $\epsilon$  fällt) in das Integral (mit Integranden  $\theta(\lambda - E)\operatorname{Im}(F_f(E + i\epsilon))$ ) hineingezogen werden. Weiter ist  $d(E(\lambda)f, g)/d\lambda \in L^1(\mathbb{R})$  wegen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung und  $E(\mathbb{R}) = 1$ .
- (2) Per Polarisation ist auch  $d(E(\lambda)f, g)/d\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ .

Falls  $f$  oder  $g$  aus  $\mathcal{H}^{ac}$  sind, ist das Maß  $(E(X)f, g)$  absolut stetig, sprich

$$d(E(\lambda)f, g) = \frac{d(E(\lambda)f, g)}{d\lambda} d\lambda \quad \text{falls } f \text{ oder } g \in \mathcal{H}^{ac}$$

und insbesondere ist natürlich  $d(E(\lambda)f, g)/d\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ . Daraus folgt insbesondere

$$(P^{ac}f, g) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d(E(\lambda)f, g)}{d\lambda} d\lambda, \quad \forall f, g \in \mathcal{H},$$

wobei  $P^{ac} \equiv P_H^{ac}$  die orthogonale Projektion auf den Teilraum  $\mathcal{H}^{ac}(H) \stackrel{\text{eq:stone}}{=} E_H^{ac}\mathcal{H}$  bezeichnet (sprich  $E_H^{ac}(X) = P_H^{ac}E_H(X)$ ). Aus der Stoneschen Formel (17.2) folgt schließlich

BEHAUPTUNG 17.12. Sei  $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall, sodass

$$\sup_{\lambda \in \Lambda, \epsilon \in (0,1)} |(R(\lambda + i\epsilon)f, f)| < \infty$$

für alle  $f$  aus einer dichten Menge in  $\mathcal{H}$ . Dann ist  $\sigma(H) \cap \bar{\Lambda}$  absolut stetig. Ist darüberhinaus die Funktion  $\lambda \mapsto (R(\lambda)f, f)$  stetig für  $\operatorname{Re}(z) \in \Lambda$ ,  $\operatorname{Im}(z) \geq 0$ , dann ist die Funktion  $(E(\lambda)f, f)$  stetig differenzierbar auf  $\Lambda$  und es gilt

$$d(E(\lambda)f, f) = \frac{d(E(\lambda)f, f)}{d\lambda} d\lambda \quad \text{für alle } \lambda \in \Lambda.$$

BEMERKUNG 17.13. Der Beweis verwendet, dass  $\sup_{\lambda \in \Lambda, \epsilon \in (0,1)} |(R(\lambda + i\epsilon)f, f)| < \infty$  eine hinreichende Bedingung für

$$\sup_{0 < \epsilon < 1} \int_{\Lambda} |\operatorname{Im}(\varphi, R(\lambda + i\epsilon)\varphi)|^p d\lambda < \infty, \quad p > 1$$

aus Satz <sup>theorem:3.58</sup> 17.3 ist.

17.1.4. *Dynamische Charakterisierung des Spektrums.* Siehe Aizenman–Warzel [AW15, Kapitel 2], die größtenteils Last [Las96] folgen.

Eine alternative Charakterisierung der Spektren kann durch die Wahrscheinlichkeit gegeben werden, mit der ein Zustand in unendlich ferner Zeit immer noch „lokalisiert“ ist. Für einen gegebenen selbstadjungierten Hamiltonoperator  $H$  und einen Zustand  $\psi \in \mathcal{H}$  ist

$$|(\psi, e^{-itH}\psi)|^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-it\lambda} d(E(\lambda)\psi, \psi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-it\lambda} d\mu_{\psi}(\lambda) = |\hat{\mu}_{\psi}(t)|^2$$

die Wahrscheinlichkeit, das System nach der Zeit  $t$  immer noch im Zustand  $\psi$  vorzufinden. Für  $\psi \in \mathcal{H}^{ac}$  ist das zugehörige Spektralmaß  $d\mu_{\psi}^{ac}(\lambda)$  absolut stetig, und  $d\mu_{\psi}^{ac}(\lambda)/d\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ . Dementsprechend folgt aus dem Riemann–Lebesgue-Lemma, dass  $\hat{\mu}_{\psi}^{ac} \in C_b^0(\mathbb{R})$ , also insbesondere

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \hat{\mu}_{\psi}^{ac}(t) = 0. \tag{17.5}$$

eq:prewiener

Eine äquivalente Aussage trifft folgender Satz. Er besagt Folgendes. Angenommen, das System befindet sich zur Zeit  $t = 0$  in einem Zustand  $\psi \in \mathcal{H}$ , sprich, er kann in  $\mathcal{H}^{ac}$ ,  $\mathcal{H}^{sc}$ , oder  $\mathcal{H}^{pp}$  leben. Betrachtet man dann die mittlere Wahrscheinlichkeit (im Sinne von Cesàro), dass sich das System für  $t \rightarrow \infty$  noch im Zustand  $\psi$  befindet, findet man, dass die Zustände in  $\mathcal{H}^{ac}$  und  $\mathcal{H}^{sc}$  bereits „weggestreut“ sind und lediglich die gebundenen Zustände in  $\mathcal{H}^{pp}$  verweilt sind. Formal gilt

theorem:wienersatz

SATZ 17.14 (Wiener [Wie32]). Sei  $\mu$  ein komplexwertiges, endliches Borelmaß auf  $\mathbb{R}$ . Dann gilt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\hat{\mu}(t)|^2 dt = \sum_{\lambda \in M_{pp}} |\mu(\{\lambda\})|^2 \tag{17.6}$$

BEMERKUNGEN 17.15.

- (1) In der Quantenmechanik wäre der Integrand der linken Seite  $|\hat{\mu}_{\psi}(t)|^2$  und die rechte Seite könnte als  $\|P^{pp}\psi\|^2$  geschrieben werden, wobei  $P^{pp} = \sum_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$  die Projektion auf die Eigenvektoren von  $H$  meint.
- (2) Falls  $\lambda \in \sigma_{disc}(H)$ ,  $\lambda$  also ein isolierter Eigenwert ist, kann die Spektralprojektion  $P(\{\lambda\}) = E(\lambda) - E(\lambda - 0)$  auch als Riesz-Projektion, also als Konturintegral, geschrieben werden, siehe (I.17). Für eingebettete Eigenwerte ist dies nicht mehr möglich. Wieners Theorem gibt daher eine alternative Formel für die Projektion auf Eigenwerte. Man spricht auch vom „mean ergodic theorem“ (Kato [Kat66, Kapitel X, Theorem 1.3]), welches

$$P(\{\lambda\}) = s - \lim_{t_2 - t_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} e^{itH} e^{-it\lambda} dt$$

besagt.

BEWEIS. Mit dem Satz von Fubini gilt

$$\frac{1}{T} \int_0^T |\hat{\mu}(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(\lambda - \lambda')t} dt \right) d\mu(\lambda) \overline{d\mu(\lambda')}.$$

Da

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(\lambda - \lambda')t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{i(\lambda - \lambda')T} - 1}{T(\lambda - \lambda')} = \delta_{\lambda, \lambda'}$$

punktweise und, da  $|T^{-1} \int_0^T e^{i(\lambda-\lambda')t} dt| \leq 1$ , folgt mit majorisierter Konvergenz

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\hat{\mu}(t)|^2 dt &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \delta_{\lambda, \lambda'} d\mu(\lambda) \overline{d\mu(\lambda')} = \int_{\mathbb{R}} \overline{\mu(\{\lambda\})} d\mu(\lambda) \\ &= \sum_{\lambda \in M_{pp}} |\mu(\{\lambda\})|^2, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.  $\square$

Das folgende Resultat gibt genaue Abklingraten de Cesáro-gemittelten Aufenthaltswahrscheinlichkeit  $|\hat{\mu}_{\psi, \phi}(t)|^2$  für  $\psi \in \mathcal{H}^{ac}$ . Tatsächlich kann man dies noch etwas weiter präzisieren mit Hilfe der folgenden

**DEFINITION 17.16.** Sei  $\mu$  ein endliches Borelmaß auf  $\mathbb{R}$  und  $\alpha \in [0, 1]$ . Dann heißt  $\mu$  *gleichmäßig  $\alpha$ -Hölderstetig* ( $U\alpha H$ ), wenn es ein  $C < \infty$  gibt, sodass für alle Intervalle  $I$  mit  $|I| \leq 1$

$$\mu(I) \leq C|I|^\alpha$$

gilt.

Für  $\alpha = 0$  gibt diese Bedingung keine zusätzliche Information und ist selbst im Falle von Punktspektrum erfüllt. Falls  $\alpha = 1$ , dann ist  $\mu$  absolut stetig bezüglich Lebesgue. Physikalisch relevante Operatoren, für die das Spektralmaß  $U\alpha H$ -Teile besitzt, haben beispielsweise quasiperiodische Potentiale. Prominente Beispiele solcher Operatoren sind etwa der Harper-Operator oder der Fibonacci-Operator. In dieser Situation gilt die folgende Verfeinerung von Satz 17.14. theorem:wiener

**SATZ 17.17** (Strichartz–Last Strichartz1990, Last1996 [Str90, Las96]). Sei  $H$  ein selbstadjungierter Operator und  $\psi \in \mathcal{H}$ , sodass  $\mu_\psi$   $U\alpha H$  für ein  $\alpha \in [0, 1]$ . Dann gibt es ein  $C_\psi < \infty$ , sodass für alle  $\phi \in \mathcal{H}$  und  $T > 0$

$$\frac{1}{T} \int_0^T |(\phi, e^{-itH}\psi)|^2 dt \leq \frac{C_\psi \|\phi\|}{T^\alpha}. \quad (17.7)$$

**BEWEIS.** Wegen des Spektralsatzes (in „multiplikativer Form“, siehe Aizenman–Warzel AizenmanWarzel2015 [AW15, Proposition A.2]) gilt

$$(\psi, e^{-itH}\phi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-it\lambda} f(\lambda) d\mu_{\psi, \phi}(\lambda) =: \widehat{f\mu_\psi}(t),$$

wobei  $d\mu_\psi(\lambda) = (dE_H(\lambda)\psi, \psi)$  das zu  $\psi$  gehörige Spektralmaß ist ( $\psi$  wird in  $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)$  durch 1 dargestellt) und  $f$  die Funktion ist, die den Vektor  $\phi$  in  $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)$  darstellt. (Genauer gesagt stellt  $f$  die Projektion von  $\phi$  auf den Raum, in dem  $\psi$  als zyklischer Vektor unter der Wirkung von  $H$  dient, dar.) In dieser Terminologie bedeutet die Behauptung, dass, wenn ein positives Maß  $\mu$   $U\alpha H$  für ein  $\alpha \in [0, 1]$  ist, dann gibt es  $C < \infty$ , sodass für alle  $f \in L^2(\mathbb{R}, d\mu)$

$$\frac{1}{T} \int_0^T |\widehat{f\mu}(t)|^2 dt \leq \frac{C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}, d\mu)}}{T^\alpha}$$

gilt. Falls  $T \in [0, 1]$ , dann ist

$$\frac{1}{T} \int_0^T |\widehat{f\mu}(t)|^2 dt \leq \sup_{t \in [0, T]} |\widehat{f\mu}(t)|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d\mu(\lambda) = \|\phi\|_2^2 \leq \|\phi\|_2^2 T^{-\alpha}$$

für alle  $\alpha \geq 0$ . Wir betrachten nun nur noch  $T \geq 1$ . Mit  $\mathbf{1}_{[0,T]}(t) \leq e^{1-t^2/T^2}$  (und der Tatsache, dass die Fouriertransformation einer Gaussfunktion wieder eine Gaussfunktion, also insbesondere positiv ist) beschränken wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T |\widehat{f\mu}(t)|^2 dt &\leq \frac{e}{T} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/T^2} |\widehat{f\mu}(t)|^2 dt \\ &\leq \frac{e}{T} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)| |f(\lambda')| \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/T^2} e^{it(\lambda-\lambda')} dt \right) d\mu(\lambda) d\mu(\lambda') \\ &\leq e\sqrt{\pi} \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{T^2}{4}(\lambda-\lambda')^2} d\mu(\lambda') \right) d\mu(\lambda), \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Ungleichung Cauchy–Schwarz verwendet haben. Zerlegt man jetzt die Integration über  $\lambda'$  in gleich große Intervalle, findet man für  $T \geq 1$  und  $\alpha \in [0, 1]$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{n}{T} \leq |\lambda-\lambda'| \leq \frac{n+1}{T}} e^{-\frac{T^2}{4}(\lambda-\lambda')^2} d\mu(\lambda') \leq \frac{2C}{T^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2/4},$$

was den Beweis schließt.  $\square$

Die Abklingrate der zeitgemittelten Wiederauftrittsrate kann auch mit Hilfe der Resolventen formuliert werden (die ja die Laplacetransformation der Halbgruppe  $e^{-tH}$  ist, siehe auch Lemma [8.3](#), den Satz von Plancherel für vektorwertige Funktionen).

**SATZ 17.18.** *Sei  $\alpha \in [0, 1]$ . Falls einer der beiden Grenzwerte existiert, so existiert auch der andere und es gilt Gleichheit in*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^{\alpha-1} \int_0^T |(\phi, e^{-itH} \psi)|^2 dt = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{\epsilon^{1-\alpha}}{\pi 2^\alpha \Gamma(2-\alpha)} \int_{\mathbb{R}} |(\phi, R(\lambda + i\epsilon) \psi)|^2 d\lambda. \quad (17.8)$$

**BEWEIS.** Für  $\epsilon > 0$  ist  $F(t) := e^{-\epsilon t} (\phi, e^{-itH} \psi) \theta(t)$  sowohl in  $L^1$  als auch  $L^2$  mit

$$\widehat{F}(-\lambda) = \int e^{it\lambda} F(t) dt = \int_0^\infty dt e^{-t(\epsilon-i\lambda)} \int_{\mathbb{R}} d\mu_{\phi, \psi}(E) e^{-itE} = -i(\phi, R(\lambda + i\epsilon) \psi),$$

sprich die Resolvente ist die Laplacetransformation von  $e^{-it(H+\lambda)}$ . Aus dem Satz von Plancherel (zwischen  $R(\lambda + i\epsilon)$  und  $F(t) = e^{-\epsilon t} (\phi, e^{-itH} \psi) \theta(t)$ ) folgt deshalb

$$\int_0^\infty e^{-2\epsilon t} |(\phi, e^{-itH} \psi)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |(\phi, R(\lambda + i\epsilon) \psi)|^2 d\lambda.$$

Die Aussage folgt dann aus dem folgenden Tauberschen Theorem.  $\square$

**BEHAUPTUNG 17.19** (Taubersches Theorem für die Laplace- und Stieltjes-Transformation). *Sei  $\alpha \in [0, 1]$  und  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ . Wenn einer der beiden folgenden Grenzwerte existiert, dann tut es auch der andere und es gilt Gleichheit in*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^{\alpha-1} \int_0^T f(t) dt = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{\epsilon^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^\infty e^{-\epsilon t} f(t) dt. \quad (17.9)$$

**BEWEIS.** Siehe Karamata [\[Kar31\]](#) oder Simon [\[Sim79\]](#).  $\square$

**BEMERKUNG 17.20.** Diese Aussagen gehen tatsächlich auf Hardy und Littlewood [HardyLittlewood1929] zurück. Sie zeigten folgende Aussage. Sei  $f(t)$  in jedem endlichen Intervall  $[0, T]$  und  $e^{-st}f(t)$  für alle  $s > 0$  in  $L^2(\mathbb{R}_+)$ . Wenn

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t) dt \sim As^{-\sigma} \quad \text{bei } s \rightarrow 0 \quad (A \geq 0, \sigma > 0)$$

und  $f(t) \geq 0$  für  $t \geq 0$ , dann gilt

$$\int_0^x f(t) dt \sim \frac{A}{\Gamma(\sigma+1)} x^\sigma \quad \text{bei } x \rightarrow \infty.$$

Die Umkehrung dieser Aussage gilt entsprechend, aber siehe Karamata [Karamata1931] **[Kar31]**. (In unserer Anwendung ist  $f(t) = e^{-itH}$  mit der Resolventen als Laplace-Transformierte.)

Bevor wir das Hauptresultat dieses Abschnitts aufstellen, geben wir noch eine Implikation von Wieners Satz [theorem:wieners] **[17.14]**.

**prerage**

**BEHAUPTUNG 17.21.** Sei  $H$  selbstadjungiert und  $K$  kompakt. Dann gelten

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|Ke^{-itH} P^c \psi\|^2 dt = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \|Ke^{-itH} P^{ac} \psi\|^2 dt = 0 \quad (17.10)$$

für alle  $\psi \in \mathcal{H}$ . Falls  $K$  lediglich relativ kompakt bezüglich  $H$  ist, gelten die Aussagen für alle  $\psi \in \mathcal{D}(H)$ . Falls  $K$  relativ kompakt bezüglich  $H$  und beschränkt ist, gelten die Aussagen wieder für alle  $\psi \in \mathcal{H}$ .

Man vergleiche das mit dem Kriterium für  $H$ -Glattheit (Satz [equivcrit] 8.12), welches für die Existenz und Unitarität der Wellenoperatoren wichtig war. Hier musste  $K$  jedoch nicht kompakt sein und es wurde keine Cesáro-Mittelung gebraucht.

**BEWEIS.** Die Behauptung folgt für kompaktes  $K$ , wenn wir die Aussage für Rang-Eins-Projektionen gezeigt haben, da diese den Raum der Operatoren endlichen Ranges aufspannen, welcher wiederum dicht in den kompakten Operatoren (allgemein jeder Schatten-Klasse) liegt. Sei also  $K = |\rho\rangle\langle\phi|$  für Vektoren  $\rho, \phi \in \mathcal{H}$ . In diesem Fall ist

$$\frac{1}{T} \int_0^T \|Ke^{-itH} \psi\|^2 dt = \frac{\|\rho\|^2}{T} \int_0^T |(\phi, e^{-itH} \psi)|^2 dt = \frac{\|\rho\|^2}{T} \int_0^T |\widehat{\mu_{\phi, \psi}}(t)|^2 dt$$

und die rechte Seite verschwindet für  $T \rightarrow \infty$  wegen Wieners Satz [theorem:wieners] **[17.14]**, da  $\psi \in \mathcal{H}^c$ . Analog verfährt man für  $\psi \in \mathcal{H}^{ac}$  mit Hilfe von [eq:prewieners] (17.5).

Wir zeigen nun, dass die Aussage auch für relativ kompakte  $K$  gilt. Sei dazu  $\psi \in \mathcal{D}(H)$ . Dann können wir  $\psi = (H+i)^{-1}\phi$  setzen, wobei  $\phi \in \mathcal{H}^c$  genau dann, wenn  $\psi \in \mathcal{H}^c$  (da  $\mathcal{H}^c$  ein reduzierender Unterraum von  $H$  ist). Da  $K(H+i)^{-1}$  per Voraussetzung kompakt ist, folgt die Behauptung aus den vorigen Argumenten.

Falls nun  $K$  sowohl relativ kompakt bezüglich  $H$ , als auch beschränkt ist, dann gibt es für beliebiges  $\psi \in \mathcal{H}$  eine Folge  $\psi_n \in \mathcal{D}(H)$ , sodass  $\|\psi - \psi_n\| < 1/n$  und daher

$$\|Ke^{-itH} \psi\| \leq \|Ke^{-itH}(\psi - \psi_n)\| + \|Ke^{-itH} \psi_n\|,$$

was die Aussage auch in diesem Fall zeigt. □

Wir sind nun bereit, auf Wieners Theoremen (und seinen Verallgemeinerungen) aufbauend, die folgende dynamische Charakterisierung von  $\mathcal{H}^{pp}$  und  $\mathcal{H}^c = \mathcal{H}^{ac} \oplus \mathcal{H}^{sc}$  nach Ruelle [Rue69], Amrein-Georgescu [AmreinGeorgescu1973] **[AG74]** und Enss [Enss1978] **[Ens78]** zu geben.

rage

SATZ 17.22 (RAGE). Sei  $H$  selbstadjungiert und  $K_L$  eine Folge kompakter Operatoren mit  $K_L \xrightarrow{s} 1$ . Dann gelten

$$\mathcal{H}^c = \left\{ \psi \in \mathcal{H} : \lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|K_L e^{-itH} \psi\|^2 dt = 0 \right\} \quad (17.11a) \quad \text{eq:dync}$$

$$\mathcal{H}^{pp} = \left\{ \psi \in \mathcal{H} : \lim_{L \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|(1 - K_L) e^{-itH} \psi\| = 0 \right\}. \quad (17.11b) \quad \text{eq:dynpp}$$

BEWEIS. Wir zeigen zunächst in beiden Fällen die Inklusion „ $\subseteq$ “. Für  $\psi \in \mathcal{H}^c$  folgt aus dem vorigem Lemma, dass für alle  $L$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|K_L \psi(t)\|^2 dt = 0$$

gilt. Sei nun  $\psi \in \mathcal{H}^{pp}$ ; wir zeigen dann

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|(1 - K_L) e^{-itH} \psi\| = 0. \quad (17.12) \quad \text{eq:dynpp2}$$

Wegen des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit folgt aus der Konvergenz  $K_L \rightarrow 1$  insbesondere  $\sup_L \|K_L\| < \infty$ . Seien  $\psi_k$  die Eigenfunktionen von  $H$ , dann zerlegen wir

$$\psi = \sum_k (\psi_k, \psi) \psi_k \equiv \sum_{k=1}^N (\psi_k, \psi) \psi_k + \phi_N, \quad \|\phi_N\| < \epsilon.$$

Da  $\lim_{L \rightarrow \infty} \|(1 - K_L) \psi_k\| \rightarrow 0$  für alle  $k$ , trägt der erste Term in der obigen Zerlegung von  $\psi$  für  $L \rightarrow \infty$  nichts bei. Andererseits ist  $\|(1 - K_L) \psi_k\| < (1 + \sup_L \|K_L\|) \epsilon$ . Diese beiden Tatsachen zeigen (17.12), da  $\epsilon > 0$  beliebig war.

Wir zeigen nun die umgekehrten Inklusionen „ $\supseteq$ “. Da die Unterräume  $\mathcal{H}^c$  und  $\mathcal{H}^{pp}$  orthogonal zueinander sind, kann jedes  $\psi$  eindeutig in  $\psi = \psi^c + \psi^{pp}$  zerlegt werden. Wir zeigen nun, dass die Grenzwerte in (17.11a) mit  $\psi^{pp} \neq 0$  und (17.11b) mit  $\psi^c \neq 0$  nicht gegen Null konvergieren. Wir beginnen mit der ersten Behauptung. Mit der Dreiecksungleichung gilt (mit  $\psi^{pp}(t) = e^{-itH} \psi^{pp}$ )

$$\|K_L \psi^{pp}(t)\| \geq \|\psi^{pp}\| - \|(1 - K_L) \psi^{pp}(t)\|.$$

Da der zweite Term für  $L \rightarrow \infty$  (wie wir oben gesehen haben) verschwindet, gibt es sicherlich ein hinreichend großes  $L$ , sodass die rechte Seite echt positiv ist. Wir widmen uns nun der zweiten Aussage, sprich, der Grenzwert in (17.11b) verschwindet nicht für  $\psi^c \neq 0$ . Wir argumentieren per Widerspruch und nehmen an, dass der Grenzwert in (17.11b) für  $\psi^c \neq 0$  tatsächlich verschwindet (und zeigen, dass  $\psi^c = 0$ ). Aus Behauptung 17.21 folgt (für jedes feste  $L$  mit  $\psi^c(t) = e^{-itH} \psi^c$ )

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|(1 - K_L) \psi^c(t)\|^2 dt \right)^{1/2} \\ &\geq \|\psi^c\| - \left( \lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|K_L \psi^c(t)\|^2 dt \right)^{1/2} = \|\psi^c\|, \end{aligned}$$

was aber  $\psi^c \neq 0$  widerspricht.  $\square$

Für dynamische Eigenschaften von Zuständen aus  $\mathcal{H}_{sc}$  siehe beispielsweise Last [Las96, Theoreme 3.1, 5.2, 5.3, 6.1]. Hierzu ist die Zerlegung von Borel-Maßen bzgl. eines gegebenen Hausdorff-Maßes wichtig, siehe [Las96, Abschnitt 4].

**17.2. Störungen des stetigen Spektrums.** Wir haben bereits in Satz <sup>theorem:7.7</sup> 7.7 gesehen, dass das singuläre Spektrum (also insbesondere  $\sigma_{sc}$ ) instabil unter Rang-Eins-Störungen ist. In diesem Sinne verhält sich das stetige Spektrum deutlich schlechter als das wesentliche Spektrum, welches unter sehr sanften Annahmen (relative Form-Kompaktheit der Störung) invariant bleibt. Anders verhält es sich mit  $\sigma_{ac}$ , welches eine große Rolle in der Streutheorie spielt (wie wir im letzten Abschnitt bereits erahnt haben).

Bevor wir die Methoden der Streutheorie (Existenz und Eindeutigkeit der verallgemeinerten oder lokalen Wellenoperatoren) entwickeln und anwenden, um zu zeigen, dass  $\sigma_{ac}$  recht stabil ist, geben wir ein Gegenbeispiel, welches von Weyl entwickelt und von Neumann verallgemeinert wurde. Es stellt sich heraus, dass *jeder* selbstadjungierte Operator in einem *separablen* Hilbertraum durch Addition einer kleinen Störung in einen Operator übergeführt werden kann, der reines Punktspektrum hat.

**SATZ 17.23 (Weyl–Von Neumann).** *Sei  $H$  ein selbstadjungierter Operator auf einem separablen Hilbertraum. Dann gibt es für alle  $\epsilon > 0$  einen selbstadjungierten Operator  $A \in \mathcal{S}^2$  mit  $\|A\|_2 < \epsilon$ , sodass  $H + A$  reines Punktspektrum hat.*

**BEWEIS.** Siehe Kato <sup>Kato1976</sup> **Kat76a**, Kapitel X, Theorem 2.1]. □

Dieses Beispiel wurde weiter von Kuroda verallgemeinert, der die Kleinheitsbedingung an  $A$  abgeschwächt hat.

**SATZ 17.24 (Kuroda).** *In obigem Satz kann  $A$  so gewählt werden, dass  $\|A\| < \epsilon$  für jede beliebige unitär invariante Norm  $\|\cdot\|$ , bis auf die Spurnorm (und Normen, die zur Spurnorm äquivalent sind).*

**BEWEIS.** Siehe Kato <sup>Kato1976</sup> **Kat76a**, Kapitel X, Theorem 2.3]. □

**BEMERKUNGEN 17.25.**

- (1) Die natürliche Frage, die man hier stellen kann, ist, ob die Sätze immer noch wahr sind, wenn  $A$  Spurklasse ist. Dies ist im Allgemeinen nicht der Fall. In Kato <sup>Kato1976</sup> **Kat76a**, Kapitel X, Theorem 4.3] wird gezeigt, dass ein Operator  $H$  mit  $\sigma_{ac}(H) \neq \emptyset$  nie so gestört werden kann, dass der gestörte Operator  $H + A$  reines Punktspektrum hat.
- (2) Die obigen Sätze zeigen insbesondere, dass Operatoren  $H$  mit rein stetigem Spektrum in solche mit reinem Punktspektrum übergeführt werden können. Man sollte sich allerdings nicht vorstellen, dass die Eigenwerte isoliert voneinander sind! Tatsächlich sind die Eigenwerte in jedem Intervall  $I$  dicht, welches zuvor vom stetigen Spektrum des ungestörten Operators überdeckt wurde. Dies folgt aus dem Satz von Weyl (Stabilität von  $\sigma_{ess}$  unter Addition relativ kompakter Operatoren  $A$ ) und der Inklusion  $\sigma_c \subseteq \sigma_{ess}$ , aus der insbesondere  $I \subseteq \sigma_{ess}(H) = \sigma_{ess}(H + A)$  folgt. Dies zeigt, dass die Menge der Eigenwerte von  $H + A$  dicht in  $I$  ist, wenn  $H + A$  reines Punktspektrum hat.

**17.3. Katos glatte Methoden.** Siehe Abschnitt <sup>s:hsmoothness</sup> 8.

**17.4. Spurklasse-Methode.** Siehe Yafaev <sup>Yafaev2010</sup> **Yaf10**, Abschnitt 0.8] und Simon <sup>Simon2005</sup> **Sim05**, Kapitel 6].

**17.5. Agmon–Hörmander-Theorie.** Wir folgen Hörmander [Hör83, Kapitel XIV] (aufbauend auf dem klassischen Spurtheorem) und Ionescu–Schlag [IS06] (aufbauend auf dem Tomas–Stein-Theorem).

## 18. Einführung zur Spektraltheorie nicht-selbstadjungierter Operatoren

**18.1. Vorbereitungen zu kompakten, nicht-selbstadjungierten Operatoren.** Wir diskutieren hier kurz die Spektraltheorie kompakter Operatoren, die nicht selbstadjungiert sein müssen. Wir wissen bereits, dass, wenn  $A$  kompakt ist,  $\sigma(A)$  aus Null, sowie von Null verschiedenen Zahlen  $\{\lambda_i\}_{i=1}^{N(A)}$  besteht, wobei  $N(A)$  endlich oder abzählbar unendlich sein kann. Weiter sind alle  $\lambda_i$  Eigenwerte von  $A$ , die sich höchstens bei Null häufen können. Zudem sind die Spektralprojektionen

$$P_i = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_i| = \epsilon} (A - \lambda)^{-1} d\lambda \quad (18.1)$$

endlichdimensional mit  $\text{Ran}(P_i) = \{\psi : (A - \lambda_i)^n \psi = 0 \text{ für ein } n\}$ .

DEFINITION 18.1.  $\psi$  heißt genau dann *verallgemeinerter Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$* , wenn es ein  $n \geq 1$  gibt, sodass  $(A - \lambda)^n \psi = 0$ .

Es gibt viele natürliche Fragen, die man in diesem Fall stellen kann. Die drei wichtigsten sind die Folgenden.

- (1) Spannen die Eigenvektoren und verallgemeinerten Eigenvektoren von  $A$  den ganzen Hilbertraum  $\mathcal{H}$  auf, das heißt, bilden sie eine totale Menge?
- (2) Angenommen,  $A \in \mathcal{S}^1$  und seien  $\lambda_j(A)$  die von Null verschiedenen Eigenwerte von  $A$ , wobei jeder Eigenwert gemäß seiner algebraischen Multiplizität  $\dim(P_i)$  gezählt wird. Ist dann

$$\text{tr}(A) = \sum_{j=1}^{N(A)} \lambda_j(A)? \quad (18.2)$$

- (3) Nach dem meromorphen Fredholm-Satz [theorem:3.32](#) 4.2 ist die Resolvente  $(1 + \mu A)^{-1}$  eine meromorphe Funktion von  $\mu$  auf ganz  $\mathbb{C}$ . Kann man dann explizite Funktionen  $F$  und  $G$ , die in  $\mu$  ganz sind und sich einfach durch  $A$  ausdrücken lassen, sodass  $(1 + \mu A)^{-1} = \frac{F(\mu)}{G(\mu)}$  ist?

Wir werden eine Lösung für die dritte Frage finden, wenn  $A$  Spurklasse ist und damit die ersten beiden Fragen beantworten. Die zweite Frage hat keine offensichtliche Antwort, da es nicht klar ist, ob die Summe konvergiert. Darüberhinaus ist auch nicht klar, dass, wenn  $A$  nur Null als Eigenwert hat, die Spur  $\text{tr}(A)$ , welche als die Summe der Einträge auf der Diagonalen definiert ist, ebenfalls Null ist.

Für die erste Frage betrachten wir folgendes Beispiel.

BEISPIEL 18.2. Sei  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Orthonormalbasis von  $\mathcal{H}$ . Sei  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge positiver Zahlen, die monoton gegen Null konvergiert. Wir definieren dann

$$A := \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n (\varphi_n, \cdot) \varphi_{n+1}. \quad (18.3)$$

Offensichtlich kann  $A$  durch Operatoren endlichen Ranges approximiert werden und ist demnach kompakt, denn

$$\left\| \left\| A - \sum_{n=1}^N \alpha_n(\varphi_n, \cdot) \varphi_{n+1} \right\| \right\| = \sup_{n \geq N+1} |\alpha_n| \rightarrow 0. \quad (18.4)$$

Darüberhinaus konvergiert

$$\| \| A^n \| \|^{1/n} = \left( \prod_{m=1}^n |\alpha_m| \right)^{1/n} \quad (18.5)$$

für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null. Nach der Formel für den Spektralradius  $r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \| \| A^n \| \|^{1/n}$  ist  $\sigma(A) = \{0\}$ . Angenommen,  $\alpha_n \neq 0$ , dann ist klar, dass  $\text{Ker}(A^n) = \{0\}$ ,  $A$  keine Eigenwerte hat und der Span der Eigenvektoren und verallgemeinerten Eigenvektoren damit  $\{0\}$  ist. Dies würde Frage (1) verneinen.

**BEISPIEL 18.3.** Sei  $AC[0, 1]$  die Menge der auf  $[0, 1]$  absolut stetigen Funktionen, deren Ableitungen in  $L^2[0, 1]$  sind. Seien  $T_1$  und  $T_2$  die Operatoren  $i d/dx$  mit Definitionsbereichen

$$\mathcal{D}(T_1) = \{\varphi : \varphi \in AC[0, 1]\} \quad (18.6a)$$

$$\mathcal{D}(T_2) = \{\varphi : \varphi \in AC[0, 1], \varphi(0) = 0\}. \quad (18.6b)$$

Zwar sind sowohl  $T_1$  als auch  $T_2$  dicht definiert und abgeschlossen, aber

a)  $\sigma(T_1) = \mathbb{C}$  und

b)  $\sigma(T_2) = \emptyset$ .

Um zu sehen, dass  $\sigma(T_1) = \mathbb{C}$  ist, bemerken wir, dass

$$(\lambda \text{id} - T)e^{-i\lambda x} = 0 \quad e^{-i\lambda x} \in \mathcal{D}(T_1) \quad (18.7)$$

für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Eine Resolvente für  $T_2$  ist der Operator

$$(S_\lambda g)(x) := i \int_0^x e^{-i\lambda(x-s)} g(s) ds, \quad (18.8)$$

der  $(\lambda \text{id} - T_2)S_\lambda = \text{id}_{L^2[0,1]}$  und  $S_\lambda(\lambda \text{id} - T_2) = \text{id}_{\mathcal{D}(T_2)}$  erfüllt. Darüberhinaus ist

$$\begin{aligned} \|S_\lambda g\|_2^2 &= \int_0^1 |(S_\lambda g)(x)|^2 dx \leq \left( \sup_{x \in [0,1]} |(S_\lambda g)(x)|^2 \right) \leq \left( \sup_{x \in [0,1]} \int_0^x |e^{-i\lambda(x-s)} g(s)|^2 ds \right)^2 \\ &\leq \left[ \sup_{x \in [0,1]} \left( \int_0^x |e^{-i\lambda(x-s)}|^2 ds \right) \right] \left[ \sup_{x \in [0,1]} \int_0^x |g(s)|^2 ds \right] \leq c_\lambda \|g\|_2^2, \end{aligned} \quad (18.9)$$

das heißt  $S_\lambda$  ist für alle Spektralparameter  $\lambda \in \mathbb{C}$  beschränkt. Alternativ hätten wir auch einfach zeigen können, dass  $\lambda \text{id} - T_2$  eine Bijektion ist, um zu zeigen, dass die Resolvente beschränkt ist. Das Spektrum der Resolventen ist also ganz  $\mathbb{C}$ . Heuristisch gesehen folgt dies sofort, da es keine Welle  $e^{-i\lambda x}$  gibt, die die Anfangsbedingung  $\varphi(0) = 0$  je erfüllen könnte.

**BEISPIEL 18.4.** Sei  $\{\psi_n\}_{n=-\infty}^\infty$  eine Basis von  $\mathcal{H}$  und  $\{\alpha_n\}$  eine zweiseitige Folge von Null verschiedenen Zahlen, die gegen Null bei  $\pm\infty$  konvergieren. Sei

$$A := \sum_{n=-\infty}^\infty \alpha_n(\psi_n, \cdot) \psi_{n+1}, \quad (18.10)$$

dann ist

$$B := A^{-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^{-1} (\psi_{n+1}, \cdot) \psi_n \quad (18.11)$$

ein auf

$$\mathcal{D}(B) = \left\{ \eta : \sum_n \alpha_n^{-2} |(\psi_{n+1}, \eta)|^2 < \infty \right\} \quad (18.12)$$

dicht definierter Operator. Da wie oben  $\sigma(A) = \{0\}$  ist, hat man  $(B - \lambda)^{-1} = A(1 - \lambda A)^{-1}$ . Daher ist  $B$  ein abgeschlossener Operator mit Spektrum  $\sigma(B) = \mathbb{C}$ , siehe dazu auch voriges Beispiel. Dies würde die erste Frage mit „Ja“ beantworten.

Die erste Frage kann also nicht in allen Fällen positiv beantwortet werden. Wir werden später sehen, dass, wenn  $A$  ein streng  $m$ -wachsender Spurklasseoperator ist, seine verallgemeinerten Eigenvektoren ganz  $\mathcal{H}$  aufspannen.

Sei also von nun an  $A$  ein kompakter Operator mit von Null verschiedenen Eigenwerten  $\{\lambda_n(A)\}_{n=1}^{N(A)}$ , wobei jeder Eigenwert gemäß seiner algebraischen Multiplizität gezählt wird. Ohne Beschränkung ordnen wir die Eigenwerte so, dass  $|\lambda_{n+1}(A)| \leq |\lambda_n(A)|$  und  $\arg(\lambda_{n+1}(A)) \geq \arg(\lambda_n(A))$ , wenn  $|\lambda_{n+1}(A)| = |\lambda_n(A)|$  ist. Unser erstes Zwischenziel ist es zu zeigen, dass  $\sum_{n=1}^{N(A)} \lambda_n(A)$  absolut konvergiert, wenn  $A \in \mathcal{S}^1$  ist.

LEMMA 18.5. *Sei  $A$  kompakt, dann existiert eine orthonormale Menge  $\{e_n\}_{n=1}^{N(A)}$ , sodass*

$$Ae_n = \lambda_n(A)e_n + \sum_{m=1}^{n-1} \nu_{nm} e_m \quad (18.13)$$

für geeignete  $\nu_{nm}$ . Insbesondere gilt

$$(e_n, Ae_n) = \lambda_n(A). \quad (18.14)$$

BEWEIS. Sei  $P_i$  die Spektralprojektion für den von Null verschiedenen Eigenwert  $\lambda_i(A)$ . Man kann eine Menge algebraisch unabhängiger Vektoren  $\{f_j\}_{j=1}^{N(A)}$  finden, indem man  $A \upharpoonright \text{Ran}(P_i)$  für alle  $i$  als Jordansche Normalform darstellt. Diese erfüllen

$$Af_n = \lambda_n f_n + \beta_n f_{n-1} \quad (18.15)$$

für  $\beta_n \in \{0, 1\}$ . Wendet man nun das Gram-Schmidtsche Verfahren auf die  $f_j$  an, so findet man eine orthonormale Menge  $\{e_n\}_{n=1}^{N(A)}$ , die sich durch die  $f_n$  und entsprechende  $\gamma_{nm} \neq 0$  die Darstellung

$$e_n = \sum_{m=1}^{n-1} \gamma_{nm} f_m \quad (18.16)$$

haben. Die Aussage folgt aus dieser Darstellung und  $Af_n = \lambda_n f_n + \beta_n f_{n-1}$ .  $\square$

BEMERKUNG 18.6. Die Menge  $\{e_n\}_{n=1}^{N(A)}$  heißt *Schur-Basis*, obwohl sie nicht notwendigerweise eine Basis bildet.

Seien nun  $\{\mu_n(A)\}$  die Singulärwerte von  $A$ , das heißt die Eigenwerte von  $|A|$ .

**theorem:3.229**

SATZ 18.7 (Schur–Lalesco–Weyl). Sei  $1 \leq p < \infty$ , dann gilt für einen kompakten Operator  $A$

$$\sum_{n=1}^{N(A)} |\lambda_n(A)|^p \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(A)^p. \quad (18.17)$$

Ist darüberhinaus  $A \in \mathcal{S}^1$ , so ist

$$\sum_{n=1}^{N(A)} |\lambda_n(A)| < \infty \quad (18.18)$$

das heißt die Summe der Eigenwerte konvergiert absolut.

BEWEIS. Wir beginnen mit der kanonischen Zerlegung von  $A$

$$A = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(A) (f_n, \cdot) g_n, \quad (18.19)$$

wo  $\{f_n\}$  und  $\{g_n\}$  orthonormale Mengen sind. Sei  $\{e_n\}_{n=1}^{N(A)}$  eine Schur-Basis von  $A$ . Dann gilt wegen  $(e_n, Ae_n) = \lambda_n(A)$

$$\lambda_m(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_{mn} \mu_n(A), \quad (18.20)$$

wobei

$$\alpha_{mn} = (f_n, e_m)(e_m, g_n). \quad (18.21)$$

Als Nächstes behaupten wir

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_{mn}| \leq 1, \quad (18.22a)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_{mn}| \leq 1. \quad (18.22b)$$

Die zweite Ungleichung folgt aus der Schwarzschen Ungleichung

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} |\alpha_{mn}| \leq \left( \sum_{m \in \mathbb{N}} |(f_n, e_m)|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{m \in \mathbb{N}} |(g_n, e_m)|^2 \right)^{1/2} \leq \|f_n\| \|g_n\| = 1. \quad (18.23)$$

In der letzten Zeile haben wir die Bessel-Ungleichung zusammen mit der Tatsache, dass  $\{e_m\}$  eine orthonormale Menge bildet, verwendet. Die erste Ungleichung zeigt man ähnlich, indem man verwendet, dass  $\{f_n\}$  und  $\{g_n\}$  orthonormale Mengen sind.

Sei nun  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , dann

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^M |\lambda_m(A)|^p &\leq \sum_{m=1}^M |\lambda_m(A)|^{p-1} \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{mn}| |\mu_n(A)| = \sum_{n,m} |\alpha_{nm}|^{1/p} |\alpha_{nm}|^{1/q} \lambda_m^{p-1} |\mu_n| \\
&\leq \left( \sum_{n,m} |\alpha_{nm}| |\mu_n|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{n,m} |\alpha_{nm}| |\lambda_m|^p \right)^{1/q} \\
&\leq \left( \sum_n |\mu_n|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{m=1}^M |\lambda_m|^p \right)^{1/q}
\end{aligned} \tag{18.24}$$

Im vorletzten Schritt haben wir, zusammen mit  $q(p-1) = p$ , die Hölder-Ungleichung verwendet. Im letzten Schritt haben wir die beiden obigen Ungleichungen verwendet. Die Behauptung folgt durch Umstellen der Ungleichung.  $\square$

Dieser Satz besitzt eine Verbesserung.

**SATZ 18.8 (Weyl).** *Sei  $\phi$  eine nicht-negative, monoton wachsende Funktion auf  $[0, \infty)$ , sodass die Abbildung  $t \mapsto \phi(e^t)$  konvex ist. Dann gilt für alle kompakten Operatoren  $A$ , dass*

$$\sum_{n=1}^{N(A)} \phi(|\lambda_n(A)|) \leq \sum_{n=1}^{N(A)} \phi(\mu_n(A)) \tag{18.25}$$

und insbesondere gilt

$$\sum_{n=1}^{N(A)} |\lambda_n(A)|^p \leq \sum_{n=1}^{N(A)} |\mu_n(A)|^p \tag{18.26}$$

für  $p \geq 1$ .

**BEWEIS.** Siehe [\[Simon2005, Satz 1.15\]](#).  $\square$

Bevor wir mit dem Hauptthema fortfahren, bemerken wir noch eine Konsequenz aus dem Schur–Lalesco–Weyl-Satz.

**KOROLLAR 18.9 (Verallgemeinerte Golden–Thompson-Ungleichung).** *Seien  $-A$  und  $-B$  positive, selbstadjungierte Operatoren, sodass  $A + B$  auf  $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$  wesentlich selbstadjungiert ist. Ist  $e^{A/2}e^{B/2} \in \mathcal{S}^p$ , dann ist auch  $e^{A+B} \in \mathcal{S}^p$  und es gilt*

$$\|e^{A+B}\|_p \leq \|e^{A/2}e^{B/2}\|_p. \tag{18.27}$$

**BEWEIS.** Wir zeigen zunächst, dass, wenn  $C$  und  $D$  beschränkte, positive Operatoren mit  $CD \in \mathcal{S}^r$  sind, dann ist auch  $C^{1/2}DC^{1/2} \in \mathcal{S}^r$  mit

$$\|C^{1/2}DC^{1/2}\|_r \leq \|CD\|_r. \tag{18.28}$$

Dazu bemerken wir, dass für alle beschränkten Operatoren  $E, F$  gilt, dass  $\sigma(EF) \setminus \{0\} = \sigma(FE) \setminus \{0\}$  und, dass, wenn  $\lambda \neq 0$  ein Eigenwert von  $EF$  ist,  $\lambda$  auch ein Eigenwert von  $FE$  mit gleicher algebraischer Multiplizität ist.

Da  $CD = C^{1/2}(C^{1/2}D) \in \mathcal{S}^r$  ist, hat der Operator rein diskretes Spektrum abseits der Null, weshalb auch der selbstadjungierte Operator  $C^{1/2}DC^{1/2}$  rein diskretes Spektrum abseits der Null ist, also kompakt ist. Wegen obiger Überlegung

ist auch  $\lambda_n(C^{1/2}DC^{1/2}) = \lambda_n(CD)$ , und, da  $C^{1/2}DC^{1/2}$  selbstadjungiert und positiv ist, ist  $\lambda_n(C^{1/2}DC^{1/2}) = \mu_n(C^{1/2}DC^{1/2})$ . Benutzt man nun  $\sum_{n=1}^{N(A)} |\lambda_n(A)|^p \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(A)^p$ , so erhält man

$$\left\| C^{1/2}DC^{1/2} \right\|_r^r = \sum_n |\lambda_n(CD)|^r \leq \sum_n |\mu_n(CD)|^r = \|CD\|_r^r. \quad (18.29)$$

Als Nächstes behaupten wir, dass  $Q_n := \left( e^{A/2^{n+1}} e^{B/2^n} e^{A/2^{n+1}} \right)^{2^n} \in \mathcal{S}^p$  mit

$$\|Q_n\|_p \leq \left\| e^{A/2} e^B e^{A/2} \right\|_p \quad (18.30)$$

ist. Wir zeigen dies per Induktion. Der Induktionsanfang  $n = 0$  ist klar. Sei nun  $C_n = e^{A/2^n}$  und  $D_n = e^{B/2^n}$ , sowie  $r_n = 2^n p$ . Unter der Voraussetzung  $Q_{n-1} \in \mathcal{S}^p$ , sowie – wegen obiger Überlegung –  $C_n D_n \in \mathcal{S}^{r_n}$ , hat man

$$\|Q_n\|_p = \left\| C_n^{1/2} D_n C_n^{1/2} \right\|_{r_n}^{2^n} \leq \|C_n D_n\|_{r_n}^{2^n} = \|Q_{n-1}\|_p, \quad (18.31)$$

was die Schranke an  $\|Q_n\|_p$  induktiv zeigt.

Mit der Trotterschen Produktformel konvergiert nun  $Q_n \rightarrow e^{A+B}$  stark, weshalb auch  $e^{A+B} \in \mathcal{S}^p$  mit

$$\|e^{A+B}\|_p \leq \limsup \|Q_n\|_p \leq \left\| e^{A/2} e^B e^{A/2} \right\|_p \quad (18.32)$$

ist. □

Um  $\text{tr}(A) = \sum_{j=1}^{N(A)} \lambda_j(A)$  beweisen zu können, werden wir zunächst etwas über die Theorie unendlicher Determinanten lernen müssen. Hierfür werden wir wiederum die Theorie antisymmetrischer Tensorprodukte benötigen.

## 18.2. Antisymmetrische Tensorprodukte und Determinanten.

DEFINITION 18.10. Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum, so definieren wir  $\otimes^n \mathcal{H}$  als den Vektorraum der multilinearen Funktionale auf  $\mathcal{H}$ . Für  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{H}$  definieren wir  $\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \in \otimes^n \mathcal{H}$  durch

$$(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n)(\langle \eta_1, \dots, \eta_n \rangle) = (\varphi_1, \eta_1) \dots (\varphi_n, \eta_n). \quad (18.33)$$

LEMMA 18.11. *Der endliche Span der  $\{\varphi_1, \otimes \dots \otimes \varphi_n\}$  hat ein wohldefiniertes inneres Produkt mit*

$$((\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n), (\eta_1 \otimes \dots \otimes \eta_n)) = (\varphi_1, \eta_1) \dots (\varphi_n, \eta_n) \quad (18.34)$$

und  $\otimes^n \mathcal{H}$  ist die Vervollständigung dieses endlichen Spans in der Topologie die durch dieses innere Produkt erzeugt wird.

DEFINITION 18.12. Sei  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  ein beschränkter Operator, dann definieren wir (die Quantisierung)  $\Gamma_n(A) \in \mathcal{L}(\otimes^n \mathcal{H})$  durch

$$\Gamma_n(A)(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n) := A\varphi_1 \otimes \dots \otimes A\varphi_n. \quad (18.35)$$

LEMMA 18.13.  $\Gamma_n$  ist ein Funktor, das heißt  $\Gamma_n(A)\Gamma_n(B) = \Gamma_n(AB)$ .

DEFINITION 18.14. Sei  $\mathcal{P}_n$  die Gruppe aller Permutationen von  $n$  Buchstaben. Sei  $\epsilon(\cdot)$  die Funktion auf  $\mathcal{P}_n$ , die  $+1$  ( $-1$ ) gibt, wenn die Permutation gerade (ungerade) war.

DEFINITION 18.15. a) Wir definieren  $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \in \otimes^n \mathcal{H}$  durch

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n := \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} \epsilon(\pi) [\varphi_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes \varphi_{\pi(n)}] \quad (18.36)$$

- b)  $\bigwedge^n(\mathcal{H}) \subseteq \otimes^n \mathcal{H}$  sei der Span der  $\{\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n\}$ .  
 c)  $\bigwedge^0(\mathcal{H}) = \mathbb{C}$ .

BEMERKUNG 18.16. Der Faktor  $(n!)^{-1/2}$  dient der Normierung, denn sind  $\varphi_j$  alle auf 1 normiert, so ist auch  $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$  auf 1 normiert.

LEMMA 18.17.

$$(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n, \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_n) = \det((\varphi_i, \eta_j)), \quad (18.37)$$

wobei

$$\det(a_{ij}) := \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} \epsilon(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}. \quad (18.38)$$

LEMMA 18.18. (i) Sei  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , so lässt  $\Gamma_n(A)$  den Raum  $\bigwedge^n(\mathcal{H})$  invariant und die Restriktion von  $\bigwedge^n(\mathcal{H})$  wird mit  $\bigwedge^n(A)$  bezeichnet. Für  $n = 0$  definiert man  $\bigwedge^0(A) = \text{id}_{\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}}$ .

- (ii)  $\bigwedge^n$  ist ein Funktor, das heißt  $\bigwedge^n(A) \bigwedge^n(B) = \bigwedge^n(AB)$  für  $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Dies folgt, da  $\Gamma_n$  ein Funktor ist.

Folgendes Resultat unterstreicht die Verbindung zwischen Determinanten endlichdimensionaler Operatoren und der  $n$ -fachen antisymmetrischen Quantisierung  $\bigwedge_n(\cdot)$ .

LEMMA 18.19. (i) Sei  $\mathcal{H}$  ein  $n$ -dimensionaler Hilbertraum, dann ist der  $\dim \bigwedge^n \mathcal{H} = \binom{n}{n}$ . Insbesondere ist der Raum  $\bigwedge^n \mathcal{H}$  eindimensional.

- (ii) Sei  $\mathcal{H}$  ein  $n$ -dimensionaler Hilbertraum, dann ist  $\bigwedge_n(A)$  die Multiplikation mit der Zahl  $\det(A)$ , der gewöhnlichen Determinante des endlichdimensionalen Operators  $A$ .

- (iii)  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .

BEWEIS. a) Sei  $\{e_j\}_{j=1}^n$  eine Orthonormalbasis von  $\mathcal{H}$ . Wir behaupten zunächst, dass

$$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} : 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\} \quad (18.39)$$

eine Orthonormalbasis für  $\bigwedge^k \mathcal{H}$  ist, was  $\dim \bigwedge^k \mathcal{H} = \binom{n}{k}$  zeigt. Die Menge ist offensichtlich orthonormal, da die  $e_j$  orthonormal sind. Darüberhinaus spannen sie auch  $\bigwedge^k \mathcal{H}$  auf, da die Abbildung  $\langle \varphi_1, \dots, \varphi_k \rangle \mapsto \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k$  multilinear und antisymmetrisch unter Permutationen ist.

- b) Da  $\bigwedge^n \mathcal{H}$  eindimensional ist, muss  $\bigwedge^n(A)$  die Multiplikation mit einer Zahl  $\alpha$  sein, die wir nun bestimmen. Ist wieder  $\{e_j\}_{j=1}^n$  eine Orthonormalbasis von  $\mathcal{H}$ , so ist

$$\alpha = (e_1 \wedge \cdots \wedge e_n, \bigwedge^n(A)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)) = (e_1 \wedge \cdots \wedge e_n, Ae_1 \wedge \cdots \wedge Ae_n) = \det((e_i, Ae_j)). \quad (18.40)$$

- c) Folgt aus b) und  $\bigwedge^n(A) \bigwedge^n(B) = \bigwedge^n(AB)$ . Dies zeigt darüberhinaus die Stärke von alternierenden Algebren beim Studium von Determinanten.  $\square$

Als Nächstes müssen wir eine sinnvolle Definition für  $\det(1 + A)$  finden, wenn  $A \in \mathcal{S}^1$  ist. Wir beginnen mit dem einfachen Fall, dass  $\dim \mathcal{H} = n < \infty$ , sodass  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  und  $\{e_j\}_{j=1}^n$  die Eigenwerte bzw. die Schur-Basis von  $A$  sind. Dann sieht man leicht ein, dass

$$\det(1 + A) = (e_1 \wedge \cdots \wedge e_n, (1 + A)e_1 \wedge \cdots \wedge (1 + A)e_n) = \prod_{j=1}^n (1 + \lambda_j) \quad (18.41)$$

und

$$\operatorname{tr} \left( \bigwedge^k(A) \right) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} ((e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}), (Ae_{i_1} \wedge \cdots \wedge Ae_{i_k})) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}, \quad (18.42)$$

sodass

$$\det(1 + A) = \sum_{j=0}^n \operatorname{tr} \left( \bigwedge^j(A) \right). \quad (18.43)$$

Im Fall  $\dim \mathcal{H} = \infty$ , definieren wir  $\det(1 + A)$  durch den letzten Ausdruck und zeigen, dass dieser auch konvergiert.

LEMMA 18.20. Sei  $\dim \mathcal{H} \leq \infty$ ,  $A \in \mathcal{S}^1$ , dann ist auch  $\bigwedge^k(A)$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und es gilt

$$\operatorname{tr} \left( \left| \bigwedge^k(A) \right| \right) \leq \frac{[\operatorname{tr}(|A|)]^k}{k!} \leq \frac{\|A\|_1^k}{k!}, \quad (18.44a)$$

$$\left\| \bigwedge^k(A) \right\|_1 = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \mu_{i_1}(A) \cdots \mu_{i_k}(A), \quad (18.44b)$$

$$\left\| \bigwedge^k(A) \right\|_1 \leq \frac{\|A\|_1^k}{k!}. \quad (18.44c)$$

BEWEIS. Sei  $A = U|A|$  die Polarzerlegung von  $A$ , dann sieht man leicht, dass  $\bigwedge^k(A) = \bigwedge^k(U) \bigwedge^k(|A|)$  die Polarzerlegung von  $\bigwedge^k(A)$  ist. Insbesondere ist

$$\left| \bigwedge^k(A) \right| = \bigwedge^k(|A|). \quad (18.45)$$

Sei nun  $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren von  $|A|$ , dann ist  $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}\}$  eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren von  $\bigwedge^k(|A|)$ . Daher gilt

$$\operatorname{tr} \left( \left| \bigwedge^k(A) \right| \right) = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \mu_{i_1}(A) \cdots \mu_{i_k}(A) \leq \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k} \mu_{i_1}(A) \cdots \mu_{i_k}(A) = \frac{[\operatorname{tr}(|A|)]^k}{k!}. \quad (18.46)$$

Damit ist auch  $\bigwedge^k(A)$  Spurklasse und die obigen beiden Formeln gelten.  $\square$

DEFINITION 18.21. Sei  $A \in \mathcal{S}^1$ , dann definieren wir

$$\det(1 + A) = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{tr} \left( \bigwedge^k(A) \right). \quad (18.47)$$

LEMMA 18.22. Sei  $A \in \mathcal{S}^1$ , dann konvergiert  $\sum_{k=0}^{\infty} \text{tr}(\bigwedge^k(A))$  und es gelten folgende Aussagen.

- a)  $|\det(1 + A)| \leq \prod_{j=1}^{\infty} (1 + \mu_j(A))$ .  
 b)  $|\det(1 + A)| \leq \exp(\|A\|_1)$ .  
 c) Seien  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}^1$ , dann ist die Abbildung

$$\langle z_1, \dots, z_n \rangle \mapsto \det \left( 1 + \sum_{i=1}^n z_i A_i \right) \quad (18.48)$$

eine ganze Funktion auf  $\mathbb{C}^n$ .

- d) Seien  $A, B \in \mathcal{S}^1$ , dann ist

$$|\det(1 + A) - \det(1 + B)| \leq \|A - B\|_1 \exp(\|A\|_1 + \|B\|_1 + 1) \quad (18.49)$$

BEWEIS. Da  $\text{tr}(\bigwedge^k(A)) \leq \frac{[\text{tr}(A)]^k}{k!}$ , konvergiert  $\sum_{k=0}^{\infty} \text{tr}(\bigwedge^k(A))$  und a) und b) folgen aus dem vorigen Lemma.

Für c) reicht es zu zeigen, dass die Abbildung

$$\langle z_1, \dots, z_n \rangle \mapsto \text{tr} \left( \bigwedge^k (z_1 A_1 + \dots + z_k A_k) \right) \quad (18.50)$$

analytisch ist, da wir Abschätzungen der Form  $\text{tr}(\bigwedge^k(A)) \leq \frac{[\text{tr}(A)]^k}{k!}$  haben, welche gleichmäßig auf Kompakta in  $\mathbb{C}^n$  sind. Die Behauptung ist aber klar, da  $\bigwedge^k(z_1 A_1 + \dots + z_k A_k)$  als  $\mathcal{S}^1$ -wertige Funktion analytisch ist, weshalb auch die Spur als beschränktes, lineares Funktional auf  $\mathcal{S}^1$  dieses Operators analytisch ist.

d) folgt aus b) und c) und dem folgenden Satz.  $\square$

**theorem:3.245**

SATZ 18.23. Sei  $X$  ein komplexer Banachraum und  $F : X \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion mit folgenden zwei Eigenschaften.

- a) Für alle  $x, y \in X$  ist  $\mu \mapsto F(x + \mu y)$  eine ganze Funktion in  $\mu$ .  
 b) Sei  $G$  eine auf  $[0, \infty)$  monoton wachsende Funktion, sodass

$$|F(x)| \leq G(\|x\|) \quad (18.51)$$

für alle  $x \in X$  gilt.

Dann ist

$$|F(x) - F(y)| \leq \|x - y\| G(\|x\| + \|y\| + 1) \quad (18.52)$$

BEWEIS. Wir fixieren  $x, y \in X$  und definieren  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$f(\mu) := F\left(\frac{1}{2}(x + y) + \mu(y - x)\right), \quad (18.53)$$

sodass wegen a)  $f$  eine ganze Funktion ist. Wir bemerken, dass dann

$$|F(x) - F(y)| = \left| f\left(-\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \sup_{-1/2 \leq t \leq 1/2} |f'(t)|. \quad (18.54)$$

Wegen Cauchy's Integralformel ist

$$f'(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\mu-t|=\|x-y\|^{-1}} \frac{f(\mu)}{(\mu-t)^2} d\mu, \quad (18.55)$$

sodass

$$\sup_{|t| \leq 1/2} |f'(t)| \leq \|x - y\| \sup_{|\mu| \leq 1/2 + \|x - y\|^{-1}} |f(\mu)|. \quad (18.56)$$

Für  $|\mu| \leq \frac{1}{2} + \|x - y\|^{-1}$  haben wir, dass

$$\left\| \frac{1}{2}(x + y) + \mu(y - x) \right\| \leq \|x\| + \|y\| + 1 \quad (18.57)$$

und für solche  $\mu$ , dass

$$|f(\mu)| \leq G(\|x\| + \|y\| + 1) \quad (18.58)$$

wegen b). Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

Wir kommen nun zur Behauptung zurück, dass  $\operatorname{tr}(A) = \sum_n \lambda_n(A)$  für  $A \in \mathcal{S}^1$ . Die Idee dies zu zeigen ist die Folgende: angenommen, wir könnten zeigen, dass  $\det(1 + zA)$  die konvergente Entwicklung  $\prod_{j=1}^{N(A)} (1 + z\lambda_j(A))$  hat. Dann liefert der in  $z$  lineare Term dieser Entwicklung gerade  $\sum_{j=1}^{N(A)} \lambda_j(A)$ , wohingegen der lineare Term in  $\det(1 + zA)$  per Definition ja gerade  $\operatorname{tr}(A)$  ist. Bevor wir also  $\det(1 + zA)$  untersuchen, beweisen wir folgende Eigenschaften dieses Ausdrucks für den Spezialfall  $z = 1$ .

**theorem:3.246**

SATZ 18.24. Seien  $A, B \in \mathcal{S}^1$ , dann gilt:

- (i)  $\det(1 + A)\det(1 + B) = \det(1 + A + B + AB)$ .
- (ii)  $(1 + A)$  ist genau dann invertierbar, wenn  $\det(1 + A) \neq 0$ .
- (iii) Sei  $-\mu^{-1}$  ein Eigenwert von  $A$ . Dann hat  $\det(1 + zA)$  bei  $z = \mu$  eine  $n$ -fache Nullstelle, wobei  $n$  die algebraische Multiplizität des Eigenwerts  $-\mu^{-1}$  ist.
- (iv) Für jedes  $\epsilon$  gibt es  $c_{\epsilon, A}$ , sodass

$$|\det(1 + zA)| \leq c_{\epsilon, A} \exp(\epsilon |z|). \quad (18.59)$$

BEWEIS. (i) Da die Operatoren endlichen Ranges in  $\mathcal{S}^1$  dicht sind und  $\operatorname{tr}(1 + \cdot)$  bezüglich der  $\mathcal{S}^1$ -Norm stetig ist, müssen wir die Aussage lediglich für Operatoren  $A$  und  $B$  endlichen Ranges zeigen. Sei dazu  $V$  der Span aus  $\operatorname{Ker}(A)^\perp$ ,  $\operatorname{Ker}(B)^\perp$ ,  $\operatorname{Ran}(A)$  und  $\operatorname{Ran}(B)$ . Dann ist  $V$  endlichdimensional, invariant unter  $A$ ,  $B$ ,  $A^*$  und  $B^*$ , und  $A$  und  $B$  sind auf  $V$  Null.  $A$  und  $B$  lassen somit  $V$  und  $V^\perp$  invariant. Definieren wir  $\tilde{A} := A \upharpoonright V$  und  $\tilde{B} := B \upharpoonright V$ , so ist  $\operatorname{tr}(\bigwedge^k(A)) = \operatorname{tr}(\bigwedge^k(\tilde{A}))$ , usw. Daher ist

$$\det(1 + A) = \det_V(1 + \tilde{A}) \quad (18.60)$$

und analog für  $B$  und  $A + B + AB$ , wobei  $\det_V$  die Determinante auf  $V$  ist. Die Aussage folgt dann aus dem Resultat in endlich vielen Dimensionen  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ .

- (ii) Ist  $1 + A$  invertierbar, so ist  $(1 + A)^{-1} = 1 + B$ , wobei  $B = -A(1 + A)^{-1} \in \mathcal{S}^1$ . Daher gilt nach Teil (i), dass

$$\det(1 + A)\det(1 + B) = \det(1) = 1, \quad (18.61)$$

das heißt  $\det(1 + A) \neq 0$ . Ist  $1 + A$  nicht invertierbar, so ist  $-1$  ein Eigenwert von  $A$ , weshalb wegen (iii) gilt, dass  $\det(1 + A) = 0$ .

(iii) Sei  $P$  die Spektralprojektion auf  $-\mu^{-1}$ ,  $B = AP$  und  $C = A(1 - P)$ . Dann ist

$$1 + zA = (1 + zB)(1 + zC) \quad (18.62)$$

und damit  $\det(1 + zA) = \det(1 + zB) \det(1 + zC)$ . Da  $1 + zC$  für  $z$  nahe  $-\mu^{-1}$  invertierbar ist, genügt es zu zeigen, dass  $\det(1 + zB)$  eine Nullstelle  $n$ -ter Ordnung bei  $-\mu^{-1}$  hat. Durch Erweiterung einer Schurbasis von  $B$  zu einer Basis für  $\mathcal{H}$  findet man eine Orthonormalbasis mit

$$Be_i = \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} e_j \quad (18.63)$$

mit  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = -\mu^{-1}$  und  $\lambda_{n+1} = \dots = 0$ . Hier haben wir nur verwendet, dass  $\text{Ran}(B) \subseteq P = \text{Span}$  der Schur-Basis. Es folgt dann leicht, dass  $\text{tr}(\wedge^k(B)) = (-\mu^{-1})^k \binom{n}{k}$  für  $k \leq n$  und  $\text{tr}(\wedge^k(B)) = 0$  für  $k > n$ . Daher ist  $\det(1 + zB) = (1 - z\mu^{-1})^n$  und man hat eine Nullstelle  $n$ -ter Ordnung bei  $z = \mu$ .

(iv) Seien  $\mu_n(A)$  die Singulärwerte von  $A$ . Dann wählen wir  $N$  so, dass

$$\sum_{n>N} \mu_n(A) < \frac{\epsilon}{2}. \quad (18.64)$$

Dann gilt wegen  $|\det(1 + A)| \leq \prod_{j=1}^{\infty} (1 + \mu_j(A))$ , dass

$$|\det(1 + zA)| \leq \prod_{j=1}^{\infty} (1 + |z| \mu_j(A)) \leq \prod_{j=1}^N (1 + |z| \mu_j(A)) \exp\left(\frac{\epsilon}{2} |z|\right), \quad (18.65)$$

da  $1 + x \leq e^x$  für  $x \geq 0$ . Da  $\prod_{j=1}^N (1 + |z| \mu_j(A))$  ein Polynom ist, gibt es  $c_\epsilon > 0$ , sodass

$$\prod_{j=1}^N (1 + |z| \mu_j(A)) \leq c_\epsilon \exp\left(\frac{\epsilon}{2} |z|\right). \quad (18.66)$$

□

Das nächste Resultat zeigt, dass die Intuition für  $\det(1 + A)$  von Matrizen auch für nicht-selbstadjungierte, kompakte Operatoren richtig ist.

**theorem:3.247**

SATZ 18.25. Sei  $A \in \mathcal{S}^1$ , dann ist

$$\det(1 + A) = \prod_{j=1}^{N(A)} (1 + \lambda_j(A)), \quad (18.67)$$

wobei  $\{\lambda_j(A)\}_{j=1}^{N(A)}$  die Eigenwerte von  $A$ , gezählt mit ihrer algebraischen Multiplizität sind.

BEWEIS. Sei dazu  $f(z) = \det(1 + zA)$  und

$$g(z) = \prod_{j=1}^{N(A)} (1 + z\lambda_j(A)). \quad (18.68)$$

Ist  $N(A) = \infty$ , so konvergiert das Produkt gegen eine analytische Funktion, da

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j(A)| < \infty, \quad (18.69)$$

wegen des Satzes von Schur–Lalesco–Weyl <sup>theorem:3.229</sup> ~~18.7.~~

Wir zeigen nun, dass  $f(z) = g(z)$ . Wegen (ii) und (iii) aus Satz <sup>theorem:3.246</sup> ~~18.24~~ haben  $f$  und  $g$  die gleichen Nullstellen mit gleicher Ordnung, weshalb  $f/g$  eine ganze, nicht-verschwindene, analytische Funktion ist. Daher kann man

$$f = ge^h \quad (18.70)$$

schreiben, wobei  $h$  ganz und  $h(0) = 0$  sein muss. Dies ist aber möglich, da  $f(0) = g(0) = 1$  ist. Wir zeigen nun, dass  $h(z) = 0$  für alle  $|z| < 1$  ist, sodass  $h$  identisch Null ist. Für  $R \geq 2$  und  $|z| < R$  definieren wir

$$h_R(z) = \log(f_R(z)), \quad (18.71a)$$

$$k_R(z) = - \sum_{\{j:|\lambda_j|^{-1}>R\}} \log(1 + z\lambda_j(A)), \quad (18.71b)$$

$$f_R(z) = f(z) / \prod_{\{j:|\lambda_j|^{-1}\leq R\}} (1 + z\lambda_j(A)), \quad (18.71c)$$

wobei  $h_R(0) = k_R(0) = 0$  erfüllen müssen. Wir bemerken weiter, dass  $f_R$  eine ganze Funktion ist. Da  $h = h_R + k_R$  ist, reicht es zu zeigen, dass  $|h_R(z)| \rightarrow 0$  und  $|k_R(z)| \rightarrow 0$  für  $R \rightarrow \infty$  für alle  $z$  mit  $|z| \leq 1$ .

Da  $\log(1+x)$  bei  $x=0$  verschwindet und analytisch in einer Umgebung von  $\{x:|x|\leq\frac{1}{2}\}$  ist, haben wir

$$|\log(1+x)| \leq C|x| \quad (18.72)$$

für ein geeignetes  $C$  und alle  $x$  mit  $|x| \leq \frac{1}{2}$ . Daher konvergiert für  $R \geq 2$

$$|k_R(z)| \leq |z| \sum_{\{j:|\lambda_j(A)|^{-1}>R\}} |\lambda_j(A)| \rightarrow 0 \quad (18.73)$$

für  $R \rightarrow \infty$ , da bereits die Reihe konvergiert.

Als Nächstes betrachten wir die ganze Funktion  $f_R(z)$ . Ist  $|z| = 2R$  und  $|\lambda_j|^{-1} \leq R$ , so ist  $|1+z\lambda_j| \geq 1$ . Daher ist für  $|z| = 2R$ ,  $|f_R(z)| \leq C_\epsilon e^{2\epsilon R}$  wegen (iv) aus Satz <sup>theorem:3.246</sup> ~~18.24~~. Dies ist wegen des Maximum-Absolutwert-Prinzips auch für  $|z| = R$  wahr, weshalb

$$\operatorname{Re}(h_R(z)) \leq \log C_\epsilon + 2\epsilon R \quad (18.74)$$

für  $|z| = R$ . Mit Hilfe des Satzes von Borel und Carathéodory (siehe nächstes Lemma), welches für auf  $\{z:|z|\leq R\}$  analytische Funktionen

$$\max_{|z|\leq r} |f(z)| = \frac{2r}{R-r} \max_{|z|=R} [\operatorname{Re}(f(z))] + \frac{R+r}{R-r} |f(0)| \quad (18.75)$$

besagt, ist wegen  $h_R(0) = 0$

$$\max_{|z|\leq 1} |h_R(z)| \leq \frac{2}{R-1} (\log C_\epsilon + 2\epsilon R). \quad (18.76)$$

Daher gilt für alle  $z$  mit  $|z| \leq 1$

$$\limsup_{R\rightarrow\infty} |h_R(z)| \leq 4\epsilon. \quad (18.77)$$

Da  $\epsilon$  beliebig ist, konvergiert  $\lim_{R\rightarrow\infty} |h_R(z)| = 0$ , was den Satz zeigt.  $\square$

Beim Beweis dieses Resultats haben wir folgenden Fakt aus der Funktionentheorie verwendet, welches einem Auskunft über das Maximum einer komplexwertigen Funktion gibt, wenn man nur ihren Wert bei Null und ihren Realteil kennt.

LEMMA 18.26 (Borel–Carathéodory). *Sei  $f$  analytisch in einer Umgebung von  $|z| \leq R$ . Dann gilt für alle  $r < R$*

$$\max_{|z| \leq r} |f(z)| = \frac{2r}{R-r} \max_{|z|=R} [\operatorname{Re}(f(z))] + \frac{R+r}{R-r} |f(0)|. \quad (18.78)$$

BEWEIS. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $f(0) = 0$  annehmen, denn gilt die Aussage für  $h(z) := f(z) - f(0)$ , so gilt sie offenbar auch für  $f$ . Sei nun  $A := \max_{|z|=R} [\operatorname{Re}(f(z))]$  und  $f \neq 0$ , das heißt  $A > 0$ . Wendet man das Maximum-Absolutwert-Prinzip auf  $e^f$  an, so folgt, dass  $\operatorname{Re}(f(z)) \leq A$  für alle  $|z| \leq R$  ist, womit die Funktion

$$g(z) := \frac{f(z)}{z(2A - f(z))} \quad (18.79)$$

analytisch für  $|z| < R$  ist. Schreibt man  $f = u + iv$ , sieht man, dass für  $|z| = R$

$$|g(z)|^2 = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{u^2 + v^2}{(2A - u)^2 + v^2} \leq \frac{1}{R^2}, \quad (18.80)$$

da  $|u| \leq |2A - u|$  ist. Daher ist  $|g(z)| \leq R^{-1}$  für alle  $z$  mit  $|z| \leq R$  wieder wegen des Maximum-Absolutwert-Prinzips. Da

$$f(z) = \frac{2Azg(z)}{1 + zg(z)} \quad (18.81)$$

ist, sieht man, dass für  $|z| = r$

$$|f(z)| \leq \frac{2Ar/R}{1 - r/R} = \frac{2Ar}{R-r} \quad (18.82)$$

ist. Die Behauptung folgt nach nochmaliger Anwendung des Maximum-Absolutwert-Prinzips.  $\square$

**theorem:3.249**

SATZ 18.27 (Lidskii). *Sei  $A \in \mathcal{S}^1$ , dann ist  $\operatorname{tr}(A) = \sum_{j=1}^{N(A)} \lambda_j(A)$ , wobei  $\lambda_j(A)$  die Eigenwerte von  $A$  sind.*

BEWEIS. Betrachtet man die Taylor-Entwicklung von  $\det(1 + \mu A)$  um  $\mu = 0$ , so sieht man, dass der erste Term der Entwicklung, die  $\det(1 + A) = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{tr}(\wedge^k(A))$  definiert, gerade  $\operatorname{tr}(A)$  ist. Der erste Term von  $\prod_{j=1}^{N(A)} (1 + \mu \lambda_j(A))$  ist aber gerade  $\sum_{j=1}^{N(A)} \lambda_j(A)$ .  $\square$

Mit dieser Theorie über Determinanten, können wir die dritte Frage, sprich, gibt es ganze und explizite Funktionen  $f(\mu)$  und  $g(\mu)$ , sodass sich  $(1 + \mu A)^{-1} = \frac{f(\mu)}{g(\mu)}$  schreiben lässt, wenn  $(1 + \mu A)^{-1}$  eine in  $\mu$  meromorphe Funktion auf  $\mathbb{C}$  ist?

SATZ 18.28. *Sei  $A \in \mathcal{S}^1$ , dann ist die Funktion*

$$F_A(\mu) := [\det(1 + \mu A)](1 + \mu A)^{-1}, \quad (18.83)$$

*die auf  $\{\mu : -\mu^{-1} \notin \sigma(A)\}$  auf ganz  $\mathbb{C}$  erweiterbar, sodass  $F$  eine ganze Funktion ist. Darüberhinaus hat man die Schranken*

$$\|F_A(\mu)\| \leq \exp(|\mu| \|A\|_1) \quad (18.84)$$

und

$$\|F_A(1) - F_B(1)\| \leq \|A - B\|_1 \exp(\|A\|_1 + \|B\|_1 + 1). \quad (18.85)$$

BEWEIS. Bekanntermaßen ist die Funktion  $G(\mu) := (1 + \mu A)^{-1}$  auf  $\{\mu : -\mu^{-1} \notin \sigma(A)\}$  analytisch. Können wir zeigen, dass  $G(\mu)$  bei  $\mu = \mu_0$ , mit  $-\mu_0^{-1} \in \sigma(A)$ , einen Pol  $k$ -ter Ordnung hat, wobei  $k$  kleiner oder gleich der algebraischen Multiplizität von  $-\mu_0^{-1}$  ist, so wird  $\det(1 + \mu A)G(\mu)$  bei  $\mu = \mu_0$  regulär sein, da  $\det(1 + \mu A)$  dort gerade eine Nullstelle der Ordnung der algebraischen Multiplizität von  $-\mu_0^{-1}$  hat. Seien  $P$  die Spektralprojektion bezüglich  $-\mu_0^{-1}$ ,  $B = AP$  und  $C = A - B$ . Dann gilt

$$(1 + \mu A)^{-1} = (1 + \mu B)^{-1}P + (1 + \mu C)^{-1}(1 - P). \quad (18.86)$$

Der zweite Summand auf der rechten Seite ist nicht singular, da  $-\mu_0^{-1} \notin \sigma(C)$ . Da  $B$  ein Operator endlichen Ranges ist, können wir  $1 + \mu B$  mit Hilfe der Theorie endlichdimensionaler Determinanten und Kofaktor-Matrizen explizit invertieren. Dies realisiert  $(1 + \mu B)^{-1}$  als Quotienten, dessen Nenner  $\det(1 + \mu B)$  ein Polynom vom Grade  $d = \dim(P)$  ist. Daher hat  $(1 + \mu B)^{-1}$  einen Pol, der höchstens von der Ordnung  $d$  ist.

Wir müssen nun nur noch die behaupteten Schranken zeigen. Durch ein einfaches Grenzwert-Argument, reicht es die erste Schranke im endlichdimensionalen Fall, wo  $1 + \mu A$  invertierbar ist, zu zeigen. Da  $1 + \mu A = U|1 + \mu A|$  für unitäres  $U$  ist, haben wir

$$\| |(1 + \mu A)^{-1} \det(1 + \mu A)| \| = \| |1 + \mu A|^{-1} \det(|1 + \mu A|) \| . \quad (18.87)$$

Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  die Eigenwerte von  $|1 + \mu A|$  mit  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k$ . Dann ist

$$\| |1 + \mu A|^{-1} \det(|1 + \mu A|) \| = \lambda_k^{-1} \left[ \prod_{i=1}^k \lambda_i \right] = \prod_{i=1}^{k-1} \lambda_i. \quad (18.88)$$

Seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  die Eigenwerte von  $|A|$ . Dann kann man zeigen, dass  $\lambda_i \leq 1 + |\mu| \alpha_i$ . Daher ist

$$\| |(1 + \mu A)^{-1} \det(1 + \mu A)| \| \leq \prod_{i=1}^{k-1} (1 + |\mu| \alpha_i) \leq \prod_{i=1}^{k-1} \exp(|\mu| \alpha_i) \leq \exp(|\mu| \operatorname{tr} |A|), \quad (18.89)$$

was die erste Schranke zeigt. Die Zweite folgt aus der Ersten und Satz [theorem:3.245](#) [\[18.23\]](#), angewandt auf Funktionen  $(\varphi, F_A(1)\psi)$ .  $\square$

Die Schranken  $|\det(1 + A)| \leq \exp(\|A\|_1)$  und  $\|F_A(\mu)\| \leq \exp(|\mu| \|A\|_1)$  erlauben es einem die Fehlerterme, die beim Abschneiden der Entwicklung von  $\det(1 + \mu A)$  und  $(1 + \mu A)^{-1} \det(1 + \mu A)$  entstehen, zu kontrollieren. Wir sind daher an den Taylor-Koeffizienten dieser Entwicklungen interessiert. Wir haben bereits eine Entwicklung von  $\det(1 + \mu A)$  durch  $\bigwedge^k(A)$ . Eine ähnliche Entwicklung gibt es auch für

$$D_\mu(A) := A(1 + \mu A)^{-1} \det(1 + \mu A) \quad (18.90)$$

durch partielle Spuren von  $\bigwedge^k(A)$ .

SATZ 18.29. Wir definieren die partielle Spur  $\text{tr}_{n-1}$  von  $\mathcal{S}^1(\otimes^n \mathcal{H})$  nach  $\mathcal{S}^1(\mathcal{H})$  durch  $\text{tr}(C \text{tr}_{n-1}(A)) = \text{tr}[(C \otimes \text{id} \otimes \cdots \otimes \text{id})A]$  für alle  $C \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Dann gelten folgende Aussagen.

- (i)  $\text{tr}_{n-1}$  ist eine wohldefinierte Kontraktion.
- (ii) Betrachtet man  $\bigwedge^k(A)$  als Abbildung auf  $\otimes^k \mathcal{H}$ , indem man es auf  $(\bigwedge^{\mathcal{H}})^{\perp}$  Null setzt. Dann ist  $D(\mu) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} B_n \mu^n$  mit

$$B_n = (n+1) \text{tr}_n(\bigwedge^{n+1}(A)). \quad (18.91)$$

Diese Entwicklung ist im Wesentlichen eine Abstraktion der Entwicklung von Fredholm in seiner Arbeit über Intergralggleichungen. Wir bemerken, dass  $D_{\mu}(A)$  so definiert ist, dass

$$(1 + \mu A)^{-1} = 1 - \frac{\mu D_{\mu}(A)}{\det(1 + \mu A)}. \quad (18.92)$$

Es ist nicht besonders einfach  $\bigwedge^k(A)$  durch  $A$  auszudrücken, weshalb man lieber die Taylor-Entwicklungen von  $\det(1 + \mu A)$  und  $D_{\mu}(A)$  durch  $A, A^2, \dots$  und ihren Spuren hätte.

LEMMA 18.30. Sei  $A \in \mathcal{S}^1$  fixiert. Dann konvergiert für hinreichend kleines  $|\mu|$  die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \text{tr}((-A)^k)/k$  und man hat

$$\det(1 + \mu A) = \exp \left[ - \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \frac{\text{tr}[(-A)^k]}{k} \right]. \quad (18.93)$$

BEWEIS. Da

$$|\text{tr}[(-A)^k]| \leq \|A^k\|_1 \leq \|A\|_1 \|A\|^{k-1}, \quad (18.94)$$

konvergiert die Reihe für  $|\mu| \|A\| < 1$ . Wegen der Entwicklung der Determinante und Lidskiis Satz 18.25 und 18.27 haben wir für  $|\mu| \max_{1 \leq j \leq N(A)} |\lambda_j(A)| < 1$ , dass

$$\begin{aligned} \log[\det(1 + \mu A)] &= \sum_{j=1}^{N(A)} \log(1 + \mu \lambda_j(A)) = \sum_{j=1}^{N(A)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \mu^k \lambda_j(A)^k / k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \mu^k \left[ \sum_{j=1}^{N(A)} \lambda_j(A)^k \right] / k = - \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \text{tr}[(-A)^k] / k. \end{aligned} \quad (18.95)$$

Hierbei haben wir die für  $|x| < 1$  konvergente Entwicklung von  $\log(1+x)$  verwendet. Die Reihen dürfen wegen der absoluten Summierbarkeit vertauscht werden. Diese wiederum folgt aus  $\sum |\lambda_j(A)| < \infty$  und  $|\mu| \max |\lambda_j(A)| < 1$ .  $\square$

LEMMA 18.31. Sei  $f(z)$  für hinreichend kleine  $z$  analytisch mit

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^{n+1} b_n \frac{z^n}{n} \quad (18.96)$$

und sei

$$g(z) := \exp(f(z)) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{z^m}{m!}. \quad (18.97)$$

Dann ist  $B_0 = 1$  und  $B_m$  ist durch die  $m \times m$ -Determinante

$$B_m = \begin{vmatrix} b_1 & m-1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & b_1 & m-2 & \cdots & \\ b_3 & b_2 & b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m-1} & b_{m-2} & b_{m-3} & \cdots & 1 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_1 \end{vmatrix}. \quad (18.98)$$

gegeben.

BEWEIS. Da  $g'(z) = f'(z)g(z)$ , sind die Reihenentwicklungen durch

$$B_n = \sum_{k=1}^n b_k B_{n-k} (-1)^{k+1} \binom{(n-1)!}{(n-k)!} \quad (18.99)$$

miteinander verbunden. Die Formel für  $B_m$  ist für  $m = 1$  offensichtlich wahr. Ist sie auch für  $B_1, \dots, B_{m-1}$  wahr, so ist die Formel für  $B_n$  gerade die Entwicklung in Minoren in der ersten Spalte. Die Formel für  $B_n$  gilt dann per Induktion.  $\square$

SATZ 18.32 (Plemelj–Smithies Formeln). *Wir definieren  $\alpha_m(A)$  und  $\beta_m(A)$  durch*

$$\det(1 + \mu A) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \frac{\alpha_m(A)}{m!} \quad (18.100a)$$

$$D_\mu(A) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \frac{\beta_m(A)}{m!}. \quad (18.100b)$$

Dann ist  $\alpha_m(A)$  durch die  $m \times m$ -Determinante

$$\alpha_m(A) = \begin{vmatrix} \operatorname{tr}(A) & m-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \operatorname{tr}(A^2) & \operatorname{tr}(A) & m-2 & \cdots & 0 \\ \operatorname{tr}(A^3) & \operatorname{tr}(A^2) & \operatorname{tr}(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \operatorname{tr}(A^m) & \operatorname{tr}(A^{m-1}) & \operatorname{tr}(A^{m-2}) & \cdots & \operatorname{tr}(A) \end{vmatrix} \quad (18.101)$$

und  $\beta_m(A)$  durch die  $(m+1) \times (m+1)$ -Determinante

$$\beta_m(A) = \begin{vmatrix} A & m & 0 & \cdots & 0 \\ A^2 & \operatorname{tr}(A) & m-2 & \cdots & 0 \\ A^3 & \operatorname{tr}(A^2) & \operatorname{tr}(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A^m & \operatorname{tr}(A^{m-1}) & \operatorname{tr}(A^{m-2}) & \cdots & 1 \\ A^{m+1} & \operatorname{tr}(A^m) & \operatorname{tr}(A^{m-1}) & \cdots & \operatorname{tr}(A) \end{vmatrix} \quad (18.102)$$

gegeben. Hierbei ist der Ausdruck für  $\beta_m$  so zu verstehen, dass  $(\varphi, \beta_m(A)\psi)$  durch die numerische Determinante gegeben ist, die man durch Ersetzen von  $A^j$  durch  $(\varphi, A^j\psi)$  auf der rechten Seite erhält.

BEWEIS. Der Ausdruck für  $\alpha_m(A)$  folgt aus den vorigen beiden Lemmata. Für kleine  $\mu$  hat man

$$D_\mu(A) = (A - \mu A^2 + \mu^3 A^2 - \cdots) \det(1 + \mu A) \quad (18.103)$$

mit Hilfe der geometrischen Reihe, angewandt auf  $A(1 + \mu A)^{-1}$ . Daher ist

$$\beta_m(A) = m! \left[ A \frac{\alpha_m(A)}{m!} - A^2 \frac{\alpha_{m-1}(A)}{(m-1)!} + \dots \right]. \quad (18.104)$$

Entwickelt man die rechte Seite von  $\beta_m(A)$  in der Behauptung in Minoren in der ersten Spalte unter Verwendung des Ausdrucks von  $\alpha_m(A)$ , folgert man, dass der Ausdruck für  $\beta_m(A)$  wahr ist.  $\square$

Zum Schluß geben wir noch ein Ergebnis über die Vollständigkeit von verallgemeinerten Eigenvektoren einer speziellen Klasse von Spurklasseoperatoren.

SATZ 18.33. Sei  $A \in \mathcal{S}^1$  streng  $m$ -wachsend, das heißt es gibt ein  $\epsilon > 0$ , sodass

$$\arg[(\varphi, A\varphi)] \leq \frac{\pi}{2} - \epsilon \quad (18.105)$$

für alle  $\varphi \in \mathcal{H}$ . Dann spannen die verallgemeinerten Eigenvektoren von  $A$  den Hilbertraum  $\mathcal{H}$  auf.

BEWEIS. Wir zeigen zuerst, dass die verallgemeinerten Eigenvektoren, die zu von Null verschiedenen Eigenwerten korrespondieren,  $\overline{\text{Ran}(A)}$  aufspannen und dann, dass  $\overline{\text{Ran}(A)} + \text{Ker}(A) = \mathcal{H}$ . Sei  $\mathcal{M}$  der Span der verallgemeinerten Eigenvektoren mit nicht-verschwindenden Eigenwerten. Da  $A$  den Raum  $\mathcal{M}$  invariant lässt, lässt  $A^*$  den Raum  $\mathcal{M}^\perp$  invariant. Sei  $B$  die Einschränkung von  $A^*$  auf  $\mathcal{M}$ . Wir zeigen dann, dass  $B = 0$ , sodass  $\varphi \in \mathcal{M}^\perp$  impliziert, dass  $A^*\varphi = 0$ , was wiederum  $\varphi \in (\text{Ran}(A))^\perp$  impliziert. Dies zeigt dann, dass  $\mathcal{M}^\perp \subseteq (\text{Ran}(A))^\perp$  und daher  $\text{Ran}(A) \subseteq \mathcal{M}$ .

Wir behaupten dazu zuerst  $\sigma(B) = \emptyset$ . Angenommen, es gäbe  $\lambda \neq 0$  mit  $\lambda \in \sigma(B)$ . Als Einschränkung des kompakten Operators  $A^*$  ist auch  $B$  kompakt, weshalb dann  $\lambda$  ein Eigenwert von  $B$  sein muss. Daher gibt es ein  $0 \neq \varphi \in \mathcal{M}^\perp$  mit  $A^*\varphi = \lambda\varphi$ . Daraus folgt, dass  $\varphi \in \text{Ran}(A - \bar{\lambda})^\perp$  und daher  $\bar{\lambda} \in \sigma(A)$ . Sei  $P$  die Spektralprojektion auf  $\bar{\lambda}$ . Dann ist  $\text{Ran}(P) \subseteq \mathcal{M}$  und damit  $\varphi \in (\text{Ran}(P))^\perp$ . Aber da  $\bar{\lambda} \notin \sigma(A \upharpoonright (1 - P)\mathcal{H})$  ist, ist  $\text{Ran}(1 - P) \subseteq \text{Ran}(A - \bar{\lambda})$ , und daher  $\varphi \in \text{Ran}(1 - P)^\perp$ . Da  $\text{Ran}(P) + \text{Ran}(1 - P) = \mathcal{H}$  ist, muss  $\varphi \equiv 0$  sein, das heißt  $B$  kann nur Null im Spektrum haben.

Sei nun  $\varphi \in \mathcal{M}^\perp$  und definiere die vektorwertige, analytische Funktion

$$F(\mu) = (1 - \mu B)^{-1}\varphi = -\mu^{-1}(B - \mu^{-1})^{-1}\varphi. \quad (18.106)$$

Da  $\sigma(B) = \{0\}$ , ist  $F$  auch eine ganze Funktion. Da  $B$  keine von Null verschiedenen Eigenwerte hat, ist  $\det(1 - \mu B)$  nach Satz [18.25](#) und wegen der Schranke [Theorem: 3.247](#)  $\|F_A(\mu)\| \leq \exp(|\mu| \|A\|_1)$  ist

$$\|F(\mu)\| \leq \exp(|\mu| \|B\|_1) \|\varphi\|. \quad (18.107)$$

Da  $B$   $m$ -wachsend ist, wissen wir, dass

$$\|(B - \lambda)^{-1}\| \leq [\text{dist}(\lambda, \{z : |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \epsilon\})]^{-1}. \quad (18.108)$$

Daher ist für  $|\arg \lambda| \geq \frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon}{2}$

$$\|(B - \lambda)^{-1}\varphi\| \leq |\lambda|^{-1} \csc\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \|\varphi\|. \quad (18.109)$$

Es folgt, dass für  $|\arg \mu| \geq \frac{\pi - \epsilon}{2}$

$$\|F(\mu)\| \leq \alpha \quad (18.110)$$

gilt, wobei  $\alpha = \csc(\frac{\epsilon}{2}) \|\varphi\|$ . Wir behaupten nun, dass die letzte Ungleichung für alle  $\mu$  wahr ist. Sei dazu  $\beta = \frac{\pi}{2} [\frac{\pi-\epsilon}{2}]^{-1}$ . Für alle  $C > 0$  ist die Funktion  $F_C(\mu) = F(\mu) \exp(-C\mu^\beta)$  auf der Menge  $D = \{\mu : |\arg\mu| \leq \frac{\pi-\epsilon}{2}\}$  analytisch und geht gleichmäßig für  $|\mu| \rightarrow \infty$  gegen Null wegen  $\beta > 1$ ,  $\beta(\frac{\pi-\epsilon}{2}) < \frac{\pi}{2}$  und  $\|F(\mu)\| \leq \exp(|\mu| \|B\|_1) \|\varphi\|$ . Wegen des Maximum-Absolutwert-Prinzips nimmt  $|F_C(\mu)|$  sein Maximum auf  $\arg\mu = \pm(\frac{\pi-\epsilon}{2})$  an, wo es durch  $\alpha$  beschränkt ist. Daher ist für alle  $C > 0$  und  $\mu \in D$  der Absolutwert  $|F_C(\mu)| \leq \alpha$ . Die Zwischenbehauptung folgt also, wenn man  $C \searrow 0$  gehen lässt. Da  $\|F(\mu)\| \leq \alpha$  gilt, ist  $F(\mu)$  wegen des Satzes von Liouville konstant und insbesondere ist  $F'(0) = B\varphi$  Null. Daher ist  $B = 0$  und wegen des Arguments von oben ist  $\overline{\text{Ran}(A)} \subseteq \mathcal{M}$ .

Sei nun  $\varphi$  beliebig und  $\psi_n = n^{-1}(A+n^{-1})^{-1}\varphi$  so, dass  $\|\psi_n\| \leq \varphi$ , da  $A$  sektoriell ist. Sei  $\psi$  der schwache Grenzwert von  $\psi_n$  für  $n \rightarrow \infty$ . Wir behaupten dann, dass  $A\psi = 0$  und  $\varphi - \psi_n \in \text{Ran}(A)$ . Dies wird zeigen, dass  $\varphi \in \text{Ker}(A) + \overline{\text{Ran}(A)}^w$ , wobei  $\overline{\text{Ran}(A)}^w$  der schwache Abschluß von  $\text{Ran}(A)$  sein soll. Da  $\text{Ran}(A)$  ein Unterraum ist, ist  $\overline{\text{Ran}(A)}^w = \overline{\text{Ran}(A)}$  wegen des Hahn-Banach-Theorems. Der Satz ist also bewiesen, wenn wir  $A\psi = 0$  und  $\varphi - \psi_n \in \text{Ran}(A)$  zeigen können.

Dazu fixieren wir ein beliebiges  $\eta$ . Dann ist

$$\begin{aligned} (\eta, A\psi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\eta, A(A+n^{-1})^{-1}\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\eta, \psi) - \frac{1}{n^2} (\eta, (A+n^{-1})^{-1}\varphi) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(\eta, \varphi - \psi_n)} = 0 \end{aligned} \tag{18.111}$$

da  $\|\psi_n\| \leq 1$ . Dies zeigt  $A\psi = 0$ . Weiterhin ist

$$\varphi - \psi_n = [1 - n^{-1}(A+n^{-1})^{-1}]\varphi = A(A+n^{-1})^{-1}\varphi, \tag{18.112}$$

das heißt  $\varphi - \psi_n \in \text{Ran}(A)$ .  $\square$

Die Methoden dieses Abschnitts können manchmal verwendet werden, um Aussagen über unbeschränkte, nicht-selbstadjungierte Operatoren zu erhalten.

**KOROLLAR 18.34.** *Sei  $A$  der Erzeuger einer holomorphen Kontraktionshalbgruppe und angenommen  $(A+1)^{-1} \in \mathcal{S}^1$ . Dann spannen die verallgemeinerten Eigenvektoren von  $A$  den ganzen Hilbertraum  $\mathcal{H}$  auf.*

**BEWEIS.** Wegen des vorigen Satzes reicht es aus zu zeigen, dass  $(A+1)^{-1}$  streng  $m$ -wachsend ist, da die verallgemeinerten Eigenvektoren von  $A$  die selben wie die von  $(A+1)^{-1}$  sind. Sei dazu  $\eta \in \mathcal{H}$  und sei  $\varphi = (A+1)^{-1}\eta$ . Dann ist

$$(\eta, (A+1)^{-1}\eta) = ((A+1)\varphi, \varphi) = \overline{(\varphi, A\varphi)} + \|\varphi\|^2. \tag{18.113}$$

Daher ist

$$|\arg(\eta, (A+1)^{-1}\eta)| \leq \frac{\pi}{2} - \epsilon, \tag{18.114}$$

wenn

$$|\arg(\varphi, A\varphi)| \leq \frac{\pi}{2} - \epsilon. \tag{18.115}$$

Da  $A$  streng  $m$ -wachsend ist, ist es auch  $(A+1)^{-1}$ .  $\square$

Die expliziten Formeln für  $(1+\mu A)^{-1}$  für  $A \in \mathcal{S}^1$ , entweder in der Plemelj-Smithies- oder in der Fredholm-Form, sind von beschränktem Wert, da nur wenige

Operatoren Spurklasse sind. Typischerweise haben wir es eher mit Schattenklassen-Operatoren mit  $p > 1$  zu tun. Für die Plemelj–Smithies-Form gibt es eine Erweiterung auf solche Operatoren.

**SATZ 18.35** (Plemelj–Smithies Formeln für  $\mathcal{S}^p$ ). *Sei  $A \in \mathcal{S}^p$  mit  $p \leq n$  und definiere*

$$R_n(A) := (1 + A) \exp \left( \sum_{k=1}^{n-1} (-A)^k / k \right) - 1, \quad (18.116)$$

sowie  $\det_n(1 + A) := \det(1 + R_n(A))$  und  $D_n(\mu A) := A(1 + \mu A)^{-1} \det_n(1 + \mu A)$ . Dann gelten folgende Aussagen.

- (i)  $R_n(A) \in \mathcal{S}^1$ .
- (ii)  $1 + A$  ist genau dann invertierbar, wenn  $\det_n(1 + A) \neq 0$ .
- (iii)  $\det_n(1 + A) = \prod_{j=1}^{N(A)} \left[ (1 + \lambda_j(A)) \exp \left( \sum_{k=1}^{n-1} (-\lambda_j(A))^k / k \right) \right]$ .
- (iv) Es gibt Konstanten  $C_n > 0$  und  $\gamma_n$ , sodass

$$\left| \det_n(1 + A) \right| \leq \exp(\gamma_n \|A\|_n^n) \quad (18.117a)$$

$$\|D_n(\mu A)\|_n \leq C_n \exp(\gamma_n \|A\|_n^n \mu^n) \quad (18.117b)$$

- (v) Es gelten analogen Plemelj–Smithies-Formeln für  $\det_n$  und  $D_n$  und ein entsprechendes Vollständigkeitskriterium für die Eigenvektoren der Operatoren in  $\mathcal{S}^n$ .

**BEISPIEL 18.36.** Wir hatten früher gesehen, dass der Schrödinger-Operator  $-\frac{d^2}{dx^2} + \lambda V$  für alle kleinen  $\lambda > 0$  einen negativen Eigenwert hatte, solange  $V$  nicht positiv, glatt, kompakt getragen und nicht Null war. Es stellt sich heraus, dass die hier eingeführten Determinanten nützliche Werkzeuge sind, um die folgenden zwei weiteren Fragen zu beantworten.

- (1) Gilt die Aussage auch, wenn  $V$  nicht fast überall nicht-positiv ist?
- (2) Ist der für kleine  $\lambda$  definierte Eigenwert auch analytisch um  $\lambda = 0$ ?

Wir werden im ganzen Beispiel  $V \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  annehmen.

Mit Hilfe des Birman–Schwinger-Prinzips wissen wir, dass  $E < 0$  genau dann ein Eigenwert von  $-\frac{d^2}{dx^2} + \lambda V$  ist, wenn 1 ein Eigenwert des Birman–Schwinger-Operators  $-\lambda |V|^{1/2} (p^2 - E)^{-1} V^{1/2}$  ist. Sei  $E = -\alpha^2$  mit  $\alpha > 0$ .  $(p^2 - E)^{-1}$  ist ein Integraloperator mit Integralkern  $\frac{\exp(-\alpha|x-y|)}{2\alpha}$ . Wir definieren die Operatoren  $K_\alpha$ ,  $L_\alpha$  und  $M_\alpha$  durch ihre Integralkerne

$$K_\alpha(x, y) = \frac{|V(x)|^{1/2} \exp(-\alpha|x-y|) V^{1/2}(y)}{2\alpha} \quad (18.118a)$$

$$L_\alpha(x, y) = \frac{|V(x)|^{1/2} V(y)^{1/2}}{2\alpha} \quad (18.118b)$$

$$M_\alpha(x, y) = K_\alpha(x, y) - L_\alpha(x, y). \quad (18.118c)$$

Man kann dann zeigen, dass  $M_\alpha$  in  $\alpha$  analytisch und für alle  $\alpha$  Spurklasse ist. Wegen des obigen Arguments ist  $E < 0$  genau dann ein Eigenwert von  $p^2 + \lambda V$ , wenn

$$\det(1 + \lambda K_\alpha) \neq 0 \quad (18.119)$$

für  $\alpha = +\sqrt{|E|}$ . Da  $V$  eine Form-beschränkte Störung von  $p^2$  ist, geht der Eigenwert von  $p^2 + \lambda V$  – falls er existiert – gegen Null, wenn  $\lambda$  gegen Null geht. Da  $M_\alpha$  bei

$\alpha = 0$  stetig ist, ist  $(1 + \lambda M_{\alpha(\lambda)})$  für alle kleinen  $\lambda$  invertierbar, wenn  $\alpha(\lambda)$  die Lösung von  $\det(1 + \lambda K_{\alpha}) \neq 0$  ist. Daher ist

$$\det(1 + \lambda K_{\alpha}) = \det(1 + \lambda M_{\alpha}) \det(1 + \lambda L_{\alpha}(1 + \lambda M_{\alpha})^{-1}). \quad (18.120)$$

Das heißt  $\det(1 + \lambda K_{\alpha}) \neq 0$  ist äquivalent zu

$$\det(1 + \lambda L_{\alpha}(1 + \lambda M_{\alpha})^{-1}) = 0 \quad (18.121)$$

für kleine  $\lambda$ . Dieser Operator ist ein Operator mit Rang Eins. Allgemein gilt für Rang-Eins-Operatoren  $B$ , dass

$$\det(1 + B) = 1 + \operatorname{tr}(B). \quad (18.122)$$

$\det(1 + \lambda L_{\alpha}(1 + \lambda M_{\alpha})^{-1}) = 0$  ist daher äquivalent zu

$$F(\alpha, \lambda) := \alpha + \frac{\lambda}{2} \langle V^{1/2}, (1 + \lambda M_{\alpha})^{-1} |V|^{1/2} \rangle = 0. \quad (18.123)$$

Wir sind nun in der Lage die beiden Fragen zu beantworten.  $F$  ist in beiden Argumenten analytisch nahe  $\langle \alpha, \lambda \rangle = \langle 0, 0 \rangle$ ,  $(\partial F / \partial \alpha)_{\lambda=0} = 1$ ,  $F(0, 0) = 0$ . Wegen des Satzes über implizite, analytische Funktionen hat  $F(\alpha, \lambda) = 0$  genau eine Lösung  $\alpha(\lambda)$  nahe  $\langle \alpha, \lambda \rangle = \langle 0, 0 \rangle$  und diese Lösung ist analytisch in  $\lambda$ . Wir folgern, dass  $p^2 + \lambda V$  genau dann einen Eigenwert für alle kleinen, positiven  $\lambda$  hat, wenn  $\alpha(\lambda) > 0$  für  $\lambda > 0$  und klein. Doch wann ist  $\alpha(\lambda) > 0$ ? Schreibt man die Taylor-Entwicklung der Lösung  $\alpha(\lambda)$  bis zur zweiten Ordnung auf, sieht man, dass

$$\alpha(\lambda) = -\frac{\lambda}{2} \int V(x) dx - \frac{\lambda^2}{4} \int V(x) |x - y| V(y) dx dy + \mathcal{O}(\lambda^3). \quad (18.124)$$

Wir bemerken, dass, wenn der  $\mathcal{O}(\lambda)$ -Term Null ist, der  $\mathcal{O}(\lambda^2)$ -Term automatisch positiv ist, da  $-|x - y|$  (streng) positiv definit ist.

Wir fassen zusammen:

**SATZ 18.37.** *Sei  $V \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  nicht identisch Null. Dann hat  $-\frac{d^2}{dx^2} + \lambda V$  genau dann einen negativen Eigenwert für alle  $\lambda > 0$ , wenn  $\int V(x) dx \leq 0$ . In diesem Fall ist der gefundene Eigenwert analytisch in  $\lambda$  um  $\lambda = 0$ .*

## Schrödingeroperatoren mit komplexen Potentialen

Der folgende Text wird bei Gelegenheit noch ins Deutsche übersetzt.

### 1. Basics

We follow Krejciřik–Siegl <sup>KrejciřikSiegl2015</sup> [KS15].

**1.1. Numerical range.** Despite a usually direct physical interpretation of the the spectrum of a Schrödinger operator, it is not an easily accessible quantity. The objective of this section is to estimate the spectrum in terms of a more accessible quantity.

DEFINITION 1.1. Let  $H : \mathcal{D}(H) \rightarrow \mathcal{H}$  be an operator. The numerical range is defined by

$$\Theta(H) := \{(\psi, H\psi) : \psi \in \mathcal{D}(H), \|\psi\| = 1\}. \quad (1.1)$$

In general,  $\Theta(H)$  is neither open, nor closed, even when  $H$  is a closed operator. It is however always convex. Let

$$\Xi(H) := \mathbb{C} \setminus \overline{\Theta(H)} \quad (1.2)$$

denote the exterior of the numerical range of  $H$ . In view of the convexity of the numerical range,  $\Xi(H)$  is either an open connected set, or a union of two half-planes.

Here is a first estimate for the spectrum  $\sigma(H)$  in terms of  $\Theta(H)$ .

specinnumrange

BEHAUPTUNG 1.2. *Let  $H$  be a closed operator such that each connected component of  $\Xi(H)$  has a nonempty intersection with  $\rho(H)$ . Then*

$$\sigma(H) \subseteq \overline{\Theta(H)} \quad \text{and} \quad \|(H - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{\text{dist}(z, \overline{\Theta(H)})}. \quad (1.3)$$

BEWEIS. See <sup>KrejciřikSiegl2015</sup> [KS15, Proposition 5.2.3]. □

In this regard we recall the following result.

BEHAUPTUNG 1.3. *If  $H : \mathcal{D}(H) \rightarrow \mathcal{H}$  is not closed, then  $\sigma(H) = \mathbb{C}$ .*

BEWEIS. See <sup>KrejciřikSiegl2015</sup> [KS15, Proposition 5.2.1]. □

**1.2. Sectoriality and accretivity.** The extra condition “each connected component of  $\Xi(H)$  has a nonempty intersection with  $\rho(H)$ ” in Proposition 1.2 is of course annoying. However, there is a distinguished class of operators for which we can do better. These are operators for which one can generically ensure that the exterior of the numerical range cannot have two connected component, by employing the convexity of the numerical range.

A fairly wide class of such operators is given by *sectorial* operators  $H$  defined as follows.

DEFINITION 1.4. Let  $H : \mathcal{D}(H) \rightarrow \mathcal{H}$  be an operator. Then  $H$  is called *sectorial* if its numerical range is a subset of a sector, i.e.,

$$\Theta(H) \subseteq S_{\gamma, \theta} := \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z - \gamma)| \leq \theta\} \quad (1.4)$$

eq:defsectorial

for some *vertex*  $\gamma \in \mathbb{R}$  and some *semiangle*  $0 \leq \theta < \pi/2$  of  $H$ .

BEHAUPTUNG 1.5. *Any densely defined sectorial operator  $H : \mathcal{D}(H) \rightarrow \mathcal{H}$  is closable.*

Since the inequality for the semiangle  $\theta$  in the above definition is strict, we see that that the exterior  $\Xi(H)$  of the numerical range is a connected set.

It remains to state an extra property that would ensure the important property that  $\Xi(H) = \mathbb{C} \setminus \overline{\Theta(H)}$  has a nonempty intersection with  $\rho(H)$ , provided  $H$  is sectorial. This is done *ad hoc* by introducing the notion of *m-sectoriality*.

DEFINITION 1.6. An operator  $H : \mathcal{D}(H) \rightarrow \mathcal{H}$  is called *m-sectorial* if it is sectorial and if

$$\rho(H) \cap (\mathbb{C} \setminus S_{\gamma, \theta}) \neq \emptyset. \quad (1.5)$$

eq:defmaximal

or, equivalently (by sectoriality of  $H$ ), if  $\rho(H) \cap \Xi(H) \neq \emptyset$ .

Thus, Proposition [1.2](#) implies the following

specinnumrange2

BEHAUPTUNG 1.7. *Let  $H : \mathcal{D}(H) \rightarrow \mathcal{H}$  be an m-sectorial operator. Then*

$$\sigma(H) \subseteq \overline{\Theta(H)} \quad \text{and} \quad \|(H - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{\text{dist}(z, \overline{\Theta(H)})}. \quad (1.6)$$

In applications it is sometimes needed to allow the extreme situation  $\theta = \pi/2$  for the semiangle of  $H$ . This motivates the following definition.

DEFINITION 1.8. An operator  $H : \mathcal{D}(H) \rightarrow \mathcal{H}$  is called *quasi-accretive* if  $\Theta(H) \subseteq S_{\gamma, \pi/2}$  with some vertex  $\gamma \in \mathbb{R}$ . If  $\Theta(H) \subseteq S_{0, \pi/2}$ , then  $H$  is said to be *accretive*.

We summarize the previous notations in the following. An operator  $H : \mathcal{D}(H) \rightarrow \mathcal{H}$  is called

- *sectorial*, if [\(1.4\)](#) holds with  $\gamma \in \mathbb{R}$  and  $0 \leq \theta < \pi/2$ ,
- *quasi-accretive*, if [\(1.4\)](#) holds with  $\gamma \in \mathbb{R}$  and  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , and
- *accretive*, if [\(1.4\)](#) holds with  $\gamma = 0$  and  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ .

Again, we add the prefix *m-* to accretive, if in addition [\(1.5\)](#) holds. (This is now stronger than  $\rho(H) \cap \Xi(H) \neq \emptyset$ , since  $\Xi(H)$  can have two disjoint components if  $\theta = \pi/2$ ). Obviously,

- $H$  is quasi-m-accretive, if  $H + \gamma$  is m-accretive with some  $\gamma \in \mathbb{R}$  and
- $H$  is m-sectorial, if it is sectorial and quasi-m-accretive.

Moreover, we have

BEHAUPTUNG 1.9. *An operator  $H : \mathcal{D}(H) \rightarrow \mathcal{H}$  is m-accretive if and only if the standard requirements*

- $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) < 0\} \subseteq \rho(H)$ ,
- $\forall z \in \mathbb{C}, \text{Re}(z) < 0, \quad \|(H - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\text{Re}(z)|}$

(1.7)

are satisfied.

The meaning of the m-terminology is that any m-accretive (respectively, m-sectorial) operator is *maximal* in the sense that it has no proper accretive (respectively, sectorial) extension. Furthermore:

BEHAUPTUNG 1.10. *Any m-sectorial operator is automatically closed. If it is additionally m-accretive it is also densely defined.*

BEWEIS. See [\[KrejcirikSieg12015, KS15, Proposition 5.2.1\]](#). □

Quasi-accretive operators play an important role in evolution processes. In fact, by Hille–Yosida’s theorem, we have

BEHAUPTUNG 1.11. *A cloed densely defined operator  $H : \mathcal{D}(H) \rightarrow \mathcal{H}$  is a generator of a  $\gamma$ -contractive semigroup  $T(t)$ , i.e.,  $\|T(t)\| \leq e^{\gamma t}$  for all  $t \geq 0$  if and only if  $H + \gamma$  is m-accretive.*

**1.3. Closed sectorial forms.** Another advantage of m-sectorial operators is that they naturally arise from quadratic forms.

DEFINITION 1.12. Let  $h : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  be a sesquilinear form on  $\mathcal{H}$  with numerical range  $\Theta(h) := \{h(\psi, \psi) : \psi \in \mathcal{D}(h), \|\psi\| = 1\}$ .

- (1) A sesquilinear form is called *sectorial*, whenever  $\theta(h) \subseteq S_{\gamma, \theta}$  for some vertex  $\gamma \in \mathbb{R}$  and a semiangle  $\theta \in [0, \pi/2)$ .
- (2) A sectorial form  $h : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  is called *closed* whenever

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{D}(H) \ni \psi_n \rightarrow \psi \in \mathcal{H} \\ h[\psi_n - \psi_m] \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow [\psi \in \mathcal{D}(h) \wedge h[\psi_n - \psi] \rightarrow 0]. \quad (1.8)$$

The following theorem asserts that densely defined closed sectorial forms give rise to m-sectorial operators.

prefriedrichs

SATZ 1.13 (First representation theorem). *Let  $h : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  be a densely defined closed sectorial form in  $\mathcal{H}$ . Then the operator*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(H) &:= \{\psi \in \mathcal{D}(h) : \exists \eta \in \mathcal{H}, \forall \phi \in \mathcal{D}(h), h(\phi, \psi) = (\phi, \eta)\} \\ H\psi &:= \eta \end{aligned} \quad (1.9)$$

eq:prefriedrichs

*is m-sectorial. In that case we say that  $H$  is associated with  $h$  and that  $\mathcal{D}(h)$  is the form domain of  $H$ .*

For a densely defined closed sectorial form  $h$  and its associated m-sectorial operator  $H$ , one has that the adjoint of  $H$  is given by the operator determined by the same theorem with the adjoint form  $h^*$ . The numerical range  $\Theta(H)$  is a dense subset of  $\Theta(h)$ . Clearly  $\mathcal{D}(H) \subseteq \mathcal{D}(h)$  and  $h(\phi, \psi) = (\phi, H\psi)$  for every  $\phi \in \mathcal{D}(h)$  and  $\psi \in \mathcal{D}(H)$ , and these conditions determine  $H$  uniquely.

Theorem 1.13 asserts that every densely defined closed sectorial form gives rise to an m-sectorial operator. The converse correspondence is also valid. Indeed, if  $H$  is m-sectorial, then the form

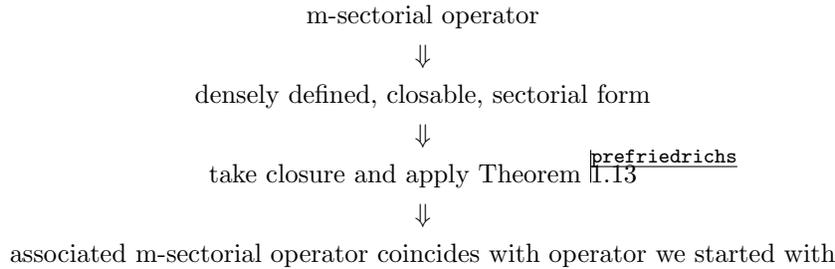
$$\dot{h}[\psi] := (\psi, H\psi), \quad \mathcal{D}(\dot{h}) := \mathcal{D}(H) \quad (1.10)$$

is clearly densely defined and sectorial. The form  $\dot{h}$  is not necessarily closed; however, it is *closable* in the sense that it admits a closed extension. Then  $\dot{h}$  has the

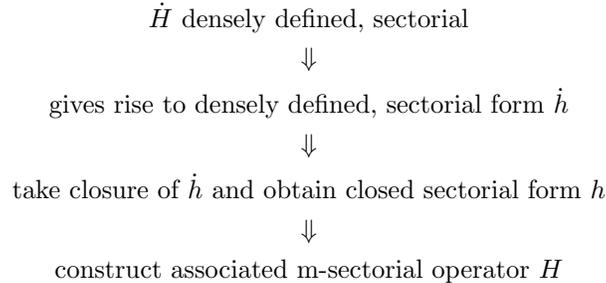
closure  $h$ , i.e., the smallest closed extension defined by

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(h) &:= \left\{ \psi \in \mathcal{H} : \exists \{\psi_n\} \subseteq \mathcal{D}(\dot{h}), \psi_n \rightarrow \psi \wedge \dot{h}[\psi_n - \psi_m] \rightarrow 0 \right\} \\ h[\psi] &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \dot{h}[\psi_n], \end{aligned} \tag{1.11} \quad \boxed{\text{eq:constructform}}$$

and  $H$  coincides with the operator associated with  $h$ . Summing up, there is a one-to-one correspondence between the set of all  $m$ -sectorial operators and the set of all densely defined closed sectorial forms. We can summarize this in the following scheme:



The procedure of constructing a closed form  $h$  from a form  $\dot{h}$  defined by a sectorial operator is not limited to closed operators. Indeed, if  $\dot{H}$  is just a densely defined sectorial operator, we construct a densely defined sectorial form  $\dot{h}$  from it in the same way as in (1.11) with  $\dot{H}$  being replaced by  $\dot{H}$ . Then we take the closure  $h$  of  $\dot{h}$  as earlier and associate to it the  $m$ -sectorial operator  $H$  via Theorem prefriedrichs 1.13. Such a constructed  $H$  is called *Friedrichs extension* of  $\dot{H}$ . We have thus the following scheme:



#### BEMERKUNG 1.14.

- (1) As we saw earlier, any densely defined sectorial operator is closable. But there might be many closed extensions and *the closure*, i.e., the smallest closed extension, *might not be  $m$ -sectorial*. The importance of the Friedrichs extension lies in the fact that it assigns a special  $m$ -sectorial extension to each densely defined sectorial operators.
- (2) The Friedrichs extension is characterized by the properties that,
  - among all  $m$ -sectorial extensions of  $\dot{H}$ , the operator  $H$  has the smallest form domain (i.e.,  $\mathcal{D}(h)$  is contained in the domain of the form associated with any other of the extensions) and
  - $H$  is the only extension of  $\dot{H}$  with  $\mathcal{D}(H) \subseteq \mathcal{D}(h)$ .

stabilityclosednessforms

**SATZ 1.15** (Stability of closedness for forms). *If  $h_0$  is sectorial and closed and  $v$  is a relatively bounded form with respect to  $h_0$  with relative bound  $< 1$ , then  $h_0 + v$  is also sectorial and closed.*

**BEMERKUNG 1.16.** When  $H_0$  is an  $m$ -sectorial operator, then Theorem 1.15 enables one to define operators “ $H_0 + V$ ” even if  $V$  has no operator sense. Indeed, the densely defined closed sectorial form  $h_0$  obtained by the closure of (1.9) is associated to  $H_0$  first. Secondly, by Theorem 1.15 the sum  $h_0 + v$  with a given form (possibly not arising from an operator or even not closable) is a densely defined closed sectorial form, provided that  $v$  is relatively bounded with respect to  $h_0$  with relative bound  $< 1$ . Finally, by Theorem 1.13 there is an  $m$ -sectorial operator associated with  $h_0 + v$  (which is sometimes denoted by “ $H_0 + V$ ”, although this sum may differ from the operator sum).

#### 1.4. Compactness and spectral life without it.

**DEFINITION 1.17.** An operator  $H \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  is called *compact* if for any bounded sequence  $\{\psi_n\} \subseteq \mathcal{H}$  the sequence  $\{H\psi_n\}$  contains a convergent subsequence.

**KOROLLAR 1.18.** *Since every bounded sequence in a Hilbert space contains a weakly converging subsequence, a compact operator  $H$  in  $\mathcal{H}$  maps weakly converging sequences into strongly converging sequences.*

The space of compact operators is denoted by  $\mathcal{S}^\infty(\mathcal{H})$  or simply  $\mathcal{S}^\infty$ . Compact operators  $H$  have, among others, the following properties:

- $\sigma(H) \setminus \{0\} = \sigma_p(H) \setminus \{0\}$ .
- $\sigma_p(H)$  is at most countable and has no accumulation point except possibly 0.
- For all  $\lambda \in \sigma_p(H) \setminus \{0\}$  we have  $\text{ran}(H - \lambda)$  is closed and  $m_a(\lambda) < \infty$ , where  $m_a(\lambda) := \dim(M_\lambda)$  denotes the algebraic multiplicity of  $\lambda$ , i.e., the dimension of the algebraic eigenspace  $M_\lambda := \bigcup_{n=1}^\infty \ker([H - \lambda]^n)$ . (Obviously,  $m_a(\lambda) \geq m_g(\lambda)$  where  $m_g(\lambda) := \dim \ker(H - \lambda)$  denotes the geometric eigenspace of  $\lambda$ , i.e., the dimension of the geometric eigenspace of  $\lambda$ .)
- If  $\dim(\mathcal{H}) = \infty$ , then zero is always in the spectrum of  $H$ , i.e.,  $\sigma(H) = \sigma_p(H) \cup \{0\}$ .

**SATZ 1.19** (Stability of compact resolvent for operators). *Let  $H_0$  be an  $m$ -accretive operator that has a compact resolvent. If  $V$  is relatively bounded with respect to  $H_0$  with relative bound  $< 1$ , then  $H_0 + V$  has compact resolvent as well.*

**BEMERKUNG 1.20.** The assumption on  $m$ -accretivity of  $H_0$  is not necessary; however, then the condition on the relative bound becomes more complicated. Namely, the conclusion of the theorem holds if there exists  $z \in \rho(H_0)$  such that

$$a\|H_0(H_0 - z)^{-1}\| + b\|(H_0 - z)^{-1}\| < 1 \quad (1.12)$$

holds, where  $a$  and  $b$  are the numbers in the estimate  $\|V\psi\| \leq a\|H_0\psi\| + b\|\psi\|$ .

**SATZ 1.21** (Stability of compact resolvent for forms). *Let  $h_0$  be a densely defined, closed, sectorial form with  $\text{Re}(h_0) \geq 0$  and let the associated  $m$ -sectorial operator  $H_0$  have compact resolvent. If  $v$  is a form that is relatively bounded with respect to  $h_0$  with relative bound  $< 1$ , then the operator associated to  $h_0 + v$  has compact resolvent as well.*

For self-adjoint operators, we have the well known disjoint decomposition  $\sigma(H) = \sigma_{\text{disc}}(H) \dot{\cup} \sigma_{\text{ess}}(H)$  where  $\sigma_{\text{disc}}(H)$  contains of isolated eigenvalues of finite geometric multiplicity, and  $\sigma_{\text{ess}}(H)$  is the set of all  $z \in \mathbb{C}$  such that  $H - z$  is not Fredholm. (An operator is called Fredholm if its kernel and cokernel are both finite dimensional. Recall that the dimension of the cokernel coincides with  $\text{codim ran}(H)$ , where the codimension of any subspace  $\mathcal{H}'$  of  $\mathcal{H}$  is defined as the dimension of the quotient space  $\mathcal{H}/\mathcal{H}'$ . If  $\mathcal{H}'$  is closed, then  $\text{codim}(\mathcal{H}') = \dim(\mathcal{H}')$ ; recall that this equality does not extend to nonclosed subspaces, see, e.g., [KS15, Example 5.1].)

For non-self-adjoint operators, there are several possibilities to define the essential spectrum.

DEFINITION 1.22. Let  $H$  be closed with resolvent set

$$\rho(H) = \{z \in \mathbb{C} : \text{ran}(H - \lambda) \text{ is closed} \wedge \ker(H - z) = 0 = \text{codim ran}(H - z)\}. \quad (1.13)$$

For  $k = 0, 1, \dots, 5$  we set

$$\sigma_{\text{ess},k}(H) := \mathbb{C} \setminus \rho_{\text{ess},k}(H), \quad (1.14)$$

where

$$\rho_{\text{ess},0}(H) := \{z \in \mathbb{C} : \text{ran}(H - z) \text{ is closed}\} \quad (\text{Goldberg}) \quad (1.15)$$

$$\rho_{\text{ess},1}(H) := \{z \in \rho_{\text{ess},0}(H) : \dim \ker(H - z) < \infty \vee \text{codim ran}(H - z) < \infty\} \quad (\text{Kato}) \quad (1.16)$$

$$\rho_{\text{ess},2}(H) := \{z \in \rho_{\text{ess},0}(H) : \dim \ker(H - z) < \infty\} \quad (??) \quad (1.17)$$

$$\rho_{\text{ess},3}(H) := \{z \in \rho_{\text{ess},0}(H) : \dim \ker(H - z) < \infty \wedge \text{codim ran}(H - z) < \infty\} \quad (\text{Wolf}) \quad (1.18)$$

$$\rho_{\text{ess},4}(H) := \{z \in \rho_{\text{ess},0}(H) : \dim \ker(H - z) = \text{codim ran}(H - z) < \infty\} \quad (\text{Schechter}) \quad (1.19)$$

$$\rho_{\text{ess},5}(H) := \text{union of all the components of } \rho_{\text{ess},1} \text{ intersecting } \rho(H) \quad (1.20)$$

$$(1.21)$$

Clearly

$$\rho(H) \subseteq \rho_{\text{ess},5}(H) \subseteq \rho_{\text{ess},4}(H) \subseteq \rho_{\text{ess},3}(H) \subseteq \rho_{\text{ess},2}(H) \subseteq \rho_{\text{ess},1}(H) \subseteq \rho_{\text{ess},0}(H), \quad (1.22)$$

i.e.,  $\sigma_{\text{ess},0}(H)$  is the most restrictive, and  $\sigma_{\text{ess},5}(H)$  is the widest (which makes it easy to locate  $\sigma(H) \setminus \sigma_{\text{ess},5}(H)$ ).

DEFINITION 1.23. Let  $H : \mathcal{D}(H) \rightarrow \mathcal{H}$  be closed. Then the discrete spectrum  $\sigma_{\text{disc}}(H) \subseteq \mathbb{C}$  is defined as that open subset of  $\mathbb{C}$  satisfying

$$\lambda \in \sigma_{\text{disc}}(H) :\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \lambda \in \sigma_p(H) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(H - \lambda) \neq \emptyset\} \\ \bullet \lambda \text{ is isolated as a point in the spectrum} \\ \bullet \text{the algebraic multiplicity } m_a(\lambda) \text{ is finite} \\ \bullet \text{ran}(H - \lambda) \text{ is closed} \end{cases} \quad (1.23)$$

BEHAUPTUNG 1.24. Let  $H : \mathcal{D}(H) \rightarrow \mathcal{H}$  be closed. Then  $\sigma(H) \setminus \sigma_{\text{disc}}(H) = \sigma_{\text{ess},5}$ .

BEWEIS. See [KS15, Proposition 5.4.3].  $\square$

Here is a condition when all notions of essential spectrum coincide with each other.

**BEHAUPTUNG 1.25.** *Let  $H : \mathcal{D}(H) \rightarrow \mathcal{H}$  be closed. If each component of  $\rho_{\text{ess},1}(H)$  intersects  $\rho(H)$ , then sets  $\sigma_{\text{ess},k}(H)$  with  $k = 1, \dots, 5$  are identical. In particular, the conclusion holds if  $\rho_{\text{ess},1}(H)$  is connected.*

**BEWEIS.** See [\[KrejcirikSieg12015\]](#) [\[KS15, Proposition 5.4.4\]](#). □

The set  $\sigma_{\text{ess},2}(H)$  can be characterized by conditions similar to those of Weyl in the self-adjoint case.

**SATZ 1.26 (Weyl's criterion).** *Let  $H : \mathcal{D}(H) \rightarrow \mathcal{H}$  be closed and densely defined. Then*

$$\lambda \in \sigma_{\text{ess},k}(H) \Leftrightarrow \exists (\psi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(H) : \begin{cases} \bullet \forall n \in \mathbb{N} : \|\psi_n\| = 1 \\ \bullet \psi_n \rightharpoonup 0 \\ \bullet (H - \lambda)\psi_n \rightarrow 0. \end{cases} \quad (1.24)$$

Such a sequence  $\psi_n$  is called Weyl sequence or singular sequence.

**SATZ 1.27 (Weyl's stability theorem of essential spectrum).** *Let  $H_1, H_2$  be two closed operators in  $\mathcal{H}$  such that*

$$\exists z \in \rho(H_1) \cap \rho(H_2) : (H_1 - z)^{-1} - (H_2 - z)^{-1} \in \mathcal{S}^\infty(\mathcal{H}). \quad (1.25)$$

Then

$$\sigma_{\text{ess},k}(H_1) = \sigma_{\text{ess},k}(H_2), \quad k = 1, \dots, 4. \quad (1.26)$$

## 2. More advanced notions and tools in the quest of eigenvalue estimates for Schrödinger operators with complex potentials

We follow Frank [\[Frank2018E\]](#) [\[Fra18\]](#) and Hansmann–Krejcirik [\[HansmannKrejcirik2020\]](#) [\[?\]](#).

### 2.1. A quantitative version of the analytic Fredholm alternative.

**SATZ 2.1 (Classic analytic Fredholm alternative).** *Let  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  be an open connected set, and  $K(z)$  an analytic family of compact operators for  $z \in \Omega$ . Then the set*

$$\Sigma := \{z \in \Omega : -1 \text{ is an eigenvalue of } K(z)\}$$

*is at most countable and has no accumulation point in  $\Omega$ , unless it coincides with  $\Omega$ .*

In this subsection we estimate the possible accumulation of  $\Sigma$  at  $\partial\Omega$  in the special case  $\Omega = \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$  and under the assumption that  $K(z)$  belongs to some trace ideal.

We begin by reviewing some facts about analytic families of operators. See Gohberg–Goldberg–Kaashoek [\[Gohbergetal1990\]](#) [\[GGK90\]](#) for more details.

defevanalyticfamily

**DEFINITION 2.2.** Let  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  be an open set and let  $W(z)$  for  $z \in \Omega$  be an analytic family of bounded operators. A number  $z_0 \in \Omega$  is called an *eigenvalue of finite type* of  $W$  if

- $\ker(W(z_0)) \neq \{0\}$ ,
- $W(z_0)$  is Fredholm (i.e., both  $\dim \ker(W(z_0))$  and  $\text{codim } \text{ran}(W(z_0))$  are finite), and
- $W(z)$  is invertible for all  $0 < |z - z_0| < \epsilon$  for some  $\epsilon > 0$ .

It follows from [\[Gohbergetal1990\]](#) [\[GGK90, Theorem XI.8.1\]](#) that if  $z_0$  is an eigenvalue of finite type of  $W$ , then there are

- $r \in \mathbb{N}$ ,
- $P_0, \dots, P_r$  mutually disjoint projections with  $P_1, \dots, P_r$  of rank one and  $P_0 = 1 - P_1 - \dots - P_r$ ,
- positive integers  $k_1 \leq \dots \leq k_r$ , and
- analytic families of operators  $E$  and  $G$  which are defined in a neighborhood  $\mathcal{U}$  of  $z_0 \in \Omega$  and which are invertible in  $\mathcal{U}$ ,

such that for all  $z \in \mathcal{U}$ , one has

$$W(z) = E(z) (P_0 + (z - z_0)^{k_1} P_1 + \dots + (z - z_0)^{k_r} P_r) G(z). \quad (2.1)$$

The sum  $k_1 + \dots + k_r$  is called the *algebraic multiplicity* of the eigenvalue  $z_0$ .

SATZ 2.3. [State](#) [\[Frank2018E\]](#) [\[Fra18, Theorem 3.1\]](#).

LEMMA 2.4. [State](#) [\[Frank2018E\]](#) [\[Fra18, Lemma 3.2\]](#).

This lemma reduces the study of eigenvalues to the study of zeroes of analytic functions. A key ingredient is the following result of Borichev–Golinskii–Kupin [\[Borichevetal2009\]](#) [\[BGK09\]](#), which generalizes Blaschke’s theorem about the zeroes of bounded analytic functions to functions which blow up rapidly at the boundary.

BEHAUPTUNG 2.5 ([\[Borichevetal2009\]](#) [\[BGK09\]](#)). *Let  $\alpha, \beta \geq 0$  and let  $g$  be an analytic function in  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  satisfying  $g(0) = 1$ , and*

$$\ln |g(w)| \leq K(1 - |w|)^{-\alpha} |w + 1|^{-\beta}, \quad w \in \mathbb{D}. \quad (2.2)$$

*Let  $w_j \in \mathbb{D}$  be the zeroes, counting multiplicities of  $g$ . Then for any  $\epsilon > 0$ ,*

$$\sum (1 - |w_j|)^{\alpha+1+\epsilon} |w_j + 1|^{(\beta-1+\epsilon)_+} \lesssim_{\alpha, \beta, \epsilon} K. \quad (2.3)$$

*If  $\alpha = 0$ , then*

$$\sum (1 - |w_j|) |w_j + 1|^{(\beta-1+\epsilon)_+} \lesssim_{\beta, \epsilon} K. \quad (2.4)$$

**2.2. Relatively form-compact perturbations of non-negative operators.** The following is a summary of [\[Frank2018E\]](#) [\[Fra18, Proposition 4.1, Lemma B.1, Proposition B.2\]](#).

Let  $H_0$  be a self-adjoint, non-negative operator in a Hilbert space  $\mathcal{H}$  and assume that  $G_0$  and  $G$  are operators from  $\mathcal{H}$  to some Hilbert space  $\mathcal{G}$  such that  $\mathcal{D}(H_0^{1/2}) \subseteq \mathcal{D}(G_0)$  and  $\mathcal{D}(H_0^{1/2}) \subseteq \mathcal{D}(G)$ , and, moreover

$$G_0(H_0 + 1)^{-1/2} \quad \text{and} \quad G(H_0 + 1)^{-1/2} \quad \text{are compact.} \quad (2.5)$$

We emphasize here that  $G$  need not be closable, i.e., in particular,  $G^*$  need not be densely defined.

Recall that for a closed operator  $T$  in a Hilbert space, we recall the notion of resolvent set

$$\rho(T) := \{z \in \mathbb{C} : \text{ran}(T - z) \text{ is closed and } \dim \ker(T - z) = \text{codim ran}(T - z) = 0\}, \quad (2.6)$$

and Kato's definition of the essential resolvent set

$$\rho_{\text{ess}}(T) := \rho_{\text{ess},2}(T) = \{z \in \mathbb{C} : \text{ran}(T - z) \text{ is closed and at least one of} \\ \dim \ker(T - z) \text{ and } \text{codim ran}(T - z) \text{ is finite}\}. \quad (2.7)$$

Thus, "the" essential spectrum is

$$\sigma_{\text{ess}}(T) := \sigma_{\text{ess},2}(T) = \mathbb{C} \setminus \rho_{\text{ess}}(T). \quad (2.8)$$

As we have seen earlier, there are at least five different notions of essential spectrum. Below we see that all of them actually coincide.

**LEMMA 2.6.** *Let  $H, G, G_0$  be as above and suppose the above relative form compactness holds. Then the quadratic form*

$$\|H_0^{1/2}u\|^2 + (Gu, G_0u) \quad (2.9)$$

*with domain  $\mathcal{D}(H_0^{1/2})$  is closed and sectorial and (by Theorem [1.13](#)) generates an  $m$ -sectorial operator  $H$ . This operator obeys*

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = \sigma_{\text{ess}}(H_0) \quad (2.10)$$

and

$$\sigma(H) \setminus \sigma_{\text{ess}}(H) = \{z \in \mathbb{C} : \text{ran}(H - z) \text{ is closed and} \\ 0 < \dim \ker(H - z) = \text{codim ran}(H - z) < \infty\}. \quad (2.11)$$

*The set  $\sigma(H) \setminus \sigma_{\text{ess}}(H)$  is at most countable and consists of eigenvalues of finite algebraic multiplicities, which are isolated in  $\sigma(H)$ .*

### 2.3. Birman–Schwinger principle.

2.3.1. *Frank's form.* Suppose we are in the above situation, i.e., let  $H_0$  be a self-adjoint, non-negative operator in a Hilbert space  $\mathcal{H}$  and assume that  $G_0$  and  $G$  are operators from  $\mathcal{H}$  to some Hilbert space  $\mathcal{G}$  such that  $\mathcal{D}(H_0^{1/2}) \subseteq \mathcal{D}(G_0)$  and  $\mathcal{D}(H_0^{1/2}) \subseteq \mathcal{D}(G)$ , and, moreover

$$G_0(H_0 + 1)^{-1/2} \quad \text{and} \quad G(H_0 + 1)^{-1/2} \quad \text{are compact.} \quad (2.12)$$

Then we saw above that the quadratic form  $\|H_0^{1/2}u\|^2 + (Gu, G_0u)$  is closed and sectorial and generates an  $m$ -sectorial operator  $H$ , which we shall write as  $H = H_0 + G^*G_0$ . However, we emphasize once more that  $G$  need not be closable and so  $G^*$  need not be densely defined.

Under these assumptions we saw  $\sigma_{\text{ess}}(H) = \sigma_{\text{ess}}(H_0)$  and the spectrum of  $H$  outside of  $\sigma_{\text{ess}}(H)$  is discrete and consists of eigenvalues of finite algebraic multiplicities. Our goal now is to characterize these eigenvalues and their multiplicities in terms of the Birman–Schwinger operator

$$K(z) := G_0(H_0 - z)^{-1}G^*, \quad z \in \rho(H_0). \quad (2.13)$$

Under the relative form-compactness assumptions on  $G$  and  $G_0$  we see that  $K(z)$  is a compact operator in  $\mathcal{G}$ . In order to avoid the problem mentioned above concerning the adjoint of  $G$ , strictly speaking, we define  $K(z)$  as

$$K(z) = \left(G_0(H_0 + 1)^{-1/2}\right) \left((H_0 + 1)(H_0 - z)^{-1}\right) \left(G(H_0 + 1)^{-1/2}\right)^*. \quad (2.14)$$

LEMMA 2.7 (Pre-Birman–Schwinger). *Suppose  $H, G, G_0$  are as above and let  $z \in \rho(H_0)$ . Then the operator  $1 + K(z)$  is boundedly invertible if and only if  $z \in \rho(H)$ . In this case*

$$(H - z)^{-1} = (H_0 - z)^{-1} - (H_0 - z)^{-1}G^*(1 + K(z))^{-1}G_0(H_0 - z)^{-1}. \quad (2.15)$$

BEHAUPTUNG 2.8 (Birman–Schwinger). *Suppose  $H, G, G_0$  are as above and let  $z \in \rho(H_0)$ . Then  $z$  is an eigenvalue of  $H$  if and only if it is an eigenvalue of finite type of the analytic family  $1 + K(z)$ . In this case the geometric (resp. algebraic) multiplicity of  $z$  as an eigenvalue of  $H$  coincides with the geometric (resp. algebraic) multiplicity of  $z$  as an eigenvalue of  $1 + K$ .*

We emphasize that by ‘algebraic multiplicity of  $z$  as an eigenvalue of  $1 + K \equiv W$ ’, we refer to the definition below Definition 2.2. This does not necessarily coincide with the algebraic multiplicity of the eigenvalue  $-1$  of  $K(z)$ .

2.3.2. *Hansmann–Krejcirik’s form.* Let  $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$  be two complex Hilbert spaces.

ANNAHME 2.9. Let  $H_0 : \mathcal{D}(H) \rightarrow \mathcal{H}$  be a non-negative operator and  $A : \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  and  $B : \mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  be linear operators such that  $\mathcal{D}(H_0^{1/2}) \subseteq \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ . We assume that for some (and hence all)  $b > 0$

$$A(H_0 + b)^{-1/2} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}') \quad \text{and} \quad A(H_0 + b)^{-1/2} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}'). \quad (2.16)$$

Next set  $G_0 := (H_0 + 1)$  and introduce the Birman–Schwinger operator

$$K(z) := \left[ AG_0^{-1/2} \right] \left[ G_0(H_0 - z)^{-1} \right] \left[ BG_0^{-1/2} \right]^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}'), \quad z \in \rho(H_0). \quad (2.17)$$

Our final assumption is that there is  $\lambda_0 \in \rho(H_0)$  such that

$$-1 \notin \sigma(K(\lambda_0)). \quad (2.18)$$

While the relative boundedness assumptions  $A(H_0 + b)^{-1/2} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$  and  $B(H_0 + b)^{-1/2} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$  are typically easy to check (e.g., by the closed graph theorem together with the assumption  $\mathcal{D}(H_0^{1/2}) \subseteq \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ , whenever  $A$  and  $B$  are closed), verifying  $-1 \notin \sigma(K(\lambda_0))$  is a bit harder.

Sufficient conditions are however:

LEMMA 2.10. *There is  $\lambda_0 \in \rho(H_0)$  such that  $-1 \notin \sigma(K(\lambda_0))$  if at least one of the following conditions is satisfied.*

- *There is  $\lambda_0 \in \rho(H_0)$  such that  $\|K(\lambda_0)\| < 1$ .*
- *there is  $a \in (0, 1)$  and  $\delta > 0$  such that*

$$\| [B(H_0 + \delta)^{-1/2}]^* [A(H_0 + \delta)^{-1/2}] \| \leq a.$$

- *There is  $a \in (0, 1)$  and  $\delta > 0$  such that*

$$|(B\phi, A\psi)| \leq a \|(H_0 + \delta)^{1/2}\phi\| \|(H_0 + \delta)^{1/2}\psi\|, \quad \phi, \psi \in \mathcal{D}(H_0^{1/2}).$$

BEWEIS. See [\[HansmannKrejcirik2020, Lemma 1\]](#). □

As before, Friedrichs’ theorem allows us to construct a closed,  $m$ -sectorial operator  $H$ , denoted by  $H = H_0 + V$  with  $V = B^*A$  by the method of quadratic forms.

SATZ 2.11 (Birman–Schwinger principle). *Suppose Assumption [2.9](#) holds. Then*

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_0) : \quad \lambda \in \sigma_p(H) \Leftrightarrow -1 \in \sigma_p(K(\lambda)). \quad (2.19)$$

Moreover, suitably adapted versions of the Birman–Schwinger principle also hold for

- all eigenvalues  $\sigma_p(H) \setminus \sigma_p(H_0)$
- residual spectrum  $\sigma_r(H) \setminus \sigma_p(H_0)$
- essential spectrum  $\sigma_{\text{ess}}(H) \setminus \sigma(H_0)$  [check which notion Hansmann–Krejcirik use]

BEWEIS. See [\[HansmannKrejcirik2020, Theorems 1 and 6–11\]](#). □

### 3. Some results on complex eigenvalues of Schrödinger operators with complex potentials

#### 3.1. Locating eigenvalues.

3.1.1. *Short-range potentials.* It started with Frank–Laptev–Lieb–Seiringer [\[Franketal2006, FLLS06, Theorem 2\]](#). We state their theorem below.

Afterwards:

SATZ 3.1 (Abramov–Aslanyan–Davies [\[Abramovetal2001, AAD01\]](#) and Frank [\[Frank2011, FraII\]](#)). *Let  $q \in [\max(d/2, 1+), (d+1)/2]$ . Then any eigenvalue  $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$  of  $-\Delta + V$  satisfies*

$$|z|^{1-\frac{d}{2q}} \lesssim \|V\|_q. \tag{3.1}$$

For potentials with symmetries one can often do better. Here is an example for such an improved estimate.

SATZ 3.2 (Frank–Simon [\[FrankSimon2017, FSI17, Theorem 4.1\]](#)). *Let  $\gamma \in (1/2, d/2)$ . Then any eigenvalue  $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$  of  $-\Delta + V$  satisfies*

$$|z|^\gamma \lesssim \int_0^\infty dr r^{d-1} \sup_{\omega \in \mathbb{S}^{d-1}} |V(r\omega)|^{\gamma+d/2} \tag{3.2}$$

Frank’s observation [\[Frank2011, FraII\]](#) built on that of Safronov [\[Safronov2010, SafI0\]](#) who observed that tools in scattering theory are helpful.

SATZ 3.3 ([\[Safronov2010, SafI0\]](#)). *Suppose there is  $L > 0$  such that*

$$|V(x)| \leq \frac{L}{(1+|x|^2)^{p/2}}, \quad 1 < p < 2, \tag{3.3}$$

*i.e., Coulomb is of course not covered, then any eigenvalue  $\lambda$  of  $-\Delta + V$  satisfies one of the conditions*

- (1)  $|\lambda| \leq 1$
- (2)  $1 \leq CL \left( |\lambda|^{\alpha-1/2} + \frac{1+|\lambda|^\alpha}{|\lambda|-1} \right)$  where  $\alpha = (p-1)/2$ .

What’s happening for  $q > (d+1)/2$  and general  $V \in L^q$ ? The answer has been recently given by Bögli–Cuenin [\[BogliCuenin2021, ?\]](#). Before we come to their result we recall that *outside conical sectors*, generally better, i.e., elliptic, estimates are available. These are the following.

SATZ 3.4 (Frank–Laptev–Lieb–Seiringer [\[Franketal2006, FLLS06, Theorem 2\]](#)). *Let  $\gamma \geq 1/2$  if  $d = 1$ ,  $\gamma > 0$  if  $d = 2$  and  $\gamma \geq 0$  if  $d \geq 3$ .*

eq:complexevelliptic1

(1) Any eigenvalue  $z_j$  with non-positive real part satisfies

$$(-\operatorname{Re} z_j)^\gamma \lesssim_{\gamma,d} \int_{\mathbb{R}^d} (\operatorname{Re}(V(x)))_-^{\gamma+d/2} \quad \text{and} \quad (3.4a)$$

$$|\lambda_j|^\gamma \lesssim_{\gamma,d} \int_{\mathbb{R}^d} |V|^{\gamma+d/2}. \quad (3.4b)$$

(2) Any eigenvalue  $z_j$  with non-negative real part satisfies

$$|z_j|^\gamma \lesssim_{\gamma,d} \left(1 + \frac{2 \operatorname{Re}(z_j)}{|\operatorname{Im}(\lambda_j)|}\right)^{\gamma+d/2} \int_{\mathbb{R}^d} |V(x)|^{\gamma+d/2}. \quad (3.5)$$

eq:complexevelliptic2

BEWEIS. Let  $\psi$  be an eigenfunction corresponding to an eigenvalue  $z$ . Considering real and imaginary parts of the eigenvalue equation

$$\int (|\nabla \psi|^2 + V|\psi|^2) = z \int |\psi|^2 \quad (3.6)$$

one finds for any  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int (|\nabla \psi|^2 + \operatorname{Re}(V)|\psi|^2 + \alpha \operatorname{Im}(V)|\psi|^2) = (\operatorname{Re}(z) + \alpha \operatorname{Im}(z)) \int |\psi|^2 \quad (3.7)$$

which is an eigenvalue equation with the real-valued potential  $\operatorname{Re}(V) + \alpha \operatorname{Im}(V)$ . Thus, the variational principle implies

$$\inf \operatorname{spec}(-\Delta + \operatorname{Re}(V) + \alpha \operatorname{Im}(V)) \leq \operatorname{Re}(z) + \alpha \operatorname{Im}(z). \quad (3.8)$$

The estimates (3.4) for eigenvalues with non-positive real part follow now with the choices  $\alpha = 0$  and  $\alpha = -\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(z))$ , respectively, from the Keller–Lieb–Thirring inequality

$$(\inf \operatorname{spec}(-\Delta + W))_-^\gamma \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} W(x)_-^{\gamma+d/2}, \quad (3.9)$$

whenever  $W$  is a real-valued potential, which we take as  $W = \operatorname{Re}(V) + \alpha \operatorname{Im}(V)$ .

Similarly, the estimate (3.5) for eigenvalues with non-negative real part follow from taking  $\alpha = (-\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(z))) \cdot (1 + \frac{2 \operatorname{Re}(z)}{|\operatorname{Im}(z)|})$ .  $\square$

Moreover, Laptev–Safronov [LaptevSafronov2009] proved the following estimate for the imaginary part of eigenvalues.

SATZ 3.5 ([LaptevSafronov2009] [LS09, Theorem 5]). Let  $q \geq d/2$  and  $V \in L^q$ . Then any eigenvalue  $z \in \mathbb{C}$  of  $-\Delta + V$  with  $\operatorname{Re}(z) > 0$  satisfies

$$|\operatorname{Im}(\lambda)|^{q-1} |\lambda|^{1-\frac{d}{2}} \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} |V|^q. \quad (3.10)$$

### 3.1.2. Slowly decaying potentials.

SATZ 3.6 (Davies–Nath [DaviesNath2002] [DN02] and Cuenin [Cuenin2020I] [Cue20]). Let  $q \in [\max(d/2, 1+), (d+1)/2]$ . Then any eigenvalue  $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$  of  $-\Delta + V$  satisfies

$$|z|^{q-d/2} \lesssim_{d,q} \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} dx |V(x)|^q \exp(-\operatorname{Im}(\sqrt{z})|x-y|), \quad (3.11)$$

eq:cueninlowdecay

3.1.3. *Long-range potentials.* Frank [\[Frank2018E\]](#), Cuenin [\[Cuenin2020I\]](#), Bögli–Cuenin [\[BogliCuenin2021\]](#), [\[?\]](#).

SATZ 3.7 (Frank [\[Frank2018E\]](#), Theorem 1.1). *Let  $\gamma \geq 1/2$ . Then any eigenvalue  $z \in \mathbb{C}$  of  $-\Delta + V$  satisfies*

$$\delta(z)^{\gamma-1/2} |z|^{1/2} \lesssim_{\gamma,d} \int_{\mathbb{R}^d} |V|^{\gamma+d/2}. \quad (3.12)$$

eq:franklongrange

where  $\delta(z) := \text{dist}(z, [0, \infty))$ .

BEWEIS. This follows from the Birman–Schwinger principle and complex interpolation between the bounds

$$\|W_1(-\Delta - z)^{-1}W_2\| \leq \delta(z)^{-1} \|W_1\|_{\infty} \|W_2\|_{\infty} \quad (3.13)$$

and the Schatten bound (which of course implies an estimate for the operator norm, but is important when dealing with sums of powers of eigenvalues)

$$\|W_1(-\Delta - z)^{-1}W_2\|_{d+1} \lesssim |z|^{-\frac{1}{d+1}} \|W_1\|_{d+1} \|W_2\|_{d+1}. \quad (3.14)$$

In detail: we argue via duality and suppose  $K$  is an arbitrary finite rank operator on  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . By density it suffices to consider bounded and compactly supported  $W_j$ . We write  $K = U|K|$  with a partial isometry  $U$  and  $W_j = J_j|W_j|$  with  $|J_j| \leq 1$ . For  $\zeta \in \mathbb{C}$  with  $\text{Re}(\zeta) \in [0, 1]$ , define

$$f(\zeta) := \text{Tr } J_1|W_1|^{\zeta/\theta} (-\Delta - z)^{-1} |W_2|^{\zeta/\theta} J_2 U |K|^{\frac{d+1-\zeta}{d+1-\theta}} \quad (3.15)$$

with  $\theta := \frac{d+1}{d+2\gamma}$ . Then  $f$  is a bounded continuous function in  $\{0 \leq \text{Re}(\zeta) \leq 1\}$ , which is analytic in its interior. Moreover, if  $t \in \mathbb{R}$ , then by the trivial operator norm bound

$$|f(it)| \leq \delta(z)^{-1} \text{Tr } |K|^{\frac{d+1}{d+1-\theta}} = \delta(z)^{-1} \|K\|_{(d+1)/(d+1-\theta)}^{(d+1)/(d+1-\theta)}, \quad (3.16)$$

and by the more sophisticated Schatten bound

$$\begin{aligned} |f(1+it)| &\lesssim |z|^{-\frac{1}{d+1}} \| |W_1|^{1/\theta} \|_{d+1} \| |W_2|^{1/\theta} \|_{d+1} \| |K|^{d/(d+1-\theta)} \|_{(d+1)/d} \\ &\lesssim |z|^{-\frac{1}{d+1}} \| |W_1|^{1/\theta} \|_{(d+1)/\theta} \| |W_2|^{1/\theta} \|_{(d+1)/\theta} \| |K|^{d/(d+1-\theta)} \|_{(d+1)/(d+1-\theta)}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Thus, by the three lines lemma

$$|f(\theta)| \lesssim |z|^{-\frac{\theta}{d+1}} \delta(z)^{-1+\theta} \|K\|_{(d+1)/(d+1-\theta)} \| |W_1| \|_{(d+1)/\theta} \| |W_2| \|_{(d+1)/\theta} \quad (3.18)$$

which concludes the proof by duality in Schatten spaces and the definition of  $\theta$ .  $\square$

BEMERKUNGEN 3.8. (1) Using  $|z| \geq |\text{Re } z|$  and the fact that  $\text{dist}(z, [0, \infty)) = |\text{Im}(z)|$  when  $\text{Re}(z) \geq 0$ , one obtains

$$|\text{Im}(z)| \lesssim (\text{Re}(z))^{-\frac{1/2}{\gamma-1/2}} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |V|^{\gamma+d/2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1/2}} \quad (3.19)$$

whenever  $z$  is an eigenvalue with  $\text{Re}(z) \geq 0$ . This bound implies in particular the following qualitative feature: whenever  $z_j$  is a sequence of eigenvalues of  $-\Delta + V$  with  $\text{Re}(z_j) \rightarrow \infty$ , then one must have  $\text{Im}(z_j) \rightarrow 0$ , i.e., the eigenvalues need at some point start to accumulate at the imaginary axis.

(2) Estimate (3.12) is sharp in the sense that there is a sequence  $V_\epsilon$  of potentials such that

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{|1 + i\epsilon|^{1/2} \text{dist}(1 + i\epsilon, [0, \infty))^{\gamma-1/2}}{\|V_\epsilon\|_q^q} > 0 \quad (3.20)$$

whenever  $q \geq (d+1)/2$ , see Bögli–Cuenin [BögliCuenin2021].

Cuenin’s estimate (3.11) implies the stronger bound<sup>1</sup>

$$|z|^{\frac{1}{d+1}} (\text{Im} \sqrt{z})^{d(\frac{2}{d+1} - \frac{1}{q})} \lesssim \|V\|_q, \quad (3.21)$$

whenever  $q \geq (d+1)/2$ , see [Cue20, Corollary 3.1].

3.1.4. *Random potentials.* Safronov considers sums of eigenvalues and proves

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{|\lambda_j| \leq R_0^2} \text{Im}(\sqrt{\lambda}) |\lambda_j|^{(\theta-1)/2} \right] \lesssim_{d,\nu,\theta} |R_0|^{\theta-\nu} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{V}(x)|^p \right)^2 \quad (3.22)$$

whenever  $\text{Im}(\sqrt{\lambda_j}) \geq 0$ ,  $0 < R_0 \leq 1$ ,  $1 < \nu < \theta < 2$ , and  $p = \frac{d}{2} + \frac{d-q}{2(d-2)}$ . This corresponds to  $q < (d+1)/2 + 1/(2d-4)$  in the above “language”. For single eigenvalues this does not contain any further information than what is known in deterministic case.

3.1.5. *Extensions.*

- Mizutani [Miz19]: additional  $|x|^{-2}$  potential
- Lee–Seo [LS19]:  $L^q$ -norm of potential replaced by the Kerman–Saywer norm
- Guillarmou–Hassell–Krupchyk [GHK20]: Schrödinger operators on conical manifolds with non-trapping metrics

**3.2. Summing functions of eigenvalues.** This began with the work [Franketal2006, FLLS06] by Frank–Laptev–Lieb–Seiringer where they dealt with summing complex eigenvalues outside a conical sector.

SATZ 3.9 ([Franketal2006, FLLS06, Theorem 1]). *Let  $d \geq 1$  and  $\gamma \geq 1$ .*

(1) *For eigenvalues  $z_j$  of  $-\Delta + V$  with  $\text{Re}(z_j) \leq 0$ , one has*

$$\sum_{\text{Re}(z_j) < 0} (-\text{Re}(z_j))^\gamma \lesssim_{\gamma,d} \int_{\mathbb{R}^d} (\text{Re}(V(x)))_-^{\gamma+d/2}. \quad (3.23)$$

and

$$\sum_{\text{Re}(z_j) < 0} |z_j|^\gamma \lesssim_{\gamma,d} \int_{\mathbb{R}^d} |V(x)|^{\gamma+d/2}. \quad (3.24)$$

(2) *If  $\kappa > 0$ , then for eigenvalues outside the cone  $\{|\text{Im} z| < \kappa \text{Re} z\}$  (being opened to the right), one has*

$$\sum_{|\text{Im}(z_j)| \geq \kappa \text{Re}(z_j)} |z_j|^\gamma \lesssim_{\gamma,d} \left(1 + \frac{2}{\kappa}\right)^{\gamma+d/2} \int_{\mathbb{R}^d} |V(x)|^{\gamma+d/2} dx. \quad (3.25)$$

<sup>1</sup>See [Cue20, Remark 3.2] why it implies [eq:franklongrange (3.12)].

For eigenvalues inside the cone  $\{|\operatorname{Im}(z)| \leq -\kappa \operatorname{Re}(z)\}$  (being opened to the left), one has

$$\sum_{|\operatorname{Im}(z_j)| \leq -\kappa \operatorname{Re}(z_j)} |z_j|^\gamma \lesssim_{\gamma,d} (1 + \kappa)^{\gamma+d/2} \int_{\mathbb{R}^d} (\operatorname{Re}(V(x)))_-^{\gamma+d/2} dx. \quad (3.26)$$

**3.3. Counting eigenvalues.** See Pavlov <sup>Pavlov1966, Pavlov1967, Pavlov1968</sup> [Pav66, Pav67, Pav68] and Abramov–Aslanyan–Davies <sup>Abramovetal2001</sup> [AAD01] for a simpler proof.

SATZ 3.10 (<sup>Pavlov1966</sup> [Pav66]). Let  $-\Delta + V$  be defined either in  $L^2(\Omega)$  with

- $\Omega = \mathbb{R}_+$  and subject to the boundary condition  $f(0) = 0$  or  $f'(0) = hf(0)$  with  $h \in \mathbb{C}$ , or
- $\Omega = \mathbb{R}^3$ .

(1) Suppose that there is  $\epsilon > 0$  such that

$$\sup_{x \in \Omega} |V(x)|e^{\epsilon|x|^{1/2}} < \infty. \quad (3.27)$$

Then  $-\Delta + V$  in  $L^2(\Omega)$  has only finitely many eigenvalues.

(2) Let  $\Omega = \mathbb{R}_+$ . Then the mere restriction  $\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |V(x)|e^{\epsilon x^\beta} < \infty$  does not guarantee the finiteness of the number of eigenvalues for any  $\beta \in (0, 1/2)$ .

SATZ 3.11 (<sup>Abramovetal2001</sup> [AAD01, Theorem 5]). Suppose the potential satisfies

$$\|V(x)e^{\gamma x}\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} < \infty \quad (3.28)$$

for sufficiently large  $\gamma > 0$ . Then the number of the eigenvalues of  $-\Delta + V$  in  $L^2(\mathbb{R}_+)$  with Dirichlet boundary condition is finite. Moreover, any eigenvalue  $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$  satisfies

$$|z| \leq \frac{9}{4} \|V\|_1^2. \quad (3.29)$$



## Werkzeuge aus der Funktionalanalysis

### 1. Topologien auf beschränkten Operatoren

DEFINITION 1.1. Die durch die Operatornorm  $|||\cdot|||$  induzierte Topologie auf dem Banachraum  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  der beschränkten Operatoren auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  heißt *gleichmäßige Operortopologie* oder *Normtopologie*.

In der Normtopologie ist die Abbildung  $\langle A, B \rangle \mapsto BA$  von  $\mathcal{L}(X, Y) \times \mathcal{L}(Y, Z)$  nach  $\mathcal{L}(X, Z)$  stetig. Wir führen nun zwei neue Topologien auf  $\mathcal{L}(X, Y)$  ein.

DEFINITION 1.2 (Starke Operortopologie). Die *starke Operortopologie* ist die schwächste Topologie auf  $\mathcal{L}(X, Y)$ , sodass die Abbildungen

$$E_x : \mathcal{L}(X, Y) \rightarrow Y \quad (1.1)$$

$$T \mapsto E_x(T) = Tx \quad (1.2)$$

stetig für alle  $x \in X$  sind. Anders ausgedrückt: in dieser Topologie ist  $T_n \xrightarrow{s} T$  genau dann, wenn  $\|T_n x - Tx\| \rightarrow 0$  für alle  $x \in X$ .

DEFINITION 1.3 (Schwache Operortopologie). Die *schwache Operortopologie* ist die schwächste Topologie auf  $\mathcal{L}(X, Y)$ , sodass die Abbildungen

$$E_{x,l} : \mathcal{L}(X, Y) \rightarrow \mathbb{C} \quad (1.3)$$

$$T \mapsto E_{l,x}(T) = l(Tx) \quad (1.4)$$

stetig für alle  $x \in X$  und  $l \in Y^*$  sind. Anders ausgedrückt: in dieser Topologie ist  $T_n \xrightarrow{w} T$  genau dann, wenn  $|l(T_n x) - l(Tx)| \rightarrow 0$  für alle  $x \in X$  und  $l \in Y^*$ . In der Sprache von Matrizen konvergieren hier die Matrixeinträge gegeneinander.

BEMERKUNG 1.4. Die schwache Operortopologie ist schwächer als die starke Operortopologie, welche schwächer als die gleichmäßige Operortopologie ist.

BEISPIEL 1.5. Wir betrachten die beschränkten Operatoren auf  $\ell^2$ .

- a) Sei  $T_n$  durch  $T_n(x_1, x_2, \dots) = (\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n}, \dots)$  definiert. Dann konvergiert  $T_n \rightarrow 0$  gleichmäßig, denn die  $x_j$  müssen beschränkt sein, damit  $(x_1, \dots) \in \ell^2$  ist. Damit ist die Operatornorm durch  $\text{const } n^{-1}$  gegeben und diese konvergiert gegen Null für  $n \rightarrow \infty$ .
- b) Sei  $S_n$  durch  $S_n(x_1, x_2, \dots) = (0, 0, \dots, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$  definiert. Dann konvergiert  $S_n \rightarrow 0$  stark, aber nicht gleichmäßig, denn die Operatornorm ist durch

$$0 < \sup\{x \in \ell^2 : \sum_{j=n+1}^{\infty} |x_j|^2\} < \infty$$

gegeben (für  $\|x\|_{\ell^2} = 1$ ).  $Tx_n$  konvergiert für  $n \rightarrow \infty$  jedoch gegen die Nullfolge, denn  $\sum_{j=n+1}^{\infty} |x_j|^2 \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , da die letzten Glieder der Folge gegen Null konvergieren müssen, damit die Folge quadratsummierbar ist.

- c) Sei  $W_n$  durch  $W_n(x_1, x_2, \dots) = (0, 0, \dots, 0_n, x_1, x_2, \dots)$  definiert. Dann konvergiert  $W_n \rightarrow 0$  schwach, aber weder stark noch gleichmässig, denn  $\|W_n x\| = \|x\| > 0$ . Wegen unten stehendem Satz konvergiert sie daher erst recht nicht gleichmässig. Die Folge konvergiert jedoch schwach, denn für beliebiges  $y \in \ell^2$  ist  $(y, W_n x) = \sum_{j=n+1}^{\infty} \overline{y_j} x_{j-n} \rightarrow 0$ , da  $y_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , damit  $y \in \ell^2$  ist.

SATZ 1.6. Sei  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  der Raum der beschränkten Operatoren auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  und  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  eine Folge beschränkter Operatoren.

- (i) Angenommen  $(T_n x, y)$  konvergiert für alle  $x, y \in \mathcal{H}$ , dann existiert  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , sodass  $T_n \xrightarrow{w} T$ .
- (ii) Angenommen  $T_n x$  konvergiert für alle  $x \in \mathcal{H}$ , dann existiert  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , sodass  $T_n \xrightarrow{s} T$ .

## 2. Konvergenz unbeschränkter Operatoren

Da unbeschränkte Operatoren höchstens dicht definiert sind, ist a priori nicht klar, wie man Konvergenz unbeschränkter Operatoren  $A_n \rightarrow A$  zu verstehen hat, da es sein kann, dass der Schnitt aller Definitionsbereiche  $\mathcal{D}(A_n)$  und  $\mathcal{D}(A)$  leer ist. Es ist daher natürlich zu fordern, dass zwei unbeschränkte Operatoren nahe „beieinander“ sind, wenn bestimmte beschränkte Funktionen dieser Operatoren nahe beieinander sind. Eine solche natürliche Funktion ist die Resolvente.

DEFINITION 2.1 (Konvergenz im Norm-Resolventen-Sinne). Seien  $(A_n : \mathcal{D}(A_n) \rightarrow \mathcal{H})_{n \in \mathbb{N}}$  und  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$  selbstadjungierte Operatoren.

- a) Man sagt, dass  $A_n$  gegen  $A$  im *Norm-Resolventen-Sinne* konvergiert, wenn  $(A_n - \lambda)^{-1} \rightarrow (A - \lambda)^{-1}$  in Norm für alle  $\lambda$  mit  $\text{Im}(\lambda) \neq 0$ .
- b) Man sagt, dass  $A_n$  gegen  $A$  im *starken Resolventen-Sinne* konvergiert, wenn  $(A_n - \lambda)^{-1} \xrightarrow{s} (A - \lambda)^{-1}$  stark für alle  $\lambda$  mit  $\text{Im}(\lambda) \neq 0$ .
- c) Man sagt, dass  $A_n$  gegen  $A$  im *schwachen Resolventen-Sinne* konvergiert, wenn für alle  $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$  und alle  $\lambda$  mit  $\text{Im}(\lambda) \neq 0$  gilt, dass  $((A_n - \lambda)^{-1} \varphi, \psi) \rightarrow ((A - \lambda)^{-1} \varphi, \psi)$ .

LEMMA 2.2. Schwache Resolventen-Konvergenz impliziert starke Resolventen-Konvergenz.

Das folgende Resultat besagt, dass Norm-Resolventen-Konvergenz die richtige Verallgemeinerung von Norm-Konvergenz beschränkter selbstadjungierter Operatoren ist. Analog ist starke Resolventen-Konvergenz die richtige Verallgemeinerung von Norm-Konvergenz. Das Analog für schwache Konvergenz ist jedoch nicht wahr.

SATZ 2.3. Seien  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $A$  gleichmässig beschränkte, selbstadjungierte Operatoren auf  $\mathcal{H}$ . Dann gelten folgende Aussagen.

- (i)  $A_n \rightarrow A$  in Norm-Resolventen-Sinne genau dann, wenn  $A_n \rightarrow A$  in Norm.
- (ii)  $A_n \rightarrow A$  in starken Resolventen-Sinne genau dann, wenn  $A_n \xrightarrow{s} A$  stark konvergiert.
- (iii) Wenn  $A_n \xrightarrow{w} A$  schwach, aber  $A_n \not\xrightarrow{s} A$ , dann konvergiert  $A_n \rightarrow A$  nicht im schwachen Resolventen-Sinne.

BEWEIS. (i) „ $\Leftarrow$ “: Sei  $A_n \rightarrow A$  in Norm. Dann gilt für  $\text{Im}(\lambda) \neq 0$ , dass  $(A_n - A)(A - \lambda)^{-1} \rightarrow 0$  in Norm. Verwendet man, dass

$$(A_n - \lambda)^{-1} = (A - \lambda)^{-1} [\text{id} + (A_n - A)(A - \lambda)^{-1}]^{-1}, \quad (2.1)$$

so folgt, dass  $(A_n - \lambda)^{-1} \rightarrow (A - \lambda)^{-1}$  in Norm, denn

$$\| |(A_n - \lambda)^{-1} - (A - \lambda)^{-1}| \| \leq \| |(A - \lambda)^{-1}| \| \| |\text{id} - [\text{id} + (A_n - A)(A - \lambda)^{-1}]^{-1}| \| \rightarrow 0 \quad (2.2)$$

„ $\Rightarrow$ “: Sei  $A_n \rightarrow A$  im Norm-Resolventen-Sinne. Da

$$A_n - A = (A_n - i) [(A - i)^{-1} - (A_n - i)^{-1}] (A - i) \quad (2.3)$$

und  $\sup \| |A_n| \| < \infty$ , ist

$$\| |A_n - A| \| \leq (\sup \| |A_n| \| + 1) \| |(A - i)^{-1} - (A_n - i)^{-1}| \| (\| |A| \| + 1) \rightarrow 0. \quad (2.4)$$

(ii)

(iii)

□

Der nächste Satz sagt uns, dass wir lediglich die Konvergenz der Resolventen an einem bestimmten Punkt abseits der reellen Achse beweisen müssen, um allgemeine Konvergenz zu bekommen.

**SATZ 2.4.** *Seien  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $A$  selbstadjungierte Operatoren und sei  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  mit  $\text{Im}(\lambda_0) \neq 0$ . Dann gelten folgende Aussagen.*

- (i) *Konvergiert  $\| |(A_n - \lambda_0)^{-1} - (A - \lambda_0)^{-1}| \| \rightarrow 0$ , dann konvergiert  $A_n \rightarrow A$  im Norm-Resolventen-Sinne.*
- (ii) *Konvergiert  $(A_n - \lambda_0)^{-1}\varphi \rightarrow (A - \lambda_0)^{-1}\varphi$  für alle  $\varphi \in \mathcal{H}$ , so konvergiert  $A_n \rightarrow A$  im starken Resolventen-Sinne.*

BEWEIS.

□

Wir werden nun verschiedenen Aspekte der verallgemeinerten Konvergenz untersuchen. Es ist natürlich zu fragen in welchem Verhältnis die Konvergenz der Resolventen zur Konvergenz anderer beschränkter Funktionen der Operatoren steht. Danach werden wir das Spektrum von  $A_n$  mit dem von  $A$  vergleichen, wenn  $A_n \rightarrow A$  in einem verallgemeinerten Sinne. Schließlich geben wir hinreichende Kriterien für die Operatoren  $A_n$  und  $A$ , sodass  $A_n \rightarrow A$  in einem verallgemeinerten Sinne konvergiert.

## 2.1. Konvergenz beschränkter Funktionen von Operatoren.

**theorem:A5**

**SATZ 2.5.** *Seien  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $A$  selbstadjungierte Operatoren. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (i) *Konvergiert  $A_n \rightarrow A$  im Norm-Resolventen-Sinne und ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, die im Unendlichen verschwindet, so konvergiert  $\| |f(A_n) - f(A)| \| \rightarrow 0$ .*
- (ii) *Konvergiert  $A_n \rightarrow A$  im starken Resolventen-Sinne und ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte und stetige Funktion, so konvergiert  $f(A_n)\varphi \rightarrow f(A)\varphi$  für alle  $\varphi \in \mathcal{H}$ .*

BEWEIS.

□

**BEISPIEL 2.6.** • Konvergiert  $A_n \rightarrow A$  im Norm-Resolventen-Sinne, so konvergiert auch  $e^{-tA_n}$  in Norm gegen  $e^{-tA}$  für alle  $t > 0$ .

- Sei  $A_n = (1 - \frac{1}{n})x$  als Operator auf  $L^2(\mathbb{R})$ . Dann konvergiert dieser zwar im Norm-Resolventen-Sinne, aber  $\|e^{iA_n} - e^{iA}\| = 1$  für alle  $n$ . Dies zeigt, dass der erste Teil des Satzes nicht für alle stetigen Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gelten kann.

LEMMA 2.7. Sei  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$  selbstadjungiert und  $\text{Im}(\nu) < 0$ . Dann gilt für die Resolvente

$$(A - \nu)^{-1}\varphi = i \int_0^\infty e^{-it\nu} e^{itA}\varphi dt \quad (2.5)$$

für alle  $\varphi \in \mathcal{H}$ .

BEWEIS. Mit Hilfe des Funktionalkalküls ist für  $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} (\psi, (A - \nu)^{-1}\varphi) &= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\nu - \lambda} d\mu_{\psi, \varphi}(\lambda) = \int_{-\infty}^\infty \left( i \int_0^\infty e^{-it\nu} e^{it\lambda} \right) d\mu_{\psi, \varphi}(\lambda) \\ &= i \int_0^\infty e^{-it\nu} \left( e^{it\lambda} d\mu_{\psi, \varphi}(\lambda) \right) dt = i \int_0^\infty e^{-it\nu} (\psi, e^{itA}\varphi) dt \quad (2.6) \\ &= \left( \psi, i \int_0^\infty e^{-it\nu} e^{itA}\varphi dt \right). \end{aligned}$$

Im dritten Schritt haben wir Fubini verwendet, um die Integrale vertauschen zu dürfen. Dies ist gerechtfertigt, denn  $e^{it(\mu-\lambda)}$  ist bezüglich des Produktmaßes  $dt \otimes d\mu_{\psi, \varphi}(\lambda)$  integrierbar. Das letzte Integral ist als Riemann-Integral zu verstehen.  $\square$

Eine sehr wichtige Anwendung des zweiten Teil des vorigen Satzes ist folgendes Resultat.

SATZ 2.8 (Trotter). Seien  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $A$  selbstadjungierte Operatoren. Dann konvergiert  $A_n \rightarrow A$  im starken Resolventen-Sinne genau dann, wenn  $e^{itA_n} \xrightarrow{s} e^{itA}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

BEWEIS. „ $\Rightarrow$ “: Da  $e^{itx}$  eine beschränkte Funktion ist, folgt diese Richtung aus dem letzten Satz.

„ $\Leftarrow$ “: Mit vorigem Lemma gilt

$$\|(A_n - \mu)^{-1}\varphi - (A - \mu)^{-1}\varphi\| \leq \int_0^\infty e^{\text{Im}(\mu)t} \|e^{itA_n}\varphi - e^{itA}\varphi\| dt. \quad (2.7)$$

Geht also  $e^{itA_n}\varphi \rightarrow e^{itA}\varphi$  in Norm, so konvergiert auch  $(A_n - \mu)^{-1} \xrightarrow{s} (A - \mu)^{-1}$  wegen majorisierter Konvergenz ( $\|e^{itA_n}\varphi - e^{itA}\varphi\| \leq 1$  und  $\text{Im}(\mu) < 0$ ) für  $\text{Im}(\mu) < 0$ . Mit einer analogen Formel für  $\text{Im}(\mu) > 0$  erhält man auch  $(A_n - \mu)^{-1} \xrightarrow{s} (A - \mu)^{-1}$  für  $\text{Im}(\mu) > 0$ .  $\square$

SATZ 2.9. Konvergiert  $A_n \rightarrow A$  im starken Resolventen-Sinne, so konvergiert  $e^{itA_n}\varphi \rightarrow e^{itA}\varphi$  für alle  $\varphi \in \mathcal{H}$  gleichmäßig in  $t \in [t_1, t_2]$  für alle  $t_1 < t_2 \in \mathbb{R}$ .

SATZ 2.10 (Trotter-Kato). Seien  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  selbstadjungierte Operatoren. Angenommen, es existiert  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  mit  $\text{Im}(\lambda_0) > 0$  und  $\mu_0 \in \mathbb{C}$  mit  $\text{Im}(\mu_0) < 0$ , sodass  $(A_n - \lambda_0)^{-1}\varphi$  und  $(A_n - \mu_0)^{-1}\varphi$  für alle  $\varphi \in \mathcal{H}$  konvergieren, wir bezeichnen die Grenzwerte mit  $T_{\lambda_0}$  bzw.  $T_{\mu_0}$ . Sollte  $T_{\lambda_0}$  oder  $T_{\mu_0}$  ein dichtes Bild haben, so gibt es einen selbstadjungierten Operator  $A$ , sodass  $A_n \rightarrow A$  im starken Resolventen-Sinne konvergiert.

BEMERKUNG 2.11. a) Um das Trotter–Kato-Theorem anwenden zu können, benötigen wir die Konvergenz der Resolventen sowohl in der oberen als auch in der unteren Halbebene.

- b) Der Satz ist deshalb so wertvoll, da wir a priori nicht annehmen müssen, dass ein selbstadjungierter Grenzwert  $A$  existiert. Vielmehr gibt es einem die Existenz eines verallgemeinerten Grenzwerts selbstadjungierter Operatoren.

## 2.2. Konvergenz des Spektrums und der Spektralprojektionen.

LEMMA 2.12. *Sei  $S : \mathcal{D}(S) \rightarrow \mathcal{H}$  symmetrisch, dann gilt:*

- a) Für  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  ist  $S - z$  injektiv und stetig invertierbar auf  $\text{Ran}(S - z)$  und

$$\|(S - z)\psi\| \geq |\text{Im}(z)| \|\psi\| \quad (2.8a)$$

$$\| |(S - z)^{-1} \upharpoonright_{\text{Ran}(S - z)} | \| \leq \frac{1}{|\text{Im}(z)|} \quad (2.8b)$$

für alle  $\psi \in \mathcal{D}(S)$ .

- b) Ist  $S$  auch abgeschlossen, so ist auch  $\text{Ran}(S - z)$  für  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  abgeschlossen.

BEWEIS. a) Für  $\psi \in \mathcal{D}(S)$  mit  $\|\psi\| = 1$  ist mit Cauchy–Schwarz

$$\|(S - z)\psi\| \geq |(\psi, (S - z)\psi)| = |(\psi, (S - z)\psi) - (\psi, i\text{Im}(z)\psi)| \geq |\text{Im}(z)|. \quad (2.9)$$

Für  $\varphi \in \text{Ker}(S - z)$  ist also  $\|\vec{0}\| = \|(S - z)\varphi\| \geq |\text{Im}(z)| \|\varphi\|$  und damit  $\varphi = \vec{0}$ , das heißt  $S - z$  ist injektiv. Somit existiert auf  $\text{Ran}(S - z)$  eine Umkehrabbildung  $(S - z)^{-1} : \text{Ran}(S - z) \rightarrow \mathcal{D}(S)$  und für  $\psi \in \mathcal{D}(S)$  ist

$$\begin{aligned} \| |(S - z)^{-1} | \| &= \sup \left\{ \frac{\|(S - z)^{-1}\phi\|}{\|\phi\|} : \phi \in \text{Ran}(S - z), \phi \neq \vec{0} \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{\|(S - z)^{-1}(S - z)\psi\|}{\|(S - z)\psi\|} : \psi \in \mathcal{D}(S), \psi \neq \vec{0} \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{\|\psi\|}{\|(S - z)\psi\|} : \psi \in \mathcal{D}(S), \psi \neq \vec{0} \right\} \leq \frac{1}{|\text{Im}(z)|}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

- b)

□

Wir diskutieren nun die Spektren, sowie die Spektralprojektionen von  $A_n$  und ihren verallgemeinerten Grenzwert  $A$ .

**theorem:A.19**

SATZ 2.13. *Seien  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $A$  selbstadjungiert und es konvergiere  $A_n \rightarrow A$  im Norm-Resolventen-Sinne. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (i) Ist  $\mu \notin \sigma(A)$ , so konvergieren die Resolventen

$$\| |(A_n - \mu)^{-1} - (A - \mu)^{-1} | \| \rightarrow 0. \quad (2.11)$$

Insbesondere ist  $\mu \notin \sigma(A_n)$  für hinreichend großes  $n$ .

- (ii) Die Spektren konvergieren, das heißt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(A_n) \rightarrow \sigma(A)$  und die wesentlichen Spektren konvergieren, das heißt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{ess}(A_n) \rightarrow \sigma_{ess}(A)$ .
- (iii) Sei  $a < b \in \mathbb{R}$  mit  $a, b \in \rho(A)$ . Dann konvergieren die Spektralprojektionen

$$\| |P_{(a,b)}(A_n) - P_{(a,b)}(A) | \| \rightarrow 0. \quad (2.12)$$

BEWEIS. (i) Es genügt  $\mu \in \mathbb{R}$  zu betrachten, da der Fall für komplexe  $\mu$  klar ist. Da  $\mu \in \rho(A)$  und die Resolventenmenge offen ist, gibt es  $\delta > 0$ , sodass  $(\mu - \delta, \mu + \delta) \cap \sigma(A) = \emptyset$ . Daher ist mit dem Funktionalkalkül  $\| |(A - \mu - i\delta/3)^{-1} | \| < 1/\delta$ . Wegen der Norm-Resolventen-Konvergenz  $A_n \rightarrow A$  gibt es ein  $N$ , sodass auch

$$\| |(A_n - \mu - i\delta/3)^{-1} | \| < 2/\delta \quad (2.13)$$

für alle  $n \geq N$ . Dies wiederum sagt uns, dass die Potenzreihe für  $(A_n - \lambda)^{-1}$  mindestens einen Konvergenzradius von  $2/\delta$  hat und auf diesem ist die Reihe gerade die Resolvente von  $A_n$ . Darum ist also  $\mu \in \rho(A_n)$  für alle  $n \geq N$  und  $\| |(A_n - \mu)^{-1} - (A - \mu)^{-1} | \| \rightarrow 0$ .

(ii) *Spektrum:* Wegen Satz [2.12](#) genügt es zu zeigen, dass  $\sigma((A_n - i)^{-1}) \rightarrow \sigma((A - i)^{-1})$ .

Sei  $\mu \in \sigma((A - i)^{-1})$ , dann gibt es eine Folge  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\|\psi_n\| = 1$  und  $((A - i)^{-1} - \mu)\psi_n \rightarrow 0$ . Wegen der Norm-Resolventen-Konvergenz konvergiert daher auch  $((A_n - i)^{-1} - \mu)\psi_n \rightarrow 0$ , das heißt  $\mu \in \sigma((A_n - i)^{-1})$ . Man beachte, dass dieser Teil auch gilt, wenn man nur starke Resolventen-Konvergenz als Voraussetzung hat.

Ist  $\mu \notin \sigma((A - i)^{-1})$ , so gibt es ein  $\epsilon > 0$  mit  $\| ((A - i)^{-1} - \mu)\psi \| \geq \epsilon \|\psi\|$  für alle  $\psi \in \mathcal{H}$ . Wegen Norm-Resolventen-Konvergenz ist damit auch  $\| ((A_n - i)^{-1} - \mu)\psi \| \geq \frac{\epsilon}{2} \|\psi\|$  für große  $n$ , das heißt  $\{z \in \mathbb{C} : |\mu - z| < \epsilon/2\} \subseteq \rho((A_n - i)^{-1})$  für große  $n$ . Daher ist  $\mu$  nicht der Grenzwert einer Folge  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\mu_n \in \sigma((A_n - i)^{-1})$ .

*Wesentliches Spektrum:* Nach Satz [2.12](#) ist  $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$  genau dann, wenn es eine schwache Nullfolge  $\psi_n \in \mathcal{H}$  gibt, die nicht gegen Null konvergiert, aber  $((A - i)^{-1} - (\lambda - i)^{-1})\psi_n \rightarrow 0$ .

Sei also  $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$ ,  $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $\psi_k \rightharpoonup 0$ ,  $\psi_k \not\rightarrow 0$  und  $((A - i)^{-1} - (\lambda - i)^{-1})\psi_k \rightarrow 0$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir  $\|\psi_k\| = 1$  annehmen. Angenommen  $\lambda$  ist nicht der Limes einer Folge  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\lambda_n \in \sigma_{ess}(A_n)$ , so gibt es ein  $\epsilon > 0$ , sodass  $d(\lambda, \sigma_{ess}(A_n)) > \epsilon$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Daher ist die Spektralprojektion  $P_{(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)}(A_n)$  kompakt, weshalb  $P_{(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)}(A_n)\psi_k \rightarrow 0$  für festes  $n$ , da  $\psi_k \rightharpoonup 0$ . Damit ist

$$\begin{aligned} \| |(A_n - i)^{-1} - (A - i)^{-1} | \| &\geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \| [(A_n - i)^{-1} - (A - i)^{-1} + (A - i)^{-1} - (\lambda - i)^{-1}] \psi_k \| \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \| [(A_n - i)^{-1} - (\lambda - i)^{-1}] P_{\mathbb{R} \setminus (\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)}(A_n)\psi_k \| \\ &\geq \inf \{ |(t - i)^{-1} - (\lambda - i)^{-1}| : |t - \lambda| \geq \epsilon \} \equiv c_\epsilon > 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

für alle  $n$ , was ein Widerspruch zur Norm-Resolventen-Konvergenz ist. Also ist  $\sigma_{ess}(A) \ni \lambda = \lim \lambda_n$  mit  $\lambda_n \in \sigma_{ess}(A_n)$ .

Sei nun umgekehrt  $\lambda = \lim \lambda_n$  mit  $\lambda_n \in \sigma_{ess}(A_n)$ . Dann gibt es eine Folge  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\|\psi_n\| = 1$  und

$$\psi_n \in \{\psi_1, \dots, \psi_{n-1}\}^\perp \cap \text{Ran} (P_{(\lambda_n - 1/n, \lambda + 1/n)}(A_n)). \quad (2.15)$$

Damit ist

$$\begin{aligned} & ((A - i)^{-1} - (\lambda - i)^{-1}) \psi_n \\ &= ((A - i)^{-1} - (A_n - i)^{-1}) \psi_n + ((A_n - i)^{-1} - (\lambda_n - i)^{-1}) \psi_n \\ &+ ((\lambda_n - i)^{-1} - (\lambda - i)^{-1}) \psi_n \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

das heißt  $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$ .

(iii) Da  $a, b \in \rho(A)$ , gibt es  $\epsilon < \frac{b-a}{2}$  und  $N \in \mathbb{N}$ , sodass

$$\sup_{n \geq N} \{ \|(A_n - a)^{-1}\|, \|(A_n - b)^{-1}\| \} \leq \epsilon^{-1}. \quad (2.17)$$

Mit dem Funktionalkalkül ist daher  $\sigma(A_n) \cap (a, b) \subseteq (a + \epsilon, b - \epsilon)$  für  $n \geq N$ .

Sei nun

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (a + \epsilon, b - \epsilon) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.18)$$

Dann ist  $P_{(a,b)}(A_n) = f(A_n)$  und  $P_{(a,b)}(A) = f(A)$  und wegen Satz [2.5](#) theorem: A5 gilt deshalb

$$\|P_{(a,b)}(A_n) - P_{(a,b)}(A)\| \rightarrow 0. \quad (2.19)$$

□

**SATZ 2.14.** Seien  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $A$  selbstadjungiert und  $A_n \rightarrow A$  im starken Resolventen-Sinne. Dann gelten folgende Aussagen.

- a) Sind  $a < b \in \mathbb{R}$  und  $(a, b) \cap \sigma(A_n) = \emptyset$  für alle  $n$ , so ist  $(a, b) \cap \sigma(A) = \emptyset$ . Das heißt, dass jedes  $\lambda \in \sigma(A)$  der Grenzwert einer Folge  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \sigma(A_n)$  ist, das heißt  $\lambda_n \rightarrow \lambda$ .
- b) Sind  $a < b \in \mathbb{R}$  und  $a, b \notin \sigma_{pp}(A)$ , so konvergiert die Projektion  $P_{(a,b)}(A_n)\varphi \rightarrow P_{(a,b)}(A)\varphi$  für alle  $\varphi \in \mathcal{H}$ .

**BEWEIS.** a) Wegen des Funktionalkalküls ist  $(a, b) \cap \sigma(A) = \emptyset$  äquivalent zur Aussage

$$\|(A - \lambda_0)^{-1}\| \leq \frac{\sqrt{2}}{b - a}, \quad (2.20)$$

wobei

$$\lambda_0 = \frac{a + b}{2} + i \frac{b - a}{2}. \quad (2.21)$$

Wegen der starken Resolventen-Konvergenz von  $A_n$  ist jedoch

$$\|(A - \lambda_0)^{-1}\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|(A_n - i)^{-1}\| \leq \frac{\sqrt{2}}{b - a}, \quad (2.22)$$

weshalb auch  $(a, b) \cap \sigma(A_n) = \emptyset$ .

- b) Seien  $f_n, g_n$  gleichmäßig beschränkte, stetige Funktionenfolgen, die  $0 \leq f_n \leq \chi_{(a,b)}$ ,  $f_n(x) \nearrow \chi_{(a,b)}(x)$  punktweise und  $\chi_{[a,b]} \leq g_n$ ,  $g_n(x) \searrow \chi_{[a,b]}(x)$  punktweise erfüllen. Dann konvergieren mit dem Funktionalkalkül  $f_n(A) \rightarrow P_{(a,b)}(A)$  und  $g_n(A) \rightarrow P_{[a,b]}(A)$  stark. Da  $a, b \notin \sigma_{pp}(A)$  sind, sind  $P_{(a,b)}(A) = P_{[a,b]}(A)$ . Das heißt, dass es für gegebenes  $\psi$  und  $\epsilon > 0$  stetige Funktionen  $f, g$  mit  $f \leq \chi_{(a,b)} \leq \chi_{[a,b]} \leq g$  gibt, sodass  $\|f(A)\psi - g(A)\psi\| \leq \epsilon/5$ . Nach Satz [2.5](#) theorem: A5 gibt es wegen der starken Resolventen-Konvergenz ein  $N$ , sodass für alle  $n \geq N$

$$\|f(A_n)\psi - f(A)\psi\| \leq \epsilon/5 \quad \|g(A_n)\psi - g(A)\psi\| \leq \epsilon/5 \quad (2.23)$$

gilt. Daher gilt

$$\|f(A_n)\psi - g(A_n)\psi\| \leq \|f(A_n)\psi - f(A)\psi\| + \|f(A)\psi - g(A)\psi\| + \|g(A)\psi - g(A_n)\psi\| \leq 3\epsilon/5. \quad (2.24)$$

Wieder gilt mit dem Funktionalkalkül, dass

$$\|f(A)\psi - P_{(a,b)}(A)\psi\| \leq \|f(A)\psi - g(A)\psi\|, \quad (2.25)$$

weshalb mit einem analogen Argument wie eben gilt, dass

$$\|P_{(a,b)}(A_n)\psi - P_{(a,b)}(A)\psi\| \leq \epsilon. \quad (2.26)$$

□

**BEMERKUNG 2.15.** (i) Die Resultate der letzten beiden Sätze sind nicht vergleichbar. Offensichtlich folgt aus  $\sigma(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(A_n)$  noch nicht die Konvergenz der Spektralprojektionen. Auch umgekehrt folgt aus  $P(A_n) \xrightarrow{s} P(A)$  (sogar für alle  $t$ ) nicht die Konvergenz  $\sigma(A_n) \rightarrow \sigma(A)$ .

- (ii) Der erste Punkt des letzten Satzes sagt uns, dass das Spektrum des Grenzoperators sich nicht plötzlich ausdehnen kann. Es kann sich jedoch plötzlich zusammenziehen, was man an folgendem Beispiel sieht. Betrachten wir den Operator  $A_n = x/n$  auf  $L^2(\mathbb{R})$ , dann konvergiert  $A_n \rightarrow 0$  im starken Resolventen-Sinne. Zwar ist für jedes  $n$  das Spektrum  $\sigma(A_n) = \mathbb{R}$ , aber das Spektrum von  $A = 0$  besteht nur aus einem Punkt, nämlich dem Ursprung.
- (iii) Aus dem ersten Punkt des letzten Satzes folgt auch, dass wenn die  $A_n$  positive Operatoren sind, die gegen ein  $A$  im starken Resolventen-Sinne konvergieren, dann auch der Grenzoperator  $A$  positiv ist.
- (iv) Der vorletzte Satz besagt, dass, wenn  $A_n \rightarrow A$  im Norm-Resolventen-Sinne konvergiert, sich das Spektrum nicht plötzlich zusammenziehen kann. Das heißt ist  $\lambda \in \sigma(A_n)$  für hinreichend große  $n$ , so muss auch  $\lambda \in \sigma(A)$  sein. Man mag nun an das Beispiel  $A_n = x/n$  denken, jedoch konvergiert  $A_n$  nicht im Norm-Resolventen-Sinne gegen den Null-Operator.
- (v) Das Prinzip der Nicht-Kontraktion des Spektrums bei Norm-Resolventen-Konvergenz bleibt auch für nicht-selbstadjungierte Operatoren  $A_n$  und  $A$  erhalten, das Prinzip der Nicht-Expansion des Spektrums bei starker Resolventen-Konvergenz jedoch nicht. Es gibt sogar eine Folge gleichmäßig beschränkter Operatoren  $A_n$ , die gegen  $A$  im Norm-Resolventen-Sinne konvergieren mit  $\sigma(A_n) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  für alle  $n$ , wohingegen jedoch  $\sigma(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ .

### 2.3. Kriterien für starke Resolventen-Konvergenz und Norm-Resolventen-Konvergenz.

Wir führen zunächst die Graphenkonvergenz ein.

**DEFINITION 2.16** (Graphenkonvergenz). Sei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Operatoren auf  $\mathcal{H}$ .

- (i) Wir sagen, dass  $\langle \psi, \varphi \rangle$  im *starken Graphengrenzwert* von  $A_n$  ist, wenn es eine Folge  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}(A_n)$  gibt, sodass  $\psi_n \rightarrow \psi$  und  $A_n \psi_n \rightarrow \varphi$ . Die Menge aller solcher Tupel  $\langle \psi, \varphi \rangle$  bezeichnen wir mit  $\Gamma_\infty^s$ . Ist  $\Gamma_\infty^s$  der Graph eines Operators  $A$ , so heißt  $A$  der *starke Graphengrenzwert* von  $A_n$  und wir schreiben  $A = \text{st.gr.} - \lim A_n$ .

- (ii) Wir sagen, dass  $\langle \psi, \varphi \rangle$  im *schwachen Graphengrenzwert*  $\Gamma_\infty^w$  von  $A_n$  ist, wenn es eine Folge  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}(A_n)$  gibt, sodass  $\psi_n \rightarrow \psi$  und  $A_n \psi_n \uparrow \varphi$ . Ist  $\Gamma_\infty^w$  der Graph eines Operators  $A$ , so heißt  $A$  der *schwache Graphengrenzwert* von  $A_n$  und wir schreiben  $A = \text{w.gr.} - \lim A_n$ .

Einfache Kriterien für Konvergenz im Norm-Resolventen-Sinne oder im starken Resolventen-Sinne liefern die folgenden beiden Sätze.

theorem:A23

SATZ 2.17. *Seien  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $A$  selbstadjungiert.*

- a)  $A_n \rightarrow A$  im Norm-Resolventen-Sinne, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.
- (i) *Es ist  $\mathcal{D}(A_n) = \mathcal{D}(A)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und es gibt Nullfolgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit*

$$\|(A_n - A)\psi\| \leq a_n \|A\psi\| + b_n \|\psi\| \quad (2.27)$$

für alle  $\psi \in \mathcal{D}(A)$ .

- (ii)  $A_n, A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  und  $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ .
- (iii) *Sei  $\mathcal{D}$  ein gemeinsamer Definitionsbereich der Operatoren  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  und  $A$ , welchen wir mit der Graphennorm  $\|\varphi\|_A = \|A\varphi\| + \|\varphi\|$  versehen. Es gilt  $\sup_{\|\varphi\|_A=1} \|(A_n - A)\varphi\| \rightarrow 0$ .*
- (iv)  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  und  $A$  sind zusätzlich positiv mit gemeinsamen Formbereich  $\mathcal{H}_{+1}$ , welchen wir mit der Norm  $\|\psi\|_{+1} = \sqrt{(\psi, A\psi) + (\psi, \psi)}$  versehen. Es konvergiert  $A_n \rightarrow A$  im  $+1/-1$ -Norm-Sinne, das heißt

$$\sup_{0 \neq \psi, \varphi \in \mathcal{D}} \frac{|(\varphi, (A - A_n)\psi)|}{\|\varphi\|_{+1} \|\psi\|_{+1}} = \sup_{0 \neq \psi \in \mathcal{D}} \frac{|(\psi, (A - A_n)\psi)|}{(\psi, (A + 1)\psi)} \rightarrow 0. \quad (2.28)$$

- b)  $A_n \rightarrow A$  im starken Resolventen-Sinne, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.

- (i) *Es gibt einen determinierenden Bereich  $D_0$  von  $A$ , sodass zu jedem  $\psi \in D_0$  ein  $n_0 = n_0(\psi) \in \mathbb{N}$  existiert mit  $\psi \in \mathcal{D}(A_n)$  für  $n \geq n_0$  und  $A_n \psi \rightarrow A\psi$  für  $n \rightarrow \infty$ .*
- (ii)  $A_n, A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  und  $A_n \xrightarrow{s} A$ .
- (iii)  *$A$  ist der starke Graphengrenzwert von  $A_n$ . Hier gilt auch die umgekehrte Richtung, das heißt konvergiert  $A_n \rightarrow A$  im starken Resolventen-Sinne, so ist auch  $A = \text{st.gr.} - \lim A_n$ .*
- (iv)  $(A_n - \lambda_0)^{-1} \xrightarrow{w} (A - \lambda_0)^{-1}$  für ein  $\lambda_0 \in \rho(A)$ .

BEMERKUNG 2.18. (i) Man sieht, dass wenn der Grenzoperator  $A$  selbstadjungiert ist, dass dann starke Resolventen-Konvergenz äquivalent zu starker Graphenkonvergenz ist.

- (ii) Starke Graphenkonvergenz ist besonders dann interessant, wenn man a priori nicht weiß, dass der Grenzoperator  $A$  selbstadjungiert ist. Wir werden später sehen, welche zusätzliche Information zur starken Graphenkonvergenz man braucht, um zeigen zu können, dass der Grenzoperator selbstadjungiert ist.

SATZ 2.19. *Sei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge symmetrischer Operatoren und*

$$D_\infty^s := \{\psi : \langle \psi, \varphi \rangle \in \Gamma_\infty^s \text{ für ein } \varphi\}. \quad (2.29)$$

- a) *Ist  $D_\infty^s$  dicht, so ist  $\Gamma_\infty^s$  der Graph eines Operators.*
- b) *Ist  $D_\infty^s$  dicht und sei  $A = \text{st.gr.} - \lim A_n$ , dann ist  $A$  ebenfalls symmetrisch und abgeschlossen.*

SATZ 2.20. Sei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge symmetrischer Operatoren und

$$D_\infty^w := \{\psi : \langle \psi, \varphi \rangle \in \Gamma_\infty^w \text{ für ein } \varphi\}. \quad (2.30)$$

Ist  $D_\infty^w$  dicht, so ist  $\Gamma_\infty^w$  der Graph eines symmetrischen Operators.

BEMERKUNG 2.21. (i) Ist  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge gleichmäßig beschränkter Operatoren, dann ist  $A = \text{w.gr.} - \lim A_n$  genau dann, wenn  $A_n \rightarrow A$  in der schwachen Operator-Topologie. Dies zeigt, dass schwache Graphenkonvergenz von schwacher Resolventen-Konvergenz nicht dasselbe sind.

(ii) Der schwache Graphengrenzwert ist im Allgemeinen nicht abgeschlossen, wenn die  $A_n$  symmetrisch sind.

Für zahlreiche Anwendungen ist die Situation interessant, wo die Operatoren  $A_n$  und  $A$  nicht auf dem gleichen Hilbertraum definiert sind.

DEFINITION 2.22. Seien  $(A_n : \mathcal{D}(A_n) \rightarrow \mathcal{H})_{n \in \mathbb{N}}$  und  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$  selbstadjungiert, sowie  $P_n$  und  $P$  die orthogonalen Projektionen auf  $\mathcal{D}(A_n)$  bzw.  $\mathcal{D}(A)$ . Sei  $\Gamma := \{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \rho(A_n)\} \cap \rho(A)$ . Wir sagen

a)  $A_n \rightarrow A$  im verallgemeinerten Norm-Resolventen-Sinne genau dann, wenn für alle  $\lambda \in \Gamma$ ,

$$(A_n - \lambda)^{-1} P_n \rightarrow (A - \lambda)^{-1} P. \quad (2.31)$$

b)  $A_n \rightarrow A$  im verallgemeinerten starken Resolventen-Sinne genau dann, wenn für alle  $\lambda \in \Gamma$  gilt:

$$(A_n - \lambda)^{-1} P_n \xrightarrow{s} (A - \lambda)^{-1} P \quad (2.32)$$

BEMERKUNG 2.23. Im Allgemeinen muss natürlich nicht  $P_n \xrightarrow{s} P$  gelten. Gerade diese Tatsache erlaubt sehr allgemeine Anwendungen.

SATZ 2.24. Seien  $(A_n : \mathcal{D}(A_n) \rightarrow \mathcal{H})_{n \in \mathbb{N}}$  und  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$  selbstadjungiert, sowie  $P_n$  und  $P$  die orthogonalen Projektionen auf  $\mathcal{D}(A_n)$  bzw.  $\mathcal{D}(A)$ . Sei  $\Gamma := \{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \rho(A_n)\} \cap \rho(A)$ . Dann gelten folgende Aussagen.

a) Gilt  $(A_n - \lambda_0)^{-1} P_n \rightarrow (A - \lambda_0)^{-1} P$  bzw.  $(A_n - \lambda_0)^{-1} P_n \xrightarrow{s} (A - \lambda_0)^{-1} P$  für ein  $\lambda_0 \in \Gamma$ , so gilt  $(A_n - \lambda)^{-1} P_n \rightarrow (A - \lambda)^{-1} P$  bzw.  $(A_n - \lambda)^{-1} P_n \xrightarrow{s} (A - \lambda)^{-1} P$  für alle  $\lambda \in \Gamma$ .

b) Gilt  $A_n \rightarrow A$  im verallgemeinerten Norm-Resolventen-Sinne, so gilt  $f(A_n) P_n \rightarrow f(A) P$  für alle stetigen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die im Unendlichen verschwinden.

c) Gilt  $A_n \rightarrow A$  im verallgemeinerten starken Resolventen-Sinne, so gilt  $f(A_n) P_n \xrightarrow{s} f(A) P$  für alle stetigen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die im Unendlichen verschwinden.

### 3. Trottersche Produktformel

Wir werden hier eine nützliche Approximation von  $e^{t(A+B)}$  für selbstadjungierte Operatoren  $A$  und  $B$ , deren Summe lediglich wesentlich selbstadjungiert sein muss, durch  $e^{tA}$  und  $e^{tB}$  herleiten. Anwendungen der Produktformel beinhalten den Pfadintegralformalismus nach Feynman, hyperkontrahierende Halbgruppen und konstruktive Quantenfeldtheorie.

Wir beginnen mit dem klassischen Resultat von Lie für endlichdimensionale Matrizen.

SATZ 3.1 (Produktformel von Lie). *Seien  $A$  und  $B$  endlichdimensionale Matrizen. Dann gilt*

$$e^{A+B} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \exp\left(\frac{A}{n}\right) \cdot \exp\left(\frac{B}{n}\right) \right]^n. \quad (3.1)$$

BEWEIS. Seien  $S_n := \exp\left(\frac{A+B}{n}\right)$  und  $T_n := \exp\left(\frac{A}{n}\right) \cdot \exp\left(\frac{B}{n}\right)$ . Dann hat man für die Differenz

$$S_n^n - T_n^n = \sum_{m=0}^{n-1} S_n^m (S_n - T_n) T_n^{n-1-m}, \quad (3.2)$$

weshalb für die Operatornorm gilt

$$\|S_n^n - T_n^n\| \leq n (\max\{\|S_n\|, \|T_n\|\})^{n-1} \|S_n - T_n\| \leq n \|S_n - T_n\| \exp(\|A\| + \|B\|). \quad (3.3)$$

Wegen

$$\|S_n - T_n\| = \left\| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{A+B}{n}\right)^m - \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{A}{n}\right)^m\right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{B}{n}\right)^m\right) \right\| \leq cn^{-2}, \quad (3.4)$$

wobei  $c$  nur von  $\|A\|$  und  $\|B\|$  abhängt, folgt, dass  $\|S_n^n - T_n^n\| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

Dieses Resultat, als auch der Beweis, können für unbeschränkte, selbstadjungierte Operatoren  $A$  und  $B$ , deren Summe  $A+B$  ebenfalls selbstadjungiert ist, erweitert werden.

SATZ 3.2. *Seien  $A$  und  $B$  selbstadjungierte Operatoren auf  $\mathcal{H}$  und sei  $A+B$  auf  $\mathcal{D} := \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$  ebenfalls selbstadjungiert. Dann gilt*

$$s - \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ e^{itA/n} e^{itB/n} \right]^n = e^{it(A+B)}. \quad (3.5)$$

BEWEIS. Sei dazu  $\psi \in \mathcal{D}$ , dann gilt

$$\frac{1}{s} (e^{isA} e^{isB} - \text{id}) \psi = \frac{1}{s} (e^{isA} - \text{id}) \psi + \frac{1}{s} e^{isA} (e^{isB} - \text{id}) \psi \rightarrow iA\psi + iB\psi \quad (3.6a)$$

und

$$\frac{1}{s} (e^{is(A+B)} - \text{id}) \psi \rightarrow i(A+B)\psi \quad (3.6b)$$

für  $s \rightarrow 0$ . Definiert man daher  $K(s) = \frac{1}{s} (e^{isA} e^{isB} - e^{is(A+B)})$ , so sieht man, dass  $K(s)\psi \rightarrow 0$  in  $\mathcal{H}$  für  $s \rightarrow 0$  für alle  $\psi \in \mathcal{D}$ . Da  $A+B$  auf  $\mathcal{D}$  selbstadjungiert ist, ist  $\mathcal{D}$  ein Banachraum mit Norm

$$\|\psi\|_{A+B} = \|(A+B)\psi\| + \|\psi\|. \quad (3.7)$$

Jede der Abbildungen  $K(s) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$  ist beschränkt und es gilt  $K(s)\psi \rightarrow 0$  in  $\mathcal{H}$  für  $s \rightarrow 0$  oder  $\infty$  für alle  $\psi \in \mathcal{D}$ . Aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, folgt, dass die Familie der  $K(s)$  für alle  $s$  beschränkt ist, das heißt es gibt eine Konstante  $c$ , sodass

$$\|K(s)\psi\| \leq c \|\psi\|_{A+B} \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R} \text{ und } \psi \in \mathcal{D}. \quad (3.8)$$

Ein  $\frac{\epsilon}{3}$ -Argument zeigt dann, dass  $K(s)\psi \rightarrow 0$  gleichmäßig auf  $\|\cdot\|_{A+B}$ -kompakten Teilmengen von  $\mathcal{D}$  konvergiert.

Da  $A + B$  auf  $\mathcal{D}$  selbstadjungiert ist, ist auch  $e^{is(A+B)}\psi \in \mathcal{D}$ , wenn  $\psi \in \mathcal{D}$  ist. Darüberhinaus ist die Abbildung

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{D} \\ s &\mapsto e^{is(A+B)}\psi \end{aligned} \quad (3.9)$$

bezüglich der  $\|\cdot\|_{A+B}$ -Norm auf  $\mathcal{D}$  stetig. Daher ist die Menge  $\{e^{is(A+B)}\psi : s \in [-1, 1]\}$  eine  $\|\cdot\|_{A+B}$ -kompakte Teilmenge in  $\mathcal{D}$  für festes  $\psi \in \mathcal{D}$ .

Jetzt kann man den Beweis der Lie-Produkt-Formel übernehmen. Da

$$\frac{1}{t} \left[ e^{itA}e^{itB} - e^{it(A+B)} \right] e^{is(A+B)}\psi \rightarrow 0 \quad (3.10)$$

gleichmäßig für  $s \in [-1, 1]$  konvergiert, schreiben wir

$$\begin{aligned} &\left[ \left( e^{itA/n}e^{itB/n} \right)^n - \left( e^{it(A+B)/n} \right)^n \right] \psi \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left( e^{itA/n}e^{itB/n} \right)^k \left[ e^{itA/n}e^{itB/n} - e^{it(A+B)/n} \right] \left[ e^{it(A+B)/n} \right]^{n-1-k} \psi. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Die Norm auf der rechten Seite kann durch

$$|t| \max_{|s| < t} \left\| \left( \frac{t}{n} \right)^{-1} \left( e^{it(A+B)/n} - e^{itA/n}e^{itB/n} \right) e^{is(A+B)}\psi \right\| \quad (3.12)$$

nach oben abgeschätzt werden, weshalb wir folgern, dass

$$\left( e^{itA/n}e^{itB/n} \right)^n \psi \rightarrow e^{it(A+B)}\psi \quad (3.13)$$

in  $\mathcal{H}$  für  $n \rightarrow \infty$  und alle  $\psi \in \mathcal{D}$ . Da  $\mathcal{D}$  dicht ist und die Operatoren nach oben durch Eins beschränkt sind, gilt die Aussage auf ganz  $\mathcal{H}$ .  $\square$

**BEMERKUNG 3.3.** (1) Der Beweis zeigt insbesondere, dass die Konvergenz gleichmäßig in  $t$  auf Kompakta in  $\mathbb{R}$  ist, wenn man  $\psi$  fixiert.  
(2) Mit demselben Argument kann man

$$s - \lim_{n \rightarrow \infty} \left( e^{-tA/n}e^{-tB/n} \right)^n = e^{-t(A+B)} \quad (3.14)$$

zeigen, wenn  $A$  und  $B$  die gleichen Annahmen erfüllen und zudem halb-beschränkt sind.

Das Resultat von Trotter ist etwas stärker, da  $A + B$  lediglich wesentlich selbstadjungiert auf  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$  sein muss. Der Beweis unterscheidet sich jedoch stark vom Vorigen.

**SATZ 3.4** (Trottersche Produktformel). *Seien  $A$  und  $B$  selbstadjungierte Operatoren und sei  $A + B$  auf  $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$  wesentlich selbstadjungiert. Dann ist*

$$s - \lim_{n \rightarrow \infty} \left( e^{itA/n}e^{itB/n} \right)^n = e^{it(A+B)}. \quad (3.15)$$

*Sind zudem  $A$  und  $B$  von unten beschränkt, so gilt*

$$s - \lim_{n \rightarrow \infty} \left( e^{-tA/n}e^{-tB/n} \right)^n = e^{-t(A+B)}. \quad (3.16)$$

**BEWEIS.**  $\square$

#### 4. Kompakte Operatoren und Schatten-Klassen

DEFINITION 4.1 (Spektralradius). Sei  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Sei  $r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$ . Dann heißt  $r(T)$  der Spektralradius von  $T$ .

LEMMA 4.2. Sei  $X$  ein Banachraum und  $T \in \mathcal{L}(X)$ . Dann ist das Spektrum von  $T$  nicht leer.

BEWEIS. Formal ist

$$\frac{1}{\lambda - T} = \left(\frac{1}{\lambda}\right) \frac{1}{1 - T/\lambda} = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n\right), \quad (4.1)$$

was suggeriert, dass für große  $\lambda$  die Resolvente durch

$$(T - \lambda)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \left[ \text{id} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n \right] \quad (4.2)$$

gegeben ist. Ist  $|\lambda| > \|T\|$ , so konvergiert die Reihe auf der rechten Seite in Norm und man prüft für solche  $\lambda$  leicht nach, dass der Grenzwert gerade die Inverse von  $(\lambda \text{id} - T)$  ist. Daher konvergiert  $\|(T - \lambda)^{-1}\| \rightarrow 0$  für  $|\lambda| \rightarrow \infty$ . Wäre nun  $\sigma(T)$  leer, so wäre  $(T - \lambda)^{-1}$  eine vollständig beschränkte, analytische Funktion in  $\lambda$ . Mit dem Satz von Liouville wäre demnach  $(T - \lambda)^{-1}$  gleich Null, was ein Widerspruch ist. Demnach kann  $\sigma(T)$  nicht leer sein.  $\square$

SATZ 4.3. Sei  $X$  ein Banachraum,  $T \in \mathcal{L}(X)$ . Dann existiert der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}$  und ist gleich dem Spektralradius  $r(T)$ . Ist  $X$  ein Hilbertraum und ist  $A$  normal, so ist  $r(A) = \|A\|$ .

BEWEIS. Siehe auch Weidmann <sup>Weidmann2000</sup> [Wei00, Theorem 5.8].

Dass der Grenzwert existiert, folgt aus einem cleveren Subadditivitätsargument. Die Idee des Beweises ist zu zeigen, dass der Konvergenzradius der Laurentreihe der Resolvente  $(T - \lambda)^{-1}$  um  $\infty$  gerade  $r(T)^{-1}$  ist.

Wir bemerken zunächst, dass der Konvergenzradius nicht kleiner als  $r(T)^{-1}$  sein kann, da  $(T - \lambda)^{-1}$  auf  $\rho(T)$  und  $\{\lambda : |\lambda| > r(T)\} \subseteq \rho(T)$  analytisch ist. Andererseits ist

$$\frac{1}{\lambda} \left\{ \text{id} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{T}{n\lambda}\right)^n \right\} \quad (4.3)$$

gerade die Laurentreihe um  $\infty$ , von der wir wissen, dass sie absolut konvergiert, wenn  $(T - \lambda)^{-1}$  existiert. Da Laurentreihen im Inneren des Konvergenzradius absolut konvergieren, kann der Konvergenzradius auch nicht größer als  $r(T)^{-1}$  sein.  $r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}$  folgt dann aus der vektorwertigen Version des Satzes von Hadamard, welcher sagt, dass der Konvergenzradius von

$$\frac{1}{\lambda} \left\{ \text{id} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{T}{n\lambda}\right)^n \right\}$$

gerade das Inverse von

$$\limsup_n \|T^n\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} \quad (4.4)$$

ist.

Sei nun  $X$  ein Hilbertraum und  $A$  selbstadjungiert, so ist  $|||A|||^2 = |||A^2|||$ , woraus  $|||A|||^{2n} = |||A^{2n}|||$  folgt. Damit ist nach voriger allgemeiner Überlegung

$$r(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} |||A^k|||^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^{2n}\|^{2^{-n}} = \|A\|, \quad (4.5)$$

was den Beweis schließt.  $\square$

#### 4.1. Kompakte Operatoren.

DEFINITION 4.4. a) Eine Teilmenge  $M$  eines topologischen Raumes  $X$  heißt *relativ kompakt bzw. präkompakt*, man schreibt  $A \subset\subset X$ , genau dann, wenn ihr Abschluss  $\overline{M}$  kompakt ist.

b) Seien  $X, Y$  Banachräume. Ein Operator  $K \in \mathcal{L}(X, Y)$  heißt genau dann kompakt, wenn mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (i) Sei  $M \subseteq X$  beschränkt, dann ist das Bild  $K(M) \subseteq Y$  präkompakt.
- (ii) Das Bild der Einheitskugel ist präkompakt.
- (iii) Jede beschränkte Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$  hat eine Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \in X$ , sodass  $(Kx_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \in Y$  konvergiert.

LEMMA 4.5. *Sei  $X$  ein vollständiger metrischer Raum (also z.B. ein Banach- oder ein Hilbertraum). Dann ist  $M \subset\subset X$  genau dann, wenn jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in M$  eine Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \in M$  hat, die Cauchy ist. Der Grenzwert dieser Teilfolge liegt im Allgemeinen jedoch nicht unbedingt in  $M$ .*

LEMMA 4.6. *Jeder beschränkte Operator in einem endlichdimensionalen Raum ist kompakt.*

Wir präzisieren die Aussage über kompakte Operatoren in Banachräumen nun.

SATZ 4.7. *Seien  $X, Y$  Banachräume,  $\mathcal{D}(T) \subseteq X$  und  $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$  dicht definiert. Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}(T)$  eine beschränkte Folge. Gibt es dann eine Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , sodass  $(Tx_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \in Y$  konvergiert, so ist  $T$  beschränkt. Darüberhinaus ist die eindeutig bestimmte Fortsetzung  $T_0 : X \rightarrow Y$  kompakt.*

SATZ 4.8. *Seien  $X, Y$  Banachräume. Die Menge der kompakten Operatoren  $\mathcal{S}^\infty(X, Y)$  ist ein, bezüglich der Operatornorm, abgeschlossener Unterraum von  $\mathcal{L}(X, Y)$ , das heißt*

- (i)  $0 \in \mathcal{S}^\infty(X, Y)$
- (ii) Sei  $a \in \mathbb{K}$  und  $K \in \mathcal{S}^\infty(X, Y)$ , dann ist auch  $aK \in \mathcal{S}^\infty(X, Y)$
- (iii) Sind  $K_1, K_2 \in \mathcal{S}^\infty(X, Y)$ , dann ist auch  $K_1 + K_2 \in \mathcal{S}^\infty(X, Y)$
- (iv) Grenzwerte von kompakten Operatoren sind wieder kompakt, das heißt sind  $K_n \in \mathcal{S}^\infty(X, Y)$  für  $n \in \mathbb{N}$  und  $K \in \mathcal{L}(X, Y)$  mit  $|||K_n - K||| \rightarrow 0$ , so folgt, dass  $K \in \mathcal{S}^\infty(X, Y)$ .

SATZ 4.9. *Seien  $X, Y, Z$  Banachräume. Ist  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  und  $K \in \mathcal{S}^\infty(Y, Z)$  bzw.  $A \in \mathcal{L}(Y, Z)$  und  $K \in \mathcal{S}^\infty(X, Y)$ , so sind  $AK$  bzw.  $KA \in \mathcal{S}^\infty(X, Z)$ . Für den Spezialfall  $X = Y = Z$  ergibt sich also mit vorigem Satz, dass  $\mathcal{K}(X)$  ein Norm-abgeschlossenes beidseitiges Ideal in  $\mathcal{L}(X)$  ist.*

SATZ 4.10. *Seien  $X, Y$  Banachräume und  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Dann ist  $T$  genau dann kompakt, wenn der duale Operator  $T'$  kompakt ist.*

BEMERKUNG 4.11. Die letzten zwei Sätze zeigen, dass  $\mathcal{S}^\infty(\mathcal{H})$  ein Banachraum ist, wenn  $\mathcal{H}$  ein separabler Hilbertraum ist.

Im Folgenden beschränken wir uns auf die Untersuchung kompakter Operatoren zwischen Hilberträumen.

SATZ 4.12. *Seien  $X, Y$  Hilberträume. Für  $K \in \mathcal{L}(X, Y)$  sind dann äquivalent:*

- (i)  $K$  ist kompakt
- (ii)  $K^*$  ist kompakt
- (iii)  $K^*K$  ist kompakt

SATZ 4.13. *Sei  $X$  ein Hilbert- und  $Y$  ein Banachraum.  $K \in \mathcal{L}(X, Y)$  ist genau dann kompakt, wenn aus  $x_n \rightarrow x$  folgt, dass  $Kx_n \rightarrow Kx$ .*

SATZ 4.14. *Seien  $X, Y$  Banachräume und  $K : X \rightarrow Y$  ein Operator zwischen diesen beiden. Dann gilt:*

- (i) *Ist  $K$  beschränkt und endlichdimensional (das heißt  $\dim \operatorname{Ran}(K) < \infty$ ), so ist  $K$  kompakt.*
- (ii) *Sind  $K_n$  beschränkt und endlichdimensional, das heißt die  $K_n$  sind kompakt, mit  $\|K - K_n\| \rightarrow 0$ , so ist auch  $K$  kompakt.*
- (iii) *Ist  $X$  ein Hilbertraum,  $K$  kompakt und  $(P_n)$  eine wachsende Folge orthogonaler Projektionen in  $X$  mit starker Konvergenz  $P_n \rightarrow \operatorname{id}$ , so gilt  $\|K - KP_n\| \rightarrow 0$ . Ist  $X$  separabel, so können die  $P_n$  endlichdimensional gewählt werden.*

BEMERKUNG 4.15. Man sagt, dass ein Banachraum die *Approximationseigenschaft* hat, wenn jeder kompakte Operator durch beschränkte, endlichdimensionale Operatoren approximiert werden kann. Der vorige Satz sagt also, dass Hilberträume immer die Approximationseigenschaft haben.

SATZ 4.16. *Es gilt:*

- (i) *Ist  $X$  ein Hilbertraum und  $Y$  ein Banachraum, so ist  $K \in \mathcal{L}(X, Y)$  genau dann kompakt, wenn für jede orthonormale Folge  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$  gilt, dass  $Ke_n \rightarrow 0$ .*
- (ii) *Sind  $X, Y$  Hilberträume, so ist  $K \in \mathcal{L}(X, Y)$  genau dann kompakt, wenn für beliebige orthonormale Folgen  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$  und  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in Y$  gilt, dass  $(Ke_n, f_n) \rightarrow 0$ .*

theorem:A.45

SATZ 4.17 (Analytischer Fredholm-Satz). *Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen und zusammenhängend. Sei  $f : D \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$  eine analytische, operatorwertige Funktion, sodass  $f(z)$  kompakt ist für alle  $z \in D$ . Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen.*

- a) *Die Resolvente  $(\operatorname{id} - f(z))^{-1}$  existiert für kein  $z \in D$ .*
- b)  *$(\operatorname{id} - f(z))^{-1}$  existiert für alle  $z \in D \setminus S$ , wobei  $S$  eine diskrete Teilmenge von  $D$ , also eine Menge, die keinen Häufungspunkt in  $D$  enthält, ist. In diesem Fall ist  $(\operatorname{id} - f(z))^{-1}$  meromorph in  $D$ , das heißt analytisch in  $D \setminus S$ , und die Residuen an den Polen sind Operatoren endlichen Ranges. Ist  $z \in S$ , so hat  $f(z)\psi = \psi$  eine nicht-triviale Lösung in  $\mathcal{H}$ .*

Dieser Satz hat vier wichtige Konsequenzen.

KOROLLAR 4.18 (Fredholmsche Alternative). *Sei  $A$  ein kompakter Operator auf  $\mathcal{H}$ . Dann existiert entweder die Resolvente  $(\operatorname{id} - A)^{-1}$  oder  $A\psi = \psi$  hat eine nicht-triviale Lösung.*

BEWEIS. Setze  $f(z) = zA$  und verwende den Satz bei  $z = 1$ . □

SATZ 4.19 (Riesz-Schauder). *Sei  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  kompakt, dann ist  $\sigma(A)$  eine diskrete Menge, die keine Häufungspunkte, außer vielleicht  $\lambda = 0$ , enthält. Des*

Weiteren ist jedes  $0 \neq \lambda \in \sigma(A)$  ein Eigenwert endlicher Multiplizität, das heißt der zugehörige Raum der Eigenvektoren ist endlichdimensional.

BEWEIS. Sei  $f(z) = zA$ , dann ist  $f(z)$  eine analytische, kompakte, operatorwertige Funktion auf ganz  $\mathbb{C}$ . Wegen des Fredholm-Satzes ist die Menge  $\{z \in \mathbb{C} : zA\psi = \psi \text{ hat eine Lösung } \psi \neq 0\}$  diskret (sie ist nicht  $\mathbb{C}$ , da sie nicht  $z = 0$  enthält). Dies ist aber gerade die Menge der von Null verschiedenen Eigenwerte, und, da  $A$  kompakt ist, das ganze Spektrum von  $A$ . Des Weiteren haben die Eigenwerte wegen der Kompaktheit von  $A$  auch nur endliche Multiplizität.

Ist nun  $\lambda^{-1}$  nicht in dieser diskreten Menge, so existiert wegen des Fredholm-Satzes

$$(\lambda - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \left( \text{id} - \frac{1}{\lambda} A \right)^{-1}. \quad (4.6)$$

□

**theorem:A48**

SATZ 4.20 (Hilbert–Schmidt). Sei  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  selbstadjungiert und kompakt. Dann gibt es eine vollständige Orthonormalbasis  $\{\phi_n\}$  von  $\mathcal{H}$ , sodass  $A\phi_n = \lambda_n\phi_n$  und  $\lambda_n \rightarrow 0$ .

BEWEIS. Wir wählen für jeden Eigenwert von  $A$  eine Orthonormalbasis für die Menge der zugehörigen Eigenvektoren. Die Familie all dieser Vektoren,  $\{\phi_n\}$ , ist dann eine orthonormale Menge, da Eigenvektoren, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, automatisch orthogonal sind. Sei nun  $\mathcal{M}$  der Abschluss des Spans der  $\{\phi_n\}$ . Da  $A$  selbstadjungiert ist und  $A : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  abbildet, bildet auch  $A : \mathcal{M}^\perp \rightarrow \mathcal{M}^\perp$ . Sei nun  $\tilde{A} = A \upharpoonright_{\mathcal{M}^\perp}$ . Dann ist  $\tilde{A}$  wieder selbstadjungiert und kompakt, da  $A$  diese Eigenschaften besitzt. Ist nun  $\lambda \in \sigma(\tilde{A})$ , so ist  $\lambda$  ein Eigenwert von  $\tilde{A}$  nach dem Satz von Riesz–Schauder und damit auch ein Eigenwert von  $A$ . Da aber alle Eigenvektoren von  $A$  in  $\mathcal{M}$  enthalten sind, ist der Spektralradius von  $\tilde{A}$  gleich Null. Da  $\tilde{A}$  selbstadjungiert ist, ist  $\tilde{A} = 0$  auf  $\mathcal{M}^\perp$ . Daher ist  $\mathcal{M}^\perp = \emptyset$ , denn wäre  $\varphi \in \mathcal{M}^\perp$ , so ist  $A\varphi = 0$ , was  $\varphi \in \mathcal{M}$  impliziert. Damit ist  $\mathcal{M} = \mathcal{H}$ , also ist  $\{\phi_n\}$  eine Orthonormalbasis von  $\mathcal{H}$ .

Die Konvergenz der Eigenwerte  $\lambda_n \rightarrow 0$  folgt aus dem Satz von Riesz–Schauder, welcher sagt, dass jeder Eigenwert endliche Multiplizität hat und der einzig mögliche Häufungspunkt der  $\lambda_n$  Null ist. □

Dies zeigt, dass kompakte Operatoren entweder abzählbar viele Eigenwerte haben oder die Eigenwerte einen Häufungspunkt bei Null haben.

SATZ 4.21 (Kanonische Darstellung von kompakten Operatoren/Schmidt-Entwicklung). Sei  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  kompakt.

- (i) Dann gibt es (nicht notwendigerweise vollständige) orthonormale Mengen  $\{\psi_n\}_{n=1}^N$  und  $\{\phi_n\}_{n=1}^N$  und positive reelle Zahlen  $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$  mit  $\lambda_n \rightarrow 0$ , sodass

$$A = \sum_{n=1}^N \lambda_n (\psi_n, \cdot) \phi_n. \quad (4.7)$$

Diese Summe (sie kann endlich oder unendlich sein) konvergiert in Norm.

Die  $\{\psi_n\}$  bzw. die  $\{\phi_n\}$  sind jedoch vollständig in  $A\mathcal{H}$  bzw.  $A^*\mathcal{H}$ .

- (ii) Die positiven Zahlen  $\{\lambda_n\}$  heißen Singulärwerte von  $A$  und sind gerade die Eigenwerte von  $|A|$ .
- (iii) Des Weiteren ist  $\|A\varphi\| = \||A|\varphi\|$  für alle  $\varphi \in \mathcal{H}$ .

BEWEIS. Da  $A$  kompakt ist, ist (da die Schatten-Operatoren links- und rechtsseitige Ideale sind) auch  $A^*A$  wieder kompakt.  $A^*A$  ist aber positiv, daher auch selbstadjungiert. Nach dem Hilbert-Schmidt-Satz gibt es eine orthonormale Menge  $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ , sodass  $A^*A\psi_n = \mu_n\psi_n$  mit  $\mu_n > 0$  (da  $A^*A$  positiv ist),  $\mu_n \rightarrow 0$  und  $A^*A$  ist der Null-Operator auf dem zu  $\{\psi_n\}_{n=1}^N$  orthogonalen Teilraum. Sei nun  $\lambda = +\sqrt{\mu_n}$  und definiere  $\phi_n := \frac{A\psi_n}{\lambda_n}$ . Diese kann man auch als  $\phi_n = W\psi_n$  schreiben, wenn wir die Polarzerlegung  $A = W|A|$  haben. Dann ist  $\phi_n = \frac{W|A|\psi_n}{\lambda_n} = W\psi_n$ . Dann sind auch die  $\phi_n$  orthogonal aufeinander, denn

$$\lambda_n \lambda_m (\phi_n, \phi_m) = (A\psi_n, A\psi_m) = \mu_n (\psi_n, \psi_m) = \mu_n \delta_{nm}. \quad (4.8)$$

Des Weiteren lässt sich jedes  $\varphi = \sum_{n=1}^N (\psi_n, \varphi) \psi_n$  schreiben. Damit ist

$$A\varphi = A \sum_{n=1}^N (\psi_n, \varphi) \psi_n = \sum_{n=1}^N \lambda_n (\psi_n, \varphi) W\psi_n = \sum_{n=1}^N \lambda_n (\psi_n, \varphi) \phi_n, \quad (4.9)$$

womit  $A$  die Darstellung

$$A = \sum_{n=1}^N \lambda_n (\psi_n, \cdot) \phi_n \quad (4.10)$$

hat. Entsprechend hat  $A^*$  die Darstellung

$$A^* = \sum_{n=1}^N \lambda_n (\phi_n, \cdot) \psi_n. \quad (4.11)$$

□

Dies zeigt, dass die Singulärwerte von  $A$  gerade die Eigenwerte von  $|A|$  sind. Wir schließen mit einem klassischen Beispiel.

BEISPIEL 4.22.

**4.2. Spurklasse-Operatoren.** Wir haben bereits gesehen, dass  $\mathcal{S}^\infty(\mathcal{H})$  ein Banachraum ist, wenn  $\mathcal{H}$  ein separabler Hilbertraum ist. Zum Schluß des nächsten Abschnitts werden wir den Dual- und den doppelten Dualraum von  $\mathcal{S}^\infty(\mathcal{H})$  bestimmen. Die Rechnungen werden uns den Unterschied zwischen der schwachen Banachraum-Topologie auf  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  und der schwachen Operator-Topologie zeigen. Wir beginnen mit der Einführung der Spur.

SATZ 4.23. Sei  $\mathcal{H}$  ein separabler Hilbertraum,  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$  eine Orthonormalbasis. Dann definieren wir für jeden positiven Operator  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  die Spur als  $\text{tr}(A) = \sum_{n=1}^\infty (\varphi_n, A\varphi_n)$ . Die Spur ist unabhängig von der gewählten Orthonormalbasis und hat folgende Eigenschaften.

- $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$
- $\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr}(A)$  für alle  $\lambda \geq 0$
- $\text{tr}(UAU^{-1}) = \text{tr}(A)$  für alle unitären Operatoren  $U$
- Ist  $0 \leq A \leq B$ , so ist  $\text{tr}(A) \leq \text{tr}(B)$

DEFINITION 4.24.  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  heißt genau dann *Spurklasse*, wenn  $\text{tr}(|A|) < \infty$ . Die Familie aller Spurklasse-Operatoren wird mit  $\mathcal{S}^1(\mathcal{H})$  bezeichnet.

SATZ 4.25. Es gilt:

- (i)  $\mathcal{S}^1(\mathcal{H})$  ist ein Vektorraum.
- (ii) Ist  $A \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H})$  und  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , so sind  $AB, BA \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H})$ .
- (iii)  $A \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H})$  genau dann, wenn  $A^* \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H})$ .

SATZ 4.26. Wir definieren die Spurnorm  $\|\cdot\|_1$  in  $\mathcal{S}^1(\mathcal{H})$  durch  $\|A\|_1 = \operatorname{tr}|A|$ . Dann ist  $\mathcal{S}^1(\mathcal{H})$  ein Banachraum mit Norm  $\|\cdot\|_1$  und es gilt  $\| |A| \| \leq \|A\|_1$ .

SATZ 4.27.  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  ist ein Spurklasse Operator, wenn mindestens eine der folgenden Aussagen wahr ist.

- a) Sei  $T > 0$ . Für alle Orthonormalbasen  $\{\phi_n\}$ , konvergiert  $\sum_n |(T\phi_n, \phi_n)|$ .
- b) Die Reihe  $\sum_n (T\phi_n, \varphi_n)$  konvergiert für beliebige Orthonormalbasen  $\{\phi_n\}$  und  $\{\varphi_n\}$ .
- c) Die Reihe  $\sum_n \|T\phi_n\|$  konvergiert für eine beliebige Orthonormalbasis  $\{\phi_n\}$ .

BEMERKUNG 4.28. Es ist wichtig zu bemerken, dass  $\sum_n |(T\phi_n, \phi_n)|$  für alle Orthonormalbasen konvergieren muss, damit  $T \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H})$  ist.

SATZ 4.29. Ist  $T \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H})$ , so gilt:

- a) Sind  $\{\phi_n\}$  und  $\{\varphi_n\}$  beliebige Orthonormalbasen, so ist  $\sum_n |(T\phi_n, \varphi_n)| \leq \|T\|_1$ , wobei Gleichheit herrscht, wenn  $\phi_n$  und  $\varphi_n$  die Vektoren der Schmidt-Entwicklung sind, also, wenn  $\phi_n$  die Eigenvektoren von  $|T|$  und  $\varphi_n = W\phi_n$  sind, wobei  $W$  zur Polarzerlegung  $T = W|T|$  gehört.
- b) Ist  $\{\phi_n\}$  eine beliebige Orthonormalbasis, so konvergiert  $\sum_n (\phi_n, A\phi_n)$  absolut und der Grenzwert hängt nicht von der gewählten Basis ab.

SATZ 4.30. Seien  $X, Y$  Hilberträume. Dann ist  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  genau dann in  $\mathcal{S}^1(X, Y)$ , wenn es Folgen  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$  und  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in Y$  gibt mit  $\sum_n \|\psi_n\| \|\phi_n\| < \infty$  und

$$A\varphi = \sum_n (\phi_n, \varphi)\psi_n \quad (4.12)$$

für alle  $\varphi \in X$ . Insbesondere ist dann  $\|A\|_1 = \inf\{\sum_n \|\psi_n\| \|\phi_n\|\}$ , wobei das Infimum über alle derartigen Darstellungen von  $A$  genommen wird.

BEMERKUNG 4.31.  $\mathcal{S}^1(\mathcal{H})$  ist nicht abgeschlossen unter der Operatornorm.

Die Verbindung zwischen Spurklasse Operatoren und kompakten Operatoren ist die Folgende.

SATZ 4.32. Es gilt:

- (i)  $\mathcal{S}^1(\mathcal{H}) \subset \mathcal{S}^\infty(\mathcal{H})$ , das heißt jeder Spurklasse Operator ist auch kompakt.
- (ii)  $A \in \mathcal{S}^\infty(\mathcal{H})$  ist genau dann Spurklasse, wenn  $\sum_{n=1}^\infty \lambda_n < \infty$ , wobei  $\lambda_n$  die Singulärwerte von  $A$  sind.

SATZ 4.33. Wir haben folgende Beziehungen zwischen den kompakten und den Spurklasse Operatoren.

- a)  $\mathcal{S}^1(\mathcal{H}) = [\mathcal{S}^\infty(\mathcal{H})]^*$ , das heißt die Abbildung  $A \mapsto \operatorname{tr}(A \cdot)$  ist ein isometrischer Isomorphismus von  $\mathcal{S}^1(\mathcal{H})$  auf  $[\mathcal{S}^\infty(\mathcal{H})]^*$ .
- b)  $\mathcal{L}(\mathcal{H}) = [\mathcal{S}^1(\mathcal{H})]^*$ , das heißt die Abbildung  $B \mapsto \operatorname{tr}(B \cdot)$  ist ein isometrischer Isomorphismus von  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  auf  $[\mathcal{S}^1(\mathcal{H})]^*$ .

KOROLLAR 4.34. Die Operatoren endlichen Ranges sind dicht in  $\mathcal{S}^1(\mathcal{H})$  bezüglich der  $\|\cdot\|_1$ -Norm. ( $T$  hat endlichen Rang, wenn jeder Vektor in  $\operatorname{Ran}(T)$  als  $Tx = \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i$  geschrieben werden kann.)

### 4.3. Hilbert-Schmidt-Operatoren.

DEFINITION 4.35. Ein Operator  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  heißt *Hilbert-Schmidt* genau dann, wenn  $\text{tr}(T^*T) < \infty$ . Die Familie aller Hilbert-Schmidt-Operatoren wird mit  $\mathcal{S}^2(\mathcal{H})$  bezeichnet.

SATZ 4.36. *Es gilt:*

- $\mathcal{S}^2(\mathcal{H})$  ist ein zweiseitiges Ideal
- Sind  $A, B \in \mathcal{S}^2(\mathcal{H})$ , so gilt für jede Orthonormalbasis  $\{\phi_n\}$ , dass  $\sum_n \langle \phi_n, A^*B\phi_n \rangle$  absolut summierbar ist. Der Grenzwert, welcher mit  $(A, B)_2$  bezeichnet wird, ist von der gewählten Orthonormalbasis unabhängig.
- Ist  $\|A\|_2 = \sqrt{(A, A)_2} = \text{tr}(A^*A)^{1/2}$ , so ist  $\|A\| \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_1$  und  $\|A^*\|_2 = \|A\|_2$ .
- Jeder Hilbert-Schmidt Operator ist kompakt, das heißt  $\mathcal{S}^2(\mathcal{H}) \subset \mathcal{S}^\infty(\mathcal{H})$ . Ein kompakter Operator  $A \in \mathcal{S}^\infty(\mathcal{H})$  ist genau dann Hilbert-Schmidt, wenn  $\sum_n \lambda_n^2 < \infty$  ist, wobei  $\lambda_n$  die Singulärwerte von  $A$  sind.
- Die Operatoren endlichen Ranges sind bezüglich der  $\|\cdot\|_2$ -Norm dicht in  $\mathcal{S}^2(\mathcal{H})$ .
- $A \in \mathcal{S}^2(\mathcal{H})$  genau dann, wenn  $\{\|A\phi_n\|\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$  für eine Orthonormalbasis  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .
- $A \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H})$  genau dann, wenn  $A = BC$  mit  $B, C \in \mathcal{S}^2(\mathcal{H})$ .

BEMERKUNG 4.37.  $\mathcal{S}^2(\mathcal{H})$  ist unter der Operatornorm  $\|\cdot\|$  nicht abgeschlossen.

Wenn  $\mathcal{H} = L^2(M, d\mu)$ , so hat  $\mathcal{S}^2(\mathcal{H})$  eine konkrete Realisierung als Integraloperator.

SATZ 4.38. Sei  $\langle M, \mu \rangle$  ein Maßraum und  $\mathcal{H} = L^2(M, d\mu)$ . Dann ist  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  genau dann ein Hilbert-Schmidt Operator, wenn es eine Funktion  $K \in L^2(M \times M, d\mu \otimes d\mu)$  gibt mit

$$(Af)(x) = \int K(x, y)f(y)d\mu(y). \quad (4.13)$$

Darüberhinaus ist

$$\|A\|_2^2 = \int |K(x, y)|^2 d\mu(x)d\mu(y) \quad (4.14)$$

BEWEIS. □

Dieses Resultat gibt uns also eine simple hinreichende Bedingung dafür, dass ein Operator kompakt ist. Es gibt uns auch eine hinreichende Bedingung dafür, dass ein Operator auf  $L^2(M, d\mu)$  ein Integraloperator ist. Beide Bedingungen sind nicht notwendig.

SATZ 4.39 (Schurs Test). Seien  $X, Y$  zwei messbare Räume (wie z. B.  $\mathbb{R}^n$ ) und  $T$  ein Integraloperator mit nicht-negativem Kern  $K(x, y)$  ( $x \in X, y \in Y$ ). Gibt es dann Funktionen  $p(x) > 0, q(x) > 0$  und Zahlen  $\alpha, \beta > 0$ , sodass

$$\int_Y K(x, y)q(y)dy \leq \alpha p(x) \quad (4.15a)$$

für fast alle  $x$  und

$$\int_X K(x, y)p(x)dx \leq \beta q(y) \quad (4.15b)$$

für fast alle  $y$ , dann ist  $T$  zu einem stetigen Operator  $T : L^2(X) \rightarrow L^2(Y)$  erweiterbar und es gilt  $\|T\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \sqrt{\alpha\beta}$ . Die Funktionen  $p$  und  $q$  nennt man Schur Testfunktionen.

BEWEIS. Wir verwenden die erste der beiden geforderten Ungleichungen, sowie Cauchy-Schwarz und erhalten für beliebiges  $f \in L^2(Y)$

$$\begin{aligned} |Tf(x)|^2 &= \left| \int_Y K(x,y)f(y)dy \right|^2 \leq \left( \int_Y K(x,y)q(y)dy \right) \left( \int_Y \frac{K(x,y)|f(y)|^2}{q(y)} dy \right) \\ &\leq \alpha p(x) \int_Y \frac{K(x,y)|f(y)|^2}{q(y)} dy. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Integriert man diese Ungleichung nun über  $X$  und verwendet Fubini (alle Funktionen sind fast überall positiv), sowie die zweite Bedingung, so erhält man

$$\|Tf\|_{L^2}^2 \leq \alpha \int_Y \left( \int_X p(x)K(x,y)dx \right) \frac{|f(y)|^2}{q(y)} dy \leq \alpha\beta \int_Y |f(y)|^2 dy = \alpha\beta \|f\|_{L^2}^2, \quad (4.17)$$

was zu zeigen war.  $\square$

BEMERKUNG 4.40. a) Üblicherweise verwendet man Schurs Test mit  $p(x) = q(x) = 1$ , das heißt  $|\int_X K(x,y)dx|$  und  $|\int_Y K(x,y)dy|$  sind endlich. Dann erhält man

$$\|T\|_{L^2 \rightarrow L^2}^2 \leq \sup_{x \in X} \left( \int_Y |K(x,y)|dy \right) \cdot \sup_{y \in Y} \left( \int_X |K(x,y)|dx \right). \quad (4.18)$$

Die Ungleichung gilt offenbar auch dann, wenn der Kern negativ ist.

b) Mit der Youngschen Ungleichung erhält man ein ähnliches Resultat für Operatoren, die von  $L^p$  nach  $L^q$  abbilden. Gibt es eine positive Konstante  $C$ , sodass

$$\sup_{x \in X} \left( \int_Y |K(x,y)|^r dy \right)^{1/r} + \sup_{y \in Y} \left( \int_X |K(x,y)|^r dx \right)^{1/r} \leq C, \quad (4.19)$$

wobei  $\frac{1}{r} = 1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$  für  $1 \leq p \leq q \leq \infty$ , so setzt sich der Integraloperator  $T$  zu einem stetigen Operator  $T : L^p(Y) \rightarrow L^q(X)$  fort mit  $\|T\|_{L^p \rightarrow L^q} \leq C$ .

#### 4.4. Schattenklassen kompakter Operatoren.

### 5. Fredholm-Theorie

a: fredholm

**5.1. Fredholm-Operatoren.** Wir folgen Dyatlov-Zworski <sup>DyatlovZworski2019</sup> [DZ19, Anhang C.2-3].

DEFINITION 5.1. (1) Ist  $X$  ein Vektorraum und  $M \subset X$  eine lineare Mannigfaltigkeit von  $X$ , dann heißt für festes  $u \in X$  die Menge  $u + M = \{u + m : u \in X, m \in M\}$  die *inhomogene lineare Mannigfaltigkeit* (oder lineare Varietät) durch  $u$ , parallel zu  $M$ . Für festes  $M$  wird die Totalität der inhomogenen linearen Mannigfaltigkeiten  $u + M$  zu einem Vektorraum unter der linearen Operation

$$\alpha(u + M) + \beta(v + M) = (\alpha u + \beta v) + M.$$

Der sich ergebende Vektorraum heißt *Quotientenraum von  $X$  durch  $M$*  und wird  $X/M$  geschrieben. Elemente in  $X/M$  heißen *Comengen*. Der Nullvektor in  $X/M$  ist gerade  $M$  und es gilt  $u + M = v + M$  genau dann, wenn  $u - v \in M$ . Wir bezeichnen *Codimension* von  $M$  als die Dimension von  $X/M$ , also  $\text{codim}(M) := \dim(X/M)$ . Es gilt  $\dim(M) + \text{codim}(M) = \dim(X)$ , falls  $\dim(X) < \infty$ .

(2) Ein beschränkter linearer Operator  $T : X_1 \rightarrow X_2$  heißt *Fredholm-Operator*, wenn sowohl der Kern von  $T$ , sprich

$$\ker T := \{u \in X_1 : Tu = 0\},$$

als auch der Cokern von  $T$ , sprich

$$\text{coker } T := X_2/TX_1, \quad \text{wobei } TX_1 := \text{ran}(T) = \{Tu : u \in X_1\},$$

endlichdimensional sind, d.h. wenn  $\text{codim}(\text{ran}(T)) < \infty$ . Hierbei ist der Cokern von  $T$  (der als der Quotient von  $X_2$  nach dem Bild von  $T$  definiert ist) algebraisch definiert, sprich als Vektorraum von Comengen,  $TX_1 + u$  mit  $u \in X_2$ .

(3) Der *Index* eines Fredholm-Operators  $T$  ist durch

$$\text{ind } T := \dim \ker T - \dim \text{coker } T = \dim \ker T - \text{codim } \text{ran } T$$

definiert.

BEISPIEL 5.2. (1) Angenommen  $X$  ist ein Banachraum und  $K : X \rightarrow X$ . Ist  $\dim(KX) < \infty$ . dann ist  $1 + K$  Fredholm.

(2) Viele wichtige Fredholm-Operatoren sind von der Form

$$T = 1 + K, \quad K \in \mathcal{J}^\infty(X), \tag{5.1}$$

eq:exfredholmcompact

wobei  $K$  ein kompakter Operator auf einem Banachraum  $X$  ist. Wir beweisen diese Aussage für den Fall von Hilberträumen.

BEWEIS. Siehe Dyatlov–Zworski <sup>DyatlovZworski2019</sup> [DZ19, S. 519–520].

(1)

(2) □

Folgender Satz zeigt, dass sich der Index unter kontinuierlichen Deformationen (gemessen in der Operatornormtopologie) nicht verändert. Dies zeigt insbesondere, dass der Index von Operatoren der Form  $1 + K$  (wo  $K$  kompakt ist) gerade Null ist, denn

$$\text{ind } 1 = 0 = \text{ind}(1 + tK) = \text{ind}(1 + K), \quad t \in [0, 1]. \tag{5.2}$$

constindex

SATZ 5.3. *Die Menge aller Fredholm-Operatoren ist offen in  $\mathcal{L}(X_1, X_2)$ . Des Weiteren ist der Index in jeder Komponente dieser Menge konstant. Anders ausgedrückt: ist  $T : X_1 \rightarrow X_2$  Fredholm, dann gibt es ein  $\epsilon > 0$ , sodass für alle  $\tilde{T} \in \mathcal{B}(X_1, X_2)$  mit  $\|T - \tilde{T}\| < \epsilon$  auch  $\tilde{T}$  Fredholm ist mit  $\text{ind}(\tilde{T}) = \text{ind}(T)$ .*

BEWEIS. Siehe Dyatlov–Zworski <sup>DyatlovZworski2019</sup> [DZ19, Theorem C.5]. □

BEMERKUNGEN 5.4. (1) Ein beschränkter, linearer Operator  $T : X_1 \rightarrow X_2$  ist genau dann Fredholm, wenn es einen weiteren beschränkten linearen Operator  $S : X_2 \rightarrow X_1$  gibt, sodass

$$PS = 1_{X_2} + K_2, \quad ST = 1_{X_1} + K_1, \quad \text{wobei } K_j : X_j \rightarrow X_j \text{ endlichen Rang haben.} \tag{5.3}$$

eq:fredholmboundedopchar

Dies zeigt, dass beschränkte Störungen (bezüglich der Operatornormtopologie) von Fredholm-Operatoren immer noch Fredholm sind. Theorem 5.3 zeigt, dass der Index sich bei solchen Störungen nicht ändert.

(2)

## 5.2. Meromorphe Fortsetzung von Operatoren.

### 6. Beurling–Deny-Kriterien

Ist  $H$  ein positiver, selbstadjungierter Operator, so gibt es ein besonders einfaches Kriterium, dass  $H$  auf  $L^2(M, d\mu)$  (wobei  $\mu$  ein  $\sigma$ -endliches Maß sein soll) eine positiv-erhaltende Halbgruppe  $e^{-tH}$  für  $t > 0$  erzeugt.

SATZ 6.1 (Beurling–Deny-Kriterium I). *Sei  $H \geq 0$  ein selbstadjungierter Operator auf  $L^2(M, d\mu)$ . Wir setzen  $(\psi, H\psi)$  auf ganz  $L^2$  fort, indem wir  $(\psi, H\psi) = \infty$  für alle  $\psi \notin \mathcal{Q}(H)$  setzen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- a)  $e^{-tH}$  ist positiv-erhaltend für alle  $t > 0$ .
- b)  $(|u|, H|u|) \leq (u, Hu)$  für alle  $u \in L^2$ .
- c)  $e^{-tH}$  erhält die Realität und es gilt (mit  $u_+(x) := \max\{u(x), 0\}$ )

$$(u_+, Hu_+) \leq (u, Hu) \quad (6.1)$$

für alle reellwertigen  $u \in L^2$ .

- d)  $e^{-tH}$  erhält die Realität und es gilt (mit  $u_- := u_+ - u$ )

$$(u_+, Hu_+) + (u_-, Hu_-) \leq (u, Hu) \quad (6.2)$$

für alle reellwertigen  $u \in L^2$ .

BEWEIS. Wir zeigen  $a) \Rightarrow b) \Rightarrow a)$ . Die Beweise  $a) \Rightarrow d)$  und  $c) \Rightarrow a)$  gehen analog.

$a) \Rightarrow b)$ : Mit unserer Konvention für die Erweiterung von  $(\cdot, H\cdot)$  auf ganz  $L^2$  ist zunächst

$$(u, Hu) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(u, (1 - e^{-tH})u)}{t}. \quad (6.3)$$

Per Voraussetzung ist  $|e^{-tH}u| \leq e^{-tH}|u|$ , weshalb

$$(u, e^{-tH}u) = \|e^{-tH/2}u\|_2^2 \leq \|e^{-tH/2}|u|\|^2 = (|u|, e^{-tH}|u|). \quad (6.4)$$

Da  $(|u|, |u|) = (u, u)$  ist, haben wir

$$(u, (e^{-tH} - 1)u) \leq (|u|, (e^{-tH} - 1)|u|) \quad (6.5)$$

und die Behauptung folgt aus der obigen Darstellung von  $(u, Hu)$ .

$b) \Rightarrow a)$ : Angenommen,  $u$  ist eine positive Funktion und  $a > 0$ . Sei  $w := (H + a)^{-1}u$  und definiere  $Q(\varphi) := (\varphi, H\varphi) + a(\varphi, \varphi)$  auf ganz  $L^2$ . Dann bemerkt man zunächst, dass für  $\varphi \in \mathcal{D}(H)$  und alle  $\psi$

$$Q(\varphi + \psi) = Q(\varphi) + Q(\psi) + 2\operatorname{Re}((H + a)\varphi, \psi) \quad (6.6)$$

gilt. Ist  $\operatorname{Re}(v) \geq 0$ , so ist

$$Q(w + v) = Q(w) + Q(v) + 2\operatorname{Re}(u, v) \geq Q(w) + Q(v). \quad (6.7)$$

Anders ausgedrückt: erfüllt  $\varphi := w + v$   $\operatorname{Re}(\varphi) \geq \operatorname{Re}(w)$ , so ist  $Q(\varphi) \geq Q(w)$  und es herrscht nur dann Gleichheit, wenn  $\varphi = w$ . Per Voraussetzung ist  $Q(|w|) \leq Q(w)$ .

Da  $\operatorname{Re}(|w|) \geq \operatorname{Re}(w)$ , folgt  $|w| = w$ , das heißt  $w \geq 0$ . Damit ist  $(H + a)^{-1}$  positiv-erhaltend für alle  $a > 0$ . Nach Satz [NOCH EINFUEGEN] ( $e^{-tH}$  ist genau dann positiv-erhaltend für alle  $t > 0$ , wenn  $(H + a)^{-1}$  für alle  $a < \inf \sigma(H)$  positiv-erhaltend ist) folgt, dass auch die Halbgruppe positiv-erhaltend ist.  $\square$

BEISPIEL 6.2. Kriterium *d*) impliziert, dass eine endlichdimensionale, positiv-definite Matrix genau dann eine positiv-erhaltende Halbgruppe erzeugt, wenn all ihre Außerdiagonalelemente negativ sind.

BEISPIEL 6.3. Man kann (auch ohne die Trottersche Produktformel) direkt sehen, dass  $H_0 + V$ , als Formsumme aufgefasst, eine positiv-erhaltende Halbgruppe erzeugt, wenn  $H_0$  eine positiv-erhaltende Halbgruppe erzeugt und  $V$  ein positiver Multiplikationsoperator ist. Ist  $\mathcal{Q}(H_0) = \mathcal{Q}(H)$ , so gilt Kriterium *b*) genau dann für  $H_0$ , wenn es für  $H$  gilt.

BEISPIEL 6.4. Die Dirichlet- und Neumann-Laplace-Operatoren erfüllen Kriterium *b*) und erzeugen daher ebenfalls positiv-erhaltende Halbgruppen. Anders ausgedrückt sind die Kerne ihrer Resolventen, also die Greenschen Funktionen, positive Funktionen.

Als Nächstes stellen wir ein Kriterium vor, aus welchem folgt, dass  $e^{-tH}$  eine Kontraktion auf allen  $L^p$ -Räumen ist und die Positivität erhält.

SATZ 6.5 (Beurling–Deny-Kriterium II). *Sei  $H \geq 0$  selbstadjungiert und erzeuge eine positiv-erhaltende Halbgruppe auf  $L^2(M, d\mu)$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- a)  $e^{-tH}$  ist eine Kontraktion auf allen  $L^p(M, d\mu)$  für alle  $p$  und alle  $t \geq 0$ .
- b)  $e^{-tH}$  ist eine Kontraktion auf  $L^\infty(M, d\mu)$  für alle  $t > 0$ .
- c) Für alle  $f \geq 0$  ist

$$(\min\{1, f\}, H \min\{1, f\}) \leq (f, Hf). \quad (6.8)$$

- d) Sei  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine beliebige Funktion, die  $|F(x)| \leq |x|$  und  $|F(x) - F(y)| \leq |x - y|$  erfüllt. Dann gilt

$$(F(f), HF(f)) \leq (f, Hf) \quad (6.9)$$

für alle  $f \in L^2$ .

BEWEIS. Wir zeigen *c*)  $\Rightarrow$  *b*) und *a*)  $\Rightarrow$  *d*). Die Implikation *b*)  $\Rightarrow$  *a*) folgt (mehr oder weniger) aus Dualität und *d*)  $\Rightarrow$  *c*) folgt, da  $F(z) := \min\{\operatorname{Re}(z), 1\}$  die Bedingungen an  $F$  erfüllt.

*c*)  $\Rightarrow$  *b*): Wir fixieren  $u \in L^2$  mit  $0 \leq u \leq 1$  und definieren

$$\psi(v) := (v, Hv) + \|u - v\|^2 = (v, (H + 1)v) + \|u\|^2 + 2\operatorname{Re}(u, v). \quad (6.10)$$

Sei  $R := (H + 1)^{-1}$ , dann ist  $\psi(Ru) = \|u\|^2 - (u, Ru)$  und

$$((Ru - v), (H + 1)(Ru - v)) = (u, Ru) + (v, (H + 1)v) - 2\operatorname{Re}(u, v). \quad (6.11)$$

Damit hat man

$$\psi(v) = \psi(Ru) + ((Ru - v), (H + 1)(Ru - v)). \quad (6.12)$$

Man sieht, dass  $\psi(v)$  genau dann minimiert wird, wenn  $v = Ru$  gewählt wird. Da  $u \leq 1$  ist, ist

$$|(u - \min\{v, 1\})(x)| \leq |(u - v)(x)| \quad (6.13)$$

und dank der Voraussetzung dann auch  $(\min\{v, 1\}, H \min\{v, 1\}) \leq (v, Hv)$ , wenn  $v \geq 0$  ist. Damit ist

$$\psi(\min\{Ru, 1\}) \leq \psi(Ru). \quad (6.14)$$

Da  $\psi$  durch  $Ru$  minimiert wird, haben wir  $\min\{Ru, 1\} = Ru$ , das heißt  $Ru \leq 1$ . Damit ist  $R$  eine Kontraktion auf  $L^\infty$ . Analog erhält man, dass auch  $(1 + \epsilon H)^{-1}$  eine Kontraktion auf  $L^\infty$  für alle  $\epsilon$  ist. Damit ist auch  $e^{-tH} = \lim(1 + tH/n)^{-n}$  eine Kontraktion auf  $L^\infty$ .

a)  $\Rightarrow$  d): Wegen der Darstellung  $(u, Hu) = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}[(u, (1 - e^{-tH})u)]$  müssen wir lediglich

$$(F(f), (1 - e^{-tH})F(f)) \leq (f, (1 - e^{-tH})f) \quad (6.15)$$

für alle  $t > 0$  zeigen. Sei dazu  $K$  ein endlichdimensionaler Unterraum von  $L^2(M, d\mu)$  von Funktionen der Form  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ , wobei die  $\{A_i\}_{i=1}^n$  disjunkte Mengen endlichen Maßes sind. Die Menge solcher  $K$ 's ist diskret, wenn wir die Ordnungsrelation durch  $K' > K$  genau dann, wenn  $K \subset K'$  definieren. Ist  $P(K)$  eine Projektion auf  $K$  mit  $s - \lim_K P(K) = 1$ , so genügt es zu zeigen, dass

$$(F(P(K)f), (1 - e^{-tH})F(P(K)f)) \leq (P(K)f, (1 - e^{-tH})P(K)f) \quad (6.16)$$

für alle  $K$ . Sei dazu

$$b_{ij} = (\chi_{A_i}, (1 - e^{-tH})\chi_{A_j}), \quad (6.17)$$

dann genügt es

$$\sum_{i,j} \overline{F(\alpha_i)} F(\alpha_j) b_{ij} \leq \sum_{ij} \overline{\alpha_i} \alpha_j b_{ij} \quad (6.18)$$

zu zeigen. Sei  $\lambda_i = (\chi_{A_i}, \chi_{A_i})$  und  $a_{ij} = (\chi_{A_i}, e^{-tH} \chi_{A_j})$ . Dann sind die  $a_{ij} \geq 0$  und, da per Voraussetzung  $\|e^{-tH} \chi_{A_j}\|_1 \leq \lambda_j$  ist ( $e^{-tH}$  ist eine  $L^1$ -Kontraktion), haben wir

$$\sum_i a_{ij} \leq \lambda_j. \quad (6.19)$$

Sei nun noch  $m_j = \lambda_j - \sum_i a_{ij} \geq 0$ , dann ist  $b_{ij} = \lambda_i \delta_{ij} - a_{ij}$ , weshalb

$$\sum_{ij} \overline{z_i} z_j b_{ij} = \sum_{i < j} a_{ij} |z_i - z_j|^2 + \sum_j m_j |z_j|^2. \quad (6.20)$$

Aus dieser Darstellung folgt dann die Behauptung.  $\square$

BEISPIEL 6.6. Man sieht, dass die Dirichlet- und Neumann-Laplace-Operatoren kontrahierende, positiv-erhaltende Halbgruppen auf allen  $L^p$  erzeugen.

## 7. Unique continuation Sätze für Schrödinger-Operatoren

Für eine erste Zusammenfassung der Literatur, siehe Salo's Notizen [Sal14] <sup>Salo2014Notes</sup>. Moderne Entwicklungen von Garrigue [Gar18, Gar19, Gar20] <sup>Garrigue2018, Garrigue2019, Garrigue2020</sup> für  $N$ -Teilchen-Systeme. Klassische Theoreme finden sich beispielsweise in Hörmander [Hör85, Hör83] <sup>Hörmander1985III, Hörmander1983</sup> Theoreme 17.2.1 und 17.2.6] auf  $L^2$ -Carleman-Abschätzungen aufbauend [Hör85, Proposition 14.7.1] und [Hör85, Proposition 17.2.3], sowie Kenig–Ruiz–Sogge [KRS87, Corollary 3.1] <sup>Kenigetal1987</sup> auf  $L^p$ -Carleman-Abschätzung [KRS87, Theorem 3.1] <sup>Kenigetal1987</sup> aufbauend, sowie Jerison–Kenig [JK85] <sup>JerisonKenig1985</sup>, der die Grundlage von [KRS87] <sup>Kenigetal1987</sup> war. Anwendungen in Abwesenheit von positiven Eigenwerten z.B. in Hörmander [Hör83, Theorem 14.7.2] <sup>Hörmander1983</sup> und [Hör85, Theorem 17.2.8] <sup>Hörmander1985III</sup>

s:uniquecont

### 7.1. Reed–Simon folgend.

theorem:7.1

SATZ 7.1 (weak unique continuation). Sei  $V$  eine Funktion auf  $\mathbb{R}^n$ , sodass

- (i)  $V$  ist relativ  $-\Delta$ -beschränkt mit  $-\Delta$ -Schranke  $< 1$  und
- (ii) es gibt eine abgeschlossene Menge  $S$  mit Maß Null, sodass  $\mathbb{R}^n \setminus S$  zusammenhängend ist und  $V$  auf jedem Kompaktum von  $\mathbb{R}^n \setminus S$  beschränkt ist.

Sei  $H = -\Delta + V$  und  $Hu = Eu$  für ein  $E$  und  $u \in L^2$ . Angenommen,  $u$  verschwindet auf einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ , so verschwindet  $u$  identisch.

Im Folgenden werden wir eine stärkere Version (nur für  $n = 3$  allerdings) zeigen.

theorem:7.2

SATZ 7.2 (strong unique continuation). Sei  $u \in H_{loc}^2$ , das heißt  $\varphi u \in \mathcal{D}(-\Delta)$  für alle  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und zusammenhängend und  $u$  erfülle

$$|-\Delta u(x)| \leq M|u(x)| \quad (7.1)$$

fast überall in  $D$ . Verschwindet  $u$  in einer Umgebung eines einzelnen Punktes  $x_0 \in D$ , so ist  $u|_D \equiv 0$ .

Der Beweis beruht auf der Abschätzung

$$\int |x|^\alpha |f(x)|^2 dx \leq \frac{4}{3} R^4 \int |x|^\alpha |-\Delta f|^2 dx \quad (7.2)$$

für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $f \in C^\infty$  mit  $\text{supp}(f) \subseteq \{x : 0 < |x| < R\}$ . Für den Beweis der Ungleichung führen wir eine Partialwellenzerlegung von  $f$  durch, das heißt

$$f(x) = \sum_{\ell, m} f_{\ell, m}(|x|) Y_{\ell, m}\left(\frac{x}{|x|}\right) \quad (7.3)$$

und beweisen ein Analogon dieser Ungleichung in jedem einzelnen Kanal.

LEMMA 7.3. Sei  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  mit  $\text{supp}(f) \in (0, 1)$ . Für  $\ell \in \mathbb{N}_0$  definieren wir

$$g_\ell := -f'' + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} f. \quad (7.4)$$

Dann gilt für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_0^1 x^\alpha |f(x)|^2 dx \leq \frac{4}{3} \frac{1}{2\ell+1} \int_0^1 x^\alpha |g_\ell|^2 dx. \quad (7.5)$$

BEWEIS. Für festes  $\ell \in \mathbb{N}_0$  sei  $D$  der formale Differentialoperator  $-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}$ . Dann ist formal  $Dh_+ = Dh_- = 0$  für  $h_+(x) = x^{\ell+1}$  und  $h_-(x) = x^{-\ell}$ . Da  $f(0) = f(1) = 0$ , integrieren wir  $\int f Dh_\pm = 0$  partiell und folgern

$$\int_0^1 g_\ell(x) h(x) dx = 0. \quad (7.6)$$

Dann behaupten wir

$$f(x) = \frac{h_+(x)A(x) + h_-(x)B(x)}{2\ell+1} \quad (7.7a)$$

$$A(x) = \int_x^1 g(y) h_-(y) dy \quad B(x) = \int_0^x g(y) h_+(y) dy \quad (7.7b)$$

wobei  $g \equiv g_\ell$ . Sei dazu  $F(x) := \frac{h_+(x)A(x) + h_-(x)B(x)}{2\ell+1}$ , dann ist  $DF = g$ , da  $h_+ h'_- - h'_+ h_- = 2\ell+1$  und der Träger von  $F$  wegen  $\int_0^1 g_\ell(x) h(x) dx = 0$  strikt in  $(0, 1)$

enthalten ist. Da  $D(F-f) = 0$  und  $F-f = 0$  nahe dem Ursprung ist, folgt  $F-f = 0$  wegen der Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Als Nächstes behaupten wir, dass für alle  $\beta$

$$|A(x)x^\beta| \leq \int_0^1 |x^\beta h_-(x)g(x)| dx \quad (7.8a)$$

$$|B(x)x^\beta| \leq \int_0^1 |x^\beta h_+(x)g(x)| dx. \quad (7.8b)$$

gelten. Angenommen zunächst  $\beta > 0$ . Dann ist

$$|A(x)x^\beta| \leq x^\beta \int_x^1 y^{-\beta} |y^\beta h_-(y)g(y)| dy \leq \int_x^1 y^\beta |h_-(y)g(y)| dy. \quad (7.9)$$

Ist  $\beta \leq 0$  schreiben wir  $A$  um und verwenden  $\int_0^1 g_\ell(x)h(x)dx = 0$ , sodass

$$|A(x)x^\beta| \leq x^\beta \int_0^x y^{-\beta} |y^\beta h_-(y)g(y)| dy \leq \int_0^x |y^\beta h_-(y)g(y)| dy. \quad (7.10)$$

Die Abschätzung für  $B$  folgt analog. Insgesamt haben wir also

$$\begin{aligned} H(x) := x^{\alpha-2} |f(x)|^2 &\leq \frac{(|x^{\frac{\alpha}{2}+\ell}A(x)| + |x^{\frac{\alpha}{2}-\ell-1}B(x)|)^2}{(2\ell+1)^2} \\ &\leq \frac{4}{(2\ell+1)^2} \left( \int_0^1 |x^{\frac{\alpha}{2}}g(x)| \right)^2 \leq \frac{4}{(2\ell+1)^2} \int_0^1 x^\alpha |g(x)|^2 dx. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Insbesondere ist

$$\int_0^1 x^\alpha |f(x)|^2 dx = \int_0^1 x^2 H(x) dx \leq \frac{4}{3(2\ell+1)^2} \int_0^1 x^\alpha |g(x)|^2 dx. \quad (7.12)$$

□

Die Abschätzung

$$\int |x|^\alpha |f(x)|^2 dx \leq \frac{4}{3} R^4 \int |x|^\alpha |-\Delta f|^2 dx$$

folgt aus diesem Lemma durch die Partialwellenzerlegung und Summation über  $\ell$ . Folgende Verallgemeinerung ist elementar.

**LEMMA 7.4.** *Sei  $h \in H^2(\mathbb{R}^3)$  und  $h$  verschwinde außerhalb einer kompakten Teilmenge der um  $a \in \mathbb{R}^3$  zentrierten, offenen Kugel  $\{x : 0 < |x-a| < R\}$ . Dann ist*

$$\int |x-a|^\alpha |h(x)|^2 dx \leq \frac{4}{3} R^4 \int |x-a|^\alpha |-\Delta h(x)|^2 dx \quad (7.13)$$

für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**BEWEIS.** Folgt für  $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$  aus der obigen Abschätzung, indem man  $y = \frac{x-a}{R}$  ersetzt. Approximation für alle  $h \in \mathcal{D}(-\Delta)$  zeigt das Lemma. □

**LEMMA 7.5.**

**BEWEIS VON SATZ <sup>theorem:7.2</sup> 7.2.** Für  $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$  definieren wir

$$R_x := \min\left\{\left(\frac{128}{3}M^2\right)^{-1/4}, \frac{1}{2}\text{dist}(x, \partial D)\right\}.$$

□

## 7.2. Hörmander, Kenig, Ruiz, Sogge folgend.

### 7.2.1. Carleman-Abschätzungen.

BEHAUPTUNG 7.6. Seien  $\lambda, \tau > 0$ , dann gilt

$$\int |u|^2 |x|^\tau \leq \frac{1}{2\lambda\tau} \int |(\Delta + \lambda)u|^2 |x|^{2+\tau} dx, \quad u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}).$$

Die Aussage ist offenbar dann interessant, wenn  $\tau \rightarrow \infty$ , da dann der Vorfaktor auf der rechten Seite verschwindet. Typischerweise erfüllen Streuzustände von Schrödingergleichung  $(1 + |x|)^\tau u \in H^1$  für alle  $\tau > 0$ . Interessant hierbei ist auch, dass auf der rechten Seite  $|x|^{2+\tau}$ , statt, wie man aus Homogenitätsgründen erwarten könnte,  $|x|^{4+\tau}$ . Der Grund hierfür ist, dass “alle Ableitungen weggeworfen werden”, siehe auch den Beweis.

BEWEIS. Siehe Hörmander <sup>Hörmander1983</sup> [Hör83, Proposition 14.7.1].  $\square$

SATZ 7.7. Sei  $d \geq 3$  und  $P(D)$  ein quadratischer Operator wie in <sup>Kenigetal1987</sup> [KRS87] (z.B.  $-\Delta$  oder  $-\Delta + \partial_t^2$  etc.) sowie  $1/p - 1/p' = 2/d$ . Falls  $\nu \in \mathbb{R}^{d-1}$ , dann gilt für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ , dass

$$\|e^{\lambda \langle x, \nu \rangle} u\|_{L^{p'}} \lesssim \|e^{\lambda \langle x, \nu \rangle} P(D)u\|_{L^p}$$

BEWEIS. Siehe Kenig–Ruiz–Sogge <sup>Kenigetal1987</sup> [KRS87, Theorem 3.1]. Folgt im wesentlichen sofort aus der gleichmäßigen Sobolewungleichung  $\|u\|_{L^{p'}} \lesssim \|(P(D) - z)u\|_{L^p}$  für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus D_0(1)$ .  $\square$

### 7.2.2. Unique continuation.

SATZ 7.8 (Strong UCP). Sei  $p(x, D) = \sum a_{jk}(x) D_j D_k$  ein elliptischer Operator in einer zusammenhängenden Umgebung  $X$  von 0 sodass  $a_{jk}(0)$  reell ist,  $a_{jk}$  ist stetig in  $X$  und Lipschitz-stetig in  $X \setminus \{0\}$  und  $|a'_{jk}| \leq C|x|^{-1+\delta}$  für ein  $\delta > 0$ . Angenommen weiter<sup>1</sup>, dass

- $P_m(0, D) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(0) D^\alpha$  elliptisch ist und
- für ein  $p \in (1, \infty)$  es gilt, dass  $a_\alpha \in L_{loc}^{d/(m-|\alpha|)}$ , wenn  $m - |\alpha| < d/p$ ,  $a_\alpha \in L_{loc}^{p+\epsilon}$  für ein  $\epsilon > 0$ , falls  $m - |\alpha| = d/p$  und  $a_\alpha \in L_{loc}^p$ , falls  $m - |\alpha| > d/p$ .

Falls  $D^\alpha u \in L_{loc}^2$  wenn  $|\alpha| \leq 1$  und

$$|p(x, D)u| \leq C \sum_{|\alpha| \leq 1} |x|^{\delta+|\alpha|-2} |D^\alpha u|,$$

$$\int_{|x| \leq \epsilon} |u|^2 = \mathcal{O}(\epsilon^N), \quad \epsilon \rightarrow 0$$

für alle  $N > 0$ , dann muss  $u = 0$  in  $X$  sein.

BEWEIS. Siehe Hörmander <sup>Hörmander1985III</sup> [Hör85, Theorem 17.2.6].  $\square$

SATZ 7.9. Sei  $d \geq 3$  und  $P(D)$  ein quadratischer Operator wie in <sup>Kenigetal1987</sup> [KRS87] (z.B.  $-\Delta$  oder  $-\Delta + \partial_t^2$  etc.) sowie  $1/p - 1/p' = 2/d$ . Angenommen  $V \in L^{d/2}$  und  $u$  sei auf einer Halbebene getragen und erfülle die Schrödinger-Ungleichung

$$|P(D)u| \leq |Vu|.$$

Dann muss  $u = 0$  sein.

BEWEIS. Siehe Kenig–Ruiz–Sogge <sup>Kenigetal1987</sup> [KRS87, Corollary 3.1].  $\square$

<sup>1</sup>Siehe auch die Annahmen <sup>Hörmander1985III</sup> [Hör85, S. 4].

## 7.2.3. Abwesenheit positiver Eigenwerte.

SATZ 7.10. Angenommen  $u$  löst die Schrödingergleichung

$$(-\Delta - V)u = \lambda u$$

für ein  $\lambda > 0$ , wobei  $|V(x)| \leq C/|x|$ . Falls  $(1 + |x|)^\tau D^\alpha u \in L^2$  für alle  $\tau > 0$ , wann immer  $|\alpha| \leq 1$ , dann muss  $u = 0$  sein.

BEWEIS. Siehe Hörmander <sup>Hörmander1983</sup> [Hör83, Theorem 14.7.2]. □

SATZ 7.11. Sei  $p(x, D) = \sum a_{jk}(x) D_j D_k$  ein elliptischer Operator in einer zusammenhängenden Umgebung  $X$  von 0 sodass<sup>2</sup>

- $a_{jk}(0)$  reell und  $a_{jk}$  sind Lipschitz-stetig sowie

$$|a_{jk}(x) - \delta_{jk}| \leq C|x|^{-1-\delta} \quad \text{und} \quad |a'_{jk}(x)| \leq C|x|^{-2-\delta}$$

in einer Umgebung von Unendlich<sup>3</sup>,

- $P_m(0, D) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(0) D^\alpha$  elliptisch ist und
- für ein  $p \in (1, \infty)$  es gilt, dass  $a_\alpha \in L_{loc}^{d/(m-|\alpha|)}$ , wenn  $m - |\alpha| < d/p$ ,  $a_\alpha \in L_{loc}^{p+\epsilon}$  für ein  $\epsilon > 0$ , falls  $m - |\alpha| = d/p$  und  $a_\alpha \in L_{loc}^p$  falls  $m - |\alpha| > d/p$ .

Angenommen  $(1 + |x|)^\tau D^\alpha u \in L^2(X)$  für alle  $\tau > 0$ , wann immer  $|\alpha| \leq 1$ . Falls  $\lambda > 0$  und

$$|p(x, D)u - \lambda u| \leq C|x|^{-1} \sum_{|\alpha| \leq 1} |D^\alpha u|, \quad x \in X$$

gilt, dann muss  $u = 0$  sein.

BEWEIS. Siehe Hörmander <sup>Hörmander1985III</sup> [Hör85, Theorem 17.2.8]. □

<sup>2</sup>Siehe auch die Annahmen <sup>Hörmander1985III</sup> [Hör85, S. 4].

<sup>3</sup>Das bedeutet, dass sich  $p(x, D) = \sum a_{jk}(x) D_j D_k$  an  $-\Delta$  im Unendlichen annähert.

# Spektralsatz für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren

## 1. Stieltjes-Maße

s:stieltjesmeasures

Wir folgen Amrein <sup>Amrein2009</sup> [Amr09, Kapitel 4] (insbesondere Abschnitt 4.1) und Teschl <sup>Teschl2014</sup> [Tes14, Abschnitte 3.2-3.3 und Anhang A].

**1.1. Definitionen und Beispiele.** Sei  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte, monotone Funktion. Da jede nicht-fallende oder nicht-steigende Folge reeller Zahlen einen Grenzwert hat, existieren alle folgenden Grenzwerte

$$\begin{aligned} F(\lambda - 0) &:= \lim_{\epsilon \searrow 0} F(\lambda - \epsilon), & F(\lambda + 0) &:= \lim_{\epsilon \searrow 0} F(\lambda + \epsilon) \\ F(-\infty) &:= \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} F(\lambda), & F(\infty) &:= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} F(\lambda). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Falls  $F$  bei  $\lambda \in \mathbb{R}$  stetig ist, gilt  $F(\lambda - 0) = F(\lambda + 0)$  und falls  $F$  bei  $\lambda$  nicht stetig ist, dann ist  $F(\lambda - 0) \neq F(\lambda + 0)$ . Wir verwenden die Konvention, dass, wenn  $F$  bei  $\lambda$  nicht stetig ist, dann setzen wir den Wert von  $F$  bei  $\lambda$  als den Wert, der angenommen wird, wenn  $\lambda$  von rechts angenähert wird, sprich  $F(\lambda) := F(\lambda + 0)$ . (Man hätte auch die andere Wahl  $F(\lambda) := F(\lambda - 0)$  oder die symmetrische Variante  $F(\lambda) = (F(\lambda + 0) + F(\lambda - 0))/2$  wählen können.) Mit dieser Konventionen werden unsere Funktionen immer rechtsseitig stetig sein.

countablejumps

**LEMMA 1.1.** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  monoton. Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) Sei  $x_0 \in I$ . Wenn  $x_0 \neq \inf I$ , dann existiert  $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  und es gilt  $f(x_0 - 0) \leq f(x_0)$  falls  $f$  steigt und  $f(x_0 - 0) \geq f(x_0)$  falls  $f$  fällt.
- (2) Sei  $x_0 \in I$ . Falls  $x_0 \neq \sup I$ , dann existiert  $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  und es gilt  $f(x_0 + 0) \geq f(x_0)$  falls  $f$  steigt und  $f(x_0 + 0) \leq f(x_0)$  falls  $f$  fällt.
- (3) Eine monotone Funktion kann höchstens Sprungstellen haben und ist sonst stetig.
- (4) Die Menge aller Stellen, an denen  $f$  nicht stetig ist, ist abzählbar. Insbesondere hat  $f$  höchstens abzählbar viele Sprungstellen.

**BEWEIS.** (1) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass  $f$  steigt. Wenn  $I \ni x_0 \neq \inf I$ , so ist  $\{x \in I : x > x_0\} \neq \emptyset$  und somit auch  $\{f(x) : I \ni x > x_0\} \neq \emptyset$ . Insbesondere ist die Menge nach unten durch  $f(x_0)$  beschränkt, da  $f$  steigt. Insbesondere erfüllt  $\alpha := \inf\{f(x) : I \ni x > x_0\}$  die Ungleichung  $\alpha \geq f(x_0)$ . Wir behaupten  $\alpha = f(x_0 + 0)$ . Sei dazu  $\epsilon > 0$  gegeben. Dann folgt aus der Definition des Infimums als der größten unteren Schranke, dass es  $x_1 \in I$  mit  $x_1 > x_0$  gibt, sodass  $\alpha \leq f(x_1) < \alpha + \epsilon$ . Sei  $\delta = x_1 - x_0$ , sodass  $\delta > 0$ . Wenn  $x \in I$  und

$x_0 < x < x_0 + \delta = x_1$ , dann ist  $\alpha \leq f(x) \leq f(x_1) < \alpha + \epsilon$ , womit die Behauptung gezeigt ist.

- (2) Analog wie (1).  
 (3) Folgt aus (1) und (2).  
 (4) Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $I = [a, b]$  für  $-\infty < a < b < \infty$ . (Jedes Intervall kann als abzählbare Vereinigung von geschlossenen und beschränkten Intervallen konstruiert werden. Da die abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen wieder abzählbar ist, genügt es die Aussage für solche Intervalle zu zeigen.) Sei weiter ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $f$  monoton steigend. Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $D_n := \{x \in (a, b) : f(x_n+) - f(x_n-) > 1/n\}$ . Sei ferner  $D$  die Menge aller Stellen, an denen  $f$  nicht stetig ist. Da  $f$  lediglich Sprungstellen hat ist  $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ . Für festes  $n$  sei  $D_n = \{x_1, \dots, x_r\}$ . Wir zeigen dann, dass  $r < \infty$ . Angenommen wir hätten die Punkte so gewählt, dass  $a < x_1 < \dots < x_r < b$ . Sei  $y_0 = a$ ,  $y_r = b$  und für  $1 \leq k \leq r-1$  sei  $y_k \in (x_k, x_{k+1})$ . Dann gilt für  $1 \leq k \leq r$ , dass  $f(x_k + 0) \leq f(y_k)$ , da  $y_k > x_k$  und  $f(x_k + 0) = \inf\{f(x) : x > x_k\}$ . Ähnlich erhält man, dass  $f(x_k - 0) \geq f(y_{k-1})$ , da  $y_{k-1} < x_k$  und  $f(x_k - 0) = \sup\{f(x) : x < x_k\}$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{r}{n} &< \sum_{k=1}^r (f(x_k + 0) - f(x_k - 0)) \leq \sum_{k=1}^r (f(y_k) - f(y_{k-1})) \\ &= f(y_r) - f(y_0) = f(b) - f(a). \end{aligned}$$

Das zeigt  $r < n(f(b) - f(a))$  und damit, dass die Menge  $D_n$  endlich ist. Da abzählbare Vereinigungen endlicher Mengen wieder abzählbar sind folgt, dass  $D$  abzählbar ist. (Die Funktion könnte auch nicht-stetig bei  $a$  oder  $b$  sein, was die Menge der Sprungstellen aber immer noch abzählbar sein lässt.)

□

In diesem Abschnitt befassen wir uns hauptsächlich mit Borel–Stieltjes-Maßen<sup>1</sup>. Die Strategie zur Konstruktion solcher Maße ist wie folgt: Wir beginnen mit der Algebra der endlichen Vereinigungen disjunkter Intervalle in  $\mathbb{R}$  und definieren ein Maß  $\mu$  für solche Mengen als die Summe über die Intervalle. Dies liefert uns bereits ein Prämaß. Wir erweitern dies dann zu einem äußeren Maß auf  $\mathbb{R}$  und zeigen dann, dass die Restriktion auf Borelmengen ein Maß ist.

Wir versuchen als Erstes  $\mu$  für Intervalle zu definieren. Für jedes Borelmaß auf  $\mathfrak{B}$  können wir die zugehörige *Verteilungsfunktion*

$$\mu(x) = \begin{cases} -\mu((x, 0]), & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \mu((0, x]), & x > 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

definieren, welche rechtsseitig stetig und nicht-abfallend ist.

<sup>1</sup>Ein Maß  $\mu$  auf der Borel- $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{B}(X)$  einer gegebenen Menge  $X$  heißt *Borelmaß*, wenn  $\mu(K) < \infty$  für jedes Kompaktum  $K \in \mathfrak{B}(X)$

BEISPIEL 1.2. Die Verteilungsfunktion des bei Null zentrierten Dirac-Maßes ist

$$\mu(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Für ein endliches Maß kann man alternative die Normierung  $\tilde{\mu}(x) = \mu((-\infty, x])$  verwenden. Die so erhaltene Verteilungsfunktion unterscheidet sich von obiger Definition nur durch die Konstante  $\mu(x) = \tilde{\mu}(x) - \mu((-\infty, 0])$ .

Wir versuchen nun zu verstehen, wie man aus einer nicht-abfallenden Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein Maß erhält.

defborelstieltjes

DEFINITION 1.3. Angenommen  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllt

- (1)  $F$  ist monoton nicht-fallend, sprich  $\lambda \geq \mu$  impliziert  $F(\lambda) \geq F(\mu)$ ,
- (2)  $F$  ist rechtsseitig stetig, sprich  $F(\lambda) = F(\lambda + 0)$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  und
- (3)  $F(-\infty) = 0$  und  $\rho := F(+\infty) < \infty$ .

Das zu  $F$  gehörende *Borel-Stieltjes-Maß*  $m^F$  ist dann für  $a < b$  durch

$$m^F((a, b]) = F(b) - F(a) = \text{Variation von } F \text{ auf } (a, b]. \quad (1.3) \quad \text{eq: defmf}$$

definiert. Insbesondere ist  $m^F(\{a\}) = F(a + 0) - F(a - 0)$ .

Wir bemerken, dass  $m^F(\{a\}) = 0$  genau dann, wenn  $F(x)$  bei  $x = a$  stetig ist. Wegen Lemma 1.1 kann es nur eine abzählbare Menge von Punkten  $a_j \in \mathbb{R}$  geben, für die  $m^F(\{a_j\}) > 0$  ist.

BEMERKUNG 1.4. Obige Definition hätte durch

$$m^F(I) = \begin{cases} F(b + 0) - F(a + 0), & I = (a, b], \\ F(b + 0) - F(a - 0), & I = [a, b], \\ F(b - 0) - F(a + 0), & I = (a, b), \\ F(b - 0) - F(a - 0), & I = [a, b) \end{cases} \quad (1.4) \quad \text{eq: defmf2}$$

präzisiert werden können, siehe auch [Teschl2014, S. 299].

Per Voraussetzungen an  $F$  ist  $m^F((a, b]) \in [0, \rho]$ . Weiterhin ist  $m^F$  sigma-additiv auf der Familie aller halboffenen Intervalle; sind beispielsweise  $(a, b]$  und  $(b, c]$  zwei (benachbarte) Intervalle, dann ist  $m^F((a, c]) = m^F((a, b]) + m^F((b, c])$ .

Angenommen  $\mathcal{V}$  ist eine allgemeine Borelmenge, die durch  $\mathcal{V} \subseteq \bigcup_k J_k$  eine Familie von halboffenen Intervallen  $\{J_k\}_k$  überdeckt wird, dann ist

$$m^F(\mathcal{V}) = \inf_{\{J_k\}} \sum_k m^F(J_k),$$

wobei das Infimum über alle möglichen Überdeckungen  $\{J_k\}_k$  von  $\mathcal{V}$  genommen wird.

Da per Voraussetzung  $\rho < \infty$ , ist  $m^F$  ein endliches Maß, denn

$$\begin{aligned} m^F(\mathbb{R}) &= m^F\left(\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (k, k + 1]\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} m^F((k, k + 1]) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} [F(k + 1) - F(k)] = F(\infty) - F(-\infty) = \rho < \infty. \end{aligned}$$

LEMMA 1.5. Die Intervallfunktion  $\mu$ , die in <sup>(eq: defmf)</sup>(I.3) (bzw. <sup>(eq: defmf2)</sup>(I.4)) definiert ist, erzeugt ein eindeutiges  $\sigma$ -endliches Prämaß auf der Algebra  $\mathcal{A}$  der endlichen Vereinigungen disjunkter Mengen.

BEWEIS. Siehe Teschl <sup>[Teschl2014]</sup>[Tes14, Lemma A.2]. □

Dieses Prämaß ist insbesondere ein Prämaß auf der Algebra der endlichen Vereinigungen von Intervallen. Wir haben folgende Eindeutigkeitsaussage zur Erweiterung dieses Prämaßes zu einem Maß.

uniqueborelmeas

SATZ 1.6. Für jede nicht-fallende Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gibt es ein eindeutiges Borelmaß  $\mu$ , welches  $m^F$  in <sup>(eq: defmf)</sup>(I.3) erweitert. Zwei unterschiedliche Funktionen  $F_1$  und  $F_2$  erzeugen dasselbe Maß genau dann, wenn  $F_1 - F_2$  abseits von Unstetigkeitsstellen konstant ist.

BEWEIS. Siehe Teschl <sup>[Teschl2014]</sup>[Tes14, Theorem A.3]. □

Schließlich ist es interessant zu wissen, dass die bisherige Diskussion auch umgekehrt werden kann. Angenommen  $m$  ist ein Borel-Maß auf der Sigma-Algebra  $\mathcal{A}_B$  der reellen Zahlen. Dann gibt es eine eindeutige Funktion  $F$  (die Verteilungsfunktion von  $m$ ), die die drei Eigenschaften aus Definition <sup>(defborelstieltjes)</sup>I.3 erfüllt und deren zugehöriges Borel-Stieltjes-Maß  $m^F$  mit  $m$  übereinstimmt, sprich es gilt  $m(\mathcal{V}) = m^F(\mathcal{V})$  für alle  $\mathcal{V} \in \mathcal{A}_B$ . Man rechnet leicht nach, dass die Funktion

$$F(\lambda) = m((-\infty, \lambda])$$

alle gewünschten Eigenschaften erfüllt.

An dieser Stelle machen wir die folgende wichtige

defsuppmeasure

DEFINITION 1.7. (1) Sei  $(X, \Sigma, \mu)$  ein Maßraum. Eine Menge  $A \in \Sigma$  heißt Träger von  $\mu$ , wenn  $\mu(X \setminus A) = 0$ .

(2) Wenn  $X$  ein topologischer Raum ist und  $\Sigma = \mathfrak{B}(X)$  die Borel- $\sigma$ -Algebra<sup>2</sup> von  $X$  ist (also die  $\sigma$ -Algebra, die durch alle offenen Mengen erzeugt wird), dann ist der (topologische) Träger von  $\mu$  durch

$$\text{supp}(\mu) = \{x \in X : \mu(O) > 0 \text{ für jede offene Umgebung } O \text{ von } x\} \quad (1.5)$$

gegeben.

(3) Für  $X = \mathbb{R}$  und zugehörigem Borelmaß  $\mu$  bezeichnet man den topologischen Träger auch als die Menge aller Wachstumspunkte von  $\mu$ , die durch

$$\sigma(\mu) := \text{supp}(\mu) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \mu((\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)) > 0 \text{ für alle } \epsilon > 0\} \quad (1.6)$$

gegeben ist.  $\sigma(\mu)$  wird auch als Spektrum von  $\mu$  bezeichnet.

BEMERKUNG 1.8. Man zeigt leicht, dass das Spektrum ein Träger von  $\mu$  ist, sprich  $\mu(\mathbb{R} \setminus \sigma(\mu)) = 0$ . Tatsächlich ist dies gerade der topologische Träger  $\sigma(\mu) = \text{supp}(\mu)$ , der beispielsweise in <sup>[Teschl2014]</sup>[Tes14, Formel (A.7)] definiert wird.

BEMERKUNG 1.9 (Der Träger ist nicht eindeutig). Wir bemerken, dass der Träger eines Maßes in der Regel nicht eindeutig ist. Als Beispiel betrachten wir  $X = \mathbb{R}$ ,  $\Sigma = \mathfrak{B}$  (die Borel- $\sigma$ -Algebra) und  $\mu = \lambda$  das Lebesgue-Maß. In diesem Fall ist  $\text{supp}(\mu) = \mathbb{R}$ . Allerdings hat jeder einzelne Punkt Lebesgue-Maß Null, sprich  $\lambda\{x\} = 0$  für jedes  $x \in \mathbb{R}$ . Wegen  $\sigma$ -Additivität hat auch jede abzählbare Vereinigung von Punkten verschwindendes Lebesgue-Maß. Dies zeigt aber, dass jede

<sup>2</sup>Mengen in der Borel- $\sigma$ -Algebra werden Borelmengen genannt.

Menge in  $\mathfrak{B}$  deren Komplement abzählbar ist, ein Träger von  $\lambda$  ist. Tatsächlich gibt es sogar überabzählbare Mengen mit Lebesgue-Maß Null, siehe die Cantor-Menge weiter unten! Dies zeigt, dass ein Träger sogar überabzählbar viele Punkte vergessen könnte!

Aus diesem Grund definiert man den Träger eines Borel-Maßes auf  $\mathbb{R}$  im Allgemeinen stattdessen durch

$$\text{supp}(d\mu) = \{x \in \mathbb{R} : \mu(x - \epsilon) < \mu(x + \epsilon), \forall \epsilon > 0\}. \quad (1.7)$$

Wir haben hierbei  $d\mu$  statt  $\mu$  geschrieben, um hervorzuheben, dass wir am Träger des Maßes  $d\mu$  interessiert sind, welches vom Träger der zugehörigen Verteilungsfunktion  $\mu(x)$  verschieden ist.

Wir besprechen nun einige Beispiele, die (in einem gewissen Sinne) die extremst möglichen Eigenschaften allgemeiner Borel-Maße darstellen. Die ersten drei Beispiele sind klassisch für Maße, von denen wir sagen werden, dass sie *reine Punktmaße* sind. Im Anschluß geben wir ein Beispiel für ein *absolut stetiges Maß* und abschließend eines für ein *singulär-stetiges Maß*.

BEMERKUNG 1.10. In der Konstruktion von Stieltjes-Maßen ist es sehr wichtig mit *halboffenen* Intervallen  $(a, b]$  zu beginnen. Im Gegensatz zum Lebesgue-Maß kann das Stieltjes-Maß von  $(a, b)$  verschieden von dem von  $(a, b]$  sein, wie das erste Beispiel zeigt, wo  $m^F((0, 2)) = 1/2$ , aber  $m^F((0, 2]) = 1/(1 \cdot 2) + 1/(2 \cdot 3) = 2/3$ .

BEISPIEL 1.11 (Diskretes Maß 1). Unser erstes Beispiel ist ein *diskretes Maß*. Sei dazu

$$F(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda < 1 \\ \frac{k}{k+1} & \text{für } \lambda \in [k, k+1) \end{cases}. \quad (1.8)$$

Offenbar ist  $F$  eine rechtsseitig stetige Treppenfunktion mit Sprungstellen bei  $\lambda \in \mathbb{N}$ . Daraus folgt, dass das zugehörige Maß  $m^F$  nur bei diesen Sprungstellen getragen ist<sup>3</sup>, sprich  $m^F(\{\lambda\}) = 0$ , wenn  $\lambda \notin \mathbb{N}$  und  $m^F(\{\lambda\}) = n/(n+1) - (n-1)/n = 1/[n(n+1)]$ , wenn  $\lambda = n \in \mathbb{N}$ . Dementsprechend gilt für eine allgemeine Borelmenge  $\mathcal{V}$ ,

$$m^F(\mathcal{V}) = \sum_{n \in \mathcal{V} \cap \mathbb{N}} \frac{1}{n(n+1)} \quad (1.9)$$

und insbesondere  $m^F(\mathcal{V}) = 0$ , wenn  $\mathcal{V} \cap \mathbb{N} = \emptyset$ . Maße von diesem Typ heißen *diskrete Maße*, da sie nur auf einer *diskreten Teilmenge* (sprich *isolierten Punkten*) von  $\mathbb{R}$  getragen sind.

BEISPIEL 1.12 (Diskretes Maß 2, Dirac-Maß). Wir betrachten nun einen wichtigen Spezialfall des vorigen Beispiels, wo

$$F(\lambda) = \theta(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda < 0 \\ 1 & \text{für } \lambda \geq 0 \end{cases}$$

die Heaviside-Funktion ist. In diesem Fall ist der Träger von  $m^F$  gerade  $\{0\}$  und  $m^F(\mathcal{V}) = 1$  genau dann, wenn  $\mathcal{V} \cap \{0\} \neq \emptyset$ .  $m^F$  heißt *Dirac-Maß*.

<sup>3</sup>An allen anderen Stellen ist  $F$  ja konstant, sprich  $F(b) - F(a) = 0$  für  $a, b \in [k, k+1)$ .

BEISPIEL 1.13 (Reines Punktmaß). Schließlich verallgemeinern wir noch das erste Beispiel. Wir betrachten stetige Funktionen  $F$ , die nur bei abzählbar vielen, *nicht notwendigerweise isolierten* Punkten  $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  springt. Sei beispielsweise  $\{r_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  eine Aufzählung der rationalen Zahlen im Intervall  $(0, 1)$  und sei

$$F(\lambda) = \sum_{r_j \leq \lambda} 2^{-j}.$$

Offenbar ist  $F(\lambda) = 0$  für  $\lambda \leq 0$ ,  $F(\lambda) = \sum_{j \geq 1} 2^{-j} = 1$  für  $\lambda \geq 1$  und  $F$  springt nur bei den rationalen Zahlen  $r_j$  in  $(0, 1)$  mit Sprunghöhe  $2^{-j}$ . Dementsprechend ist das zugehörige Borel-Maß durch

$$m^F(\mathcal{V}) = \sum_{r_j \in \mathcal{V}} m^F(\{r_j\}) = \sum_{r_j \in \mathcal{V}} 2^{-j}$$

gegeben und nur auf den  $\{r_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  getragen.

Borel-Maße, die nur auf abzählbar vielen Punkten (die nicht isoliert voneinander sein brauchen) werden *reine Punktmaße* oder *atomare Maße* genannt.

BEISPIEL 1.14 (Absolut-stetiges Maß). Sei  $F$  eine stetige Funktion, dann hat jeder Punkt in  $\mathbb{R}$   $m^F$ - (und Lebesgue-)Maß Null. Da  $\lambda \in (\lambda - \epsilon, \lambda]$  für jedes  $\epsilon > 0$ , ist  $m^F(\{\lambda\}) \leq F(\lambda) - F(\lambda - \epsilon)$  für jedes  $\epsilon > 0$ . Da aber  $F$  stetig ist, verschwindet die rechte Seite für  $\epsilon \rightarrow 0$ , sprich  $m^F(\{\lambda\}) = 0$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Das zeigt, dass  $m^F$  nicht auf Punkten getragen ist. Ein Beispiel für eine stetige Funktion  $F$ , die den Bedingungen in Definition 1.3 genügt, wäre  $F(\lambda) = \frac{1}{2} + \pi^{-1} \arctan(\lambda)$ . Diese Funktion ist zudem *absolut stetig*, sprich sie ist, da sie auch monoton nicht-fallend ist, zudem *Lebesgue-fast überall* differenzierbar mit einer Ableitungsfunktion  $F' \in L^1(\mathbb{R})$  und es gilt

$$m^F((a, b]) = F(b) - F(a) = \int_a^b F'(\lambda) d\lambda$$

bzw. allgemeiner

$$m^F(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} F'(\lambda) d\lambda.$$

Das Maß  $m^F(\mathcal{V}) = \pi^{-1} \int_{\mathcal{V}} (1 + \lambda^2)^{-1} d\lambda$  ist ein Beispiel für ein *absolut-stetiges Maß* auf  $\mathbb{R}$ .

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Eigenschaft, dass die Borel-Funktion  $F$  *absolut-stetig* ist, kritisch ist, da (monoton nicht-fallende) Funktionen, die lediglich stetig sind, im Allgemeinen nicht durch ein unbestimmtes Integral ausgedrückt werden können. Ein klassisches Beispiel hierfür ist die Cantor-Funktion, um die es im kommenden Beispiel geht.

BEISPIEL 1.15 (Cantor-Maß, singulär-stetiges Maß). Die *Cantor-Funktion*  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  ist eine stetige nicht-fallende Funktion, die an jedem Punkt außerhalb der *Cantor-Menge*  $C^4$  differenzierbar ist und damit Lebesgue-fast überall differenzierbar ist mit Ableitung gleich Null, sprich  $F'(\lambda) = 0$  für alle  $\lambda \notin C$ . Damit ist unmöglich  $F$  das Integral ihrer Ableitung (welches Null wäre), da  $F(-\infty) = 0$  und  $F(+\infty) = 1$ , siehe auch die folgende Abbildung.

<sup>4</sup>Sprich an den Punkten in den Lücken der Cantor-Menge, welche dicht in  $\mathbb{R}$  sind.

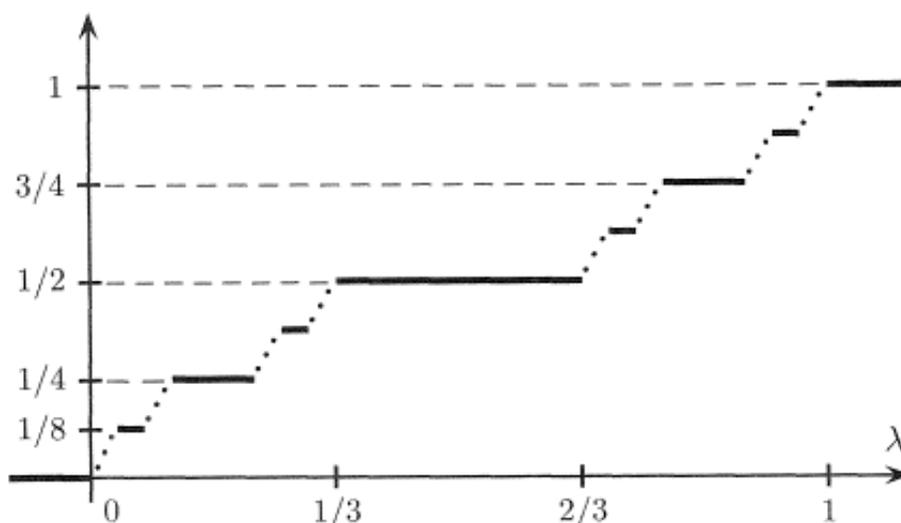


ABBILDUNG 1. Die Cantor-Funktion

Die Funktion erfüllt

$$F(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda \leq 0 \\ 1 & \text{für } \lambda \geq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{für } \lambda \in (1/3, 2/3) \\ \frac{1}{4} & \text{für } \lambda \in (1/9, 2/9) \\ \frac{3}{4} & \text{für } \lambda \in (7/9, 8/9) \\ \dots & \end{cases}$$

und die Werte  $F(\lambda)$  für  $\lambda \in C$  sind durch Stetigkeit der Funktion gegeben. Insbesondere sieht man, dass  $m^F$  nur auf der Cantor-Menge, einer Borel-Menge mit Lebesgue-Maß Null, getragen ist. Daher ist das Cantor-Maß ein Beispiel für ein *rein singular-stetiges Maß*. Dies ist ein Maß, welches

- (1)  $m((-\infty, \lambda]) = F(\lambda)$  mit stetigem  $F$  erfüllt (sprich es gibt keine Masse auf Punkte) und
- (2) auf einer Borel-Menge mit Lebesgue-Maß Null getragen ist.

Wir werden solche Maße später genauer diskutieren. Die Cantor-Funktion ist ein Beispiel für eine *rein singular-stetige Funktion*, also eine Funktion  $\Phi$ , welche

- (1) stetig ist,
- (2) auf dem Komplement einer Lebesgue-Null-Menge  $C$  differenzierbar ist und
- (3) deren Ableitung  $\Phi'$  auf  $\mathbb{R} \setminus C$  exakt verschwindet.

**BEISPIEL 1.16 (Cantor-Menge).** Die Cantor-Menge ist ein Beispiel einer abgeschlossenen Menge von Lebesgue-Maß Null. Man konstruiert sie wie folgt. Wir beginnen mit dem Intervall  $C_0 = [0, 1]$  und entfernen das mittlere Drittel, um die disjunkte Vereinigung  $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$  zu erhalten. Als Nächstes entfernen wir die mittleren Drittel dieser beiden Konstituenten und erhalten  $C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$ . Fahren wir unendlich weiter so fort, erhalten wir eine Folge von Mengen  $C_n$ , deren Grenzwert  $C = \bigcap_n C_n$  die *Cantor-Menge*

ist. Da jedes einzelne  $C_n$  kompakt ist, ist natürlich auch  $C$  kompakt (als Schnitt kompakter Mengen). Darüberhinaus besteht  $C_n$  aus  $2^n$  Intervallen der Länge  $3^{-n}$ . Damit ist das Lebesgue-Maß gerade  $|C_n| = (2/3)^n$  und wir sehen damit, dass  $|C| = \lim_{n \rightarrow \infty} |C_n| = 0$ . Darüberhinaus ist  $C$  überabzählbar, total disjunkt (d.h. sie enthält keine Subintervalle) und perfekt (d.h. sie hat keine isolierten Punkte).

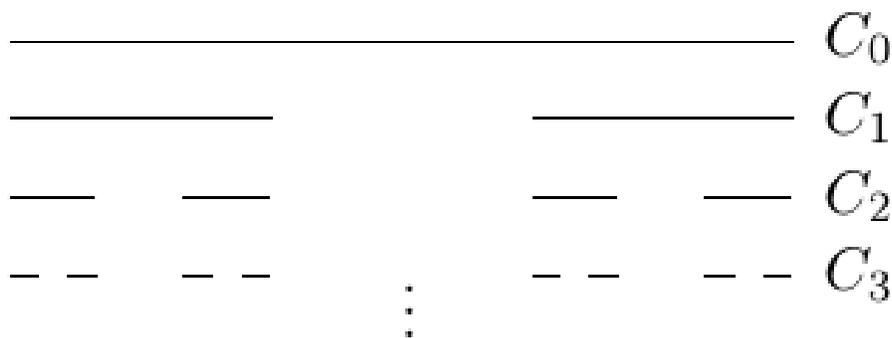


ABBILDUNG 2. Die Cantor-Menge

Die Tatsache, dass  $C$  keine Intervalle enthalten kann folgt aus der Tatsache, dass die entfernten Drittel-Intervalle bereits eine Gesamtlänge von  $\sum_{k \geq 1} 2^k \cdot 3^{-k} = 1$  haben. Zur Perfektheit (sprich  $C$  ist abgeschlossen (was aus Kompaktheit folgt) und enthält ausschließlich Häufungspunkte, also keine isolierten Punkte) sei  $x \in C$ . Wir konstruieren nun eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C$  mit  $x_n \rightarrow x$ . Wir fahren iterativ fort und nehmen zunächst an, dass  $x$  im linken Intervall von  $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1] \equiv I_{1,1} \cup I_{1,2}$  liegt, sprich  $x \in I_{1,1} \equiv I_1$ . Der Schnitt  $C_2 \cap I_1$  beinhaltet offenbar zwei Intervalle  $I_{2,1} \cup I_{2,2}$ , von denen eines den Punkt  $x$  wieder beinhalten kann. Wir setzen dann  $x_1$  als den Randpunkt des anderen Intervalls, der näher an  $x$  gelegen ist. Damit ist natürlich  $x_1 \in C$ . Da  $x, x_1 \in I_1$  folgt insbesondere  $|x - x_1| \leq 1/3$ , da die Intervalle in  $C_1$  die Länge  $1/3$  haben. Angenommen nun  $x \in I_2$ , wobei ähnlich wie eben  $I_2 \in \{I_{2,1}, I_{2,2}, I_{2,3}, I_{2,4}\}$  mit  $C_2 = \bigcup_{j=1}^4 I_{2,j}$ . Wieder besteht der Schnitt  $C_3 \cap I_2$  aus zwei Intervallen, von denen eines den Punkt  $x$  enthält. Wir wählen dann wieder  $x_2$  als den Randpunkt des anderen Intervalls, welcher näher an  $x$  liegt. Da die Intervalle in  $C_2$  die Länge  $1/9$  haben und  $x, x_2 \in C_2$  folgt  $|x - x_2| \leq 1/9$ . Durch Iteration erhält man eine Folge von Randpunkten  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  der Intervalle, die  $C_n$  ausmachen und  $|x - x_n| \leq 3^{-n}$  erfüllen. Damit haben wir eine Folge in  $C$  gefunden, mit der jedes  $x \in C$  approximiert werden kann, d.h.  $x$  kann ist ein Häufungspunkte, kann also nicht isoliert sein. Mehr zur Cantormenge kann z.B. in Falconer [Fal86] oder Ziemer [Zie17] gefunden werden.

In diesem Zusammenhang sollte auch auf Hausdorff-Maße eingegangen werden, siehe beispielsweise Wolff [Wol03, Kapitel 8].

**1.2. Lebesgue-Zerlegung und Radon–Nikodym-Theorem.** Die folgenden Inhalte können auch in Rudin [Rud87, Abschnitt 6.9] oder Hewitt–Stromberg [HS75, Kapitel V, (19.54)-(19.61)] nachgeschlagen werden.

Die Beispiele oben weisen alle typischen Besonderheiten von Stieltjes-Maßen auf  $\mathbb{R}$  auf: jedes Stieltjes-Maß auf  $\mathbb{R}$  lässt sich eindeutig in die Summe von drei

Maßen aufteilen, nämlich

$$m = m_{pp} + m_{sc} + m_{ac}, \quad (1.10)$$

eq:measuredecomp

wobei  $m_{pp}$  das reine Punkt-Maß  $m_{sc}$  das singular-stetige Maß und  $m_{ac}$  das absolut-stetige Maß bezeichnen. Jedes dieser Maße ist mit einer eindeutigen Funktion  $F$ , bzw.  $F_{pp}$ ,  $F_{sc}$  und  $F_{ac}$  mit

$$F = F_{pp} + F_{sc} + F_{ac}, \quad (1.11)$$

eq:borelfctdecomp

verbunden, die alle die Eigenschaften in Definition 1.3 besitzen. Zur Wiederholung, hierbei hat  $F_{pp}$  Sprünge,  $F_{sc}$  ist singular-stetig und  $F_{ac}$  ist absolut-stetig. Beispiele für  $F$  wurden oben gegeben:  $F_{pp}$  könnte die Heaviside-,  $F_{sc}$  könnte die Cantor-Funktion und  $F_{ac}(x) = 1/2 + \pi^{-1} \arctan(x)$  sein. Offensichtlich erfüllen die Maße in (1.10)

$$m = m^F, \quad m_{pp} = m^{F_{pp}}, \quad m_{sc} = m^{F_{sc}}, \quad m_{ac} = m^{F_{ac}}.$$

Der Rest dieses Abschnitts widmet sich der Erklärung der oben genannten Zerlegung von Stieltjes-Maßen. Die Zerlegung kann entweder durch Zerlegung der zugehörigen Funktion  $F$ , wie in (1.11), oder durch die direkte Zerlegung des Maßes wie in (1.10) gewonnen werden. Der erste Zugang basiert auf speziellen Eigenschaften monotoner Funktionen, wohingegen die zweite Methode allgemeine Resultate aus der Maß-Theorie verwendet.

Wir kommentieren zunächst die Zerlegung in (1.11). Sei also  $F$  eine Funktion die die Eigenschaften aus Definition 1.3 hat. Wie gelangt man also zur behaupteten Zerlegung? Zunächst sammelt man alle Diskontinuitäten von  $F$  in  $F_{pp}$ . Falls  $F$  keine Sprünge hat, setzt man  $F_{pp} = 0$ . Ansonsten bezeichne  $\{\lambda_j\}$  die Menge aller Sprungstellen von  $F$  (die ja höchstens abzählbar sind) und definiere

$$F_{pp}(\lambda) = \sum_{\lambda_j \leq \lambda} [F(\lambda_j) - F(\lambda_j - 0)] \equiv \sum_{\lambda_j \leq \lambda} m(\{\lambda_j\}). \quad (1.12)$$

$F_{pp}$  ist dann die eindeutige Sprungfunktion, die die selben Diskontinuitäten (genauer gesagt, Lagen und Höhen der Sprünge) wie  $F$  hat. Wir fahren fort und setzen  $F_c := F - F_{pp}$ . Man sieht, dass  $F_c$  stetig ist und ebenfalls die Eigenschaften in Definition 1.3 besitzt. Da jede stetige, monotone Funktion fast überall differenzierbar ist<sup>5</sup> [Hausaufgabe!], gibt es eine Lebesgue-Nullmenge  $\mathcal{V}$ , sodass  $\phi'(\lambda)$  existiert und ist endlich für alle  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{V}$ . Wendet man diese Tatsache auf  $F_c$  an, sieht man, dass ihre Ableitung  $F'_c$  äquivalent<sup>6</sup> zu einer nicht-negativen, integrierbaren Funktion auf  $\mathbb{R}$  ist, weshalb man

$$F_{ac}(\lambda) := \int_{-\infty}^{\lambda} F'_c(x) dx \quad (1.13)$$

eq:fac

setzen kann. Offensichtlich ist  $F_{sc} = F_c - F_{ac}$  immer noch stetig und es ist  $F'_{sc}(\lambda) = 0$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{V}$ , also auf dem Komplement der Nullmenge. (Auf  $\mathcal{V}$  kann nichts gesagt werden.) Schließlich kann noch nachgeprüft werden, dass auch  $F_{sc}$  immer noch monoton nicht-fallend ist.

<sup>5</sup>Auch bekannt als Lebesguescher Satz.

<sup>6</sup>Äquivalenz ist hier im Sinne der Lebesgue-integrierbaren Funktionen gemeint, deren Repräsentanten sich ja auf Lebesgue-Nullmengen voneinander unterscheiden können.

Um die Zerlegung <sup>eq:measuredecomp</sup> (I.10) andererseits zu erhalten, kann man ein abstraktes Resultat über Vergleiche von Maßen heranziehen, welches wir im Folgenden beschreiben.

DEFINITION 1.17. Sei  $(\mathcal{O}, \mathcal{A})$  ein Maßraum mit zwei Maßen  $m_0$  und  $m$ .

- (1) Wir sagen, dass  $m$  *absolut stetig bezüglich*  $m_0$  ist, wenn  $m(\mathcal{V})$  für alle  $\mathcal{V} \in \mathcal{A}$ , für die  $m_0(\mathcal{V}) = 0$ .
- (2) Wir sagen, dass  $m$  und  $m_0$  *singulär zueinander* sind, wenn es  $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2 \in \mathcal{A}$  gibt, dass  $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \emptyset$ ,  $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 = \mathcal{O}$  und  $m(\mathcal{W}_1) = m_0(\mathcal{W}_2) = \emptyset$ .

Das folgende Theorem ist klassisch und besagt, dass für zwei gegebene Maße auf einem Maßraum  $(\mathcal{O}, \mathcal{A})$  man das Maß  $m$  als Summe zweier anderer Maße schreiben kann, von denen eines absolut stetig bezüglich  $m_0$  und das andere singulär bezüglich  $m_0$  ist, sofern sowohl  $m$  als auch  $m_0$  Sigma-endlich<sup>7</sup> sind.

lebdecomp

BEHAUPTUNG 1.18 (Lebesgue-Zerlegung). *Seien  $m, m_0$  Sigma-endliche Maße auf einem Maßraum  $(\mathcal{O}, \mathcal{A})$ . Dann gibt es zwei eindeutige Maße  $m_1, m_2$  auf  $(\mathcal{O}, \mathcal{A})$ , sodass*

- (1)  $m_1$  *absolut stetig bezüglich*  $m_0$ ,
- (2)  $m_2$  und  $m_0$  *sind singulär zueinander und*
- (3)  $m = m_1 + m_2$  (*sprich  $m(\mathcal{V}) = m_1(\mathcal{V}) + m_2(\mathcal{V})$  für alle  $\mathcal{V} \in \mathcal{A}$ ).*

BEWEIS. Siehe beispielsweise Rudin <sup>Rudin1987</sup> [Rud87, Abschnitt 6.9]. □

Beispielsweise könnte man für  $m$  ein bestimmtes Stieltjes-Maß und für  $m_0$  das Lebesguemaß auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_{\mathbb{R}})$  nehmen. Aus dem Lebesgue-Zerlegungssatz folgt, dass sich  $m = m_{ac} + m_s$  schreiben lässt, wobei  $m_{ac}$  absolut stetig bzgl. Lebesgue und  $m_s$  singulär bzgl. Lebesgue ist<sup>8</sup>. In diesem Fall ist das Punktmaß natürlich noch in  $m_s$  enthalten. Es kann leicht isoliert werden, indem man

$$m_{pp}(\mathcal{W}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{W}} m(\{\lambda\}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{W}} m_s(\{\lambda\}) \tag{1.14}$$

eq:isolateppmeas

setzt. Hierbei läuft die Summe natürlich nur über die Sprungstellen der zugehörigen Funktion  $m((-\infty, \lambda]) \equiv F(\lambda)$  bzw.  $m_s((-\infty, \lambda])$ . Insbesondere gibt es höchstens abzählbar viele Beiträge in der Reihe <sup>eq:isolateppmeas</sup> (I.14). Das verbleibende Maß  $m_s - m_{pp}$  hat keine Atome mehr (sprich  $m(\{\lambda\}) = 0$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ ) und ist auf einer Lebesgue-Nullmenge getragen, also ein rein singulär-stetiges Maß.

Wir schließen diesen Abschnitt mit dem Radon–Nikodym-Theorem, welches eine Charakterisierung des absolut-stetigen Teils eines Maßes bzgl. eines anderen Maßes (typischerweise Lebesgue) gibt. In der Terminologie von Behauptung <sup>Lebdecomp</sup> I.18 hat der absolut-stetige Teil  $m_1$  (bzgl.  $m_0$ ) des Maßes  $m$  die folgende Eigenschaft: es gibt eine messbare Funktion  $f$ , sodass das Maß  $m_1(\mathcal{W})$  durch Integration von  $f$  gegen  $m_0$  über  $\mathcal{W}$  erhalten werden kann (für alle Borelmengen  $\mathcal{W}$ ).

radonnikodym

BEHAUPTUNG 1.19 (Radon–Nikodym-Satz). *Seien  $m$  und  $m_0$  zwei  $\sigma$ -endliche Maße auf einem Maßraum  $(\mathcal{O}, \mathcal{A})$ . Dann ist  $m$  genau dann absolut stetig bzgl.  $m_0$ , wenn es eine messbare Funktion  $0 \leq f : \mathcal{O} \rightarrow [0, \infty]$  gibt, sodass für alle  $\mathcal{V} \in \mathcal{A}$ ,*

$$m(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} f(x) dm_0(x) \tag{1.15}$$

<sup>7</sup>Wie beispielsweise das Lebesgue-Maß oder das Zählmaß auf  $\mathbb{R}$ .

<sup>8</sup>Im Folgenden werden wir immer absolut stetig (singulär) bezüglich Lebesgue meinen, wenn wir lediglich absolut stetig (singulär) sagen.

gilt. Hierbei ist  $f$  eindeutig in dem Sinne, dass, wenn  $g$  eine weitere Funktion ist, die diese Eigenschaften hat, dann ist  $g(x) = f(x)$  für  $m_0$ -fast alle  $x$ .

Die Funktion  $f$  in Behauptung <sup>Radonnikodym</sup> I.19 wird *Radon–Nikodym–Ableitung* von  $m$  bezüglich  $m_0$  genannt und manchmal als  $f = dm/dm_0$  geschrieben.

BEWEIS. Siehe beispielsweise Rudin <sup>Rudin1987</sup> [Rud87, Abschnitt 6.9] oder Teschl <sup>Teschl2014</sup> [Tes14, Theorem A.38].  $\square$

Für ein Stieltjes-Maß  $m^F$  auf einem Maßraum  $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_{\mathbb{R}})$  wissen wir aus <sup>eq:fac</sup> (I.13), dass das zugehörige absolut-stetige Maß auch als Integral über die Ableitung von  $F_{ac}$  (bzw.  $F_c$ ) bezüglich des Lebesgue-Maßes geschrieben werden kann, sprich

$$m_{ac}^F(\mathcal{W}) = \int_{\mathcal{W}} F'_{ac}(x) dx = \int_{\mathcal{W}} F'_c(x) dx.$$

In dieser Situation stimmt  $F'_{ac}$  gerade mit der Radon–Nikodym–Ableitung  $dm_{ac}^F(x)/dx$  überein (wo die Radon–Nikodym–Ableitung natürlich bzgl. des Lebesgue-Maßes gemeint ist).

## 2. Borel-Transformationen

s:boreltransform

Wir folgen Teschl <sup>Teschl2014</sup> [Tes14, Abschnitte 3.2 und 3.4] und Simon <sup>Simon2005</sup> [Sim05, Abschnitt 11.1].

Im Folgenden bezeichne  $\mu$  immer ein Borelmaß. Eine wichtige Rolle in der Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren spielt die *Boreltransformation* von  $\mu$ ,

$$F(z) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z} d\mu(\lambda). \quad (2.1)$$

SATZ 2.1. Die Boreltransformation eines endlichen Borelmaßes ist eine Pick-Funktion (siehe Definition <sup>def:pick</sup> 3.1 weiter unten). Sie ist holomorph in  $\mathbb{C} \setminus \sigma(\mu)$  und erfüllt

$$F(\bar{z}) = \overline{F(z)}, \quad |F(z)| \leq \frac{\mu(\mathbb{R})}{\operatorname{Im}(z)}, \quad z \in \mathbb{C}_+. \quad (2.2)$$

BEWEIS. Siehe Teschl <sup>Teschl2014</sup> [Tes14, Theorem 3.9].

Wir beobachten zunächst

$$\operatorname{Im}(F(z)) = \int_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} \left( \frac{1}{\lambda - z} \right) d\mu(\lambda) = \operatorname{Im}(z) \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda - z|^2},$$

woraus ersichtlich ist, dass  $F : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}_+$ . Außerdem folgt daraus sofort  $F(\bar{z}) = \overline{F(z)}$  sowie

$$|F(z)| \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda - z|} \leq \frac{1}{\operatorname{Im}(z)} \int_{\mathbb{R}} d\mu(\lambda)$$

also die behauptete Schranke. Da außerdem  $\mu(\mathbb{R} \setminus \sigma(\mu)) = 0$ , gilt

$$F(z) = \int_{\sigma(\mu)} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z}.$$

Kombiniert man diese Identität mit der Schranke  $|\lambda - z|^{-1} \leq (\operatorname{dist}(z, \sigma(\mu)))^{-1}$ , folgt aus majorisierter Konvergenz, dass  $F$  auf  $\mathbb{C} \setminus \sigma(\mu)$  stetig ist. Wir zeigen schließlich, dass  $F$  auf  $\mathbb{C} \setminus \sigma(\mu)$  holomorph mit Hilfe vom Satz von Morera. Daz genügt es zu zeigen, dass  $\int_{\Gamma} F(z) dz = 0$  für jede geschlossene stückweise  $C^1$ -Kurve  $\Gamma \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma(\mu)$ .

Da  $(\lambda - z)^{-1}$  für  $(\lambda, z) \in \sigma(\mu) \times \Gamma$  beschränkt ist, folgt dies aus  $\int_{\Gamma} (\lambda - z)^{-1} dz = 0$  mittels Fubini, denn

$$\int_{\Gamma} F(z) dz = \int_{\Gamma} dz \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z} = \int_{\mathbb{R}} d\mu(\lambda) \int_{\Gamma} \frac{dz}{\lambda - z} = 0.$$

□

Wir bemerken, dass  $F$  nicht weiter analytisch in einen größeren Definitionsbereich fortgesetzt werden kann, denn, wenn  $F$  holomorph in einer Umgebung  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist, dann impliziert  $F(\bar{\lambda}) = \overline{F(\lambda)}$ , dass  $\text{Im}(F(\lambda)) = 0$  und die Stieltjes-Inversionsformel (3.27) zeigt  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma(\mu)$ . Dies zeigt, dass  $\lambda$  nicht im Träger von  $\mu$  liegen kann, sprich  $F$  kann nicht weiter analytisch fortgesetzt werden.

[Der folgende Text stammt aus Simon <sup>Simon2005</sup> [Sim05, Abschnitt 11.1]] Im ganzen Abschnitt sei  $d\mu$  ein (positives) Maß auf  $[a, \infty)$  mit  $a > -\infty$ , sodass

$$\int \frac{d\mu(\lambda)}{1 + |\lambda|} < \infty. \tag{2.3}$$

BEMERKUNG 2.2.

- (1) Wir nehmen weiter an, dass  $\text{supp}(d\mu)$  von unten beschränkt und der ungestörte Operator  $A$  positiv ist. Vieles dieser Theorie funktioniert zwar auch ohne diese zusätzlichen Bedingungen, doch sind die Details einfacher und außerdem sind sie in den meisten Anwendungen ohnehin erfüllt.
- (2) Wir verweisen auf die Arbeit von Aronszajn-Donoghue für die weichere Bedingung  $\int \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda^2 + 1} < \infty$ .

Gilt  $\int \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda| + 1} < \infty$ , so kann man für  $z \in \mathbb{C} \setminus [a, \infty)$  die *Borel-Transformation* von  $\mu$  (oder auch die *Stieltjes-* oder *Borel-Stieltjes-Transformation* von  $\mu$ )

$$F(z) := \int \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z} \tag{2.4}$$

definieren.

pickuniqueprelim

BEHAUPTUNG 2.3 (Herglotz-Darstellung). *Eine Funktion  $F$  ist genau dann eine Pick-Funktion, die*

$$|F(iy)| \leq \frac{M}{y}, \quad y \in \mathbb{R}$$

*erfüllt, wenn es die Boreltransformierte eines endlichen Borelmaßes  $\mu$  mit  $\mu(\mathbb{R}) \leq M < \infty$  ist.*

Wir diskutieren diese Behauptung hier nicht weiter, sondern verweisen auf die wesentliche Verfeinerung in Satz <sup>nevanlinna</sup> 3.17 später.

BEWEIS. Siehe <sup>Teschl2014</sup> [Tes14, Theorem 3.22] und <sup>Teschl2014</sup> [Tes14, Theorem 3.9] für eine Baby-Version. □

Besonders interessant sind Grenzabsorptionsprinzipien von  $F$  für  $z = x + i\epsilon \searrow$   $x \in \text{supp}(d\mu)$ . Wir beginnen mit elementaren Eigenschaften abseits  $\text{supp}(d\mu)$ .

theorem:11.2

- SATZ 2.4. (i)  $F$  ist auf  $\mathbb{C} \setminus [a, \infty)$  analytisch.  
 (ii)  $F$  ist auf  $(-\infty, a)$  positiv und  $\text{Im}(F) > 0$ , wenn  $\text{Im}(z) > 0$ .  
 (iii)  $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} F(-\gamma) = 0$ .

(iv)  $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \gamma F(-\gamma) = \int d\mu(\lambda)$ , wobei  $\int d\mu = \infty$  erlaubt ist. Analog ist

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \gamma^2 F'(-\gamma) = \int d\mu(\lambda). \quad (2.5)$$

(v)  $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{F'(-\gamma)}{F^2(-\gamma)} = (\int d\mu(\lambda))^{-1}$ , wobei  $\int d\mu = \infty$  erlaubt ist und  $\infty^{-1} \equiv 0$ .

BEWEIS. (i) Folgt mit der Definition von  $F(z)$ .

(ii) Folgt sofort mit Hilfe von

$$\operatorname{Im}(F(x + i\beta)) = \int \frac{\beta}{(x - \lambda)^2 + \beta^2} d\mu(\lambda). \quad (2.6)$$

(iii) Folgt mit Hilfe von monotoner Konvergenz.

(iv) Die erste Aussage folgt ebenfalls mittels monotoner Konvergenz. Mit etwas mehr Arbeit und der weiteren Bedingung, dass  $|z| \rightarrow \infty$  mit  $|\arg(-z)| < \epsilon$  für ein kleines  $\epsilon > 0$ , folgt auch  $(-\gamma)F(\gamma) \rightarrow \int d\mu$ .

Ist  $\int d\mu < \infty$ , folgt wieder mit monotoner Konvergenz

$$\gamma^2 F'(-\gamma) = \gamma^2 \int \frac{d\mu(\lambda)}{(\lambda + \gamma)^2} \rightarrow \int d\mu(\lambda), \quad (2.7)$$

was die Behauptung ist. Ist  $\int d\mu = \infty$ , benutzen wir die Tatsache, dass  $\frac{1}{|zF(z)|} \rightarrow 0$  für  $|z| \rightarrow \infty$  mit  $\operatorname{Re}(z) < 0$  konvergiert.

(v) Schreibt man

$$\left(\frac{1}{F}\right)'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=|z|/2} \frac{1}{F(w)} \cdot \frac{1}{(w-z)^2} dw \quad (2.8)$$

mit Hilfe der Cauchy-Integral-Formel, sieht man, dass  $(\frac{1}{F})' \rightarrow 0$  konvergiert. Jedoch ist gleichzeitig  $(\frac{1}{F})' = -\frac{F'}{F^2}$ , was die Behauptung zeigt.  $\square$

Als Nächstes kümmern wir uns um die Randwerte von  $F$ . Dabei wird die Abbildung

$$G : (-\infty, \infty) \rightarrow (0, \infty] \\ x \mapsto \int \frac{d\mu(y)}{(x-y)^2} \quad (2.9)$$

eine besondere Rolle spielen. Wir erinnern an folgende

DEFINITION 2.5. Für einen topologischen Raum  $X$  heißt eine Teilmenge  $\Omega$  eine  $G_\delta$ -Menge genau dann, wenn sie der Schnitt abzählbar vieler offener Mengen ist. Dichte  $G_\delta$ -Mengen heißen auch *Baire-generisch*.

(Historisch bedeutet das  $G$  in  $G_\delta$  „Gebiet“, wohingegen  $\delta$  „Durchschnitt“ meint.)

gdeltaandf

SATZ 2.6. (i) Ist  $G(x) < \infty$ , so ist auch

$$\int \frac{d\mu(y)}{|x-y|} < \infty. \quad (2.10)$$

(ii) Die Menge  $\{x : G(x) = \infty\}$  ist eine dichte  $G_\delta$ -Menge in  $\operatorname{supp}(d\mu)$ .

(iii) Sind  $G(x) < \infty$ , d.h. ist insbesondere  $\int \frac{d\mu(y)}{|x-y|} < \infty$ , so existiert  $\lim_{\epsilon \searrow 0} F(x + i\epsilon)$  und der Grenzwert ist reell.

$$(iv) \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{\operatorname{Im}(F(x+i\epsilon))}{\epsilon} = G(x).$$

$$(v) \text{ Ist } G(x) < \infty, \text{ so ist } \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{F(x+i\epsilon) - F(x+i0)}{i\epsilon} = G(x).$$

BEWEIS. (i) Für  $|x - y| \leq 1$  ist offensichtlich  $\frac{1}{|x-y|} \leq \frac{1}{|x-y|^2}$ . Für  $|x - y| \geq 1$  ist

$$|y| + 1 \leq |x| + |x - y| + 1 \leq |x - y|(|x| + 2). \quad (2.11)$$

Daraus folgt für alle  $|x - y| > 1$

$$\frac{1}{|x - y|} \leq \frac{1}{|x - y|^2} + \frac{|x| + 2}{|y| + 1}, \quad (2.12)$$

woraus wiederum die Behauptung folgt.

(ii) Mit dem nächsten Lemma folgt, dass, wenn  $\mu([0, 1]) \geq 1$  ist, dann gibt es einen Punkt  $x_0 \in [0, 1]$ , sodass  $\int \frac{d\mu(y)}{|x_0 - y|} = \infty$  (d.h.  $G(x_0) = \infty$  nach (i)). Durch Skalieren folgt, dass, wenn  $\mu([a, b]) > 0$  ist, dann gibt es einen Punkt  $x_0 \in [a, b]$ , sodass  $\int \frac{d\mu(y)}{|x_0 - y|} = \infty$ . Ist also  $a_0 \in \operatorname{supp}(d\mu)$ , so gibt es eine Folge  $a_n \rightarrow a_0$ , mit  $\int \frac{d\mu(y)}{|a_n - y|} = \infty$  für alle  $n$ . Wegen (i) ist daher  $\{x : G(x) = \infty\}$  dicht in  $\operatorname{supp}(d\mu)$ . Außerdem ist es eine  $G_\delta$ -Menge, denn, definieren wir die Mengen  $G_n(x) = \int \frac{d\mu(y)}{|x - y|^2 + n^{-1}}$ , so ist  $G_n$  stetig und es ist

$$\{x : G(x) = \infty\} = \bigcap_m \bigcup_n \{x : G_n(x) > m\}. \quad (2.13)$$

(iii) Wegen  $\operatorname{Im}(F(x + i\beta)) = \int \frac{\beta}{(x-y)^2 + \beta^2} d\mu(y)$  gilt für alle  $1 > \delta > 0$

$$\operatorname{Im}(F(x + i\beta)) \leq \beta \int_{|x-y|>\delta} |x-y|^{-2} d\mu(y) + \int_{|x-y|\leq\delta} |x-y|^{-1} d\mu(y), \quad (2.14)$$

weshalb

$$\limsup_{\beta \searrow 0} \operatorname{Im}(F(x + i\beta)) \leq \limsup_{\delta \searrow 0} \int_{|x-y|\leq\delta} |x-y|^{-1} d\mu(y) = 0, \quad (2.15)$$

falls  $\int \frac{d\mu(y)}{(x-y)^2} < \infty$ . Die Endlichkeit dieses Ausdrucks impliziert wiederum mit majorisierter Konvergenz

$$\lim_{\beta \searrow 0} \operatorname{Re}(F(x + i\beta)) = \int (x - y)^{-1} d\mu(y). \quad (2.16)$$

(iv) Folgt wieder aus  $\operatorname{Im}(F(x + i\beta)) = \int \frac{\beta}{(x-y)^2 + \beta^2} d\mu(y)$  und monotoner Konvergenz.

(v) Ist  $G(x) < \infty$ , so folgt mit dem selben Argument wie in (iii)

$$F(x + i0) = \int \frac{d\mu(y)}{y - x}, \quad (2.17)$$

weshalb mit majorisierter Konvergenz und  $G(x) < \infty$

$$\frac{F(x + i\epsilon) - F(x + i0)}{i\epsilon} = \int \frac{d\mu(y)}{(y - x)(y - x - i\epsilon)} \rightarrow G(x). \quad (2.18)$$

□

Nun reichen wir das behauptete Lemma nach.

LEMMA 2.7. Sei  $\mu([0, 1]) \geq 1$ , dann existiert ein Punkt  $x_0 \in [0, 1]$ , sodass

$$\int \frac{d\mu(y)}{|x_0 - y|} = \infty. \quad (2.19)$$

BEWEIS. Wir definieren  $I_n$  induktiv wie folgt. Sei  $I_1$  eines der beiden Intervall  $[0, \frac{1}{2}]$  und  $[\frac{1}{2}, 1]$ , sodass  $\mu(I_1) \geq \frac{1}{2}$ . Nun zerlegen wir  $I_1$  in der Mitte und wählen  $I_2$  als das Halbointervall, das  $\mu(I_2) \geq \frac{1}{4}$  erfüllt etc. Dann sind per Induktion

$$I_1 \supseteq U_1 \supseteq \dots \text{ alle abgeschlossen, } \mu(I_n) \geq 2^{-n} \text{ und } |I_n| = 2^{-n}. \quad (2.20)$$

Wegen Kompaktheit ist der Schnitt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bigcap_n I_n = \{x_0\}$  für ein  $x_0$  und offenbar ist

$$\int_{I_n} |x - x_0|^{-1} d\mu(x) \geq \frac{2^{-n}}{2^{-n}} = 1. \quad (2.21)$$

Sollte aber  $\int |x - x_0|^{-1} d\mu(x) < \infty$  sein, so ist mit monotoner Konvergenz  $\int_{I_n} |x - x_0|^{-1} d\mu(x) \searrow 0$ , was der obigen Rechnung widerspricht. Daher muss  $\int |x - x_0|^{-1} d\mu(x) = \infty$  sein.  $\square$

SATZ 2.8. Der Grenzwert  $\lim_{\beta \searrow 0} F(x + i\beta)$  existiert und ist für fast alle  $x$  endlich.

BEWEIS. Dies ist ein klassisches Resultat aus der harmonischen Analysis über nicht-tangentiale Randwerte analytischer Abbildungen, weshalb wir hier die Details nur skizzieren. Sei  $g(z) = \frac{z-i}{z+i}$  die fraktional lineare Abbildung der oberen Halbebene der Einheitskreise. Dann ist  $\tilde{F} := g \circ F \circ g^{-1}$  eine Abbildung von der Einheitskreise auf sich selbst. Solche Abbildungen haben mit einem Standard Maximalfunktions-Argument Randwerte, siehe z.B. Katznelson <sup>Katznelson1976</sup> [Kat76b, Lemma III.1.3] für den Imaginärteil (für den Realteil ist das offenbar, da das gerade die Faltung  $P_\epsilon * d\mu$  mit dem Poissonkern  $P_\epsilon$  ist). Mit demselben Argument wie beim nächsten Satz hat  $\{\theta : \lim_{r \nearrow 1} \tilde{F}(re^{i\theta}) = -1\}$  das Maß Null, weshalb  $\lim_{\beta \searrow 0} F(x + i\beta) = \infty$  nur auf einer Menge vom Maß Null ist. Daher ist der behauptete Grenzwert fast überall endlich.  $\square$

theorem:11.6

SATZ 2.9. Seien  $F_1, F_2$  die Borel-Transformationen zweier (positiver) Maße (von denen eines Null sein kann) und  $\alpha \in \mathbb{C}$  fix. Dann ist

$$|\{x : F_1(x + i0) - F_2(x + i0) = \alpha\}| > 0 \quad (2.22)$$

und  $|\{x : F_1(x + i0) - F_2(x + i0) = \alpha\}| = 0$  nur dann, wenn  $\alpha = 0$  und  $F_1 = F_2$ .

BEWEIS. Siehe Simon <sup>Simon2005</sup> [Sim05, Theorem 11.5].

Seien wieder  $g(z) = \frac{z-i}{z+i}$  und

$$h = e^{iF_1 \circ g^{-1}} - (e^{iF_2 \circ g^{-1}})e^{i\alpha}. \quad (2.23)$$

Dann ist  $h$  eine beschränkte, analytische Funktion auf der Einheitskreise und die Behauptung lautet dann, dass  $\{\theta : \lim_{r \nearrow 1} h(re^{i\theta}) = 0\}$  für  $h$  nicht identisch Null das Maß Null hat. Dies ist der Satz von Luzin-Privaloff (siehe Katznelson <sup>Katznelson1976</sup> [Kat76b, p. 101] oder <sup>LusinPrivaloff1925</sup> [LP25], oder [http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Luzin-Privalov\\_theorems&oldid=27205](http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Luzin-Privalov_theorems&oldid=27205) oder <http://www.mathe.tu-freiberg>).

de/~wegert/Lehre/BVP/script.pdf). (Genauer besagt der Satz, dass wenn  $f$  holomorph auf  $D_0(1)$  ist und verschwindende, nicht-tangentiale Grenzwerte für Lebesgue-fast alle Elemente einer Teilmenge  $T \subseteq \mathbb{T}$  hat, dann ist  $f \equiv 0$ . Wir verwenden hier die Umkehrung des Satzes.)  $\square$

Seien  $d\mu_{ac}, d\mu_{sc}, d\mu_{pp}$  das absolut stetige, singular stetige und Punkt-Maß von  $d\mu$  und sei weiter  $d\mu_{sing} = d\mu_{sc} + d\mu_{pp}$  der singuläre Teil des Maßes. Das Hauptresultat über Borel-Transformationen ist

boreltransfspec

SATZ 2.10. Sei  $F(z)$  die Borel-Transformation eines Maßes  $d\mu$ , das  $\int \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda|+1} < \infty$  erfüllt. Dann gelten:

(i) Es konvergiert  $\pi^{-1} \text{Im}(F(E+i\epsilon))dE \rightarrow d\mu$  schwach, in dem Sinne, dass

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi} \int f(E) \text{Im}(F(E+i\epsilon))dE = \int f(\lambda)d\mu(\lambda) \quad (2.24)$$

für alle stetigen, kompakt getragenen Funktionen  $f$ .

(ii)  $\text{supp}(\mu_{sing}) = \{E : \lim_{\epsilon \searrow 0} \text{Im}(F(E+i\epsilon)) = \infty\}$ .

(iii) Für den Punktmaßanteil gilt

$$\mu(\{E_0\}) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon \cdot \text{Im}(F(E_0+i\epsilon)). \quad (2.25)$$

Darüberhinaus ist für alle  $E_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon \cdot \text{Re}(F(E_0+i\epsilon)) = 0. \quad (2.26)$$

(iv)  $d\mu_{ac}(E) = \frac{1}{\pi} \text{Im}(F(E+i0))dE$ .

(v)  $G(E) < \infty$  impliziert, dass der Randwert  $\lim_{\epsilon \searrow 0} F_0(E+i\epsilon)$  existiert und reellwertig ist. Insbesondere ist  $\text{Im}(F_0(E+i0)) = 0$ , sprich  $d\mu_{ac}(E) = 0$ .

BEWEIS. Siehe Simon <sup>[Simon2005]</sup> [Sim05, Theorem 11.6] oder Teschl <sup>[Teschl2014]</sup> [Tes14, Lemma 3.25, Theorem 3.27, Corollary 3.28 und 3.29].

Für die Aussagen (ii), (iv) und (v) siehe auch Simon–Wolff <sup>[SimonWolff1986]</sup> [SW86] und die dort zitierten Referenzen.

(i) Majorisierte Konvergenz und der Tatsache, dass für stetige, kompakt getragene  $f$

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi} \int f(E') \frac{\epsilon}{(E-E')^2 + \epsilon^2} dE' = f(E) \quad (2.27)$$

gilt, impliziert zusammen mit  $\text{Im}(F(x+i\beta)) = \int \frac{\beta}{(x-y)^2 + \beta^2} d\mu(y)$  die Behauptung.

(ii) Wir zeigen hier lediglich die schwächere Aussage, nämlich, dass  $d\mu_{sing}$  auf  $\{E : \limsup_{n \rightarrow \infty} \text{Im}(F(E+i2^{-n})) = \infty\}$  getragen ist. Die eigentliche Aussage wurde von Saks bewiesen, für die meisten Anwendungen reicht diese jedoch aus.

Dazu zeigen wir, dass für jedes  $a \in \mathbb{R}$

$$\{E : \sup_n \text{Im}(F(E+i2^{-n})) \leq a\} =: A_a \quad (2.28)$$

eine Menge mit  $\mu_{sing}$ -Maß Null ist. Dies impliziert die Behauptung. Dazu bemerken wir, dass

$$\text{Im}(F(x+i\epsilon)) = \int \frac{\epsilon}{(x-y)^2 + \epsilon^2} d\mu(y) \geq \frac{1}{2\epsilon} \int_{|x-y| \leq \epsilon} d\mu(y). \quad (2.29)$$

Für fixes  $x \in A_a$  ist also

$$\sup_n 2^n \mu([x - 2^{-n}, x + 2^{-n}]) \leq 2a. \quad (2.30)$$

Zusammen mit dem Fakt, dass jedes  $\epsilon^{-1} \in [2^n, 2^{n+1}]$  für ein  $n$  ist, ist

$$\sup_n \epsilon^{-1} \mu([x - \epsilon, x + \epsilon]) \leq 4a. \quad (2.31)$$

Daher gilt, nach Betrachtung zweier Unterintervalle

$$\sup_{x \in [\alpha, \beta]} |\beta - \alpha|^{-1} \mu([\alpha, \beta]) \leq 8a. \quad (2.32)$$

Wegen der Regularität von Maßen gibt es für alle  $\epsilon$  eine abgeschlossene Menge  $C$  und eine offene Menge  $O \supseteq C$ , sodass  $\mu_{sing}(\mathbb{R} \setminus C) \leq \epsilon$  und  $|O| \leq \epsilon$  ist. Wir setzen nun  $O = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\alpha_n, \beta_n)$  als eine disjunkte Vereinigung offener Intervalle an. Dann ist

$$\begin{aligned} \mu_{sing}(C \cap A_a) &\leq \mu_{sing} \left( \bigcup_{\{n: (\alpha_n, \beta_n) \cap A_a \neq \emptyset\}} (\alpha_n, \beta_n) \right) \leq \sum_{\{n: (\alpha_n, \beta_n) \cap A_a \neq \emptyset\}} \mu(\alpha_n, \beta_n) \\ &\leq 8a \sum_n |\beta_n - \alpha_n| = 8a |O| \leq 8a\epsilon \end{aligned} \quad (2.33)$$

Damit ist

$$\mu_{sing}(A_a) \leq \mu_{sing}(C \cap A_a) + \mu_{sing}(\mathbb{R} \setminus C) \leq \epsilon + 8a\epsilon. \quad (2.34)$$

Da  $\epsilon$  beliebig war, ist  $\mu_{sing}(A_a) = 0$ , was gezeigt werden sollte.

- (iii) Der erste Teil folgt direkt durch monotone Konvergenz, indem man bemerkt, dass  $\frac{\epsilon^2}{x^2 + \epsilon^2}$  monoton gegen 0 (bzw. 1) konvergiert, wenn  $x \neq 0$  (bzw.  $x = 0$ )

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int \frac{\epsilon^2}{(E - E_0)^2 + \epsilon^2} d\mu(E) = \mu(\{E_0\}). \quad (2.35)$$

Für den zweiten Teil rechnen wir

$$\epsilon \int_{|x-y| \geq \sqrt{\epsilon}} \frac{|x-y|}{|x-y|^2 + \epsilon^2} d\mu(y) \leq \epsilon \int_{|x-y| \geq \sqrt{\epsilon}} \frac{d\mu(y)}{|x-y|} \rightarrow 0, \quad (2.36)$$

wohingegen

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{|x-y| < \sqrt{\epsilon}} \frac{\epsilon|x-y|}{(x-y)^2 + \epsilon^2} d\mu(y) = 0 \quad (2.37)$$

wegen majorisierter Konvergenz, da  $\frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \leq \frac{1}{2}$  (mit Young).

- (iv) Wir schreiben dazu  $d\mu_{ac}(E) = h(E)dE$  mit  $h \in L^1$  und  $F_{ac}(z)$  für die Borel-Transformation von  $d\mu_{ac}$ . Wir erinnern, bevor wir fortfahren an Lebesgues Differentiationsatz [Stein 1970, S. 4]: für  $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  gilt für fast alle  $x \in \mathbb{R}$

$$h(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} h(y) dy. \quad (2.38)$$

Daraus folgt  $\frac{1}{\pi}\text{Im}(F_{ac}(E + i0)) = h(E)$  für fast alle  $E$ . Mit Fatous Lemma folgt für nicht-negative und stetige  $f$

$$\frac{1}{\pi} \int [\text{Im}(F(E + i0))]f(E)dE \leq \liminf \frac{1}{\pi} \int \text{Im}(F(E + i\epsilon))f(E)dE = \int f(E)d\mu(E). \tag{2.39}$$

Somit ist  $\frac{1}{\pi}\text{Im}(F(E + i0))dE \leq d\mu$ , das heißt es ist für fast alle  $E$

$$\frac{1}{\pi}\text{Im}(F(E + i0)) \leq h(E) = \frac{1}{\pi}\text{Im}(F_{ac}(E + i0)) \leq \frac{1}{\pi}\text{Im}(F(E + i0)), \tag{2.40}$$

da aus  $d\mu \geq d\mu_{ac}$ ,  $\text{Im}(F) \geq \text{Im}(F_{ac})$  folgt. Damit folgt

$$h(E) = \frac{1}{\pi}\text{Im}(F(E + i0)), \tag{2.41}$$

was zu beweisen war.

(v) Dies wurde bereits in Theorem [2.6](#) (iii) <sup>gdeltaandf</sup> gezeigt.

□

### 3. Herglotz–Nevanlinna–Pick-Funktionen

s:nevanlinna

Wir folgen Bhatia <sup>Bhatia1997</sup> [Bha97, Abschnitt V.4] und Teschl <sup>Teschl2014</sup> [Tes14, Abschnitt 3.4]. Es bezeichne  $\mathbb{C}_{\pm} = \{z \in \mathbb{C} : \pm\text{Im}(z) > 0\}$  die obere bzw. untere Halbebene.

defpick

DEFINITION 3.1. Eine holomorphe Funktion  $F : \mathbb{C}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{C}_+}$ , die die obere Halbebene in sich selbst abbildet heißt *Herglotz–Nevanlinna–Pick-Funktion*. Wir schreiben  $F \in P$ .

Im Folgenden bezeichnen wir Herglotz–Nevanlinna–Pick-Funktionen immer als Pick-Funktionen. Die Summe sowie die Komposition zweier Pick-Funktionen ist offenbar wieder eine Pick-Funktion. Durch Reflexion kann  $F$  auch auf  $\mathbb{C}_-$  definiert werden, indem man  $F(\bar{z}) = \overline{F(z)}$  verwendet. Wir geben einige Beispiele für Pick-Funktionen.

- BEISPIEL 3.2. (1)  $F(z) = a + bz$  für  $\text{Im}(a), b \geq 0$ .  
 (2)  $F(z) = (\lambda - z)^{-1}$  für  $\text{Im}(\lambda) \leq 0$ .  
 (3)  $F(z) = \log(z)$ .  
 (4)  $F(z) = z^r$  mit  $r \in (0, 1]$ .  
 (5)  $F(z) = \tan(z)$ .  
 (6) Wenn  $F \in P$ , dann ist auch  $-1/\overline{F} \in P$ .

In den ersten Beispielen gilt  $F(\bar{z}) = \overline{F(z)}$  nur, wenn  $a \in \mathbb{R}$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Für die dritten und vierten Beispiele ist der Hauptzweig der, für den  $\arg(z) \in (-\pi, \pi]$  ist.

defpickab

DEFINITION 3.3. Für  $a < b \in \mathbb{R}$  bezeichne  $P(a, b)$  die Klasse aller Pick-Funktionen, die eine analytische Fortsetzung durch  $(a, b)$  in die untere Halbebene haben, wobei die Fortsetzung durch Reflexion erfolgt.

BEMERKUNGEN 3.4. (1)Man bemerkt, dass Funktionen in  $P(a, b)$  nur reelle Werte auf  $(a, b)$  annehmen.

(2)  $P(a, b)$  ist ein konvexer Konus.

(3) Angenommen  $f(z) = u(z) + iv(z) \in P(a, b)$ . Da  $v(x) = 0$  für  $x \in (a, b)$  ist  $v(x + iy) - v(x) \geq 0$  für  $y > 0$ . Insbesondere ist die partielle Ableitung  $v_y(x) \geq 0$  und damit (wegen der Cauchy–Riemann-Bedingungen) auch  $u_x(x) \geq 0$ . Das zeigt, dass  $f(x) = u(x)$  auf  $(a, b)$  monoton ist. Dies ist eine Konsequenz eines Satzes von

Nevanlinna (siehe Satz <sup>nevanlinna</sup>3.17), welcher eine Integraldarstellung von Pick-Funktionen gibt.

Die letzte Bemerkung lässt sich sogar drastisch erweitern.

DEFINITION 3.5 (Operatormonotonie). Sei  $f$  eine reelle Funktion, die auf einem Intervall  $I$  definiert ist. Seien  $A$  und  $B$  selbstadjungierte Operatoren, die einen gemeinsamen Formbereich  $\mathcal{Q}$  haben. Angenommen  $\text{spec}(A), \text{spec}(B) \subseteq I$ . Definiere  $f(A) = Uf(D)U^*$ , wobei  $U$  unitär ist und  $A$  diagonalisiert, sprich  $A = UDU^*$ , wobei  $D$  diagonal ist.

- (1) Wir schreiben  $A \leq B$  genau dann, wenn  $B - A$  nicht-negativ ist. Die Relation  $\leq$  ist eine Partialordnung auf den selbstadjungierten Operatoren.
- (2) Eine Funktion  $f$  heißt genau dann *operatormonoton* (auf  $I$ ), wenn  $f(A) \leq f(B)$  aus  $A \leq B$  folgt.
- (3) Eine Funktion  $f$  heißt genau dann *operatorkonvex* (auf  $I$ ), wenn  $f((1 - \lambda)A + \lambda B) \leq (1 - \lambda)f(A) + \lambda f(B)$  für alle  $\lambda \in [0, 1]$ .

Den folgenden tiefen Satz werden wir nicht beweisen, sondern verweisen auf Standard-Referenzen wie Bhatia <sup>Bhatia1997</sup>[Bha97, Abschnitt V.4], Donoghue <sup>Donoghue1974</sup>[Don74] oder Simon <sup>Simon2019</sup>[Sim19].

SATZ 3.6 (Loewner). *Wenn  $f$  eine operatormonotone Funktion auf  $(a, b)$  ist, dann hat  $f$  eine analytische Fortsetzung auf die obere Halbebene  $\mathbb{C}_+$ , welche  $\mathbb{C}_+$  in sich selbst abbildet. Sie hat auch eine analytische Fortsetzung auf  $\mathbb{C}_-$ , die durch Reflexion am Intervall  $(a, b)$  gewonnen wird.*

*Die Umkehrung ist ebenfalls wahr. Hat eine reelle Funktion  $f$  auf  $(a, b)$  eine analytische Fortsetzung, die  $\mathbb{C}_+$  in sich selbst abbildet, dann ist  $f$  operatormonoton auf  $(a, b)$ .*

Unser Ziel ist es nun eine Integraldarstellung von Pick-Funktionen zu finden. Die wesentliche Idee (aus Fourieranalysis auf  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ) ist es, die konforme Äquivalenz

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_+ &\rightarrow D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \\ z &\mapsto \frac{i - z}{i + z} \end{aligned} \tag{3.1}$$

zwischen  $\mathbb{C}_+$  und der Einheitskreisscheibe  $D$  auszunutzen, das Problem auf  $D$  zu verlagern und dort den Realteil  $u$  von  $f$  zu untersuchen. Da  $u$  auf  $D$  harmonisch ist<sup>9</sup>, können Standardtatsachen aus Fourieranalysis verwendet werden.

herglotz1

SATZ 3.7 (Herglotz 1). *Sei  $u$  eine nicht-negative, harmonische Funktion auf  $D$ . Dann existiert ein endliches Maß  $m$  auf  $[0, 2\pi]$ , sodass*

$$u(re^{i\theta}) = \int_{[0, 2\pi]} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - t)} dm(t). \tag{3.2}$$

eq:herglotz1

*Umgekehrt ist jede Funktion dieser Form positiv und harmonisch auf  $D$ .*

<sup>9</sup>Wir erinnern daran, dass der Real- und Imaginärteil holomorpher Funktionen harmonisch sind, sprich  $(\partial_x^2 + \partial_y^2)u(x, y) = 0$  erfüllen. Dies folgt aus den Cauchy–Riemann-Bedingungen.

Zum Beweis erinnern wir an den (zweidimensionalen) Poissonkern (Katznelson [Katznelson1976](#) [[Kat76b](#), Kapitel I, Formel (2.16)]) auf dem Torus  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ , nämlich

$$P(r, t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} = \operatorname{Re} \left( \frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}} \right), \quad r \in [0, 1), \quad \theta \in \mathbb{T}. \quad (3.3)$$

eq:poissonkerneltorus

fourierinversiontorus

LEMMA 3.8. Sei  $F \in L^\infty(D)$  harmonisch. Dann gilt für  $\rho e^{it} \in D$ ,

$$F(\rho e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} P(\rho, \theta - t) F(e^{i\theta}) d\theta. \quad (3.4)$$

BEWEIS. Siehe beispielsweise Katznelson [Katznelson1976](#) [[Kat76b](#), Kapitel III, Lemma 1.2].

Sei  $r_n \nearrow 1$  und  $f_n(e^{i\theta}) = F(r_n e^{i\theta})$ . Dann ist  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine in  $L^\infty(\mathbb{T})$  beschränkte Folge. Daher gibt es eine Teilfolge  $f_{n_j}$ , die in der schwach-\*Topologie<sup>10</sup> gegen eine Funktion  $F(e^{i\theta})$  konvergiert. Für  $\rho e^{it} \in D$  gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} P(\rho, \theta - t) F(e^{i\theta}) d\theta &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} P(\rho, \theta - t) f_{n_j}(e^{i\theta}) d\theta \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} F(r_{n_j} \rho e^{it}) = F(\rho e^{it}), \end{aligned}$$

was den Beweis schließt<sup>11</sup>. □

BEWEIS VON SATZ [herglotz1](#) 3.7. Siehe Bhatia [Bhatia1997](#) [[Bha97](#), Theorem V.4.9].

Sei  $u$  zunächst eine beliebige stetige, reellwertige Funktion auf der abgeschlossenen Kreisscheibe  $\overline{D}$ , die harmonisch in  $D$  ist. Wegen Lemma [3.8](#) hat  $u$  die Darstellung

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2} u(e^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) u(e^{it}) dt.$$

Falls  $u \geq 0$ , setzen wir  $dm(t) := (2\pi)^{-1} u(e^{it}) dt$ . Dann ist  $m$  ein auf  $[0, 2\pi]$  getragenes, positives Maß. Aus der Mittelwertseigenschaft (mean value property) harmonischer Funktionen folgt, dass die Masse dieses Maßes gerade

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) dt = u(0)$$

ist. Wir haben damit die Integraldarstellung ([eq:herglotz1](#) 3.2) für solche Funktionen  $u$ , die auf  $\overline{D}$  zusätzlich stetig sind.

Wir entfernen nun die Stetigkeitsbedingung. Sei also  $u \geq 0$  harmonisch in  $D$ . Dann ist für festes  $\epsilon > 0$  auch die Funktion

$$u_\epsilon(z) = u \left( \frac{z}{1 + \epsilon} \right)$$

nichtnegativ und harmonisch in der Kreisscheibe  $|z| < 1 + \epsilon$ . Daher kann  $u_\epsilon(z)$  für  $z \in D$  als Integral der Form ([eq:herglotz1](#) 3.2) mit einem Maß  $m_\epsilon(t)$ , dessen Masse  $u_\epsilon(0) = u(0)$  ist, dargestellt werden. Für  $\epsilon \rightarrow 0$  konvergiert  $u_\epsilon \rightarrow u$  gleichmäßig gegen  $u$  auf kompakten Teilmengen von  $D$ . Da die Maße  $m_\epsilon$  alle dieselbe Masse haben, folgt aus

<sup>10</sup>Wir erinnern daran, dass  $L^\infty(\mathbb{T})$  der Dualraum von  $L^1(\mathbb{T})$  ist.

<sup>11</sup>Der Variablenwechsel im Integral, der in der vorletzten Gleichheit versteckt ist, ist zwar aufwendig, aber "elementar".

der schwach- $*$ -Kompaktheit des Raums der Wahrscheinlichkeitsmaße (siehe auch Teschl [Tes14, Lemma A.35]), dass es ein positives Maß  $m$  gibt, sodass

$$u(re^{i\theta}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon(re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} dm(t).$$

Ist uns umgekehrt eine Funktion gegeben, die durch (3.2) dargestellt ist, so folgt aus der Nicht-Negativität des Poissonkerns  $P(r, \cdot)$ , dass diese Funktion ebenfalls nicht-negativ ist. Die Harmonizität dieser Funktion folgt aus der Harmonizität des Poissonkerns (3.3) als Realteil einer holomorphen Funktion.  $\square$

Das Theorem sagt im Wesentlichen, dass jede nicht-negative, harmonische Funktion auf der Kreisscheibe  $D$  das Poisson-Integral eines positiven Maßes ist. Vergleiche diese Aussage auch mit dem Bernstein-Theorem über vollständig monotone Funktionen.

DEFINITION 3.9. Sei  $f \in C^\infty((0, \infty) : \mathbb{R})$ . Dann heißt  $f$  vollständig monoton, wenn für alle  $n \geq 0$  gilt

$$(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0, \quad x > 0. \tag{3.5}$$

Die vollständig monotonen Funktionen wurden von Bernstein charakterisiert.

SATZ 3.10 (Kleines Bernstein-Theorem). Wenn  $f(x)$  vollständig monoton ist, dann ist es die Restriktion auf die positive Halbachse von einer Funktion, die analytisch in  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$  ist.

SATZ 3.11 (Großes Bernstein-Theorem). Wenn  $f(x)$  vollständig monoton ist, dann ist es die Restriktion auf die positive Halbachse von der Laplace-Transformation eines positiven Maßes.

BEWEIS. Siehe Donoghue [Don74, S. 13-17].  $\square$

DEFINITION 3.12. Zwei harmonische Funktionen  $u$  und  $v$  auf  $\mathbb{R}^2$  heißen harmonisch zueinander konjugiert, wenn die Summe  $u(z) + iv(z)$  eine analytische Funktion ist.

Es ist bekannt, dass jede harmonische Funktion eine harmonisch konjugierte Funktion besitzt [Katznelson1976, Abschnitt III.1]. Für  $f \in L^1(\mathbb{T})$  ist die zum Poisson-Integral von  $f$ , sprich  $f(re^{it}) = (P(r, \cdot) * f)(t)$ , gehörende harmonisch konjugierte Funktion durch

$$\tilde{f}(re^{it}) = (Q(r, \cdot) * f)(t) \tag{3.6}$$

gegeben, wobei  $Q(r, t)$  den konjugierten Poissonkern

$$Q(r, t) = -i \sum_{n \in \mathbb{Z}} \operatorname{sgn}(n) r^{|n|} e^{int} = \frac{2r \sin t}{1 - 2r \cos t + r^2} = \operatorname{Im} \left( \frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}} \right) \tag{3.7}$$

bezeichnet. Wir erinnern an

LEMMA 3.13 (Katznelson [Katznelson1976, Kapitel III, Lemma 1.3]). Sei  $f \in L^1(\mathbb{T})$  und  $\tilde{f}(re^{it}) = (Q(r, \cdot) * f)(t)$ . Dann existiert  $\lim_{r \nearrow 1} \tilde{f}(re^{it})$  für fast alle  $t \in \mathbb{T}$ .

Tatsächlich ist der Grenzwert harmonisch konjugiert zu  $f$ , sprich  $f + i\tilde{f}$  ist analytisch in  $\mathbb{T}$ . Dies folgt sofort aus den expliziten Darstellungen des Poissonkerns (3.3) und des konjugierten Poissonkerns (3.7).

eq:conjugatepoissonkerne

LEMMA 3.14. Angenommen,  $f$  ist eine Funktion auf  $\mathbb{T}$  und sei  $\tilde{f}(re^{it}) := (Q(r, \cdot) * f)(t)$ . Dann ist die zu  $f$  harmonisch konjugierte Funktion  $\tilde{f}$  der radiale Grenzwert  $\lim_{r \nearrow 1} \tilde{f}(r \cdot)$ , d.h. die Funktion  $f + i\tilde{f}$  ist analytisch auf  $\mathbb{T}$ .

Aus dem Herglotz-Theorem <sup>herglotz1</sup> 3.7 lässt sich damit folgende Integraldarstellung analytischer Funktionen auf  $D$ , deren Realteil nicht-negativ ist, ableiten. Solche Funktionen heißen *Carathéodory-Funktionen*.

nevanlinnaaux

SATZ 3.15. Sei  $f(z) = u(z) + iv(z)$  holomorph auf  $D$ . Wenn  $u(z) \geq 0$ , dann gibt es ein endliches Maß  $m$  auf  $[0, 2\pi]$ , sodass

$$f(z) = \int_{[0, 2\pi]} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dm(t) + iv(0) \quad (3.8)$$

Umgekehrt ist jede Funktion von dieser Form analytisch auf  $D$  und hat einen positiven Realteil.

BEWEIS. Siehe Bhatia <sup>Bhatia1997</sup> [Bha97, Theorem V.4.10].

Wegen Satz <sup>herglotz1</sup> 3.7 kann  $u$  als Poissonintegral

$$u(re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - t)} dm(t)$$

geschrieben werden. Aus der Darstellung <sup>eq:poissonkerneltorus</sup> (3.3) des Poissonkerns folgt

$$P(r, \theta - t) = \operatorname{Re} \left( \frac{e^{it} + re^{i\theta}}{e^{it} - re^{i\theta}} \right)$$

und damit

$$u(z) = \operatorname{Re} \left[ \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dm(t) \right].$$

Daraus folgt, dass  $f(z)$  nur durch eine imaginäre Konstante vom Integral in eckigen Klammern abweicht. Diese Konstante ist gerade  $iv(0)$ , wie man durch Einsetzen von  $z = 0$  sieht.

Die umgekehrte Behauptung ist offenbar.  $\square$

Ein analoger Beweis von Theorem <sup>herglotz1</sup> 3.7 führt auf dasselbe Ergebnis, was nichts weiter als eine alternative Darstellung von Carathéodory-Funktionen

$$C : D \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 0\} \\ z \mapsto C(z) = -iF \left( i \frac{i - z}{i + z} \right), \quad (3.9)$$

ist. Die Funktion  $C$  wurde durch Umkehrung der Darstellung

$$F(z) = iC \left( \frac{i - z}{i + z} \right) \quad (3.10)$$

einer Pick-Funktion  $F$  gewonnen. Wir sehen also, dass  $F$  genau dann Pick ist, wenn  $C(z)$  eine Carathéodory-Funktion ist, sprich  $C : D \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$  holomorph.

herglotz2

SATZ 3.16 (Herglotz 2). Jede Carathéodory-Funktion ist von der Form

$$C(z) = ic + \int_{[-\pi, \pi]} \frac{e^{i\phi} + z}{e^{i\phi} - z} d\nu(\phi) \quad (3.11)$$

für ein endliches Maß  $d\nu$  und ein  $c \in \mathbb{R}$ . Explizit gilt für diese

$$\int_{[-\pi, \pi]} d\nu = \operatorname{Re}(C(0)), \quad \text{und} \quad c = \operatorname{Im}(C(0)). \quad (3.12)$$

BEWEIS. Siehe Teschl <sup>Teschl2014</sup> [Tes14, Theorem 3.19].

Sei  $C : D \rightarrow \mathbb{C}$  eine Carathéodory-Funktion und  $0 < r < 1$ . Dann gilt für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < r$ , dass

$$C(z) = \frac{1}{4\pi i} \int_{|\zeta|=r} \left( \frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \frac{r^2/\zeta + \bar{z}}{r^2/\zeta - \bar{z}} \right) C(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Nimmt man den Realteil auf beiden Seiten und setzt  $\zeta = re^{i\phi}$ , so sieht man

$$\operatorname{Re}(C(z)) = \int_{-\pi}^{\pi} P_{|z|/r}(\arg(z) - \phi) d\nu_r(\phi),$$

wobei

$$P_r(\phi) := \operatorname{Re} \left( \frac{1 + re^{i\phi}}{1 - re^{i\phi}} \right) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \phi + r^2}, \quad d\nu_r(\phi) = \operatorname{Re}(C(re^{i\phi})) \frac{d\phi}{2\pi}.$$

Wählt man insbesondere  $z = 0$ , so sieht man

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\nu_r(\phi) = \operatorname{Re}(C(0)) < \infty$$

und damit (da für  $|z| < 1$  die Funktionen  $P_{|z|/r}$  gleichmäßig gegen  $P_{|z|}$  für  $r \nearrow 1$  konvergieren)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(C(z)) &= \lim_{r \nearrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} P_{|z|/r}(\arg(z) - \phi) d\nu_r(\phi) \\ &= \lim_{r \nearrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} P_{|z|}(\arg(z) - \phi) d\nu_r(\phi). \end{aligned}$$

Da weiter die Folge der Maße  $\nu_r$  beschränkt ist, gibt es eine Teilfolge dieser Folge, die gegen ein Maß  $d\nu$  mit  $\nu([-\pi, \pi]) < \infty$  konvergieren (siehe Teschl <sup>Teschl2014</sup> [Tes14, Lemma A.35]) und dieses erfüllt

$$\operatorname{Re}(C(z)) = \int_{[-\pi, \pi]} P_{|z|}(\arg(z) - \phi) d\nu(\phi) = \int_{[-\pi, \pi]} \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i\phi} + z}{e^{i\phi} - z} \right) d\nu(\phi).$$

Da holomorphe Funktionen durch ihren Realteil modulo einer imaginären Konstante bestimmt sind, folgt die Behauptung.  $\square$

In jedem Fall erlauben Theoreme <sup>nevanlinnaherglotz2</sup> 3.15 bzw. 3.16 den Beweis von

nevanlinna

SATZ 3.17 (Nevanlinna). Jede Pick-Funktion ist von der Form

$$\begin{aligned} F(z) &= bz + a + \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \right) d\mu(\lambda) \\ &= bz + a + \int_{\mathbb{R}} \frac{1 + \lambda z}{\lambda - z} \frac{d\mu(\lambda)}{1 + \lambda^2}, \end{aligned} \quad (3.13) \quad \text{eq:intreppick}$$

wobei  $\mu$  ein positives Maß auf  $\mathbb{R}$  ist und

$$b \geq 0, \quad a \in \mathbb{R}, \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{1 + \lambda^2} < \infty. \quad (3.14)$$

Sind umgekehrt  $a, b, \mu$  wie oben gegeben, dann ist  $F(z)$ , gegeben durch <sup>leq:intreppick</sup> (3.13), eine holomorphe Funktion auf  $\mathbb{C} \setminus \text{supp}(\mu)$ , wobei  $\text{supp}(\mu)$  der (topologische) Träger von  $\mu$  ist. Außerdem gelten  $F(\bar{z}) = \overline{F(z)}$ ,

$$\text{Im}(F(z)) = \text{Im}(z) \left( b + \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda - z|^2} \right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \text{supp}(\mu) \quad (3.15)$$

sowie

$$\frac{dF(z)}{dz} = b + \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{(\lambda - z)^2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \text{supp}(\mu). \quad (3.16)$$

Wie bereits früher angedeutet, nutzen wir für den Beweis die konforme Äquivalenz zwischen der Kreisscheibe  $D$  und der oberen Halbebene  $\mathbb{C}_+$  aus. Sei

$$\zeta(z) = \frac{1}{i} \frac{z+1}{z-1}, \quad z \in D, \quad (3.17)$$

dann ist  $\zeta(z) \in \mathbb{C}_+$ . Die Inverse Abbildung ist durch

$$z(\zeta) = \frac{\zeta - i}{\zeta + i}, \quad \zeta \in \mathbb{C}_+ \quad (3.18)$$

gegeben. Aus diesen Transformationen ergibt sich eine Äquivalenz zwischen den Pick-Funktionen und den auf  $D$  analytischen Funktionen mit nicht-negativem Realteil. Für eine solche Funktion  $f$ , die auf  $D$  analytisch ist und deren Realteil nicht-negativ ist, sei im Folgenden

$$\phi(\zeta) := if(z(\zeta)). \quad (3.19)$$

Dann ist  $\phi \in P$  und die Umkehrung dieser Transformation ist durch

$$f(z) = -i\phi(\zeta(z)) \quad (3.20)$$

gegeben. Damit kommen wir endlich zum

<sup>nevanlinna</sup> BEWEIS VON SATZ 3.17. Siehe Bhatia <sup>Bhatia1997</sup> [Bha97, Theorem V.4.11] (oder Teschl <sup>Teschl2014</sup> [Tes14, Theorem 3.20]).

Sei also  $f$  die analytische Funktion auf  $D$  mit nicht-negativem Realteil, die sich aus der Pick-Funktion  $\phi$  über die Transformation  $f(z) = -i\phi(\zeta(z))$  ergibt. Wegen Satz 3.15 gibt es ein positives Maß  $m$  auf  $[0, 2\pi]$ , sodass

$$f(z) = \int_{[0,2\pi]} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dm(t) - ia.$$

Für  $f(z) = u(z) + iv(z)$  ist dann  $a = -v(0)$  und die Masse von  $m$  ist gerade  $u(0)$ . Falls  $m(\{0\}) > 0$ , dann sei  $b = m(\{0\})$ . Dann reduziert sich diese Integraldarstellung auf

$$f(z) = \int_{(0,2\pi)} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dm(t) + b \frac{1+z}{1-z} - ia$$

Aus den konformen Transformationen  $\phi(\zeta) = if(z(\zeta))$  mit  $z(\zeta) = (\zeta - i)/(\zeta + i)$  gewinnen wir daraus

$$\phi(\zeta) = a + b\zeta + i \int_{(0,2\pi)} \frac{e^{it} + \frac{\zeta-i}{\zeta+i}}{e^{it} - \frac{\zeta-i}{\zeta+i}} dm(t).$$

Das Integral ist gleich

$$\int_{(0,2\pi)} \frac{\zeta \cos(t/2) - \sin(t/2)}{\zeta \sin(t/2) + \cos(t/2)} dm(t).$$

Wir führen nun die neue Koordinate  $\lambda = -\cot(t/2)$  ein, womit wir  $(0, 2\pi)$  auf  $(-\infty, \infty)$  abbilden. Das Maß  $m$  transformiert sich dadurch zu einem endlichen Maß  $\nu$  auf  $(-\infty, \infty)$  und das obige Integral wird zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \lambda\zeta}{\lambda - \zeta} d\nu(\lambda).$$

Schreibt man noch  $d\nu = d\mu(\lambda)/(1 + \lambda^2)$  mit  $\int (1 + \lambda^2)^{-1} d\mu(\lambda), \infty$ , folgt die Darstellung <sup>eq:intreppick</sup> (3.13).

Umgekehrt sieht man sofort ein, dass jede Funktion der Form <sup>eq:intreppick</sup> (3.13) tatsächlich eine Pick-Funktion ist.  $\square$

Die allgemeine Darstellung in <sup>eq:intreppick</sup> (3.13) kann stark vereinfacht werden, wenn die Abschätzung  $\text{Im}(F(iy)) \leq M/y$  gilt.

**KOROLLAR 3.18.** *Sei  $F$  eine Pick-Funktion und  $\mu$  das dazugehörige Maß. Dann haben wir*

$$b = 0, \int_{\mathbb{R}} d\mu \leq M \Leftrightarrow \text{Im}(F(iy))d \leq \frac{M}{y}. \quad (3.21)$$

Darüberhinaus gilt in diesem Fall

$$F(z) = \tilde{a} + \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z}, \quad \tilde{a} = a - \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} d\mu(\lambda) \in \mathbb{R} \quad (3.22)$$

sowie

$$F(z) = \tilde{a} - \frac{1}{z} \int_{\mathbb{R}} d\mu + o(z^{-1}), \quad z \rightarrow \infty \quad (3.23)$$

in jedem Sektor der oberen (oder unteren) Halbebene.

BEWEIS. Siehe Teschl <sup>Teschl2014</sup> [Teschl14, Corollary 3.21].

Die zweite Bedingung ist gleichbedeutend mit

$$y \text{Im}(F(iy)) = by^2 + \int_{\mathbb{R}} \frac{y^2}{\lambda^2 + y^2} d\mu(\lambda) \leq M \quad (3.24)$$

und impliziert  $b = 0$  sowie  $\int_{\mathbb{R}} d\mu \leq M$  mittels monotoner Konvergenz. Die Umkehrung ist offenbar.

Für die letzte Behauptung beobachtet man

$$F(z) = \tilde{a} - \frac{\mu(\mathbb{R})}{z} + \frac{1}{z} \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda}{z - \lambda} d\mu(\lambda)$$

und verwendet majorisierte Konvergenz zusammen mit  $|\lambda/(\lambda - z)| \leq |z|/|\text{Im}(z)|$ .  $\square$

Aus dieser Aussage ergibt sich die nützliche Formel

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \text{Im}(F(i\lambda)) = \mu(\mathbb{R}). \quad (3.25)$$

Wenn wir die stärkere Bedingung  $|F(iy)| \leq M/y$  haben, dann ist sogar  $\tilde{a} = 0$  in obigem Korollar und wir erhalten die Behauptung <sup>pickuniqueprelim</sup> 2.3 aus dem vorigen Abschnitt.

Folgendes Resultat erlaubt es  $a$ ,  $b$  und das Maß  $\mu$  aus einer gegebenen Pick-Funktion zu rekonstruieren.

pickunique

SATZ 3.19. Wenn  $F(z)$  eine Pick-Funktion mit Integraldarstellung eq:intreppick  
(3.13) ist, dann sind  $a$  und  $b$  eindeutig durch  $F$  bestimmt durch

$$a = \operatorname{Re}(F(i)), \quad b = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{F(i\eta)}{i\eta}. \quad (3.26)$$

Weiter gilt für alle  $\alpha$  und  $\beta$ , die Kontinuitätspunkte (also keine Atome) der Verteilungsfunktion  $\mu((\alpha, \beta]) = \mu(\beta) - \mu(\alpha)$  sind, die Stieltjessche Umkehrformel

$$\mu(\beta) - \mu(\alpha) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Im}(F(x + i\eta)) \, dx. \quad (3.27)$$

eq:stieltjesinversion

Insbesondere sind somit  $a$ ,  $b$  und  $\mu$  in eq:intreppick  
(3.13) eindeutig durch  $F$  bestimmt.

Diesen Satz werden wir wieder bei der Besprechung von Boreltransformation komplexer Maße wiedertreffen (Satz 2.10). Im Wesentlichen ist die rechte Seite von eq:stieltjesinversion  
(3.27) nichts weiter als die Faltung des Poissonkerns (gleichbedeutend mit Resolventendifferenz für “gegenüberliegende” Spektralparameter  $E + i\epsilon$  und  $E - i\epsilon$ ) gegen die Indikatorfunktion  $\mathbf{1}_{(\alpha, \beta)}(x)$ . Die Behauptung folgt dann im Wesentlichen aus der Tatsache, dass der Poissonkern eine Approximation der Eins ist.

BEWEIS VON SATZ pickunique  
3.19. Siehe Bhatia Bhatia1997  
[Bha97, S. 139 und Theorem V.4.12] oder Teschl Teschl2014  
[Tes14, Theorem 3.23].

Dass  $a = \operatorname{Re}(F(i))$  ist, folgt sofort aus eq:intreppick  
(3.13). Um  $b$  zu bestimmen, sei  $\eta > 0$  beliebig. Dann folgt aus eq:intreppick  
(3.13)

$$\frac{F(i\eta)}{i\eta} = \frac{a}{i\eta} + b + \int_{\mathbb{R}} \frac{1 + \lambda^2 + i\lambda(\eta - \eta^{-1})}{\lambda^2 + \eta^2} \frac{d\mu(\lambda)}{1 + \lambda^2}.$$

Für  $\eta \rightarrow \infty$  verschwindet der Integrand für alle  $\lambda$ . Da der Real- und Imaginärteil des Integranden gleichmäßig durch 1 beschränkt ist, wenn  $\eta > 1$ , folgt aus majorisierter Konvergenz, dass das gesamte Integral für  $\eta \rightarrow \infty$  verschwindet. Somit erhalten wir  $b = \lim_{\eta \rightarrow \infty} F(i\eta)/(i\eta)$ , was behauptet war.

Es verbleibt somit die Stieltjessche Umkehrformel eq:stieltjesinversion  
(3.27) zu zeigen. Aus eq:intreppick  
(3.13) folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Im} F(x + i\eta) \, dx &= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left[ b\eta + \int_{\mathbb{R}} \frac{\eta}{(\lambda - x)^2 + \eta^2} d\mu(\lambda) \right] dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ b\eta(\beta - \alpha) + \int_{\mathbb{R}} d\mu(\lambda) \int_{\alpha}^{\beta} dx \frac{\eta}{(x - \lambda)^2 + \eta^2} \right], \end{aligned}$$

wobei wir die Integrale mit Fubini vertauschen durften. Für  $\eta \rightarrow 0$  verschwindet der erste Term in eckigen Klammern. Mit der Substitution  $u = \eta^{-1}(x - \lambda)$  kann das innere Integral ausgerechnet werden und wir erhalten

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\eta}{(x - \lambda)^2 + \eta^2} dx = \int_{(\alpha - \lambda)/\eta}^{(\beta - \lambda)/\eta} \frac{du}{u^2 + 1} = \arctan\left(\frac{\beta - \lambda}{\eta}\right) - \arctan\left(\frac{\alpha - \lambda}{\eta}\right).$$

Um also die Stieltjessche Umkehrformel eq:stieltjesinversion  
(3.27) zu zeigen, verbleibt

$$\mu(\beta) - \mu(\alpha) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left[ \arctan\left(\frac{\beta - \lambda}{\eta}\right) - \arctan\left(\frac{\alpha - \lambda}{\eta}\right) \right] d\mu(\lambda) \quad (3.28)$$

eq:stieltjesinversionaux

zu zeigen. Dazu verwenden wir folgende Eigenschaften von  $\arctan$ .  $(-\infty, \infty) \ni x \mapsto \arctan(x) \in (-\pi/2, \pi/2)$  ist ungerade und monoton steigend, das heißt

$$0 \leq \arctan\left(\frac{\beta - \lambda}{\eta}\right) - \arctan\left(\frac{\alpha - \lambda}{\eta}\right) \leq \pi.$$

Wenn  $\beta - \lambda$  und  $\alpha - \lambda$  dasselbe Vorzeichen haben, dann folgt aus dem Additionstheorem für den  $\arctan$

$$\arctan\left(\frac{\beta - \lambda}{\eta}\right) - \arctan\left(\frac{\alpha - \lambda}{\eta}\right) = \arctan\frac{\eta(\beta - \alpha)}{\eta^2 + (\beta - \lambda)(\alpha - \lambda)}.$$

Für  $x > 0$  gilt

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \leq \int_0^x dt = x.$$

Wir kommen nun zum Beweis von [\(3.28\)](#). Sei  $\epsilon > 0$ . Da  $\alpha$  und  $\beta$  [Kontinuitätspunkte](#) (also keine Atome) von  $\mu$  sind, können wir  $\delta$  so wählen, dass

$$\begin{aligned} \mu(\alpha + \delta) - \mu(\alpha - \delta) &\leq \epsilon/5, \\ \mu(\beta + \delta) - \mu(\beta - \delta) &\leq \epsilon/5. \end{aligned}$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} &\left| \mu(\beta) - \mu(\alpha) - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} d\mu(\lambda) \left[ \arctan\left(\frac{\beta - \lambda}{\eta}\right) - \arctan\left(\frac{\alpha - \lambda}{\eta}\right) \right] \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{\beta}^{\infty} d\mu(\lambda) \left[ \arctan\left(\frac{\beta - \lambda}{\eta}\right) - \arctan\left(\frac{\alpha - \lambda}{\eta}\right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} d\mu(\lambda) \left[ \pi - \left( \arctan\left(\frac{\beta - \lambda}{\eta}\right) - \arctan\left(\frac{\alpha - \lambda}{\eta}\right) \right) \right] \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\alpha} d\mu(\lambda) \left[ \arctan\left(\frac{\beta - \lambda}{\eta}\right) - \arctan\left(\frac{\alpha - \lambda}{\eta}\right) \right] \\ &\leq \frac{2\epsilon}{5} + \frac{1}{\pi} \int_{\beta+\delta}^{\infty} \arctan\left(\frac{\eta(\beta - \alpha)}{\eta^2 + (\beta - \lambda)(\alpha - \lambda)}\right) d\mu(\lambda) \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha+\delta}^{\beta-\delta} d\mu(\lambda) \left[ \pi - \left( \arctan\left(\frac{\beta - \lambda}{\eta}\right) - \arctan\left(\frac{\alpha - \lambda}{\eta}\right) \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\alpha-\delta} \arctan\left(\frac{\eta(\beta - \alpha)}{\eta^2 + (\beta - \lambda)(\alpha - \lambda)}\right) d\mu(\lambda). \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass in den beiden Integralen mit Grenzwerten im Unendlichen das Argument des  $\arctan$  jeweils positiv ist. Im mittleren Integral läuft die Variable  $\lambda$  zwischen  $\alpha + \delta$  und  $\beta - \delta$ . Für solche  $\lambda$  gilt  $(\beta - \lambda)/\eta \geq \delta/\eta$  und  $(\alpha - \lambda)/\eta \leq -\delta/\eta$ . Deshalb ist die rechte Seite der letzten Formel nach oben durch

$$\begin{aligned} &\frac{2\epsilon}{\pi} + \frac{\eta}{\pi} \int_{\beta+\delta}^{\infty} \frac{\beta - \alpha}{\eta^2 + (\beta - \lambda)(\alpha - \lambda)} d\mu(\lambda) \\ &\quad + \frac{\eta}{\pi} \int_{-\infty}^{\alpha-\delta} \frac{\beta - \alpha}{\eta^2 + (\beta - \lambda)(\alpha - \lambda)} d\mu(\lambda) \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha+\delta}^{\beta-\delta} \left[ \pi - 2 \arctan \frac{\delta}{\eta} \right] d\mu(\lambda) \end{aligned}$$

beschränkt. Wegen  $\int d\mu(\lambda) (1+\lambda^2)^{-1} < \infty$  sind die ersten beiden Integrale endlich. Das dritte Integral ist durch  $2(\pi/2 - \arctan(\delta/\eta))[\mu(\beta) - \mu(\alpha)]$  beschränkt. Daher können wir  $\eta$  so klein wählen, dass jeder dieser drei Terme durch  $\epsilon/3$  beschränkt ist. Dies zeigt (3.28) und schließt den Beweis.  $\square$

**pickmass**

BEHAUPTUNG 3.20. Eine Pick-Funktion  $F$  ist genau dann in  $P(\alpha, \beta)$ , (siehe Definition 3.3), wenn das Maß  $\mu$  aus der Integraldarstellung (3.13) keine Masse auf  $(\alpha, \beta)$  hat.

BEWEIS. Siehe Bhatia [Bha97, Proposition V.4.14].

Angenommen zunächst, dass  $F \in P(\alpha, \beta)$ . Sei  $F(x+i\eta) = u(x+i\eta) + iv(x+i\eta)$  wobei  $u, v$  den Real- bzw. Imaginärteil von  $F$  bezeichnen. Falls  $F$  über  $(\alpha, \beta)$  fortgesetzt werden kann, dann konvergiert  $v(x+i\eta)$  gleichmäßig gegen eine beschränkte, stetige Funktion  $v(x)$  für  $\eta \searrow 0$  für  $x \in [c, d] \subseteq (\alpha, \beta)$  für alle  $\alpha < c < d < \beta$ . Aus Theorem 3.19 (Formel (3.27)) folgt dann

$$\mu(d) - \mu(c) = \frac{1}{\pi} \int_c^d v(x) dx,$$

sprich  $d\mu(x) = \pi^{-1}v(x) dx$ . Wenn die analytische Fortsetzung von  $\phi$  auf die untere Halbebene durch Reflexion an  $(a, b)$  gewonnen wird, muss aber  $v(x) = 0$  für alle  $x \in [c, d]$  sein, was  $\mu([c, d]) = 0$  für alle  $\alpha < c < d < \beta$  zeigt.

Nehmen wir nun umgekehrt an,  $\mu$  hätte keine Masse auf  $(\alpha, \beta)$ . Dann konvergiert für  $z \in (a, b)$  das Integral in (3.13) absolut und es ist reellwertig. Dies zeigt, dass die Funktion  $F$  von  $\mathbb{C}_+$  nach  $\mathbb{C}_-$  durch Reflexion an  $(\alpha, \beta)$  analytisch fortgesetzt werden kann, sprich  $F \in P(\alpha, \beta)$ .  $\square$

Wir betrachten einige Beispiele.

BEISPIEL 3.21. Offensichtlich ist  $F(z) = -z^{-1}$  Pick, was aus

$$a = \operatorname{Re}(F(i)) = 0, \quad b = 0$$

aus Theorem 3.19 folgt. Da  $F$  in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  holomorph ist, folgt aus Behauptung 3.20, dass das zugehörige Maß  $\mu$  auf dem einzelnen Punkt  $\mu$  konzentriert ist. Genauer gesagt ist  $d\mu(\lambda) = \delta(\lambda)d\lambda$  in (3.13).

BEISPIEL 3.22. Sei  $F(z) = z^{1/2}$  der Hauptzweig der Quadratwurzelfunktion. Diese ist Pick, denn aus Satz 3.19 folgt

$$a = \operatorname{Re}(F(i)) = \operatorname{Re}(e^{i\pi/4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b = 0.$$

Wir bestimmen nun das Maß  $\mu$  mittels Theorem 3.19. Für  $z = \lambda + i\eta$  ist

$$z^{1/2} = \left(\frac{|z| + \lambda}{2}\right)^{1/2} + i \operatorname{sgn} \eta \left(\frac{|z| - \lambda}{2}\right)^{1/2},$$

wobei  $\operatorname{sgn}(\eta)$  so definiert ist, dass  $\operatorname{sgn}(\eta) = 1$  für  $\eta \geq 0$  und  $\operatorname{sgn}(\eta) = -1$  für  $\eta < 0$ . Falls also  $\eta \geq 0$ , dann ist  $\operatorname{Im}(F(z)) = [(|z| - \lambda)/2]^{1/2}$ . Für  $\eta \searrow 0$  wandert  $|z|$  immer näher an  $|\lambda|$ , das heißt  $\operatorname{Im}(F(\lambda + i\eta))$  konvergiert gegen 0 wenn  $\lambda > 0$  und gegen  $|\lambda|^{1/2}$ , wenn  $\lambda < 0$ . Da  $F$  positiv auf der rechten Halbachse ist, hat das Maß  $\mu$  kein Gewicht bei 0. Das Maß kann dann aus Theorem 3.19 gewonnen werden und wir erhalten

$$z^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \int_{-\infty}^0 \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}\right) \frac{|\lambda|^{1/2}}{\pi} d\lambda. \quad (3.29)$$

BEISPIEL 3.23. Sei  $F(z) = \log(z)$  der Hauptzweig des Logarithmus, der überall außer auf  $(-\infty, 0]$  definiert ist durch  $\log z = \log |z| + i \arg(z)$ . Hierbei ist die Funktion  $\arg(z)$  der Hauptzweig des Arguments, der Werte in  $(-\pi, \pi]$  annimmt. Dann gilt

$$\alpha = \operatorname{Re}(\log(i)) = 0, \quad \beta = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\log(i\eta)}{i\eta} = 0.$$

Es verbleibt wieder das Maß  $\mu$  zu bestimmen. Für  $\eta \searrow 0$  konvergiert  $\operatorname{Im}(\log(\lambda + i\eta))$  gegen  $\pi$ , falls  $\lambda < 0$  und gegen 0 falls  $\lambda > 0$ , sprich  $d\mu(x) = \pi dx|_{x \leq 0}$  und wir erhalten

$$\log z = \int_{-\infty}^0 \left( \frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right) d\lambda. \quad (3.30)$$

Folgende Klasse von Funktionen, die eng mit den Pick-Funktionen verwandt ist, trifft man häufig in Halbgruppentheorie an.

DEFINITION 3.24 (Vollständig monotone und Bernstein-Funktionen). (1) Sei  $f \in C^\infty(0, \infty)$ . Dann heißt  $f$  genau dann *vollständig monoton*, wenn  $(-1)^n f^{(n)} \geq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $x > 0$ .

(2)  $f : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  heißt *Bernstein-Funktion*, falls  $f'$  vollständig monoton.

SATZ 3.25 (Bernstein). (1) (*Kleiner Bernstein*) Falls  $f$  vollständig monoton ist, dann ist  $f$  die Restriktion auf  $(0, \infty)$  einer auf  $\mathbb{C}_+$  holomorphen Funktion.

(2) (*Großer Bernstein*) Falls  $f$  vollständig monoton ist, dann ist  $f$  die Restriktion auf  $(0, \infty)$  einer Laplacetransformation eines positiven Maßes.

BEWEIS. Siehe Donoghue <sup>Donoghue1974</sup> [Don74, p. 13–14].  $\square$

BEHAUPTUNG 3.26. (1) *Pick-Funktionen sind vollständig monoton.*

(2) *Jede Bernstein-Funktion  $f : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  hat die Darstellung*

$$f(x) = \alpha x + \beta + \int_{(0, \infty)} (1 - e^{-tx}) d\nu(t)$$

für gewisse  $\alpha, \beta \geq 0$  und ein Levy-Maß  $\nu$ , also ein auf  $(0, \infty)$  getragenes, positives Maß, welches

$$\int_{(0, \infty)} \frac{t}{1+t} d\nu(t) < \infty$$

erfüllt.

BEWEIS. Siehe Porcu–Schilling <sup>PorcuSchilling2011</sup> [PS11, p. 444].  $\square$

## 4. Der Spektralsatz

**4.1. Spektralmaße.** Wir folgen Teschl <sup>Teschl2014</sup> [Tes14, Abschnitt 3.1] und Amrein <sup>Amrein2009</sup> [Amr09, Abschnitt 4.2].

Die Algebra der beschränkten Operatoren auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  wird mit  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  bezeichnet.

defpvm

DEFINITION 4.1. Ein *projektorwertiges Maß*, kurz *PVM*, ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} P : \mathcal{A}_{\mathbb{R}} &\rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}) \\ \Omega &\mapsto P(\Omega) \end{aligned} \quad (4.1)$$

von den Borelmengen auf die Menge der orthogonalen Projektionen, sprich  $P(\Omega)^* = P(\Omega) = P(\Omega)^2$ , die die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

- (1)  $P(\mathbb{R}) = 1_{\mathcal{H}}$
- (2) Wenn  $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$  mit  $\Omega_n \cap \Omega_m = \emptyset$  für  $n \neq m$ , dann gilt  $\sum_n P(\Omega_n)\psi = P(\Omega)\psi$  für alle  $\psi \in \mathcal{H}$  (starke  $\sigma$ -Additivität).

rem:pvm

BEMERKUNGEN 4.2. (1) Wir betonen, dass wir wirklich starke Konvergenz in  $\sum_n P(\Omega_n)\psi = P(\Omega)\psi$  verlangen. Tatsächlich gilt die Norm-Konvergenz nicht einmal im einfachsten Fall, wo  $\mathcal{H} = L^2(I)$  und  $P(\Omega) = \mathbf{1}_\Omega$  der Multiplikationsoperator mit der Indikatorfunktion auf  $\Omega$  ist, da da für einen Multiplikationsoperator die Norm gerade die Supremumsnorm der zugehörigen Funktion (hier also Eins) ist.

(2) Starke Konvergenz kann durch schwache Konvergenz ersetzt werden, da  $w - \lim P_n = P$  impliziert, dass  $s - \lim P_n = P$  wegen

$$(\psi, P_n \psi) = \|P_n \psi\|^2$$

zusammen mit der Tatsache (Teschl <sup>Teschl 2014</sup> [Teschl 14, Lemma 1.12])

$$(w - \lim \psi_n = \psi \Rightarrow s - \lim \psi_n = \psi) \Leftrightarrow \limsup_n \|\psi_n\| \leq \|\psi\|.$$

(Dies folgt aus  $w - \lim \psi_n = \psi \Rightarrow \lim \|\psi_n\| = \|\psi\|$ , womit

$$\|\psi\|^2 = \liminf_n (\psi, \psi_n) \leq \|\psi\| \liminf_n \|\psi_n\| \Leftrightarrow \|\psi\| \leq \liminf_n \|\psi_n\|,$$

woraus

$$\|\psi - \psi_n\|^2 = \|\psi\|^2 + \|\psi_n\|^2 - 2\operatorname{Re}(\psi, \psi_n) \rightarrow 0$$

folgt.)

ex:pvm1

BEISPIEL 4.3. Sei  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$  und  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$  eine symmetrische Matrix. Seien  $\{\lambda_j\}_{j=1}^m$  die zugehörigen (distinkten) Eigenwerte und  $P_j$  die Projektionen auf die zugehörigen Eigenräume. Dann ist

$$P_A(\Omega) := \sum_{\lambda_j \in \Omega} P_j \tag{4.2}$$

ein PVM.

ex:pvm2

BEISPIEL 4.4. Sei  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$  und  $f$  eine reellwertige messbare Funktion. Dann ist

$$P(\Omega) := \mathbf{1}_{f^{-1}(\Omega)}$$

ein PVM. [Hausaufgabe!]

Man verifiziert leicht die folgenden Eigenschaften.

pvmprop

BEHAUPTUNG 4.5. Seien  $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}$  und  $P$  ein PVM. Dann gelten

$$P(\emptyset) = 0, \quad P(\mathbb{R} \setminus \Omega) = \mathbf{1} - P(\Omega) \tag{4.3}$$

eq:pvmprop1

$$P(\Omega_1 \cup \Omega_2) + P(\Omega_1 \cap \Omega_2) = P(\Omega_1) + P(\Omega_2) \tag{4.4}$$

eq:pvmprop2

$$P(\Omega_1)P(\Omega_2) = P(\Omega_1 \cap \Omega_2). \tag{4.5}$$

eq:pvmprop3

Weiter ist  $P$  monoton in dem Sinne

$$P(\Omega_1) \leq P(\Omega_2) \quad \text{falls } \Omega_1 \subseteq \Omega_2 \tag{4.6}$$

bzw.  $\operatorname{Ran}(P(\Omega_1)) \subseteq \operatorname{Ran}(P(\Omega_2))$ . Insbesondere folgt aus  $P(\Omega_2) = 0$ , dass  $P(\Omega_1) = 0$  für alle  $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ .

Folgendes Lemma ist für den Beweis der Monotonie-Eigenschaft nützlich, aber auch von gesondertem Interesse.

LEMMA 4.6. *Seien  $Y$  und  $Z$  abgeschlossene Teilräume eines Hilbertraums  $X$  und seien  $P_Y$  und  $P_Z$  die orthogonalen Projektionen auf  $Y$  bzw.  $Z$ . Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Es gilt stets  $0 \leq P_Y \leq \mathbf{1}$ .*
- (2)  *$P := P_Y P_Z$  ist genau dann eine orthogonale Projektion, wenn  $P_Y P_Z = P_Z P_Y$  gilt. In diesem Fall ist  $P = P_{Y \cap Z}$ . Weiter gilt  $Y \perp Z$  genau dann, wenn  $P_Y P_Z = 0$  (bzw.  $P_Z P_Y = 0$ ).*
- (3)  *$Q := P_Y + P_Z$  ist genau dann eine orthogonale Projektion, wenn  $Y \perp Z$  gilt. In diesem Fall ist  $Q = P_{Y \oplus Z}$ .*
- (4) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
  - (a)  $P_Y \leq P_Z$ ,
  - (b)  $Y \subseteq Z$ ,
  - (c)  $P_Z P_Y = P_Y$ ,
  - (d)  $P_Y P_Z = P_Y$ .

BEWEIS. Wir folgen Weidmann <sup>Weidmann2000</sup> [Wei00, Sätze 2.55 und 2.56].

- (1) Für jedes  $x \in X$  gilt  $(0x, x) = 0 \leq \|P_Y x\|^2 = (P_Y x, x) \leq \|x\|^2 = (\mathbf{1}x, x)$ .
- (2) Ist  $P = P_Y P_Z$  eine orthogonale Projektion, dann ist  $P$  selbadjungiert, also  $P_Y P_Z = P = P^* = (P_Y P_Z)^* = P_Z^* P_Y^* = P_Z P_Y$ . Gilt umgekehrt  $P_Y P_Z = P_Z P_Y$ , so folgt  $P^2 = (P_Y P_Z)^2 = P_Y P_Z P_Y P_Z = P_Y^2 P_Z^2 = P_Y P_Z = P$  und  $P^* = (P_Y P_Z)^* = (P_Z P_Y)^* = P_Y^* P_Z^* = P_Y P_Z = P$ , sprich  $P$  ist eine orthogonale Projektion.

Wegen  $P = P_Y P_Z = P_Z P_Y$  ist  $\text{ran}(P) \subseteq \text{ran}(P_Y) \cap \text{ran}(P_Z) = Y \cap Z$ . Ist  $x \in Y \cap Z$ , so gilt  $Px = P_Y P_Z x = P_Y x = x$ , also ist  $Y \cap Z \subseteq \text{ran}(P)$  und somit  $Y \cap Z = \text{ran}(P)$ .

Offenbar gilt  $P_Y P_Z = 0$  genau dann, wenn  $y \in \text{ran}(P_Y)^\perp = Y^\perp$  gilt für alle  $y \in \text{ran}(P_Z) = Z$ , d.h., wenn  $Y \perp Z$  gilt. Entsprechend folgt die andere Aussage.

- (3) Ist  $Q = P_Y + P_Z$  eine orthogonale Projektion, dann ist  $\|x\|^2 \geq \|Qx\|^2 = (x, Qx) = (x, P_Y x) + (x, P_Z x) = \|P_Y x\|^2 + \|P_Z x\|^2$ . Für  $x = P_Y y$  folgt also  $\|P_Y y\|^2 \geq \|P_Y y\|^2 + \|P_Z P_Y y\|^2$ , d.h. es muss  $P_Z P_Y y = 0$  für alle  $y \in X$  gelten, sprich  $P_Z P_Y = 0$ , nach Teil (1) also  $Y \perp Z$ . Die Inklusion  $\text{ran}(Q) \subseteq \text{ran}(P_Y) + \text{ran}(P_Z) = Y \oplus Z$  ist offensichtlich; ist andererseits  $x = y + z \in \text{ran}(P_Y) + \text{ran}(P_Z)$  mit  $y \in Y$  und  $z \in Z$ , so gilt  $Qx = Qy + Qz = P_Y y + P_Z z = y + z = x$ , also insgesamt  $\text{ran}(Q) = Y \oplus Z$ .

Ist  $Y \perp Z$ , so gilt nach Teil (1), dass  $P_Y P_Z = P_Z P_Y = 0$ , also  $Q^2 = (P_Y + P_Z)^2 = P_Y^2 + P_Z^2 = P_Y + P_Z = Q$ . Da die Operatoren  $P_Y$  und  $P_Z$  selbstadjungiert sind, ist es auch  $Q$  (Fragen nach dem Definitionsbereich erübrigen sich), womit  $Q$  auch eine orthogonale Projektion ist.

- (4) (a)  $\Rightarrow$  (b): Ist  $P_Y \leq P_Z$ , so gilt  $\|P_Y x\|^2 = (P_Y x, x) \leq (P_Z x, x) = \|P_Z x\|^2$  für alle  $x \in X$ , also  $\ker(P_Z) \subseteq \ker(P_Y)$  und somit  $Y = \text{ran}(P_Y) = \ker(P_Y)^\perp \subseteq \ker(P_Z)^\perp = \text{ran}(P_Z) = Z$ .

(b)  $\Rightarrow$  (c): Mit  $W = Z \ominus Y$  gilt nach (2) und (3), dass  $P_Z P_Y = (P_Y + P_W)P_Y = P_Y^2 P_Y$ .

(c)  $\Rightarrow$  (d): Da  $P_Z P_Y$  eine Projektion ist (nämlich  $P_Y$ ), gilt nach (2) dass  $P_Y P_Z = P_Z P_Y = P_Y$ .

(d)  $\Rightarrow$  (a): Wegen  $P_Y P_Z = P_Y$  gilt  $(P_Y, x, x) = \|P_Y x\|^2 = \|P_Y P_Z x\|^2 \leq \|P_Z x\|^2 = (P_Z x, x)$  für alle  $x \in X$ .

□

BEWEIS VON BEHAUPTUNG 4.5. Wir zeigen lediglich (4.5). Die letzte Aussage folgt aus dem vorigen Lemma. Angenommen, es wäre  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ . Quadriert man dann (4.3) erhält man

$$P(\Omega_1)P(\Omega_2) + P(\Omega_2)P(\Omega_1) = 0. \quad (4.7)$$

Multipliziert man dies von rechts mit  $P(\Omega_2)$ , sieht man, dass  $P(\Omega_1)P(\Omega_2) = -P(\Omega_2)P(\Omega_1)P(\Omega_2)$  selbstadjungiert ist, womit  $P(\Omega_1)P(\Omega_2) = P(\Omega_2)P(\Omega_1) = 0$  sein muss. Für den allgemeinen Fall  $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$  erhalten wir dann

$$\begin{aligned} P(\Omega_1)P(\Omega_2) &= (P(\Omega_1 - \Omega_2) + P(\Omega_1 \cap \Omega_2))(P(\Omega_2 - \Omega_1) + P(\Omega_1 \cap \Omega_2)) \\ &= P(\Omega_1 \cap \Omega_2), \end{aligned}$$

wie behauptet. □

Weiter korrespondiert zu jedem PVM eine *Spektralschar*

$$P(\lambda) = P((-\infty, \lambda]) \quad (4.8)$$

sprich  $P(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}$ , welche folgenden Eigenschaften genügt.

BEHAUPTUNG 4.7. Sei  $P(\lambda) = P((-\infty, \lambda])$  die zu  $P$  gehörende Spektralschar. Dann gelten folgende Aussagen.

- (1)  $P(\lambda)$  ist eine Projektion.
- (2)  $P(\lambda_1) \leq P(\lambda_2)$  für  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ .
- (3)  $s - \lim_{\lambda_n \searrow \lambda} P(\lambda_n) = P(\lambda)$  (starke rechtsseitige Stetigkeit).
- (4)  $s - \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} P(\lambda) = 0$  und  $s - \lim_{\lambda \rightarrow \infty} P(\lambda) = \mathbf{1}$ .

Wie zuvor ist starke rechtsseitige Stetigkeit äquivalent zu schwacher rechtsseitiger Stetigkeit, da wir es hier mit Projektionen zu tun haben.

BEWEIS. Folgt aus den Eigenschaften des PVM und Weidmann <sup>Weidmann2003</sup> [Wei03, Sätze 2.52 und 2.57]. □

Der Vollständigkeit halber rufen wir die in dem Beweis zitierten Sätze kurz ins Gedächtniss.

LEMMA 4.8 (Monotonieprinzip). Sei  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte, monotone Folge symmetrischer Operatoren im Hilbertraum  $\mathcal{H}$ . Dann existiert ein symmetrischer Grenzooperator  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  mit  $s - \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$ .

LEMMA 4.9 (Monotonieprinzip für orthogonale Projektionen). Sei  $P_n$  eine monotone Folge orthogonaler Projektionen im Hilbertraum  $\mathcal{H}$ . Dann existiert eine orthogonale Projektion  $P$  in  $\mathcal{H}$  mit  $s - \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$  und es gelten

- (1) falls  $P_n$  wachsend ist, dann  $\text{ran}(P) = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{ran}(P_n)}$  und
- (2) falls  $P_n$  fallend ist, dann  $\text{ran}(P) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{ran}(P_n)$ .

Für  $\psi \in \mathcal{H}$  erhält man ein endliches Borelmaß

$$\mu_\psi(\Omega) = (\psi, P(\Omega)\psi) = \|P(\Omega)\psi\|^2 \quad (4.9)$$

mit  $\mu_\psi(\mathbb{R}) = \|\psi\|^2 < \infty$ . Durch Polarisierung erhalten wir die komplexen Borelmaße

$$\mu_{\phi,\psi}(\Omega) = (\phi, P(\Omega)\psi) = \frac{1}{4} (\mu_{\phi+\psi}(\Omega) - \mu_{\phi-\psi}(\Omega) + i\mu_{\phi-i\psi}(\Omega) - i\mu_{\phi+i\psi}(\Omega)). \quad (4.10)$$

Außerdem folgt aus Cauchy–Schwarz  $|\mu_{\phi,\psi}(\Omega)| \leq \|\phi\| \|\psi\|$ .

Die zu  $\mu_\psi(\Omega)$  gehörige Verteilungsfunktion ist durch  $\mu_\psi(\lambda) = (\psi, P(\lambda)\psi)$  gegeben. Da es nach Satz 1.6 zu jeder Verteilungsfunktion ein eindeutiges Borelmaß gibt, gibt es für jede Spektralschar  $P(\lambda)$  genau ein PVM, welches man – in Analogie zu (1.4) – durch

$$\begin{aligned} P((a, b)) &= P(b - 0) - P(a + 0), \\ P([a, b]) &= P(b + 0) - P(a - 0), \\ P(\{b\}) &= s - \lim_{\epsilon \searrow 0} P((b - \epsilon, b]) = P(b + 0) - P(b - 0) \end{aligned} \quad (4.11)$$

erhält. Die letzte Identität zeigt insbesondere

- (1)  $P(\{b\}) = 0 \Leftrightarrow$  die Spektralschar  $\{P(\lambda)\}$  ist (stark) stetig am Punkt  $\lambda = b$ ,
- (2)  $P(\{b\}) \neq 0 \Leftrightarrow$  die Spektralschar  $\{P(\lambda)\}$  ist unstetig am Punkt  $\lambda = b$ .

Im zweiten Fall kann man mit dem Punkt  $b$  einen Unterraum  $\mathcal{M}(\{b\})$  mit nicht-verschwindender Dimension, nämlich

$$\mathcal{M}(\{b\}) = \{f \in \mathcal{H} : P(\{b\})f = f\} = \text{ran}(P(\{b\})) \quad (4.12)$$

assoziiieren. Analog zu Lemma 1.1 gilt

LEMMA 4.10. *Angenommen der zugrundeliegende (komplexe) Hilbertraum  $\mathcal{H}$  sei separabel. Dann ist die Zahl der Unstetigkeitsstellen von  $P(\lambda)$  höchstens abzählbar.*

BEWEIS. Seien  $b_1 \neq b_2$  zwei Unstetigkeitsstellen. Dann gilt  $P(\{b_1\})P(\{b_2\}) = 0$ , womit die Räume  $\mathcal{M}(\{b_1\})$  und  $\mathcal{M}(\{b_2\})$  aufeinander stehen. Wählt man zu jeder Unstetigkeitsstelle  $b$  einen Vektor  $f_b \neq 0$ , so erhält man eine Familie  $\{f_b\}$  von nicht-verschwindenden Vektoren, die paarweise orthogonal zueinander sind. Aber diese Familie ist abzählbar da bereits jede ONB von  $\mathcal{H}$  abzählbar ist, da  $\mathcal{H}$  separabel ist.  $\square$

Analog zum Träger von Maßen in Definition 1.7 haben wir

defsupppvm

DEFINITION 4.11. Der Träger einer Spektralschar  $P(\lambda)$  ist definiert als

$$\text{supp}(P(\lambda)) = \{\mu \in \mathbb{R} : P(\mu + \epsilon) - P(\mu - \epsilon) \neq 0 \forall \epsilon > 0\} \subseteq \mathbb{R}. \quad (4.13)$$

Offenbar ist  $\text{supp}(P(\lambda))$  abgeschlossen [Amr09, S. 144].

**4.2. Integration über PVMs.** Wir kommen nun zur Integration bezüglich PVMs. Für jede einfache Funktion  $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{1}_{\Omega_j}$  (mit  $\Omega_j = f^{-1}(\alpha_j)$ ), definieren wir

$$P(f) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dP(\lambda) := \sum_{j=1}^n \alpha_j P(\Omega_j). \quad (4.14)$$

Insbesondere gilt  $P(\mathbf{1}_\Omega) = P(\Omega)$ . Aus  $(\phi, P(f)\psi) = \sum_j \alpha_j \mu_{\phi,\psi}(\Omega_j)$  folgt dann

$$(\phi, P(f)\psi) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\mu_{\phi,\psi}(\lambda). \quad (4.15)$$

eq:pvmform

Aus der Linearität des Integrals folgt, dass der Operator  $P$  einfache Funktionen linear in  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  abbildet. Weiter folgt aus

$$\|P(f)\psi\|^2 = \sum_j |\alpha_j|^2 \mu_\psi(\Omega_j)$$

wegen der Disjunktheit der  $\Omega_j$ , dass

$$\|P(f)\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d\mu_\psi(\lambda). \quad (4.16) \quad \text{eq:pvmnorm}$$

Statten wir die Menge der einfachen Funktionen mit der sup-Norm aus, folgt insbesondere

$$\|P(f)\psi\| \leq \|f\|_\infty \|\psi\|, \quad (4.17)$$

sprich  $\|P\| = 1$ . Da die einfachen Funktionen dicht im Banachraum der beschränkten Borelfunktionen  $B(\mathbb{R})$  sind, gibt es eine eindeutige Erweiterung von  $P$  zu einem beschränkten linearen Operator  $P : B(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  mit  $\|P\| = 1$ . Insbesondere behalten [\(4.15\)](#) und [\(4.16\)](#) ihre Gültigkeit.

Es gibt eine weiter Struktur hinter dieser Erweiterung. Wir erinnern daran, dass  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  (die Menge aller beschränkten, linearen Operatoren auf  $\mathcal{H}$ ) eine  $C^*$ -Algebra bildet. Ein  $C^*$ -Algebra-Homomorphismus  $\phi$  ist eine lineare Abbildung zwischen zwei  $C^*$ -Algebren bezüglich Multiplikation und Adjungieren, sprich er erfüllt  $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$  sowie  $\phi(a^*) = \phi(a)^*$ . Damit kann folgendes Ergebnis gezeigt werden.

speccalcprelim

SATZ 4.12. Sei  $P(\Omega)$  ein PVM. Dann ist der Operator

$$P : B(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad (4.18)$$

$$f \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dP(\lambda) \quad (4.19)$$

ein  $C^*$ -Algebra-Homomorphismus mit  $\|P\| = 1$  und

$$(P(g)\phi, P(f)\psi) = \int_{\mathbb{R}} \overline{g(\lambda)} f(\lambda) d\mu_{\phi, \psi}(\lambda). \quad (4.20) \quad \text{eq:pvmformintegral}$$

Darüberhinaus gilt starke Konvergenz  $s - \lim_{n \rightarrow \infty} P(f_n) = P(f)$ , wenn  $f_n(\lambda) \rightarrow f(\lambda)$  punktweise und  $\|f_n\|_\infty < \infty$ .

BEWEIS. Die Eigenschaften  $P(1) = \mathbf{1}$ ,  $P(\bar{f}) = P(f)^*$  und  $P(fg) = P(f)P(g)$  folgen sofort für einfache  $f$ . Für allgemeine  $f$  folgen sie durch Approximation durch einfache Funktionen und Stetigkeit. Damit ist  $P$  ein  $C^*$ -Algebra-Homomorphismus.

Gleichung [\(4.20\)](#) folgt aus [\(4.20\)](#)  $(P(g)\phi, P(f)\psi) = (\phi, P(g^*f)\psi)$ . Die letzte Behauptung folgt aus majorisierter Konvergenz und [\(4.16\)](#).  $\square$

Aus [\(4.20\)](#) sehen wir, dass

$$\mu_{P(g)\phi, P(f)\psi}(\Omega) = (P(g)\phi, P(\Omega)P(f)\psi) = \int_{\Omega} \overline{g(\lambda)} f(\lambda) d\mu_{\phi, \psi}(\lambda) \quad (4.21)$$

was wiederum

$$d\mu_{P(g)\phi, P(f)\psi} = \bar{g}f d\mu_{\phi, \psi} \quad (4.22)$$

impliziert.

BEISPIEL 4.13. Sei  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$  und  $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$  (mit  $m$  unterschiedlichen Eigenwerten) bzw.  $P_A$  wie in Beispiel 4.3. Dann ist

$$P_A(f) = \sum_{j=1}^m f(\lambda_j) P_j \quad (4.23)$$

und insbesondere  $P_A(f) = A$  wenn  $f(\lambda) = \lambda$ . Darüberhinaus ist das Spektralmaß durch

$$d\mu_\psi(\lambda) = \sum_{j=1}^m \|P_j \psi\|^2 d\Theta(\lambda - \lambda_j) \quad (4.24)$$

gegeben, wobei  $d\Theta(\lambda - \lambda_j)$  das bei  $\lambda_j$  zentrierte Dirac-Maß bezeichnet.

Der erste wichtige Schritt zum Spektralsatz ist die Erkenntnis, dass wir zu jedem PVM  $P$  einen selbstadjungierten Operator, nämlich  $P(f)$  für  $f(\lambda) = \lambda$ , erhalten. Wir verallgemeinern die Situation sofort und setzen uns zum Ziel den Operator  $P(f)$  für beliebige unbeschränkte Borelfunktionen zu definieren. Wenn diese zusätzlich reellwertig sind, erhalten wir so bereits weitere selbstadjungierte Operatoren. Der *Spektralsatz ist die Umkehrung dieser Aussage*, sprich zu jedem selbstadjungierten Operator  $A$  finden wir ein zugehöriges PVM  $P_A$ , für das  $P_A(f) = A$  ist, wenn  $f(\lambda) = \lambda$ .

Für unbeschränkte Borelfunktionen erwarten wir, dass auch  $P(f)$  unbeschränkt sein wird. Wir definieren daher (motiviert durch (4.16))

$$\mathcal{D}_f = \left\{ \psi \in \mathcal{H} : \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d\mu_\psi(\lambda) < \infty \right\}. \quad (4.25)$$

eq: defdf

BEHAUPTUNG 4.14. Sei  $f$  eine (nicht notwendigerweise beschränkte) Borelfunktion auf  $\mathbb{R}$ . Dann ist  $\mathcal{D}_f$  ein dichter, linearer Unterraum von  $\mathcal{H}$ . Für

$$f_n = \mathbf{1}_{\Omega_n} f \quad \Omega_n := \{ \lambda : |f(\lambda)| \leq n \} \quad (4.26)$$

existiert

$$P(f)\psi := \lim_{n \rightarrow \infty} P(f_n)\psi, \quad \psi \in \mathcal{D}_f \quad (4.27)$$

und  $P(f)$  ist ein linearer Operator, der (4.16) und (4.15) für  $\phi = \psi$  erfüllt.

BEWEIS. Offenbar ist  $\mathcal{D}_f$  ein linearer Unterraum von  $\mathcal{H}$ , da  $\mu_{\alpha\psi}(\Omega) = |\alpha|^2 \mu_\psi(\Omega)$  und

$$\mu_{\phi+\psi}(\Omega) = \|P(\Omega)(\phi + \psi)\|^2 \leq 2(\|P(\Omega)\phi\|^2 + \|P(\Omega)\psi\|^2) = 2(\mu_\phi(\Omega) + \mu_\psi(\Omega))$$

mit Hilfe der Dreiecksungleichung.

Für  $\psi \in \mathcal{D}_f$  ist die Folge der Borelfunktionen

$$f_n = \mathbf{1}_{\Omega_n} f \quad \Omega_n := \{ \lambda : |f(\lambda)| \leq n \}$$

eine Cauchyfolge, die gegen  $f$  im  $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi(\lambda))$ -Sinne konvergiert. Aus (4.16) folgt insbesondere, dass die Vektoren  $\psi_n = P(f_n)\psi$  eine Cauchyfolge in  $\mathcal{H}$  bilden. Daher können wir

$$P(f)\psi := \lim_{n \rightarrow \infty} P(f_n)\psi, \quad \psi \in \mathcal{D}_f$$

definieren. Per Konstruktion ist damit  $P(f)$  ein linearer Operator, der (4.16) erfüllt. Da  $f \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_\psi)$  (und  $\mu_\psi$  endlich ist), bleibt auch (4.15) weiter gültig, sofern  $\phi = \psi$ .

Schliesslich zeigen wir, dass  $\mathcal{D}_f$  dicht ist. Sei dazu  $\Omega_n$  wie in der Behauptung und  $\psi_n := P(\Omega_n)\psi$ . Dann ist  $d\mu_{\psi_n} = \mathbf{1}_{\Omega_n} d\mu_\psi$  und damit  $\psi_n \in \mathcal{D}_f$ . Darüberhinaus folgt  $\psi_n \rightarrow \psi$  aus (4.16), da  $\mathbf{1}_{\Omega_n} \rightarrow 1$  in  $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)$ .  $\square$

Der Operator  $P(f)$  hat einige weitere schöne Eigenschaften, die wichtig für den Spektralkalkül sein werden. Wir erinnern daran, dass ein unbeschränkter Operator  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$  normal heißt, wenn  $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$  und  $\|A\psi\| = \|A^*\psi\|$  für alle  $\psi \in \mathcal{D}(A)$  gilt. Wir erinnern, dass normale Operatoren abgeschlossen sind, da die Graphennormen auf  $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$  übereinstimmen.

speccalc

SATZ 4.15. Für jede Borelfunktion  $f$  ist der Operator

$$P(f) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dP(\lambda), \quad \mathcal{D}(P(f)) = \mathcal{D}_f \quad (4.28)$$

normal und erfüllt

$$\begin{aligned} \|P(f)\psi\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d\mu_\psi(\lambda) \\ (\psi, P(f)\psi) &= \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\mu_\psi(\lambda) \end{aligned} \quad (4.29) \quad \text{eq: speccalc1}$$

für alle  $\psi \in \mathcal{D}_f$ . Außerdem kommutiert  $P(f)$  mit jedem  $P(\lambda)$  und es ist (trivialerweise)

$$\|P(f)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(P(f))} |f(\lambda)|. \quad (4.30)$$

Seien ferner  $f$  und  $g$  Borelfunktionen und  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Dann gelten

$$P(f)^* = P(\bar{f}), \quad (4.31) \quad \text{eq: speccalc2}$$

$$\alpha P(f) + \beta P(g) \subseteq P(\alpha f + \beta g), \quad \mathcal{D}(\alpha P(f) + \beta P(g)) = \mathcal{D}_{|\alpha f + \beta g|}, \quad (4.32) \quad \text{eq: speccalc3}$$

$$P(f)P(g) \subseteq P(fg), \quad \mathcal{D}(P(f)P(g)) = \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_{fg}. \quad (4.33) \quad \text{eq: speccalc4}$$

Insbesondere folgen daraus

$$\begin{aligned} P(f)P(\bar{f}) &= P(\bar{f})P(f) = P(|f|^2) \\ (P(f)\phi, P(g)\psi) &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(\lambda)}g(\lambda) d\mu_{\phi, \psi}(\lambda). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Schliesslich ist

- (1)  $P(f)$  genau dann selbstadjungiert, wenn  $f(\lambda)$  reellwertig ist und
- (2)  $P(f)$  genau dann unitär, wenn  $|f(\lambda)| = 1$ .

BEWEIS. Siehe Teschl [Teschl2014, Theorem 3.2] oder Amrein [Amrein2009, Lemma 4.11 und S. 153]. Der Beweis wird in Abschnitt 4.3 geführt.  $\square$

Dieser Satz erlaubt es uns bereits zu jedem gegebenen PVM  $P$  einen zugehörigen selbstadjungierten Operator  $A$  zu definieren, indem wir  $f(\lambda) = \lambda$  in Satz 4.15 setzen. Wir haben

$$A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A) &= \left\{ \psi \in \mathcal{H} : \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d(\psi, P(\lambda)\psi) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\mu_\psi(\lambda) < \infty \right\}, \\ (\phi, A\psi) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda d(\phi, P(\lambda)\psi) = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\mu_{\phi, \psi}(\lambda), \quad \phi \in \mathcal{H}, \psi \in \mathcal{D}(A). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Der Operator  $A$  ist genau dann beschränkt, wenn  $\text{supp}(P(\lambda))$  beschränkt ist und in diesem Fall ist

$$\|A\| = \sup_{\mu \in \text{supp}(P(\lambda))} |\mu|. \quad (4.36)$$

Ohne weitere Vorbereitungen (für den Beweis) stellen wir nun den Spektralsatz auf.

specthm

SATZ 4.16. Zu jedem selbstadjungierten Operator  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$  gibt es ein eindeutiges PVM  $P_A$ , sodass

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dP_A(\lambda) \quad (4.37)$$

im Sinne

$$(\phi, A\psi) = \int_{\mathbb{R}} \lambda d(\phi, P_A(\lambda)\psi) = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\mu_{\phi, \psi}^{(A)}(\lambda), \quad \phi \in \mathcal{H}, \psi \in \mathcal{D}(A). \quad (4.38)$$

wobei  $\mu_{\phi, \psi}^{(A)}(\lambda) = (\phi, P_A(\lambda)\psi)$  und  $P_A(\lambda)$  die Spektralschar zu  $P_A(\Omega)$  ist. Insbesondere gilt der Spektralkalkül für Borelfunktionen  $f$  aus Satz 4.15 für  $P(f) = P_A(f)$ , sprich

$$\begin{aligned} f(A) &= \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dP_A(\lambda), \\ f(A)^* &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(\lambda)} dP_A(\lambda), \end{aligned} \quad (4.39)$$

$f(A)$  kommutiert mit allen  $P_A(\lambda)$  und es gilt

$$\|f(A)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |f(\lambda)|. \quad (4.40)$$

Weiter gilt für Borelfunktionen  $f$  und  $g$  sowie komplexe Zahlen  $\alpha$  und  $\beta$ , dass

$$\begin{aligned} \alpha f(A) + \beta g(A) &\subseteq (\alpha f + \beta g)(A) \\ f(A)g(A) &\subseteq (fg)(A). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Schließlich ist

- (1)  $f(A)$  genau dann selbstadjungiert, wenn  $f(\lambda)$  für alle  $\lambda \in \sigma(A)$  reellwertig ist und
- (2)  $f(A)$  genau dann unitär, wenn  $|f(\lambda)| = 1$  für alle  $\lambda \in \sigma(A)$ .

BEWEIS. Siehe z.B. Teschl [Teschl2014, Theorem 3.6]. Der zweite Teil folgt dann aus dem eigentlichen Spektralsatz und Theorem 4.15. Auch dieser Beweis wird im folgenden Abschnitt 4.3 geführt.  $\square$

BEMERKUNGEN 4.17. (1) Die zu  $A$  gehörende quadratische Form ist durch

$$q_A(\psi) = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\mu_{\psi}(\lambda) \quad (4.42)$$

gegeben und kann für alle  $\psi$  im Formbereich

$$\mathcal{Q}(A) = \mathcal{D}(|A|^{1/2}) = \{\psi \in \mathcal{H} : \int_{\mathbb{R}} |\lambda| d\mu_{\psi}(\lambda) < \infty\} \supseteq \mathcal{D}(A) \quad (4.43)$$

definiert werden. (Man beobachte unsere erste Anwendung des Funktionalkalküls zur Definition von  $|A|^{1/2}$ .)

(2) Angenommen zwei Operatoren  $A$  und  $\tilde{A}$  seien unitär äquivalent zueinander, sprich es gibt einen unitären Operator  $U$ , sodass  $\tilde{A} = UAU^*$  und  $\mathcal{D}(\tilde{A}) = U\mathcal{D}(A)$ . Dann ist  $A$  genau dann selbstadjungiert, wenn es  $\tilde{A}$  ist und es gilt  $\sigma(A) = \sigma(\tilde{A})$ . Insbesondere folgt aus  $(\tilde{A} - z)^{-1} = U(A - z)^{-1}U^*$  und dem Spektralsatz, dass  $d\mu_\psi = d\tilde{\mu}_{U\psi}$  sowie  $P_{\tilde{A}}(f) = UP_A(f)U^*$  (bzw.  $f(\tilde{A}) = Uf(A)U^*$  unter Missbrauch der Notation) mit  $\mathcal{D}(P_{\tilde{A}}(f)) = U\mathcal{D}(P_A(f))$ .

ss:proofspeccalc

### 4.3. Beweis des Funktionalkalküls (Satz <sup>speccalc</sup>4.15) und des Spektralsatzes (Satz <sup>spectrum</sup>4.16).

BEWEIS VON SATZ <sup>speccalc</sup>4.15. Siehe Teschl <sup>Teschl2014</sup>[Teschl, Theorem 3.2].

Wir beginnen mit dem Beweis von <sup>eq:speccalc2</sup>(4.31). Für gegebenes  $f$  seien

$$f_n := f\mathbf{1}_{\Omega_n} \quad \text{mit } \Omega_n = \{\lambda \in \mathbb{R} : |f(\lambda)| \leq n\}.$$

Für solche  $f_n$  ist Satz <sup>speccalcprelim</sup>4.12 anwendbar, womit <sup>eq:speccalc2</sup>(4.31) für solche  $f_n$  gilt. Daraus folgt aber

$$(\phi, P(f)\psi) = (P(\bar{f})\phi, \psi) \quad \phi, \psi \in \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{\bar{f}}$$

wegen Stetigkeit. Es verbleibt noch

$$\mathcal{D}(P(f)^*) \subseteq \mathcal{D}_f$$

zu zeigen. Für  $\psi \in \mathcal{D}(P(f)^*)$  gilt per Definition, dass

$$(\psi, P(f)\phi) = (\tilde{\psi}, \phi) \quad \phi \in \mathcal{D}_f.$$

Per Konstruktion von  $P(f)$  gilt  $P(f_n) = P(f)P(\Omega_n)$  und damit

$$(P(\bar{f}_n)\psi, \phi) = (\psi, P(f_n)\phi) = (\psi, P(f)P(\Omega_n)\phi) = (P(\Omega_n)\tilde{\psi}, \phi) \quad \phi \in \mathcal{H},$$

woraus  $P(\bar{f}_n)\psi = P(\Omega_n)\tilde{\psi}$  folgt. Dies zeigt die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n|^2 d\mu_\psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \|P(\bar{f}_n)\psi\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|P(\Omega_n)\tilde{\psi}\|^2 = \|\tilde{\psi}\|^2.$$

Daraus und majorisierter Konvergenz folgt  $f \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)$ , also  $\psi \in \mathcal{D}_f$ .

Die Behauptung, dass  $P(f)$  ein normaler Operator ist, folgt aus  $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{|f|} = \mathcal{D}_{\bar{f}}$  und der Formel <sup>eq:speccalc1</sup>(4.29), welche

$$\|P(f)\psi\|^2 = \|P(|f|)\psi\|^2 = \|P(\bar{f})\psi\|^2$$

impliziert.

Für den Beweis von <sup>eq:speccalc3</sup>(4.32) bemerken wir zunächst, dass

$$\mathcal{D}(\alpha P(f) + \beta P(g)) = \mathcal{D}(P(f)) \cap \mathcal{D}(P(g)) = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g = \mathcal{D}_{|f|+|g|}.$$

Setzen wir

$$f_n = f\mathbf{1}_{\Omega_n} \quad \text{und} \quad g_n = g\mathbf{1}_{\Omega_n} \quad \text{für } \Omega_n = \{\lambda \in \mathbb{R} : |f(\lambda)| + |g(\lambda)| \leq n\},$$

dann sehen wir, dass

$$P(f_n)\psi \rightarrow P(f)\psi, \quad P(g_n)\psi \rightarrow P(g)\psi$$

und

$$\begin{aligned} & \alpha P(f_n)\psi + \beta P(g_n)\psi \\ &= P(\alpha f_n + \beta g_n)\psi = P((\alpha f + \beta g)\mathbf{1}_{\Omega_n})\psi \rightarrow P(\alpha f + \beta g)\psi, \quad \psi \in \mathcal{D}_{|f|+|g|}. \end{aligned}$$

Schließlich zeigen wir <sup>eq:speccalc4</sup>(4.33). Dazu nehmen wir zunächst an, dass  $g$  beschränkt ist und definieren  $f_n$  und  $\Omega_n$  wie eben. Dann erhalten wir wieder  $P(f_n) = P(f)P(\Omega_n)$  und  $P(\Omega_n)P(g)\psi \rightarrow P(g)\psi$ . Kombinieren wir dies mit

$$P(f)P(\Omega_n)P(g)\psi = P(f_n)P(g)\psi = P(f_n g)\psi \rightarrow P(fg) \quad \psi \in \mathcal{D}_f$$

sehen wir, dass

$$P(g)\psi \in \mathcal{D}(P(f)) \quad \text{und} \quad P(f)P(g)\psi = P(fg)\psi.$$

Dies zeigt  $P(f)P(g) = P(fg)$  wie behauptet. Wir entfernen nun die Einschränkung, dass  $g$  beschränkt ist. Für unbeschränkte  $g$  definieren wir wieder  $g_n = g\mathbf{1}_{\Omega_n}$  wie üblich. Dann erhalten wir

$$P(g_n)\psi \rightarrow P(g)\psi \quad \text{und} \quad P(f)P(g_n)\psi = P(fg_n)\psi \rightarrow P(fg)\psi \quad \psi \in \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_{fg}$$

also  $P(g)\psi \in \mathcal{D}(P(f))$ , was schließlich  $P(f)P(g)\psi = P(fg)\psi$  zeigt.  $\square$

Schließlich beweisen wir noch Satz <sup>specthm</sup>4.16 und folgen Teschl <sup>Teschl2014</sup>[**Teschl**, S. 105-109].

Spätestens der Beweis von Satz <sup>speccalc</sup>4.15 macht klar, dass der Operator  $P(f)$  in  $\mathcal{H}$  eng mit dem Multiplikationsoperator  $f$  in  $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)$  verwandt ist. Um dies zu präzisieren, betrachten wir den Unterraum

$$\mathcal{H}_\psi := \{P(g)\psi : g \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)\} \subseteq \mathcal{H}, \quad (4.44)$$

welcher in  $L^2$  abgeschlossen ist. Insbesondere konvergiert  $\psi_n = P(g_n)\psi$  genau dann in  $\mathcal{H}$ , wenn  $g_n$  in  $L^2$  konvergiert. Es stellt sich heraus, dass wir  $P(f)$  auf  $\mathcal{H}$  restringieren können.

LEMMA 4.18. *Sei  $P_\psi$  die orthogonale Projektion auf den Unterraum  $\mathcal{H}_\psi$ . Dann reduziert  $\mathcal{H}_\psi$  den Operator  $P(f)$ , sprich  $P_\psi P(f) \subseteq P(f)P_\psi$ .*

Für Charakterisierungen von reduzierenden Teilräumen siehe auch Weidmann <sup>Weidmann2000</sup>[**Weidmann**, Satz 2.60].  $\mathcal{H}_\psi$  ist ein reduzierender Teilraum genau dann, wenn sowohl  $\mathcal{H}_\psi$  als auch  $\mathcal{H}_\psi^\perp$  invariante Unterräume für  $P(f)$  sind, sprich, wenn  $P(f)[\mathcal{H}_\psi \cap \mathcal{D}_f] \subseteq \mathcal{H}_\psi$ ,  $P(f)[\mathcal{H}_\psi^\perp \cap \mathcal{D}_f] \subseteq \mathcal{H}_\psi^\perp$  und  $\mathcal{D}_f = (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{H}_\psi) + (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{H}_\psi^\perp)$  gelten.

BEWEIS. Angenommen,  $f$  wäre zunächst beschränkt. Dann zerlegen wir  $\phi \in \mathcal{H}$  als  $\phi = P(g)\psi + \phi^\perp \in \mathcal{H}_\psi \oplus \mathcal{H}_\psi^\perp$ . Dann folgt aus

$$(P(h)\psi, P(f)\phi^\perp) = (P(\bar{f}h)\psi, \phi^\perp) = 0 \quad h \in L^\infty,$$

dass  $P(f)\phi^\perp \in \mathcal{H}_\psi^\perp$ . Daraus folgt

$$P_\psi P(f)\phi = P_\phi P(f)P(g)\psi = P_\psi P(fg)\psi = P(f)P_\psi \phi,$$

was, per Definition, bedeutet, dass  $\mathcal{H}_\psi$  den Operator  $P(f)$  reduziert.

Sei nun  $f$  unbeschränkt, dann betrachten wir, wie vorher  $f_n = f\mathbf{1}_{\Omega_n}$  mit  $\Omega_n = \{\lambda \in \mathbb{R} : |f(\lambda)| \leq n\}$ . Dann gilt

$$P(f_n)P_\psi \phi = P_\phi P(f_n)\phi, \quad \phi \in \mathcal{D}_f.$$

Lässt man nun  $n \rightarrow \infty$  gehen, erhalten wir

$$P(\Omega_n)P_\psi \phi \rightarrow P_\psi \phi$$

und

$$P(f_n)P_\psi \phi = P(f)P(\Omega_n)P_\psi \phi \rightarrow P_\psi P(f)\phi.$$

Aus der Abgeschlossenheit von  $P(f)$  folgt dann  $P_\psi \phi \in \mathcal{D}_f$  sowie  $P(f)P_\psi \phi = P_\psi P(f)\phi$ .  $\square$

Wie bereits angesprochen erlaubt uns dieses Lemma die Zerlegung  $P(f) = P(f)|_{\mathcal{H}_\psi} \oplus P(f)|_{\mathcal{H}_\psi^\perp}$ . Daraus folgt

$$P_\psi \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_f \mathcal{H}_\psi = \{P(g)\psi : fg \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)\} \quad (4.45)$$

und in diesem Fall gilt  $P(f)P(g)\psi = P(fg)\psi \in \mathcal{H}_\psi$ .

Aus (4.29) folgt, dass der Operator

$$\begin{aligned} U_\psi : \mathcal{H}_\psi &\rightarrow L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi) \\ P(g)\psi &\mapsto g \end{aligned} \quad (4.46)$$

eq: defupsi

unitär ist. Darüberhinaus folgt aus (4.46), dass

$$U_\psi P_\psi \mathcal{D}(P(f)) = U_\psi (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{H}_\psi) = \{g \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi) : fg \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)\} = \mathcal{D}_f,$$

woraus wiederum

$$U_\psi P(f)|_{\mathcal{H}_\psi} = fU_\psi \quad (4.47)$$

folgt. Wir betonen nochmals, dass hierbei  $f$  mit dem zugehörigen Multiplikationsoperator identifiziert ist.

DEFINITION 4.19. Sei  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$  ein dicht definierter Operator. Dann heißt  $f \in \mathcal{D}(A^n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  ein *zyklischer Vektor*, wenn die Menge  $\{A^n f : n \in \mathbb{N}\}$  dicht in  $\mathcal{H}$  ist.

DEFINITION 4.20. (1) Sei  $J$  eine Indexmenge. Eine Menge  $\{\psi_j\}_{j \in J}$  heißt *Menge von Spektralvektoren*, wenn  $\|\psi_j\| = 1$  und  $\mathcal{H}_{\psi_i} \perp \mathcal{H}_{\psi_j}$  für alle  $i \neq j$ .

(2) Eine Menge von Spektralvektoren heißt *Spektralbasis*, wenn  $\mathcal{H} = \bigoplus_j \mathcal{H}_{\psi_j}$ .

In unserer Situation heißt  $\psi$  also zyklisch, wenn  $\mathcal{H}_\psi = \mathcal{H}$ . In diesem Fall ist unser Bild vollständig. Andernfalls müssen wir unseren Ansatz noch etwas erweitern. Der Spektralsatz garantiert uns, dass es zu jedem gegebenen Borelmaß einen zugehörigen selbstadjungierten Operator gibt dessen Spektrum wir mit den Techniken aus den Abschnitten 2 und 3 untersuchen können. Um aber das Spektrum eines gegebenen selbstadjungierten Operator, dessen Spektralmaß wir noch nicht kennen, zu untersuchen wird folgendes Lemma hilfreich sein, welches besagt, dass es für jedes gegebene PVM eine Spektralbasis gibt.

LEMMA 4.21. Für jedes PVM  $P$  gibt es eine höchstens abzählbare Spektralbasis  $\{\psi_n\}$ , sodass

$$\mathcal{H} = \bigoplus_n \mathcal{H}_{\psi_n} \quad (4.48)$$

und einen zugehörigen unitären Operator

$$U = \bigoplus_n U_{\psi_n} : \mathcal{H} \rightarrow \bigoplus_n L^2(\mathbb{R}, d\mu_{\psi_n}), \quad (4.49)$$

sodass für jede Borelfunktion

$$UP(f) = fU, \quad U\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_f \quad (4.50)$$

gilt.

BEWEIS. Es genügt die Existenz einer Spektralbasis zu zeigen. Die Abzählbarkeit folgt aus der Annahme, dass  $\mathcal{H}$  separabel ist. Wir konstruieren die Spektralbasis mit dem Gram–Schmidt-Verfahren.

Wir behaupten zunächst, dass, wenn  $\{\psi_j\}_{j \in J}$  eine Spektralmenge und  $\psi \perp \mathcal{H}_{\psi_j}$  für alle  $j \in J$  ist, dann gilt  $\mathcal{H}_\psi \perp \mathcal{H}_{\psi_j}$  für alle  $j \in J$ . Dies folgt aus der Tatsache, dass  $\psi \perp \mathcal{H}_{\psi_j}$  impliziert, dass  $P(g)\psi \perp \mathcal{H}_{\psi_j}$  für jedes  $g \in L^\infty$ , denn

$$(P(g)\psi, P(f)\psi_j) = (\psi, P(\bar{g}f)\psi_j) = 0.$$

Da die Menge der  $P(g)\psi$  mit  $g \in L^\infty$  dicht in  $\mathcal{H}_\psi$  ist, folgt  $\mathcal{H}_\psi \perp \mathcal{H}_{\psi_j}$ , wie behauptet.

Jetzt starten wir das Gram–Schmidt-Verfahren und beginnen mit einer totalen Menge  $\{\tilde{\psi}_j\}$ <sup>12</sup>. Wir normieren  $\tilde{\psi}_1$  und wählen es als  $\psi_1$  unserer Spektralbasis. Wir tasten nun die restlichen  $\{\tilde{\psi}_j\}_{j \in J \setminus \{1\}}$  ab und halten beim ersten  $\tilde{\psi}_j$  an, welches nicht in  $\mathcal{H}_{\psi_1}$  ist. Dieses projizieren wir auf  $\mathcal{H}_{\psi_1}^\perp$ , normieren es und nennen es  $\psi_2$ . So machen wir weiter, bis die Menge  $\{\tilde{\psi}_j\}_{j \in J \setminus \{1\}}$  vollständig abgetastet ist. Damit erhalten wir eine Menge von Spektralvektoren  $\{\psi_j\}$ , die

$$\text{Span}\{\tilde{\psi}_j\} \subseteq \bigoplus_j \mathcal{H}_{\psi_j}$$

erfüllen. Damit gilt

$$\mathcal{H} = \overline{\text{Span}\{\tilde{\psi}_j\}} = \bigoplus_j \mathcal{H}_{\psi_j},$$

was den Beweis schließt.  $\square$

Wir wissen bereits, dass wir für gegebenes PVM  $P$  einen selbstadjungierten Operator  $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dP(\lambda)$  erhalten. Der Spektralsatz (Satz 4.16) besagt, dass die Abbildung  $P \mapsto \int_{\mathbb{R}} \lambda dP(\lambda)$  invertiert werden kann. Unser Beweis verwendet den Satz von Nevanlinna (Satz 3.17). Wir betrachten dazu die Resolvente  $R_A(z) = \int_{\mathbb{R}} (\lambda - z)^{-1} dP(\lambda)$  mit zugehöriger quadratischer Form

$$F_\psi(z) = (\psi, R_A(z)\psi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_\psi(\lambda)}{\lambda - z}, \quad (4.51)$$

siehe (4.15). Wir sehen, dass  $F_\psi(z)$  also gerade die Boreltransformation des Spektralmaßes  $d\mu_\psi$  ist. Wir erinnern, dass  $F_\psi(z)$  die obere komplexe Halbebene  $\mathbb{C}_+$  holomorph in sich selbst abbildet und das Spektralmaß mit Hilfe der Stieltjesschen Inversionsformel (3.27)

$$\mu_\psi(\lambda) = \lim_{\delta \searrow 0} \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\lambda+\delta} \text{Im}(F_\psi(E + i\epsilon)) dE \quad (4.52)$$

wiederhergestellt werden kann. Wir erinnern außerdem an Behauptung 2.3, welches die Umkehrung besagt: ist  $F_\psi(z)$  eine Pick-Funktion, die  $|F_\psi(z)| \leq M/|\text{Im}(z)|$  erfüllt, so ist sie die Boreltransformation eines eindeutigen Maßes  $\mu_\psi$ , welches durch die Stieltjessche Inversionsformel gegeben ist und  $\mu_\psi(\mathbb{R}) \leq M$  erfüllt.

Sei also nun  $A$  ein gegebener selbstadjungierter Operator und

$$F_\psi(z) = (\psi, R_A(z)\psi)$$

<sup>12</sup>Eine Menge deren Span dicht ist, heißt total.

die quadratische Form der zugehörigen Resolventen. Dann ist  $F_\psi(z)$  holomorph für  $z \in \rho(A)$  und erfüllt

$$F_\psi(\bar{z}) = \overline{F_\psi(z)} \quad \text{und} \quad |F_\psi(z)| \leq \frac{\|\psi\|^2}{|\operatorname{Im}(z)|}. \quad (4.53)$$

Insbesondere folgt aus der ersten Resolventenformel  $R_A(z) - R_A(w) = (z-w)R_A(w)R_A(z)$ , dass

$$\operatorname{Im}(F_\psi(z)) = \operatorname{Im}(z)\|R_A(z)\psi\|^2. \quad (4.54)$$

Wir haben damit nachgewiesen, dass  $F_\psi$  Pick ist, weshalb es ein zugehöriges Borelmaß  $\mu_\psi$  gibt, welches durch die Inversionsformel (3.27) gegeben ist. Wir nennen dieses Maß das *Spektralmaß* von  $A$  zu  $\psi$ .

Durch Polarisation erhält man für beliebige  $\phi, \psi \in \mathcal{H}$  das komplexe Maß  $\mu_{\phi, \psi}$ , welches

$$(\phi, R_A(z)\psi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_{\phi, \psi}(\lambda)}{\lambda - z} \quad (4.55)$$

erfüllt. Dieses Maß erlaubt uns nun eine Familie von Operatoren (welche PVMs sein werden) über die Sesquilinearformen

$$s_\Omega(\phi, \psi) = \int_{\Omega} d\mu_{\phi, \psi}(\lambda) \quad (4.56)$$

zu definieren. Da die zugehörige quadratische Form nichtnegativ ist, spricht

$$q_\Omega(\psi) := s_\Omega(\psi, \psi) = \mu_\psi(\Omega) \geq 0,$$

impliziert Cauchy–Schwarz, dass

$$|s_\Omega(\phi, \psi)| \leq \sqrt{\mu_\phi(\Omega)\mu_\psi(\Omega)} \leq \|\phi\|\|\psi\|.$$

Mit Friedrichs (oder einer Baby-Version davon, siehe z.B. Teschl [Teschl2014, Corollary 1.9]) folgt, dass es eine zugehörige Familie von selbstadjungierten, nichtnegativen Operatoren

$$0 \leq P_A(\omega) \leq 1$$

gibt, für die gilt

$$(\phi, P_A(\omega)\psi) = \int_{\Omega} d\mu_{\phi, \psi}(\lambda). \quad (4.57)$$

**LEMMA 4.22.** Die Familie der Operatoren  $P_A(\Omega)$  formt ein PVM nach Definition 4.1.

**BEWEIS.** Wir beweisen zunächst

$$P_A(\Omega_1)P_A(\Omega_2) = P_A(\Omega_1 \cap \Omega_2)$$

und bemerken dazu (siehe z.B. Teschl [Teschl2014, Problem 3.29]), dass die Stieltjessche Inversionsformel (3.27) ihre Gültigkeit für komplexe Maße (also Maße der Form  $d\mu = d\mu_1 - d\mu_2 + i(d\mu_3 - d\mu_4)$  für  $\mu_j \geq 0$ ) behält. In diesem Fall gilt die *Stonesche Formel*

$$\frac{1}{2}[\mu(\lambda_1, \lambda_2) + \mu([\lambda_1, \lambda_2])] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [F(E + i\epsilon) - F(E - i\epsilon)] dE \quad (4.58)$$

für  $F(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z}$ . Dies ist bei uns der Fall, wenn wir  $d\mu_{\phi, \psi}$  polarisieren. (Formel (4.58) folgt aus der Tatsache, dass der Imaginärteil der Resolventen gerade

eq:stoneNew

der Poissonkern, also eine Approximation der Eins, ist. Formal wäre die rechte Seite von (4.58) also gerade

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} d\mu(\lambda) \int_{\mathbb{R}} dE [\mathbf{1}_{(\lambda_1, \lambda_2)}(E) + \mathbf{1}_{[\lambda_1, \lambda_2]}(E)] \underbrace{\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + (\lambda - E)^2}}_{\rightarrow \delta(\lambda - E)} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} d\mu(\lambda) [\mathbf{1}_{(\lambda_1, \lambda_2)}(\lambda) + \mathbf{1}_{[\lambda_1, \lambda_2]}(\lambda)] = \frac{1}{2} [\mu(\lambda_1, \lambda_2) + \mu([\lambda_1, \lambda_2])], \end{aligned}$$

was behauptet war.)

Als Nächstes rechnen wir

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_{R_A(\bar{z})\phi, \psi}(\lambda)}{\lambda - \bar{z}} = (R_A(\bar{z})\phi, R_A(\bar{z})\psi) = (\phi, R_A(z)R_A(\bar{z})\psi) \\ &= \frac{1}{z - \bar{z}} [(\phi, R_A(z)\psi) - (\phi, R_A(\bar{z})\psi)] \\ &= \frac{1}{z - \bar{z}} \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{\lambda - z} - \frac{1}{\lambda - \bar{z}} \right) d\mu_{\phi, \psi}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - \bar{z}} \frac{d\mu_{\phi, \psi}(\lambda)}{\lambda - z}. \end{aligned}$$

Zusammen mit der oben bemerkten Verallgemeinerung der Stieltjeschen Inversionsformel (3.27) für komplexe Maße zeigt diese Rechnung, dass

$$d\mu_{R_A(\bar{z})\phi, \psi}(\lambda) = \frac{d\mu_{\phi, \psi}(\lambda)}{\lambda - z}.$$

Als Nächstes rechnen wir

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_{\phi, P_A(\Omega)\psi}(\lambda)}{\lambda - z} = (\phi, R_A(z)P_A(\Omega)\psi) = (R_A(\bar{z})\phi, P_A(\Omega)\psi) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\Omega}(\lambda) d\mu_{R_A(\bar{z})\phi, \psi}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathbf{1}_{\Omega}(\lambda)}{\lambda - z} d\mu_{\phi, \psi}(\lambda). \end{aligned}$$

Vergleicht man die letzten beiden Formeln miteinander, stellt man fest, dass

$$d\mu_{\phi, P_A(\Omega)\psi}(\lambda) = \mathbf{1}_{\Omega}(\lambda) d\mu_{\phi, \psi}(\lambda) \Leftrightarrow (\phi, P_A(\Omega_1)P_A(\Omega_2)\psi) = (\phi, P_A(\Omega_1 \cap \Omega_2)\psi),$$

da  $\mathbf{1}_{\Omega_1}\mathbf{1}_{\Omega_2} = \mathbf{1}_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$ . Dies zeigt die erste Eigenschaft von PVMs und insbesondere, dass  $P_A(\Omega_1)$  ein Projektor ist, wenn man  $\Omega_2 = \Omega_1$  setzt.

Wir zeigen nun  $P_A(\mathbb{R}) = \mathbf{1}$ . Sei dazu  $\psi \in \ker(P_A(\mathbb{R}))$ . Dann ist

$$0 = d\mu_{\phi, P_A(\mathbb{R})\psi}(\lambda) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}}(\lambda) d\mu_{\phi, \psi}(\lambda) = d\mu_{\phi, \psi}(\lambda),$$

was  $(\phi, R_A(z)\psi) = 0$  impliziert, was wiederum  $\psi = 0$  zeigt.

Schließlich zeigen wir schwache (bzw. äquivalenterweise starke)  $\sigma$ -Additivität von  $P_A$  (vgl. Bemerkung 4.2). Dazu sei  $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$  mit  $\Omega_n \cap \Omega_m = \emptyset$  für  $n \neq m$ . Dann folgt

$$\sum_{j=1}^n (\psi, P_A(\Omega_j)\psi) = \sum_{j=1}^n \mu_{\psi}(\Omega_j) \rightarrow (\psi, P_A(\Omega)\psi) = \mu_{\psi}(\Omega) = (\psi, P_A(\Omega)\psi)$$

aus der  $\sigma$ -Additivität von  $\mu_{\psi}$ , wie behauptet. Dies schließt den Beweis.  $\square$

Wir sind damit endlich in der Lage den Spektralsatz, Satz 4.16, zu beweisen.

BEWEIS VON SATZ 4.16. Die Existenz des zum selbstadjungierten Operators  $A$  gehörenden PVMs  $P_A$  wurde gerade durch eine explizite Konstruktion bewiesen. Weiter impliziert Satz 4.12, dass  $P_A((\lambda - z)^{-1}) = R_A(z)$  für  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Da die

komplexen Maße  $\mu_{\phi, \psi}$  eindeutig durch die Resolvente und das PVM wiederum eindeutig durch die Maße  $\mu_{\phi, \psi}$  bestimmt sind, folgt die Eindeutigkeit des PVMs. Dies schließt den Beweis.  $\square$

### 5. Spektralteile selbstadjungierter Operatoren

Wir folgen Teschl <sup>[Teschl2014, Abschnitte 3.2-3.3]</sup> und Amrein <sup>[Amrein2009, Abschnitt 4.3]</sup>.

Wie wir in den Abschnitten <sup>[s:stieljtjesscheumkehrform]</sup> 1 und 2 bereits gesehen hatten ist die Boreltransformation ein mächtiges Werkzeug zur Untersuchung des Spektrums von Maßen. Wir wenden diese Techniken nun auf die Spektralmaße von selbstadjungierten Operatoren an. Insbesondere erlaubt uns der Spektralsatz und Satz <sup>[boreltransfspec]</sup> 2.10 die einzelnen Spektralteile aus einem selbstadjungierten Operator zu extrahieren.

Wir erinnern, dass die Boreltransformation eines Maßes  $\mu$  durch  $F_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} (\lambda - z)^{-1} d\mu(\lambda)$  gegeben ist. Sei nun  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$  selbstadjungiert mit Spektralschar  $P(\lambda)$ . Dann definieren wir

$$F_\psi(z) := (\psi, (A - z)^{-1}\psi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_\psi(\lambda)}{\lambda - z}, \tag{5.1}$$

wobei  $\mu_\psi(\lambda) = (\psi, P(\lambda)\psi)$  bzw.  $\mu_\psi(\Omega) = (\psi, P(\Omega)\psi)$ . Wir erinnern, dass  $F_\psi(z)$   $\mathbb{C}_+ \cap \rho(A)$  holomorph in  $\mathbb{C}_+$  abbildet, denn

$$\text{Im}(F_\psi(z)) = \text{Im}(z) \|(A - z)^{-1}\psi\|^2 \tag{5.2}$$

und  $F_\psi(\bar{z}) = \overline{F_\psi(z)}$  sowie  $|F_\psi(z)| \leq \|\psi\|^2 / |\text{Im}(z)|$  (durch Weglassen des Realteils) erfüllt. Ferner gilt die Stieltjessche Umkehrformel <sup>[eq:stieljtjessinversion]</sup> (3.27), sprich

$$\mu_\psi(\lambda) = \lim_{\delta \searrow 0} \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\lambda + \delta} \text{Im}(F_\psi(t + i\epsilon)) dt \tag{5.3}$$

gilt.

Aus dem Spektralsatz haben wir folgende Charakterisierung des Spektrums von selbstadjungierten Operatoren. Vergleiche dies auch mit der Definition <sup>[defsupppvm]</sup> 4.11 für den Träger des Spektralmaßes und den Träger von beliebigen Borelmaßen in Definition <sup>[defsupmeasure]</sup> 1.7.

SATZ 5.1. Sei  $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$  selbstadjungiert. Dann gilt

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : P_A((\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)) \neq 0 \forall \epsilon > 0\}. \tag{5.4}$$

Insbesondere ist  $\sigma(A) = \sigma(\mu)$ , wobei  $\mu$  das zu  $A$  gehörende Spektralmaß ist, welches in  $F_\psi(z) = (\psi, (A - z)^{-1}\psi)$  auftaucht.

BEWEIS. Siehe Teschl <sup>[Teschl2014, Theorem 3.7]</sup>.

Sei  $\Omega_n = (\lambda_0 - 1/n, \lambda_0 + 1/n)$ . Angenommen  $P_A(\Omega_n) \neq 0$ . Dann finden wir  $\psi_n \in P_A(\Omega_n)\mathcal{H}$  mit  $\|\psi_n\| = 1$ . Da

$$\begin{aligned} \|(A - \lambda_0)\psi_n\|^2 &= \|(A - \lambda_0)P_A(\Omega_n)\psi_n\|^2 \\ &= \int_{\Omega_n} (\lambda - \lambda_0)^2 d\mu_{\psi_n}(\lambda) \leq n^{-2}, \end{aligned}$$

folgt  $\lambda_0 \in \sigma(A)$ , aus der Definition von Spektrum mit Weyl-Folgen (siehe bspw. Lemma <sup>[Teschl2014, Lemma 2.17]</sup>).

Ist umgekehrt  $P_A((\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)) = 0$ , dann setzen wir

$$f_\epsilon(\lambda) = \mathbf{1}_{\mathbb{R} \setminus (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)}(\lambda)(\lambda - \lambda_0)^{-1}.$$

Dann gilt

$$(A - \lambda_0)P_A(f_\epsilon) = P_A((\lambda - \lambda_0)f_\epsilon(\lambda)) = P_A(\mathbb{R} \setminus (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)) = \mathbf{1}.$$

Schließlich ist  $P_A(f_\epsilon)(A - \lambda_0) = \mathbf{1}_{\mathcal{D}(A)}$ , womit  $\lambda_0 \in \rho(A)$ .  $\square$

Aus diesem Satz folgt insbesondere

$$P_A((\lambda_1, \lambda_2)) = 0 \Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2) \in \rho(A)$$

sowie folgendes

KOROLLAR 5.2. *Es gelten*

$$P_A(\sigma(A)) = \mathbf{1} \quad \text{und} \quad P_A(\mathbb{R} \cap \rho(A)) = 0. \quad (5.5)$$

BEWEIS. Für jedes  $\lambda \in \mathbb{R} \cap \rho(A)$  gibt es ein offenes Intervall  $I_\lambda$  mit  $P_A(I_\lambda) = 0$ . Diese Intervalle bilden eine offene Überdeckung von  $\mathbb{R} \cap \rho(A)$ . Darüberhinaus gibt es eine abzählbare Teilüberdeckung  $J_n$ . Setzt man  $\Omega_n = J_n \setminus \bigcup_{m < n} J_m$ , erhalten wir disjunkte Borelmengen, die  $\mathbb{R} \cap \rho(A)$  überdecken und  $P_A(\Omega_n) = 0$  erfüllen. Aus der starken  $\sigma$ -Additivität folgt schließlich

$$P_A(\mathbb{R} \cap \rho(A))\psi = \sum_n P_A(\Omega_n)\psi = 0,$$

was den Beweis schließt.  $\square$

Konsequenterweise erhält man daraus

$$P_A(f) = P_A(\sigma(A))P_A(f) = P_A(\mathbf{1}_{\sigma(A)}f), \quad (5.6)$$

sprich  $P_A(f)$  wird nicht durch die Werte von  $f$  auf  $\mathbb{R} \setminus \sigma(A)$  beeinflusst. Wir haben hier ein letztes mal  $P_A(f)$  geschrieben und verwenden stattdessen von nun an immer  $f(A) \equiv P_A(f)$ <sup>13</sup>. Diese Notation ist durch die elementare Beobachtung

$$P_A\left(\sum_{j=0}^n \alpha_j \lambda^j\right) = \sum_{j=0}^n \alpha_j A^j \quad (5.7)$$

gerechtfertigt.

Wir kommen nun zu einem Vorläufer des Spektralabbildungssatzes. Definieren wir den Pullback

$$(f_*\mu)(\Omega) := \mu(f^{-1}\Omega), \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}, \quad (5.8)$$

so gilt

$$\int_{\mathbb{R}} g(\lambda) d(f_*\mu)(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} g(f(\lambda)) d\mu(\lambda). \quad (5.9)$$

Um diese Formel zu zeigen, genügt es, sie für einfache Funktionen  $g$  zu zeigen. Für solche folgt sie aber sofort, denn  $\mathbf{1}_\Omega \circ f = \mathbf{1}_{f^{-1}(\Omega)}$ . Insbesondere folgt aber daraus

$$P_{f(A)}(\Omega) = \mathbf{1}_{f^{-1}(\Omega)}. \quad (5.10)$$

Damit können wir folgendes Ergebnis zeigen.

<sup>13</sup>Das haben wir davor unter Missbrauch der Notation bereits getan, z.B. in Satz [4.16](#) specthm.

spectralmappingprelim

LEMMA 5.3 (Vorläufiger Spektralabbildungssatz). *Sei  $f$  eine reellwertige Borelfunktion. Dann ist das Spektrum von  $f(A)$  durch*

$$\sigma(f(A)) = \sigma(f_*\mu) \quad (5.11)$$

gegeben. Insbesondere gilt

$$\sigma(f(A)) \subseteq \overline{f(\sigma(A))} \quad (5.12)$$

und es gilt Gleichheit, wenn  $f$  stetig ist. Weiter kann der Abschluss auf der rechten Seite weggelassen werden, wenn zusätzlich  $\sigma(A)$  beschränkt (sprich kompakt, da  $\sigma(A)$  abgeschlossen ist) ist oder  $|f(\lambda)| \rightarrow \infty$  für  $|\lambda| \rightarrow \infty$  erfüllt.

BEWEIS. Siehe Teschl <sup>[Teschl2014]</sup> [Tes14, Lemma 3.11]. □

[Von hier an, weiter in Teschl <sup>[Teschl2014]</sup> [Tes14, S. 114–119], Amrein <sup>[Amrein2009]</sup> [Amr09, Abschnitt 4.3] und Weidmann <sup>[Weidmann2003]</sup> [Wei03, Satz 8.24].]

## 6. Spektralprojektionen

Die erste Methode (Riesz, abgeschlossene Operatoren) funktioniert für isolierte Eigenwerte. Die zweite Methode (mean ergodic theorem, selbstadjungierte Operatoren) funktioniert für eingebettete Eigenwerte. Die letzte Methode (Hilberttransformation, selbstadjungierte Operatoren) funktioniert für absolut-stetiges Spektrum.

**6.1. Riesz-Projektion.** Sei  $A$  ein abgeschlossener Operator in einem Banachraum  $\mathcal{B}$ . Sei  $\Gamma$  eine einfache rektifizierbare Kurve, die eine Menge  $G_\Gamma$  umschließt, sodass  $G_\Gamma \subseteq \rho(A)$ . Dann ist der zu  $\Gamma$  gehörende Riesz-Projektor durch

$$P_\Gamma = -\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{dz}{A - z}. \quad (6.1)$$

Falls  $\lambda \in \sigma(A)$  der einzige Punkt des Spektrums von  $A$  innerhalb  $G_\Gamma$  ist, schreibt man  $P_\lambda := P_\Gamma$ . In diesem Fall ist  $P_\lambda$  eine Projektion, die mit  $A$  kommutiert. Insbesondere sind die Räume  $P_\Gamma \mathcal{B}$  und  $(1 - P_\Gamma) \mathcal{B}$  unter  $A$  invariante Unterräume und es gilt  $\mathcal{B} = P_\Gamma \mathcal{B} \oplus (1 - P_\Gamma) \mathcal{B}$ . Wenn  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  zwei verschiedene Konturen mit obigen Eigenschaften sind, für die aber  $G_{\Gamma_1} \cap G_{\Gamma_2} = \emptyset$ , so ist  $P_{\Gamma_1} P_{\Gamma_2} = 0$ .

**6.2. Mean ergodic theorem.** Sei  $H$  selbstadjungiert. Falls  $\lambda \in \sigma_{disc}(H)$ ,  $\lambda$  also ein reeller, isolierter Eigenwert ist, kann die Spektralprojektion  $P(\{\lambda\}) = E(\lambda) - E(\lambda - 0)$  auch als Riesz-Projektion, also als Konturintegral, geschrieben werden, siehe (I.17). Für eingebettete Eigenwerte ist dies nicht mehr möglich. Wieners Theorem gibt daher eine alternative Formel für die Projektion auf Eigenwerte. Man spricht auch vom „mean ergodic theorem“ (Kato <sup>[Kato1966]</sup> [Kat66, Kapitel X, Theorem 1.3]), welches

$$P(\{\lambda\}) = s - \lim_{t_2 - t_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} e^{itH} e^{-it\lambda} dt$$

besagt.

**6.3. Inspiration durch Hilberttransformation.** Sei  $T$  selbst-adjungiert. Neben der Stoneschen Formel

$$\frac{1}{2}(\phi, (P_{(a,b)} + P_{[a,b]})\phi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (\mathbf{1}_{(a,b)}(\lambda) + \mathbf{1}_{[a,b]}(\lambda)) \operatorname{Im} (\phi, (T - \lambda - i\epsilon)^{-1} \phi) \quad (6.2)$$

ist folgende Formel für

$$\mathbf{1}_{[0,\infty)}(T) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{T}{|T|} \right) \quad (6.3)$$

oft hilfreich, z.B. bei der Untersuchung des Dirac-Operators—siehe bspw. [Griesemeretal1999](#), [GLS99](#), S. 279]. Es gelten

$$\left( \phi, \frac{T}{|T|} \phi \right) = i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|t| > \epsilon} \frac{dt}{t} (\phi, e^{itT} \phi) \quad (6.4)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} d\eta (\phi, (T - i\eta)^{-1} \phi). \quad (6.5)$$

Für einen Beweis der Äquivalenz zwischen dem ersten und dritten Ausdruck, siehe [Kato1966](#), Kapitel VI.5, Lemma 5.6]. (Der Beweis ist ähnlich zu dem von Stones Formel und verwendet  $(T - i\eta)^{-1} = (T + i\eta)(T^2 + \eta^2)^{-1}$ .) Wir skizzieren, wie man die erste Gleichheit beweist. Dazu erinnern wir an die Hilberttransformation

$$(Hf)(x) := \text{P.V.} \frac{1}{x} * f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y| > \epsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy. \quad (6.6)$$

Der zugehörige Fouriermultiplikator ist die Vorzeichenfunktion ist, sprich

$$(Hf)^\wedge(\xi) = -i \operatorname{sgn}(\xi) \hat{f}(\xi) = -i \frac{\xi}{|\xi|} \hat{f}(\xi). \quad (6.7)$$

Damit (und ersetzen  $f(\lambda) = \frac{(\phi, dE_T(\lambda)\phi)}{d\lambda}$ ) erhalten wir

$$\begin{aligned} \left( \phi, \frac{T}{|T|} \phi \right) &= \int_{\mathbb{R}} d\lambda \operatorname{sgn}(\lambda) \frac{(\phi, dE_T(\lambda)\phi)}{d\lambda} = i \int_{\mathbb{R}} d\lambda \mathcal{F} \left[ H\mathcal{F}^{-1} \left( \frac{(\phi, dE_T(\cdot)\phi)}{d\cdot} \right) \right] (\lambda) \\ &= i \langle 1, \mathcal{F}H\mathcal{F}^{-1} \left( \frac{(\phi, dE_T(\cdot)\phi)}{d\cdot} \right) \rangle_{L^2(\mathbb{R}, d\lambda)} \\ &= i H\mathcal{F}^{-1} \left( \frac{(\phi, dE_T(\cdot)\phi)}{d\cdot} \right) (0) \\ &= i H(\phi, e^{i\cdot T} \phi)(0) = i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|t| > \epsilon} \frac{(\phi, e^{itT} \phi)}{t} dt, \end{aligned} \quad (6.8)$$

wie behauptet.



## Literaturverzeichnis

- [AAD01] A. A. Abramov, A. Aslanyan, and E. B. Davies. Bounds on complex eigenvalues and resonances. *J. Phys. A*, 34(1):57–72, 2001.
- [ABdMG96] Werner O. Amrein, Anne Boutet de Monvel, and Vladimir Georgescu.  *$C_0$ -groups, Commutator Methods and Spectral Theory of  $N$ -body Hamiltonians*, volume 135 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1996.
- [AG74] W. O. Amrein and V. Georgescu. On the characterization of bound states and scattering states in quantum mechanics. *Helv. Phys. Acta*, 46:635–658, 1973/74.
- [Agm75] Shmuel Agmon. Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 2(2):151–218, 1975.
- [Agm82] Shmuel Agmon. *Lectures on Exponential Decay of Solutions of Second-Order Elliptic Equations: Bounds on Eigenfunctions of  $N$ -body Schrödinger Operators*, volume 29 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, 1 edition, 1982.
- [Alg83] S. D. Algin. Localization of eigenvalues of closed linear operators. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 24(2):3–8, 1983.
- [Amr09] Werner O. Amrein. *Hilbert Space Methods in Quantum Mechanics*. Fundamental Sciences. EPFL Press, Lausanne; distributed by CRC Press, Boca Raton, FL, 2009.
- [AW15] Michael Aizenman and Simone Warzel. *Random Operators*, volume 168 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015. Disorder effects on quantum spectra and dynamics.
- [BGK09] A. Borichev, L. Golinskii, and S. Kupin. A Blaschke-type condition and its application to complex Jacobi matrices. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 41(1):117–123, 2009.
- [Bha97] Rajendra Bhatia. *Matrix Analysis*, volume 169 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [CS81] R. Carmona and B. Simon. Pointwise bounds on eigenfunctions and wave packets in  $N$ -body quantum systems. V. Lower bounds and path integrals. *Comm. Math. Phys.*, 80(1):59–98, 1981.
- [Cue20] Jean-Claude Cuenin. Improved eigenvalue bounds for Schrödinger operators with slowly decaying potentials. *Comm. Math. Phys.*, 376(3):2147–2160, 2020.
- [DN02] E. B. Davies and Jiban Nath. Schrödinger operators with slowly decaying potentials. volume 148, pages 1–28. 2002. On the occasion of the 65th birthday of Professor Michael Eastham.
- [Don74] William F. Donoghue, Jr. *Monotone Matrix Functions and Analytic Continuation*. Springer-Verlag, New York, 1974. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 207.
- [DRJMS94] R. Del Rio, S. Jitomirskaya, N. Makarov, and B. Simon. Singular continuous spectrum is generic. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 31(2):208–212, 1994.
- [DZ19] Semyon Dyatlov and Maciej Zworski. *Mathematical Theory of Scattering Resonances*, volume 200 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2019.
- [EF06] T. Ekholm and R. L. Frank. On Lieb-Thirring inequalities for Schrödinger operators with virtual level. *Comm. Math. Phys.*, 264(3):725–740, 2006.
- [Ens78] Volker Enss. Asymptotic completeness for quantum mechanical potential scattering. I. Short range potentials. *Comm. Math. Phys.*, 61(3):285–291, 1978.
- [Fal86] K. J. Falconer. *The Geometry of Fractal Sets*, volume 85 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

- [FLLS06] Rupert L. Frank, Ari Laptev, Elliott H. Lieb, and Robert Seiringer. Lieb-Thirring inequalities for Schrödinger operators with complex-valued potentials. *Lett. Math. Phys.*, 77(3):309–316, 2006.
- [FLW22] Rupert L. Frank, Ari Laptev, and Timo Weidl. An improved one-dimensional Hardy inequality. *arXiv e-prints*, page arXiv:2204.00877, April 2022.
- [Fra11] Rupert L. Frank. Eigenvalue bounds for Schrödinger operators with complex potentials. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 43(4):745–750, 2011.
- [Fra18] Rupert L. Frank. Eigenvalue bounds for Schrödinger operators with complex potentials. III. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 370(1):219–240, 2018.
- [FS17] Rupert L. Frank and Barry Simon. Eigenvalue bounds for Schrödinger operators with complex potentials. II. *J. Spectr. Theory*, 7(3):633–658, 2017.
- [FSWY20] Hongliang Feng, Avy Soffer, Zhao Wu, and Xiaohua Yao. Decay estimates for higher-order elliptic operators. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 373(4):2805–2859, 2020.
- [Gar18] Louis Garrigue. Unique continuation for many body Schrödinger operators and the Hohenberg-Kohn theorem. *Math. Phys. Anal. Geom.*, 21(3):Paper No. 27, 11, 2018.
- [Gar19] Louis Garrigue. Hohenberg-Kohn theorems for interactions, spin and temperature. *J. Stat. Phys.*, 177(3):415–437, 2019.
- [Gar20] Louis Garrigue. Unique continuation for many-body Schrödinger operators and the Hohenberg-Kohn theorem. II. The Pauli Hamiltonian. *Doc. Math.*, 25:869–898, 2020.
- [GGK90] Israel Gohberg, Seymour Goldberg, and Marinus A. Kaashoek. *Classes of linear operators. Vol. I*, volume 49 of *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.
- [GHK20] Colin Guillarmou, Andrew Hassell, and Katya Krupchyk. Eigenvalue bounds for non-self-adjoint Schrödinger operators with nontrapping metrics. *Anal. PDE*, 13(6):1633–1670, 2020.
- [GLS99] Marcel Griesemer, Roger T. Lewis, and Heinz Siedentop. A minimax principle for eigenvalues in spectral gaps: Dirac operators with Coulomb potentials. *Doc. Math.*, 4:275–283, 1999.
- [GS04] M. Goldberg and W. Schlag. A limiting absorption principle for the three-dimensional Schrödinger equation with  $L^p$  potentials. *Int. Math. Res. Not.*, (75):4049–4071, 2004.
- [HL29] G. H. Hardy and J. E. Littlewood. Notes on the Theory of Series (XI): On Tauberian Theorems. *Proc. London Math. Soc. (2)*, 30(1):23–37, 1929.
- [Hör83] Lars Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. II*, volume 257 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1983. Differential Operators with Constant Coefficients.
- [Hör85] Lars Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. III*, volume 274 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1985. Pseudodifferential Operators.
- [HS75] Edwin Hewitt and Karl Stromberg. *Real and Abstract Analysis*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975. A modern treatment of the theory of functions of a real variable, Third printing, Graduate Texts in Mathematics, No. 25.
- [IJ03] A. D. Ionescu and D. Jerison. On the absence of positive eigenvalues of Schrödinger operators with rough potentials. *Geom. Funct. Anal.*, 13(5):1029–1081, 2003.
- [IS06] Alexandru D. Ionescu and Wilhelm Schlag. Agmon-Kato-Kuroda theorems for a large class of perturbations. *Duke Math. J.*, 131(3):397–440, 2006.
- [JK85] David Jerison and Carlos E. Kenig. Unique continuation and absence of positive eigenvalues for Schrödinger operators. *Ann. of Math. (2)*, 121(3):463–494, 1985. With an appendix by E. M. Stein.
- [Kar31] J. Karamata. Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze, welche die Laplacesche und Stieltjessche Transformation betreffen. *J. Reine Angew. Math.*, 164:27–39, 1931.
- [Kat66] Tosio Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*, volume 132 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1 edition, 1966.
- [Kat70] Tosio Kato. Some results on potential scattering. In *Proc. Internat. Conf. on Functional Analysis and Related Topics (Tokyo, 1969)*, pages 206–215. Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1970.

- [Kat76a] Tosio Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer-Verlag, Berlin-New York, second edition, 1976. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 132.
- [Kat76b] Yitzhak Katznelson. *An Introduction to Harmonic Analysis*. Dover Publications, Inc., New York, corrected edition, 1976.
- [KK70] Tosio Kato and S. T. Kuroda. Theory of simple scattering and eigenfunction expansions. In *Functional Analysis and Related Fields (Proc. Conf. for M. Stone, Univ. Chicago, Chicago, Ill., 1968)*, pages 99–131, 1970.
- [KK71] Tosio Kato and S. T. Kuroda. The abstract theory of scattering. *Rocky Mountain J. Math.*, 1(1):127–171, 1971.
- [KRS87] C. E. Kenig, A. Ruiz, and C. D. Sogge. Uniform Sobolev inequalities and unique continuation for second order constant coefficient differential operators. *Duke Math. J.*, 55(2):329–347, 1987.
- [KS88] Werner Kirsch and Barry Simon. Corrections to the classical behavior of the number of bound states of Schrödinger operators. *Ann. Physics*, 183(1):122–130, 1988.
- [KS15] David Krejčířík and Petr Siegl. Elements of spectral theory without the spectral theorem. In *Non-Selfadjoint Operators in Quantum Physics*, pages 241–291. Wiley, Hoboken, NJ, 2015.
- [KT06] Herbert Koch and Daniel Tataru. Carleman estimates and absence of embedded eigenvalues. *Comm. Math. Phys.*, 267(2):419–449, 2006.
- [Las96] Yoram Last. Quantum dynamics and decompositions of singular continuous spectra. *J. Funct. Anal.*, 142(2):406–445, 1996.
- [LL01] Elliott H. Lieb and Michael Loss. *Analysis*, volume 14 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2001.
- [LP25] N. Lusin and J. Priwaloff. Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 42:143–191, 1925.
- [LS09] Ari Laptev and Oleg Safronov. Eigenvalue estimates for Schrödinger operators with complex potentials. *Comm. Math. Phys.*, 292(1):29–54, 2009.
- [LS19] Yoonjung Lee and Ihyeok Seo. A note on eigenvalue bounds for Schrödinger operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 470(1):340–347, 2019.
- [MH87] Jerrold E. Marsden and Michael J. Hoffman. *Basic Complex Analysis*. W. H. Freeman and Company, New York, second edition, 1987.
- [Miz19] Haruya Mizutani. Eigenvalue bounds for non-self-adjoint Schrödinger operators with the inverse-square potential. *J. Spectr. Theory*, 9(2):677–709, 2019.
- [Pav66] B. S. Pavlov. On a non-selfadjoint Schrödinger operator. In *Probl. Math. Phys., No. I, Spectral Theory and Wave Processes (Russian)*, pages 102–132. Izdat. Leningrad. Univ., Leningrad, 1966.
- [Pav67] B. S. Pavlov. On a non-selfadjoint Schrödinger operator. II. In *Problems of Mathematical Physics, No. 2, Spectral Theory, Diffraction Problems (Russian)*, pages 133–157. Izdat. Leningrad. Univ., Leningrad, 1967.
- [Pav68] B. S. Pavlov. On a non-selfadjoint Schrödinger operator. III. In *Problems of Mathematical Physics, No. 3, Spectral Theory (Russian)*, pages 59–80. Izdat. Leningrad. Univ., Leningrad, 1968.
- [Pea78] D. B. Pearson. Singular continuous measures in scattering theory. *Comm. Math. Phys.*, 60(1):13–36, 1978.
- [Per60] Arne Persson. Bounds for the discrete spectrum of a semi-bounded Schrödinger operator. *Math. Scand.*, 8:143–153, 1960.
- [PS11] Emilio Porcu and René L. Schilling. From Schoenberg to Pick-Nevalinna: toward a complete picture of the variogram class. *Bernoulli*, 17(1):441–455, 2011.
- [Ric16] Serge Richard. Lecture notes: Hilbert space methods for quantum mechanics. Available at <http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~richard/teaching/s2016/HilbertM.pdf>, 2016.
- [RS72] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics. I. Functional Analysis*. Academic Press, New York, 1972.
- [RS78] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics*, volume 4: Analysis of Operators. Academic Press, New York, 1 edition, 1978.
- [RS21] Barbara Roos and Robert Seiringer. Two-Particle Bound States at Interfaces and Corners. *arXiv e-prints*, page arXiv:2105.04874, May 2021.

- [Rud87] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.
- [Rue69] D. Ruelle. A remark on bound states in potential-scattering theory. *Nuovo Cimento A (10)*, 61:655–662, 1969.
- [Saf10] Oleg Safronov. Estimates for eigenvalues of the Schrödinger operator with a complex potential. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 42(3):452–456, 2010.
- [Sal14] Mikko Salo. Lecture notes: Unique continuation for elliptic equations. Available at [https://www.jyu.fi/science/en/math/research/inverse-problems/past-events/unique\\_continuation\\_notes.pdf](https://www.jyu.fi/science/en/math/research/inverse-problems/past-events/unique_continuation_notes.pdf), 2014.
- [Sie89a] Heinz Siedentop. A generalization of Rouché’s theorem with application to resonances. In E. Brändas and N. Elander, editors, *Resonances*, pages 77–85, Berlin, 1989. Springer-Verlag.
- [Sie89b] Heinz K. H. Siedentop. On a generalization of Rouché’s theorem for trace ideals with applications for resonances of Schrödinger operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 140(2):582–588, 1989.
- [Sim] Barry Simon. Exponential decay of quantum wave functions. Available at <http://math.caltech.edu/simon/Selecta/ExponentialDecay.pdf>.
- [Sim71] Barry Simon. *Quantum Mechanics for Hamiltonians Defined as Quadratic Forms*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1 edition, 1971.
- [Sim76] Barry Simon. The bound state of weakly coupled Schrödinger operators in one and two dimensions. *Ann. Physics*, 97(2):279–288, 1976.
- [Sim77] Barry Simon. Notes on infinite determinants of Hilbert space operators. *Advances in Math.*, 24(3):244–273, 1977.
- [Sim79] Barry Simon. *Functional Integration and Quantum Physics*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1979.
- [Sim05] Barry Simon. *Trace Ideals and Their Applications*, volume 120 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2005.
- [Sim19] B. Simon. *Loewner’s Theorem on Monotone Matrix Functions*, volume 354 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer International Publishing, 2019.
- [SS03] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Complex Analysis*, volume 2 of *Princeton Lectures in Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.
- [Ste70] Elias M. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton Mathematical Series, No. 30. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
- [Ste86] E. M. Stein. Oscillatory integrals in Fourier analysis. In *Beijing Lectures in Harmonic Analysis (Beijing, 1984)*, volume 112 of *Ann. of Math. Stud.*, pages 307–355. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1986.
- [Str90] Robert S. Strichartz. Fourier asymptotics of fractal measures. *J. Funct. Anal.*, 89(1):154–187, 1990.
- [Stu90] Joachim Stubbe. Bounds on the number of bound states for potentials with critical decay at infinity. *J. Math. Phys.*, 31(5):1177–1180, 1990.
- [SW86] Barry Simon and Tom Wolff. Singular continuous spectrum under rank one perturbations and localization for random Hamiltonians. *Comm. Pure Appl. Math.*, 39(1):75–90, 1986.
- [Tes14] Gerald Teschl. *Mathematical Methods in Quantum Mechanics*, volume 157 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2014. With applications to Schrödinger operators.
- [Tom75] Peter A. Tomas. A restriction theorem for the Fourier transform. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 81:477–478, 1975.
- [Tom79] Peter A. Tomas. Restriction theorems for the Fourier transform. In *Harmonic Analysis in Euclidean spaces (Proc. Sympos. Pure Math., Williams Coll., Williamstown, Mass., 1978), Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXV, Part, pages 111–114. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.
- [Wei99] Timo Weidl. Remarks on virtual bound states for semi-bounded operators. *Comm. Partial Differential Equations*, 24(1-2):25–60, 1999.
- [Wei00] Joachim Weidmann. *Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teil 1*. Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks]. B. G. Teubner, Stuttgart, 2000. Grundlagen. [Foundations].

- [Wei03] Joachim Weidmann. *Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teil II*. Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks]. B. G. Teubner, Stuttgart, 2003. Anwendungen. [Applications].
- [Wie32] Norbert Wiener. Tauberian theorems. *Ann. of Math. (2)*, 33(1):1–100, 1932.
- [Wol03] Thomas H. Wolff. *Lectures on Harmonic Analysis*, volume 29 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. With a foreword by Charles Fefferman and a preface by Izabella Łaba, Edited by Izabella Łaba and Carol Shubin.
- [Yaf10] D. R. Yafaev. *Mathematical Scattering Theory*, volume 158 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. Analytic Theory.
- [Zie17] William P. Ziemer. *Modern Real Analysis*, volume 278 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Cham, second edition, 2017. With contributions by Monica Torres.