4 Spektralsatz und maßtheoretische Zerlegung des Spektrums

Ziel Sei $A: D(A) \to \mathcal{H}$ s.a. Dann gibt es ein eindeutiges projektorwertiges

(Teschl p. 99-110) Maß $P_A : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \{\text{orthogonale Proj. in } \mathcal{H}\}$, sodaß

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dP_A(\lambda)$$

Im Sinne, dass $(\phi, A\psi) = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d(\phi, P_A(\lambda)\psi) = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\mu_{\phi,\psi}^{(A)}(\lambda)$, $\phi \in \mathcal{H}$, $\psi \in D(A)$

wobei $\mu_{\phi,\psi}^{(A)}(\lambda)$ durch Polarisation aus $\mu_{\phi\phi}^{(A)}(\lambda) = \mu_{\phi\phi}^{(A)}((-\infty, \lambda]) = (\phi, P_A((-\infty,\lambda])\phi)$

gewonnen wird und Spektralschar genannt wird.

Weiter gilt für Borelfunktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, dann $f(A) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \, dP_A(\lambda)$

$$f(A)^* = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(\lambda)} \, dP_A(\lambda),$$

$f(A)$ kommutiert mit allen $P_A(\underset{\in}{\overset{\mathcal{B}(\mathbb{R})}{\Omega}})$ und es gilt $\|f(A)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |f(\lambda)|$

Weiter gilt für alle Borelfkt. en f, g und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\left.\begin{array}{l} \alpha f(A) + \beta g(A) \subseteq (\alpha f + \beta g)(A) \\ f(A) g(A) \subseteq (fg)(A) \end{array}\right\} \text{ offenbar für } f, g \text{ Polynome, dann durch „}\supseteq\text{"}$$

Schließlich ist
- $f(A)$ s.a. $\Leftrightarrow$ $f(\lambda) \in \mathbb{R}$ $\forall \lambda \in \sigma(A)$
- $f(A)$ unitär $\Leftrightarrow$ $|f(\lambda)| = 1$ $\forall \lambda \in \sigma(A)$.
- $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : P_A(\lambda-\epsilon, \lambda+\epsilon) \neq 0 \ \forall \epsilon > 0\}$ $\left(\to \begin{array}{l} P_A(\sigma(A)) = \mathbb{1}_{\mathcal{H}} \\ P_A(\rho(A)) = 0 \end{array}\right)$

$\hookrightarrow$ S. 1-9

Alternative Form ($\to$ z.B. Zahsic - Topics in spec theory)

Zunächst Erinnerung (sh. auch Beh. 2.1.1 und HA 3.1)

Sei (X, Σ) ein Maßraum mit Maß $\mu \geq 0$. Sei $f: X \to \mathbb{R}$ messbar und ~~A_f~~

$A_f : D(A_f) \to L^2(X, d\mu)$ ein linearer Operator mit maximalem

Definitionsbereich $D(A_f) = \{\psi \in L^2(X, d\mu) : f\psi \in L^2(X, d\mu)\}$, $A_f \psi = f\psi$.

$\Rightarrow$ (1) A_f ist s.a.

(2) A_f ist beschr. $\Leftrightarrow$ $f \in L^\infty(X, d\mu)$. In diesem Fall ist $\|A_f\| = \|f\|_{L^\infty(X,d\mu)}$

(3) $\sigma(A_f) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \mu(f^{-1}(\lambda-\epsilon, \lambda+\epsilon)) > 0 \ \forall \epsilon > 0\}$

$\to$ **Spektkm** Sei $A: D(A) \to \mathcal{H}$ s.a. $\Rightarrow$ Es gibt einen Maßraum (X, Σ), ein WS-Maß $\mu \geq 0$ und eine messbare Fkt. $f: X \to \mathbb{R}$ und eine unitäre Abb. $U: \mathcal{H} \to L^2(X, d\mu)$ s.d. $UAU^{-1} = A_f$. $\longrightarrow$ sh. S. R. Thm 4.3.4

Motivation für Spektthm offenbar: wir wollen nicht nur Polynome v. s.a. Operatoren, sondern allgemeine Fkt.en von s.a. Operatoren verstehen.
Zwar kann $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in Potenzreihen entwickelt werden, doch solch ein Ansatz funktioniert nur für beschränkte s.a. Operatoren

4.1 Projektorwertige Maße – Definitionen / einfache Eigenschaften

Def 4.1.1 Ein PVM (projektorwertiges Maß) $P: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\Omega \mapsto P(\Omega)$ ist eine

orthogonale Proj., sprich $P(\Omega)^2 = P(\Omega) = P(\Omega)^*$, die zudem

(1) $P(\mathbb{R}) = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$

(2) Falls $\Omega = \dot{\bigcup}_n \Omega_n \Rightarrow \sum_n P(\Omega_n)\psi = P(\Omega)\psi \ \forall \psi \in \mathcal{H}$ (starke σ-Additivität)

erfüllt.

HA · Für σ-Additivität bräuchte sogar nur schwache Konv. verlangt werden, sprich schwache σ-Additivität $\Rightarrow$ starke σ-Additivität

· Norm-σ-Additivität gilt i. A. nicht

Bsp · $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ symmetrisch mit EV $\lambda_1 \dots \lambda_m$ distinkten EW $(m \le n)$ $\{P_j\}_{j=1}^m$ zugehörige Projektionen $\Rightarrow A = \sum_{\lambda_j} \lambda_j P_j$ und $P_A(\Omega) = \sum_{j: \lambda_j \in \Omega} P_j(A)$ ist ein PVM.

· $g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ messbar, $P_\lambda f := \mathbb{1}_{\{g \le \lambda\}} f$, $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ definiert eine ~~PVM~~ Spektralfamilie $P_\lambda \equiv P((-\infty, \lambda])$

· Eigenschaften von PVMs: (1) $P(\emptyset) = 0$ $\quad P(\mathbb{R} \setminus \Omega) = \mathbb{1} - P(\Omega)$

(2) $P(\Omega_1 \cup \Omega_2) + P(\Omega_1 \cap \Omega_2) = P(\Omega_1) + P(\Omega_2)$

(3) $P(\Omega_1 \cap \Omega_2) = P(\Omega_1) P(\Omega_2)$

(4) $P(\Omega_1) \le P(\Omega_2)$ falls $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$

Def 4.1.2 Sei $P: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein PVM, dann heißt $P(\lambda) \equiv P_\lambda := P((-\infty, \lambda])$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ Spektralfamilie oder Resolution der Identität. (Verteilungsfkt)

Eigenschaften von $P(\lambda)$ (1) $P(\lambda)$ ist orth Proj

(2) $P(\lambda_1) \le P(\lambda_2)$ falls $\lambda_1 \le \lambda_2$

(3) $s\text{-}\lim_{\lambda_n \downarrow \lambda} P(\lambda_n) = P(\lambda)$ (starke rechtsseitige Stetigkeit)

(4) $s\text{-}\lim_{\lambda \to -\infty} P(\lambda) = 0$, $\quad s\text{-}\lim_{\lambda \to \infty} P(\lambda) = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$

Wie bei PVMs kann gezeigt werden, dass starke und schwache rechtsseitige Stetigkeit von $P(\lambda)$ äquivalent zueinander sind. (3)

$\rightarrow$ zu $P(\Omega)$ und $P(\lambda)$ können zugehörige, endliche Borelmaße / Verteilungsfkt.en definiert werden.

Sei $\psi \in \mathfrak{H}$, dann $\mu_\psi(\Omega) := (\psi, P(\Omega)\psi)$, $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\mu_\psi(\lambda) := (\psi, P_\lambda \psi)$

Lect. 3

Da für jede Verteilungsfkt. ein eindeutiges Borelmaß konstruiert werden kann, folgt, dass es für jede Spektralfamilie P_λ ein eindeutiges zugehöriges PVM $P(\Omega)$ gibt.

$\rightarrow$ mit Polarisation erhalten wir aus $\mu_\psi(\Omega)$ komplexe Maße

$$\mu_{\varphi\psi}(\Omega) = (\varphi, P(\Omega)\psi) = \frac{1}{4}\left[\mu_{\varphi+\psi}(\Omega) - \mu_{\varphi-\psi}(\Omega) + i\mu_{\varphi-i\psi}(\Omega) - i\mu_{\varphi+i\psi}(\Omega)\right]$$

und offenbar $|\mu_{\varphi\psi}(\Omega)| \leq 1 \quad \forall \varphi, \psi \in \mathfrak{H}, \ \Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

4.2 Integration über PVMs

Sei $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{\Omega_j}$ (mit $\Omega_j = f^{-1}(\alpha_j)$) eine Treppenfkt. ($=$ einfache Fkt.en), dann setzen wir

$$P(f) := \int f(\lambda)\, dP(\lambda) = \sum \alpha_j P(\Omega_j)$$, d.h. insb. ist $P(\mathbb{1}_\Omega) = P(\Omega)$

$\Rightarrow (\varphi, P(f)\psi) = \sum \alpha_j \mu_{\varphi\psi}(\Omega_j) = \int f(\lambda)\, d\mu_{\varphi\psi}(\lambda)$

$\Rightarrow$ wg Linearität des Integrals ist $P: \{\text{einfache Fkt.en}\} \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{H})$

$$f \mapsto P(f) = \sum \alpha_j P(\Omega_j)$$
$$f = \sum \alpha_j \mathbb{1}_{\Omega_j}$$

Aus $\|P(f)\psi\|^2 = (\psi, P(f)^2\psi) = \sum |\alpha_j|^2 \mu_\psi(\Omega_j)$ ($\Omega_j \cap \Omega_\ell = \emptyset$, falls $j \neq \ell$)

folgt weiter $\|P(f)\psi\|^2 = \int |f(\lambda)|^2 d\mu_{\psi}(\lambda) \leq \|f\|_{\infty}^2 \ \|\psi\|_{\mathfrak{H}}^2$

$\Rightarrow \|P\|_{op\text{-}norm} = 1$

Da Menge d. einfache Fkt.en dicht in Menge der beschr. Borelfkt.en (bzgl $\|\cdot\|_\infty$-Norm), gibt es eine eindeutige Erweiterung $P: \{\text{beschr. Borelfkt.en mit } \|\cdot\|_\infty\text{-Norm}\} \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, $\|P\| = 1$

und $(\varphi, P(f)\psi) = \int f(\lambda)\, d\mu_{\varphi\psi}(\lambda)$ und $\|P(f)\psi\| = \int |f(\lambda)|^2 d\mu_\psi(\lambda)$ gelten weiterhin

→ weitere Struktur hinter dieser Erweiterung

Erinnerung: $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ formt eine ~~R~~ C^*-Algebra

Ein C^*-Algebra-Homomorphismus $\phi: C^*\text{-Alg} \to C^*\text{-Alg}$ ist eine lineare Abbildung, die $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ und $\phi(a^*) = \phi(a)^*$ erfüllt.

↑ Adjungieren in C^*-Alg

Thm 4.2.1 Sei $P(\Omega)$ ein PVM, dann ist der zugehörige Operator

$$P: \{\text{beschr. Borelfkt.en}\} \to \mathcal{L}(\mathfrak{H})$$
$$f \mapsto \int f(\lambda)\, dP(\lambda)$$

ein C^*-Alg.-Homomorphismus mit Norm 1, sodass

$$(P(g)\varphi, P(f)\psi) = \int \overline{g(\lambda)}\, f(\lambda)\, d\mu_{\varphi\psi}(\lambda) \qquad (*)$$

Gilt weiter $f_n \to f$ pktweise mit $\|f_n\|_\infty \leq 1$, dann gilt

~~$P(f_n) \to$~~ $\quad \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} P(f_n) = P(f)$

Beweis Die Eigenschaften $P(1) = \mathbb{1}_{\mathfrak{H}}$, $P(\overline{f}) = P(f)^*$, $P(fg) = P(f)P(g)$ sind offenbar für einfache Fkt.en → Für f bdd und messbar mit Treppenfkt.en approximieren ~~(*)~~ ~~fol~~ ⇒ P ist C^*-Alg.-Homomorphismus

$(*)$ folgt aus $(P(g)\varphi, P(f)\psi) = (\varphi, P(g^* f)\psi)$

letzte Beh. folgt aus majorisierter Konv. und $\|P(f)\psi\| \leq \|f\|_\infty \|\psi\|_{\mathfrak{H}}$ ∎

Bem $(*) \Rightarrow \mu_{P(g)\varphi,\, P(f)\psi}(\Omega) = (P(g)\varphi, P(\Omega)P(f)\psi) = \int_\Omega \overline{g(\lambda)}\, f(\lambda)\, d\mu_{\varphi\psi}(\lambda)$

$\Rightarrow d\mu_{P(g)\varphi,\, P(f)\psi} = \overline{g} f\, d\mu_{\varphi\psi}$

Bsp 4.2.2 $\mathfrak{H} = \mathbb{C}^n$, $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, $P_A(\Omega) = \sum_{\lambda_j \in \Omega} P_j \Rightarrow P_A(f) = \sum_{j=1}^n f(\lambda_j) P_j$

$P_A(id) = A \qquad (id(x) = x \text{ auf } \mathbb{R})$

$$d\mu_\psi(\lambda) = \sum_{j=1}^n \|P_j\psi\|^2\, d\Theta(\lambda - \lambda_j)$$

↑ $\underbrace{\text{Heaviside}}_{\text{Dirac-Maß bei } \lambda_j}$

<u>Nun</u> Erweiterung des Frameworks auf unbeschr. Borelfkt.en
→ unbeschr. Operatoren → was ist richtiges domain?

Wg $\|P(f)\Psi\| \leq \|f\|_\infty \|\Psi\|$ scheint es vernünftig (wie bei Multiplikationsoperatoren aus den Anfängen von VL 2)

$$\mathcal{D}_f = \{\Psi \in \mathcal{H} : \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d\mu_\Psi(\lambda) < \infty\}$$

zu setzen. Offenbar ist $\mathcal{D}_f \subseteq \mathcal{H}$ ein linearer Unterraum, denn

$$\mu_{\alpha\Psi}(\Omega) = |\alpha|^2 \mu_\Psi(\Omega) \qquad (\alpha \in \mathbb{C})$$
$$\mu_{\varphi+\Psi}(\Omega) = \|P(\Omega)(\varphi+\Psi)\|^2 \leq 2(\|P(\Omega)\varphi\|^2 + \|P(\Omega)\Psi\|^2) = 2(\mu_\varphi(\Omega) + \mu_\Psi(\Omega))$$

<u>Beob.</u> Für $\Psi \in \mathcal{D}_f$ ist $f_n = \mathbb{1}_{\Omega_n} f$, $\Omega_n = \{\lambda \in \mathbb{R} : |f(\lambda)| < n\}$ eine Folge beschränkter Borelfkt.en, die Cauchy in $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\Psi)$ ist und dort gegen f konvergiert.
$\Rightarrow$ Wg $\|P(f_n)\Psi\| \leq \|f_n\|_\infty \|\Psi\|$ bildet also $\Psi_n = P(f_n)\Psi$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{H}$ die uns erlaubt

$$P(f)\Psi := \lim_{n\to\infty} P(f_n)\Psi, \quad \Psi \in \mathcal{D}_f$$

zu definieren.
Per Konstruktion ist $P(f)$ linear und es gilt weiter $\|P(f)\Psi\| \leq \|f\|_\infty \|\Psi\|$, falls $f \in L^\infty$. Falls $f \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_\Psi)$ gilt außerdem weiter $(\Psi, P(f)\Psi) = \int f(\lambda) d\mu_\Psi(\lambda)$
Schließlich ist $\mathcal{D}_f$ dicht. Sei dazu Ω_n wie oben und $\Psi_n = P(\Omega_n)\Psi$. Dann ist $d\mu_{\Psi_n} = \mathbb{1}_{\Omega_n} d\mu_\Psi$ und damit $\Psi_n \in \mathcal{D}_f$. Darüberhinaus folgt $\Psi_n \to \Psi$ aus $\|P(f)\Psi\|^2 = \int |f(\lambda)|^2 d\mu_\Psi(\lambda)$, da $\mathbb{1}_{\Omega_n} \to 1$ in $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\Psi)$.
Wir fassen diese Beobachtungen wie folgt zusammen

<u>Thm 4.2.3</u> Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ messbar (nicht notwendigerweise beschr.) und $P(\Omega)$ ein PVM. Dann ist $\mathcal{D}_f = \{\Psi \in \mathcal{H} : \int |f(\lambda)|^2 d\mu_\Psi(\lambda) < \infty\}$ ein dichter, linearer Unterraum von $\mathcal{H}$.
Für $f_n = \mathbb{1}_{\Omega_n} f$, $\Omega_n = \{\lambda \in \mathbb{R} : |f(\lambda)| < n\}$ existiert

$$P(f)\Psi := \text{s-}\lim_{n\to\infty} P(f_n)\Psi, \quad \Psi \in \mathcal{D}_f$$

und $P(f)$ ist ein linearer Operator, der $\|P(f)\Psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d\mu_\Psi(\lambda)$ und $(\Psi, P(f)\Psi) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\mu_\Psi(\lambda)$ (für $f \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_\Psi)$) erfüllt.

Der Operator $P(f)$ hat weitere schöne Eigenschaften, die für den Beweis des Spektralkalküls sein werden. ⑥

Thm 4.2.4 normal: Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ messbar, dann ist $P(f) = \int f(\lambda)\, dP(\lambda)$, $D(P(f)) = D_f$ und erfüllt $\|P(f)\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d\mu_\psi(\lambda) \quad \forall \psi \in D_f$.

$$(\psi, P(f)\psi) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, d\mu_\psi(\lambda)$$

Thm 3.2 in Teschl

Außerdem ist $[P(f), P(\lambda)] = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ und es gilt ~~$\|P(f)\|$~~ $\|P(f)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(P(f))} |f(\lambda)|$.

Seien ferner $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ messbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, dann gelte

Thm 3.2

(1) $P(f)^* = P(\bar{f})$

(2) $\alpha P(f) + \beta P(g) \subseteq P(\alpha f + \beta g)$, $D(\alpha P(f) + \beta P(g)) = D_{|f|+|g|}$

(3) $P(f)P(g) \subseteq P(fg)$, $D(P(f)P(g)) = D_g \cap D_{fg}$

Insbesondere folgen daraus

(1) $P(f)P(\bar{f}) = P(\bar{f})P(f) = P(|f|^2)$

(2) $(P(f)\psi, P(g)\psi) = \int \bar{f}(\lambda) g(\lambda)\, d\mu_{\psi\psi}(\lambda)$

Schließlich ist (1) $P(f)$ s.a. $\Leftrightarrow$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(2) $P(f)$ unitär $\Leftrightarrow$ $|f(\lambda)| = 1 \quad \forall \lambda \in D(f)$

Pf Teschl p. 104 - 105

Beob $P(f)$ als Op in $\mathcal{H}$ $\cong$ Multiplikationsoperator M_f in $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)$

Wir sehen, dass für jedes PVM $P(\Omega)$ ein zugehöriger Operator $\int_{\mathbb{R}} \lambda\, dP(\lambda) = A$ gewonnen werden kann $\rightarrow$ gilt auch die Umkehrung, sprich für gegebenes $A: D(A) \to \mathcal{H}$, gibt es ein PVM P_A sodass $A = \int \lambda\, dP_A(\lambda)$?

$\rightarrow$ betrachte dazu Resolvente $R_A(z) = (A - z)^{-1}$, $z \in \rho(A)$. ~~genauer gesagt~~

Frage: können wir $\int (\lambda - z)^{-1} dP(\lambda)$ invertieren?? Sprich, ist es möglich zu zeigen, dass es P_A (PVM) gibt, sodass $(A - z)^{-1} = \int (\lambda - z)^{-1} dP_A(\lambda)$?

Sei also zunächst ein PVM $P(\Omega)$ gegeben und betrachte

$R_A(z) \equiv \int (\lambda - z)^{-1} dP(\lambda)$ bzw. die Boreltransf. vom zugehörigen

Spektralmaß μ_ψ, d.h. $F_\psi(z) = (\psi, R_A(z)\psi) = \int \frac{d\mu_\psi(\lambda)}{\lambda - z}$. (Pick)

~~W~~ Man kann zeigen, dass jede Pickfkt g die Darst. (Bhatia Thm V.4.11, Teschl Thm 3.20)

$$g(z) = a + bz + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \right) d\mu(\lambda) \quad \text{für } b \geq 0,\ a \in \mathbb{R},\ \mu \geq 0$$ Borelmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

mit $\int \frac{d\mu(\lambda)}{1+\lambda^2}$ hat

Insbesondere kann man ausrechnen, denn $a = \operatorname{Re} g(i)$
(Bhatia ~~#~~ S. 139_n + Thm V.4.12 $b = \lim_{\eta \to \infty} \frac{g(i\eta)}{i\eta}$
Teschl Thm 3,23)

sowie für alle α, β, die keine Atome von μ sind,
(Stieltjessche Umkehrformel) $\mu((\alpha, \beta]) = \lim_{\eta \to 0} \frac{1}{\pi} \int_\alpha^\beta \operatorname{Im} g(x + i\eta)\, dx$

bzw. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\mu((-\infty, \lambda]) = \lim_{\delta \to 0} \lim_{\eta \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\lambda + \delta} \operatorname{Im} g(x + i\eta)\, dx$

$\to$ Bsp: $g(z) = -z^{-1} \Rightarrow a = b = 0$, $\mu(\lambda) = \lim_{\delta \to 0} \lim_{\eta \to 0} \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\lambda+\delta} \frac{\eta}{\eta^2 + x^2}\, dx}$ $= \theta(\lambda)$

$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} 1_{x \leq \lambda + \delta}\, P_\eta(x)\, dx = 1_{\lambda \geq 0} = \theta(\lambda)$

$\Rightarrow d\mu(\lambda) = \delta(\lambda)$

$\Rightarrow \int d\mu(\lambda) \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \right) = -\frac{1}{z}$ ✓

weitere Bsp $z^{1/2}$, $\log z$ (HA)

In unserer Situation: $F_\psi(z) = \int \frac{d\mu_\psi(\lambda)}{\lambda - z}$ und μ_ψ lässt sich durch

$\mu_\psi(\lambda) = \lim_{\delta \to 0} \lim_{\eta \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\lambda+\delta} \operatorname{Im} F_\psi(x + i\eta)\, dx$ wiederherstellen

$\to$ jetzt können wir unsere Frage der Invertierbarkeit $P(\Omega) \mapsto A_P$ s.o. beantworten.

Sei also jetzt $A: D(A) \to \mathcal{H}$ gegeben mit $F_\psi(z) = (\psi, (A - z)^{-1} \psi)$. Offenbar ist F_ψ Pick, denn $F_\psi(z)$ ist holomorph in $z \in \rho(A)$ mit $F_\psi(\bar{z}) = \overline{F_\psi(z)}$,

$|F_\psi(z)| \leq \frac{\|\psi\|^2}{|\operatorname{Im} z|}$ (Lemma 1.3.4) und $F_\psi(z)$ bildet $\mathbb{C}_+$ in sich selbst ab, da

$\operatorname{Im} F_\psi(z) = \operatorname{Im}(z) \|R_A(z)\psi\|^2$ (mit Resolventenformel)

~~$\Rightarrow$ per Polarisation~~ $\Rightarrow F_\psi(z) = a + bz + \int \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \right) d\mu_\psi(z)$ ~~Falls~~ Was sind a, b?

Betrachte $g(z) = F_\psi(z) - \int \frac{d\mu_\psi(\lambda)}{\lambda - z}$ holomorph in $\mathbb{C}_+$

Da $\operatorname{Im} g(z) = 0$ folgt aus Cauchy-Riemann, dass $g(z) = a + bz \equiv const \Rightarrow b = 0$

Andererseits ~~gilt~~ $\lim_{\operatorname{Im} z \to \infty} (\psi, (A-z)^{-1}\psi), \int \frac{d\mu_\psi(\lambda)}{\lambda - z} = 0$, d.h. $\lim_{\operatorname{Im} z \to \infty} g(z) = 0 \Rightarrow a = 0$

Weiter sehen wir, dass $\underbrace{\epsilon \cdot \operatorname{Im} F_\psi(x + i\epsilon)}_{= \epsilon^2 \underbrace{\|(A - x - i\epsilon)^{-1}\psi\|^2}_{\leq \frac{\|\psi\|^2}{\epsilon^2}} \to \|\psi\|^2} = \epsilon^2 \int \frac{d\mu_\psi(\lambda)}{\epsilon^2 + (\lambda - x)^2} \xrightarrow{\epsilon \to \infty} \mu_\psi(\mathbb{R})$ (majorisiert

$\Rightarrow \mu_\psi(\mathbb{R}) = \|\psi\|^2$

Zusammengefasst gilt also

<u>Thm 4.2.5</u> Sei $A: D(A) \to \mathcal{H}$ s.a., $z \in \rho(A)$, $\psi \in \mathcal{H}$, ~~ψ~~ $\varphi \in \mathcal{H}$. Dann gibt es eindeutiges ~~M~~ Borelmaß $\mu_\psi \geq 0$ mit ~~h~~ $\mu_\psi(\mathbb{R}) = \|\psi\|^2$ und

$$(\psi, (A-z)^{-1}\psi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_\psi(\lambda)}{\lambda - z}$$

und eindeutige komplexe Maße $\mu_{\varphi\psi}$ in $\mathbb{R}$ s.d. $(\varphi, (A-z)^{-1}\psi) = \int \frac{d\mu_{\varphi\psi}(\lambda)}{\lambda - z}$.

$\to$ Jetzt: Konstruktion eines PVMs aus $\mu_\psi(\Omega)$!

Definiere nun $s_\Omega(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_\Omega(\lambda)\, d\mu_{\varphi\psi}(\lambda)$ ~~und~~ und

$q_\Omega[\psi] = s_\Omega(\psi, \psi) \geq 0$, ~~u~~ ~~...~~ $\Rightarrow |s_\Omega(\varphi, \psi)| \leq q_\Omega[\psi]^{1/2} q_\Omega[\varphi]^{1/2}$

$\leq \mu_\psi(\Omega)^{1/2} \mu_\varphi(\Omega)^{1/2}$

$\leq \|\psi\| \|\varphi\|$.

~~$\Rightarrow \exists$ zugehörigen beschränkten Operator $P_A(\Omega)$, der~~

$\Rightarrow \exists$ zugehöriger nicht-negativer (und damit s.a.) Operator $0 \leq P_A(\Omega) \leq 1$ definiert durch $(\varphi, P_A(\Omega)\psi) := s_\Omega(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_\Omega(\lambda)\, d\mu_{\varphi\psi}(\lambda)$

<u>Prop 4.2.6</u> Die Familie der ~~PVMs~~ $P_A(\Omega)$ bildet ein PVM $\to$ jetzt 4.2.1, 4.2.3., 4.2.4 anwendbar

Pf zu $P_A(\Omega_1) P_A(\Omega_2) \stackrel{?}{=} P_A(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ bemerken wir zunächst, dass die Stieltjessche Inversionsformel (durch Polarisation) auch für komplexe Maße gilt

$\to$ "Stonesche Formel" $\frac{1}{2}\left(\mu(\lambda_1, \lambda_2) + \mu([\lambda_1, \lambda_2])\right) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} dx \left[F(x + i\epsilon) - F(x - i\epsilon)\right]$

komplexes Maß

$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - x - i\epsilon}$

Als Nächstes folgt aus der Resolventenformel

$$\int \frac{d\mu_{R_A(\bar z)\phi,\psi}(\lambda)}{\lambda-\tilde z} = (R_A(\bar{\tilde z})\phi, R_A(\tilde z)\psi) = (\phi, R_A(z)R_A(\tilde z)\psi)$$

$$= \frac{1}{z-\tilde z}\left[(\phi, R_A(z)\psi) - (\phi, R_A(\tilde z)\psi)\right] = \frac{1}{z-\tilde z}\int\left(\frac{1}{\lambda-z} - \frac{1}{\lambda-\tilde z}\right) d\mu_{\phi\psi}(\lambda)$$

$$= \int \frac{1}{\lambda-z}\,\frac{d\mu_{\phi\psi}(\lambda)}{\lambda-\tilde z} \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ ergo $d\mu_{R_A(\bar z)\phi,\psi}(\lambda) = \dfrac{d\mu_{\phi\psi}(\lambda)}{\lambda-z}$ mit Stonescher Formel

Als Nächstes rechnen wir

$$\int \frac{d\mu_{\varphi,P_A(\Omega)\psi}(\lambda)}{\lambda-z} = (\varphi, R_A(z)P_A(\Omega)\psi) = \cancel{(R_A(\bar z)}\ \cancel{(R_A(\bar z), P_A}$$

$$= (R_A(\bar z)\varphi, P_A(\Omega)\psi) = \int \mathbb{1}_\Omega(\lambda)\, d\mu_{R_A(\bar z)\varphi,\psi}(\lambda) \overset{(*)}{=} \int \frac{1}{\lambda-z}\mathbb{1}_\Omega(\lambda)\, d\mu_{\varphi\psi}(\lambda)$$

d.h. $d\mu_{\varphi,P_A(\Omega)\psi}(\lambda) = \mathbb{1}_\Omega(\lambda)\, d\mu_{\varphi\psi}(\lambda)$, d.h. aber wg $\mathbb{1}_{\Omega_1}\mathbb{1}_{\Omega_2} = \mathbb{1}_{\Omega_1\cap\Omega_2}$

$(\Omega = \Omega_1\cap\Omega_2)$ $\quad (\varphi, P_A(\Omega_1)P_A(\Omega_2)\psi) = (\varphi, P_A(\Omega_1\cap\Omega_2)\psi)$

Insb. ist $P_A(\Omega) = P_A(\Omega)^2 = P_A(\Omega)^*$

Um $P_A(\mathbb{R}) = \mathbb{1}$ zu zeigen, sei $\psi \in \ker P_A(\mathbb{R})$, d.h. $0 = d\mu_{\varphi,P_A(\mathbb{R})\psi}(\lambda)$

$$= \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(\lambda)\, d\mu_{\varphi\psi}(\lambda) = d\mu_{\varphi\psi}(\lambda)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\varphi, R_A(z)\psi)}_{=\int \frac{d\mu_{\varphi\psi}}{\lambda-z}} = 0 \Rightarrow \psi \overset{!}{=} 0$$

Schließlich sei $\Omega = \dot\bigcup \Omega_n \Rightarrow \sum_{j=1}^N (\psi, P_A(\Omega_j)\psi) = \sum_{j=1}^N \mu_\psi(\Omega_j) \xrightarrow{N\to\infty} (\psi, P_A(\Omega)\psi)$

$$= \mu_\psi(\Omega)$$

wg σ-Additivität der μ_ψ

$\Rightarrow P_A(\Omega)$ schwach und damit stark σ-additiv (wie zuvor bemerkt) $\square$

$R_A(z) \to \mu_{\varphi\psi}$ aus $(\psi, R_A(z)\psi) \to P_A$ aus $(\psi, P_A(\Omega)\psi) = \int_\Omega d\mu_\psi(\lambda)$

$\Rightarrow$ Spek thm Zu jedem $A: D(A) \to \mathcal{H}$ $\exists!\, P_A(\Omega)$ (PVM) s.d.

$$A = \int \lambda\, dP_A(\lambda)$$

Pf Existenz gerade bewiesen durch explizite Konstruktion. Wg Thm 4.2.1 und 4.2.3 gilt $P_A((\lambda-z)^{-1}) = R_A(z)$, $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Da die Maße $\mu_{\varphi,\psi}$ eindeutig durch $R_A(z)$ bestimmt und das PVM eindeutig durch $\mu_{\varphi\psi}$ bestimmt, ist P_A eindeutig durch $R_A(z)$ bestimmt $\square$

Quad Form von A durch $q_A[\psi] = \int \lambda \, d\mu_\psi(\lambda)$

$\psi \in Q(A) = D(|A|^{1/2}) = \{\psi \in \mathcal{H} : \int |\lambda| \, d\mu_\psi(\lambda) < \infty\}$

gegeben (auch für s.a. A. die einen Negativteil haben)

<u>Thm 4.2.7</u> $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : P_A(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon) \neq 0 \ \forall \epsilon > 0\}$, und insb. $P_A(\sigma(A)) = \mathbb{1}$, $P_A(\rho(A)) = 0$, $P_A((\lambda_1, \lambda_2)) = 0 \Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2) \subseteq \rho(A)$

Pf Sei $\Omega_n := (\lambda_0 - \frac{1}{n}, \lambda_0 + \frac{1}{n})$ u. angenommen $P_A(\Omega_n) \neq 0$

$\Rightarrow \exists \psi_n \in P_A(\Omega_n) \mathcal{H}$ mit $\|\psi_n\| = 1$.

Da $\|(A - \lambda_0)\psi_n\|^2 = \|(A - \lambda_0) P_A(\Omega_n) \psi_n\|^2 = \int (\lambda - \lambda_0)^2 \mathbb{1}_{\Omega_n}(\lambda) \, d\mu_{\psi_n}(\lambda) \leq \frac{1}{n^2}$

$\Rightarrow \lambda \in \sigma(A)$ wg Charakterisierung von $\sigma(A)$ mit Weyl-Folgen (Lem. 1.2.8)

Sei andererseits $P_A(\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon) = 0$, dann setze $f_\epsilon(\lambda) = \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)}(\lambda) (\lambda - \lambda_0)^{-1}$

$\Rightarrow (A - \lambda_0) P_A(f_\epsilon) = P_A((\lambda - \lambda_0) f_\epsilon(\lambda)) = P_A(\mathbb{R} \setminus (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)) = \mathbb{1}$

Ähnlich erhält man $P_A(f_\epsilon)(A - \lambda_0) = \mathbb{1}|_{D(A)}$, d.h. $\lambda_0 \in \rho(A)$ ☐

$\Rightarrow P_A(f) = P_A(\sigma(A)) P_A(f) = P_A(\mathbb{1}_{\sigma(A)} f)$, d.h. $P_A(f)$ hängt nicht vom Verhalten von f auf $\mathbb{R} \setminus \sigma(A)$ ab

Von nun an schreiben wir $f(A) \equiv P_A(f)$.

Aus der Konstruktion von P_A oben sehen wir außerdem

$(\psi, P_A(\Omega)\psi) = \int \mathbb{1}_\Omega \, d\mu_\psi(\lambda)$ dann aus Thm 4.2.7

folgt, dass $\sigma(A) = \sigma(\mu_\psi)$, falls ψ ein zyklischer Vektor von A ist, d.h. falls $\{A^n \psi : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $\mathcal{H}$.

<u>Etwas genauer</u> im Folgenden

4.3. Zusammenhang zwischen Spektren von Operatoren und Borelmaßen

Wir haben gesehen $A: D(A) \to \mathcal{H}$ s.a.

$\Downarrow R_A(z)$; $(\psi, R_A(z)\psi) = \int \frac{d\mu_\psi(\lambda)}{\lambda - z}$

$d\mu_\psi(\lambda)$

$\Downarrow$

$\int \mathbb{1}_\Omega(\lambda)\, d\mu_\psi(\lambda) \equiv (\psi, P_A(\Omega)\psi)$, $\quad P_A(\Omega)$ PVM

$\Downarrow$

$A = \int \lambda \, dP_A(\lambda)$ und $(\psi, A\psi) = \int \lambda \,(\psi, dP_A(\lambda)\psi)$

$= \int \lambda \, d\mu_\psi(\lambda)$

~~Vermutung~~

$\Rightarrow$ A in $\mathcal{H}$ unitär äq zu M_{id} in $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)$, falls ψ zyklisch für A,

↳ Multiplikation mit λ

d.h. $\{A^n \psi : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{H}$ dicht

(sh auch Thm 3.13 Jaksic)

$\Rightarrow$ Vermutung wahr

Thm 4.3.1 Sei $A: D(A) \to \mathcal{H}$ s.a. und ψ zyklisch für A

$\Rightarrow \exists$ unitäre Abb $U: \mathcal{H} \to L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)$ s.d. $UAU^{-1} = M_{id} \equiv \tilde{A}$

Multiplikation mit x

Insb. folgt (aus Thm 4.2.7), $\sigma(A) = \sigma(\mu_\psi)$

Pf Später (z.B. Jaksic Thm 3.13)

Bem U nicht eindeutig! Falls U existiert, so ist $U\psi$ zyklisch für M_{id} in $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)$.
Ist andererseits $f \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)$ bereits zyklisch für M_{id}, dann gibt es eine eindeutige unitäre Abb $U: \mathcal{H} \to L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)$, sodass $UAU^{-1} = M_{id}$ und $U\psi = f\,\|\psi\| / \|f\|$. Die unitäre Abb., die man im Beweis konstruiert, erfüllt $U\psi = 1$.

Allgemeiner Fall → Thm 3.8 (Fahric)

Thm 4.3.2 (Zerlegung in zyklische Unterräume)

Sei $A: D(A) \to \mathcal{H}$ {separabel} s.a. $\Rightarrow \exists$ abzählbare Menge Γ, eine Familie von zueinander orthogonalen Unterräumen $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\Gamma}$ von $\mathcal{H}$ und s.a. Operatoren A_n auf $\mathcal{H}_n$ mit

(1) $\forall n \in \Gamma\ \exists\ \psi_n \in \mathcal{H}_n$ zyklisch für A_n

(2) $\mathcal{H} = \oplus \mathcal{H}_n$ und $A = \oplus A_n$

($\psi \in \mathcal{H}$, $\psi = (\psi_n)_n$, $\psi_n \in \mathcal{H}_n$, $\sum_{n\in\Gamma} \|\psi_n\|^2_{\mathcal{H}_n} < \infty$, $(\varphi, \psi)_{\mathcal{H}} = \sum_{n\in\Gamma} (\varphi_n, \psi_n)_{\mathcal{H}_n}$

A_n s.a. in $\mathcal{H}_n$, setze $D(A) = \{\psi = (\psi_n)_n \in \mathcal{H} : \psi_n \in D(A_n) : \sum_{n\in\Gamma} \|A_n \psi_n\|^2 < \infty\}$

$\Rightarrow A\psi = (A_n \psi_n)_n$ ist s.a. in $\mathcal{H}$ und man schreibt $A = \bigoplus_{n\in\Gamma} A_n$

weiter gilt $(A-z)^{-1} = \bigoplus_n (A_n - z)^{-1}$, $\sigma(A) = \overline{\bigcup_n \sigma(A_n)}$

Im Allgemeinen Fall zerlegen wir also $A = \bigoplus_n A_n$, erhalten unitäre U_n:
$U_n : \mathcal{H}_n \to L^2(\mathbb{R}, d\mu_{\psi_n})$ mit $U_n A_n U_n^{-1} = \tilde{A}_n$ und zyklischen ψ_n für A_n

$\oplus U_n \equiv U$

Thm 4.3.3 $U : \mathcal{H} \to \bigoplus_n L^2(\mathbb{R}, d\mu_{\psi_n})$ ist unitär und $UAU^{-1} = \oplus \tilde{A}_n$, d.h. $\equiv \tilde{A}$

insb. ist $\sigma(A) = \overline{\bigcup_n \sigma(A_n)} = \overline{\bigcup_n \sigma(\mu_{\psi_n})}$

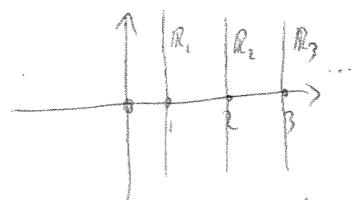
Pf Fahsic Thm 3.14

~~Setze nun $\mu_\psi(E)$~~

Sei $\mathbb{R}_n$ eine Kopie von $\mathbb{R}$ und $M := \bigcup_{n\in\Gamma} \mathbb{R}_n$

z.B. $\Gamma = \{1..N\}$ oder $\Gamma = \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n = \{(n,x) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

→ M ist eine Familie von Geraden in $\mathbb{R}^2$, die parallel zur y-Achse sind und durch den Punkt $(n, 0)$ $(n\in\Gamma)$ laufen.



$\Rightarrow U : \mathcal{H} \to L^2(M, d\mu)$ unitär mit $UAU^{-1} = \tilde{A}$
mit $\tilde{A}$ = Multiplikation mit f in $L^2(M, d\mu)$, $f(n,x) = x$

Sei $\mathcal{F}$ die Familie aller Mengen $F \subset M$ mit $F \cap \mathbb{R}_n$ ist Borel $\forall n \in \Gamma$.

→ $\mathcal{F}$ ist eine σ-Algebra und $\mu(F) = \sum_n \mu_{\psi_n}(F \cap \mathbb{R}_n)$

Setze nun $\underset{\mathcal{F}}{\mu_{ac}(\mathcal{F})} = \sum_{n \in \Gamma} \mu_{\psi_n, ac}(\mathcal{F} \cap \mathbb{R}_n)$

$\mu_{sc}(\mathcal{F}) = \sum_n \mu_{\psi_n, sc}(\mathcal{F} \cap \mathbb{R}_n)$

$\mu_{pp}(\mathcal{F}) = \sum_n \mu_{\psi_n, pp}(\mathcal{F} \cap \mathbb{R}_n)$

$\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $L^2(M, d\mu_{ac})$, $L^2(M, d\mu_{sc})$, $L^2(M, d\mu_{pp})$ sind abgeschlossene Unterräume von $L^2(M, d\mu)$, die invariant unter $A_f = \oplus \tilde{A}_n$ $(f(n,x) = x)$ sind

Weiter ~~und~~ gilt $L^2(M, d\mu) = L^2(M, d\mu_{ac}) \oplus L^2(M, d\mu_{sc}) \oplus L^2(M, d\mu_{pp})$,

~~wg d. disjunkten Zerlegung d. Maße~~
da alle Maße singulär zueinander sind und disjunkte Träger haben

Zu jedem A_n mit $d\mu_{\psi_n}$ definieren wir also Projektoren $P_n^{xx} = \mathbb{1}_{M_n^{xx}}(A_n)$, wo M_n^{xx} Träger von $\mu_{\psi_n}^{xx}$ $(xx = sc, pp, ac)$ $\rightarrow$ $P_n^{pp} + P_n^{sc} + P_n^{ac} = \mathbb{1}_{\mathfrak{H}_n}$

$\Rightarrow$ $L^2(\mathbb{R}_n, d\mu_{\psi_n}) = L^2(\mathbb{R}_n, d\mu_n^{ac}) \oplus L^2(\mathbb{R}_n, d\mu_n^{pp}) \oplus L^2(\mathbb{R}_n, d\mu_n^{sc})$

$\Rightarrow$ $A_n = (A_n P_n^{ac}) \oplus (A_n P_n^{pp}) \oplus (A_n P_n^{sc})$

$\sigma_{ac}(A_n) = \sigma(\mu_{\psi_n}^{ac})$, $\sigma_{pp}(A_n) = \sigma(\mu_{\psi_n}^{pp})$, $\sigma_{sc}(A_n) = \sigma(\mu_{\psi_n}^{sc})$

(<u>Bem</u> $\sigma_{pp}(A_n) = \overline{\sigma_p(A_n)}$, wobei $\sigma_p(A_n) = \{\lambda \in \mathbb{R}_n : \lambda$ EW von $A_n\}$)

<u>HA</u> Beispiel?

Dies erklärt (*) durch Nehmen von direkten Summen $\bigoplus_{n \in \Gamma}$

Wir gehen jetzt mit unserer gefundenen Unitären $U = \bigoplus_n U_n : \mathfrak{H} \to \oplus L^2(\mathbb{R}_n, d\mu_{\psi_n})$ zurück und definieren

$\mathfrak{H}_{ac} = U^{-1} L^2(M, d\mu_{ac})$ $\quad \mathfrak{H}_{pp} = U^{-1} L^2(M, d\mu_{pp})$, $\quad \mathfrak{H}_{sc} = U^{-1} L^2(M, d\mu_{sc})$

welche wieder invariante Unterräume für A sind. Wg wechselseitiger Singularität der μ_{xx} gilt entsprechend $\quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{ac} \oplus \mathfrak{H}_{pp} \oplus \mathfrak{H}_{sc}$.

$\sigma_{ac}(A) = \sigma(A|_{\mathfrak{H}_{ac}}) = \overline{\bigcup_n \underbrace{\sigma_{ac}(A_n)}_{= \sigma(\mu_{\psi_n}^{ac})}}$ etc.

$\varphi \in \mathfrak{H}_{ac} \Leftrightarrow \mu_\varphi$ ac bzgl Lebesgue

$\varphi \in \mathfrak{H}_{pp} \Leftrightarrow \mu_\varphi$ ist pure point

$\varphi \in \mathfrak{H}_{sc} \Leftrightarrow \mu_\varphi$ ist sc bzgl. Leb.

~~Wir sind~~

4. ~~§4~~ Anwendung der Ergebnisse aus VL 3

Wir sind nun in der Lage unser Wissen über Boreltransformationen von Stieltjesmaßen auf die Spektralmaße von s.a. Operatoren anzuwenden

$A : D(A) \to \mathcal{H}$ s.a., $\psi \in \mathcal{H}$, μ_ψ zugehöriges Spek.maß, $F_{\mu_\psi} \equiv F_\psi \equiv F$ Boreltransf.

Thm 4.4.1 (1) Für Lebesgue-f.a. $x \in \mathbb{R}$ existiert der Grenzwert

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} (\psi, (A-x-i\epsilon)^{-1}\psi) \equiv (\psi, (A-x-i0)^{-1}\psi)$$

und ist endlich und nicht-verschwindend

(2) $d\mu_\psi^{ac} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im}(\psi, (A-x-i0)^{-1}\psi)\,dx$

(3) μ_ψ^s ist auf $\{x : \lim_{\epsilon \searrow 0} \operatorname{Im}(\psi, (A-x-i\epsilon)^{-1}\psi) = \infty\}$ getragen

Pf Folgt aus voriger Diskussion + Thms 3.2.9, 3.2.10

Thm 4.4.2 Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$

(1) $\mu_\psi^{ac}([a,b]) = 0 \iff$ für ein $0<p<1$ gilt (Thm 3.4.3)

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_a^b \left(\operatorname{Im}(\psi, (A-x-i\epsilon)^{-1}\psi)\right)^p dx = 0$$

(2) Ang. für ein $p>1$ gilt

$$\cancel{\sup_{0<\epsilon<1}} \int_a^b \left(\operatorname{Im}(\psi, (A-x-i\epsilon)^{-1}\psi)\right)^p dx < \infty \quad \forall\, \epsilon \in (0,1)$$ (Thm 3.4.1)

$\cancel{\Rightarrow \mu_\psi^s|_{[a,b]} = 0}$ $\quad \Rightarrow \mu_\psi^s([a,b]) = 0$

(3) $\mu_\psi^{pp}([a,b]) = 0 \iff \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_a^b \left(\operatorname{Im}(\psi, (A-x-i\epsilon)^{-1}\psi)\right)^2 dx = 0$ (Thm 3.4.2)

4.5 Weitere Anwendungen, Ausblick

(RAGE)

Wir schließen mit einem weiteren dynamischen Ergebnis + einem Beispiel, das zeigt, dass μ_{ac} (σ_{ac}) typischerweise nicht stabil unter Störungen ist (vgl. mit Streutheorie, wo wir Kriterien suchen, die besagen, dass σ_{ac} stabil)

Stabilitätstheorie von σ_{xx}, σ extrem reichhaltig ... sicherlich nicht machbar in einer VL (z.B. zig Bücher über math. Streutheorie $\to \sigma_{ac}$

↓ z.B. Kato (Vater aller Thme über Stab.-theorie)

zig Paper über σ_{sc} auf $L^2(\mathbb{R}^d)$, $L^2(\mathbb{Z}^d)$, $L^2(\Gamma)$, $\ell^2(\mathbb{Z}^d) \to$ Quasikristalle oder Jacobibäume

↳ Simon, Jitomirskaya, Last, Gordon, Damanik, Avila und so viele mehr

$\sigma_{pp} \rightsquigarrow$ Lieb-Thirring, Laptev, Birman, Solomyak, ...)

Thm 4.5.1 (Ruelle, Amrein, Georgescu, Enss)

$H: D(H) \to \mathcal{H}$ s.a., $(K_L)_{L\in\mathbb{R}} \subseteq \gamma^\infty(\mathcal{H})$ (z.B. $\mathbb{1}_{[-L,L]^d}(-\Delta+1)^{-\alpha}$)

$\Rightarrow \mathcal{H}^c = \{\psi \in \mathcal{H} : \lim_{L\to\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \|K_L e^{itH}\psi\|^2 dt = 0\}$ ~~gilt auch, wenn~~

$\mathcal{H}^{pp} = \{\psi \in \mathcal{H} : \lim_{L\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|(1-K_L)e^{itH}\psi\| = 0\}$

$\Rightarrow$ Charakterisierung von $\mathcal{H}^c$, $\mathcal{H}^{pp}$!!

Prop 4.5.2 (Baby-RAGE)

$H: D(H) \to \mathcal{H}$ s.a. $K \in \gamma^\infty$. Dann gelten

$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \|K e^{itH} P^c \psi\|^2 = 0$, $\lim_{T\to\infty} \|K e^{itH} P^{ac}\psi\|^2 = 0$ (ohne Zeitmittelung)

Falls K lediglich $K(H+i)^{-1} \in \gamma^\infty$ erfüllt, gelten die Aussagen $\forall \psi \in D(H)$

Falls — " — und bdd, — " — $\forall \psi \in \mathcal{H}$

Pf Wg. Dichtheit der Operatoren endlichen Ranges in γ^p $1 \le p \le \infty$ genügt es $K = \sum_{j=1}^n |\varphi_j\rangle\langle\phi_j|$ zu betrachten. Durch Induktion + Dreiecksungl. kann man sich sogar auf $K = |\phi\rangle\langle\varphi|$ zurückziehen.

Wir zeigen also $\frac{1}{T}\int_0^T |(\varphi, e^{itH}\psi)|^2 dt \cdot \|\phi\|^2$

$= \frac{\|\phi\|^2}{T}\int_0^T dt\, |\widehat{\mu_{\varphi\psi}}(t)|^2 \xrightarrow[\mu \text{ hat keine Atome}]{\text{Wiener}} 0$

Für den ac-Teil konvergiert bereits der Integrand gegen 0 für $t \to \infty$ wg Riemann-Lebesgue, was die zweite Behauptung zeigt. 16

(Beob. dass wenn $\psi \in \mathfrak{H}^{**}$, dann automatisch auch $\rho \in \mathfrak{H}^{**}$

da $(\rho, e^{itH} P^{**}\psi) = (P^{**}\rho, e^{itH} P^{**}\psi)$)

~~4~~ ~~Bw~~ ~~a~~

Falls $K(H+i)^{-1} \in \mathcal{J}^{\infty}$, dann $\|Ke^{itH}\psi\| = \|\underbrace{K(A+i)^{-1}}_{\mathcal{J}^{\infty}} e^{itH} \underbrace{(A+i)\psi}_{\in \mathfrak{H}^{**}}\|$ falls $\psi \in D(A) \cap \mathfrak{H}^{**}$

vorige Situation

$\to$ sind in voriger Situation

Falls $K \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, dann approximiere $\psi = \lim \psi_n$, $\psi_n \in D(A)$, $\psi \in \mathfrak{H}$ und

$\|Ke^{itH}\psi\| \leq \underbrace{\|Ke^{itH}(\psi - \psi_n)\|}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0 \ \forall t} + \underbrace{\|Ke^{itH}\psi_n\|}_{\text{gerade gezeigt}}$ $\boxed{}$

Thm 4.6.3 (Weyl, Neumann) (Instabilität von σ_{ac}) $\longrightarrow$ Mehr zu Störungen endlichen Rangs in Simons Buch + dortigen Referenz.

$H: D(H) \to \mathfrak{H}$ s.a. $\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists \ A \in \mathcal{J}^2$ s.a. mit $\|A\|_2 < \epsilon$ s.d. $H+A$ hat reines Pkt spektrum

Thm 4.6.4 (Kuroda) In Thm 4.6.3 kann A so gewählt werden, dass $|||A||| < \epsilon$ für jede ~~B~~ Norm $|||\cdot||| \neq \|\cdot\|$, die unitär ~~ist~~ ~~invariant~~ ~~sind~~ invariant ~~sind~~ sind

$\to$ optimal Katos (X, Thm 4.3)

(Kato, Rosenblum) $\sigma_{ac}(H) = \sigma_{ac}(H+A)$, falls $A \in \mathcal{J}^1$

Thm 4.6.5 (Weyl) Sei $A: D(A) \to \mathfrak{H}$ s.a. und $B(A+i)^{-1} \in \mathcal{J}^{\infty}$ (oder nur im Form-Sinne $(B+i)^{1/2}(A+i)^{-1/2}$)

(Reicht eig. dass $R_A(z) - R_{A+B}(z) \in \mathcal{J}^{\infty}$, $z \in \rho(A) \cap \rho(A+B)$)

$\Rightarrow \sigma_{ess}(A+B) = \sigma_{ess}(A)$

$\to$ Rein stetiges Spek kann in reines Punktspek übergeführt werden. Die EW sind aber nicht diskret, sondern dicht in jedem Intervall, da ~~$\sigma_c \subseteq \sigma_{ess}$~~

$\sigma_c(H) \subseteq \sigma_{ess}(H) = \sigma_{ess}(H+A)$

Pf (Thm 4.6.5) falls $B \in \mathcal{J}^{\infty}$ Wg Symmetrie reicht es ~~$\sigma_{ess}(A+B) \subset \sigma_{ess}(A)$~~ $\sigma_{ess}(A+B) \subset \sigma_{ess}(A)$ z.z.

Sei ~~M~~ $\lambda \in \sigma_{ess}(A+B)$, ψ_n eine Orthonormalfolge, sodass (oder $\psi_n \rightharpoonup 0$)

$\|(A+B-\lambda)\psi_n\| \to 0$

Da $\psi_n \rightharpoonup 0$ und $B \in \mathcal{J}^{\infty}$ folgt $B\psi_n \xrightarrow{s} 0 \Rightarrow \|(A-\lambda)\psi_n\|$

$\leq \|(A+B-\lambda)\psi_n\| + \|B\psi_n\| \to 0$

d.h. $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$ $\boxed{}$

(Wir verwenden Weyls Charakterisierung von σ_{ess}, sh z.B. Teschl Lemma 6.17