3 Exkurs Maßtheorie – Stieltjes-Maße und Boreltransformation

↳ Jaksic – Topics in spectral theory

Spektralsatz (später) wird uns sagen

$$(\varphi, A\psi) = \int_{\sigma(A)} \lambda \, d\mu^{(A)}_{\varphi\psi}(\lambda)$$ für ein eindeutiges, komplexwertiges Borelmaß $\mu_{\varphi\psi} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ (mit $\mu_{\psi\psi} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty)$), welches durch Polarisation aus $\mu_{\psi\psi}$ hervorgeht $\Rightarrow$ klassische Maßtheorie greift für $\mu_{\psi\psi}, \mu_{\varphi,\psi}$ wie z.B. Lebesguescher Zerlegungssatz ~~oder~~ und Charakterisierung der pp, ac, sc-Teile von $\mu_{\psi\psi}$. $\to$ was bedeutet dies für A? Fallen die Spektren von A und $\mu_{\psi\psi}$ zusammen? (Was ist überhaupt das Spektrum eines Maßes?)

3.1 Stieltjes-Maße (Rudin Sect 6/8)

~~3.1.1 Verteilungsfunktion~~

Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt und monoton. Da jede monotone Folge ~~Re.~~ reeller Zahlen einen Grenzwert hat, existieren die Grenzwerte (HA?!)

$$F(\lambda - 0) := \lim_{\epsilon \searrow 0} F(\lambda - \epsilon), \qquad F(\lambda + 0) := \lim_{\epsilon \searrow 0} F(\lambda + \epsilon)$$

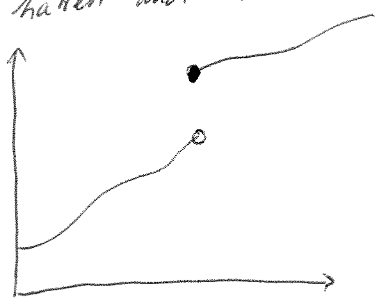
$$F(-\infty) := \lim_{\lambda \to -\infty} F(\lambda), \qquad F(+\infty) := \lim_{\lambda \to +\infty} F(\lambda)$$

Falls $F(\cdot)$ bei $\lambda \in \mathbb{R}$ stetig ist, gilt $F(\lambda - 0) = F(\lambda + 0)$ und falls nicht, dann $F(\lambda + 0) - F(\lambda - 0) \neq 0$.

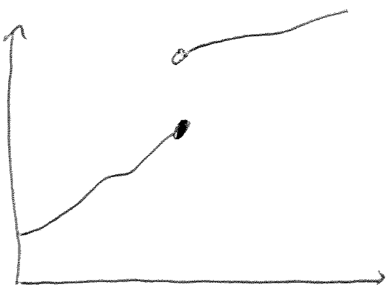
Konvention Falls $F(\cdot)$ bei λ nicht stetig ist, dann setzen wir

$$F(\lambda) := F(\lambda + 0)$$

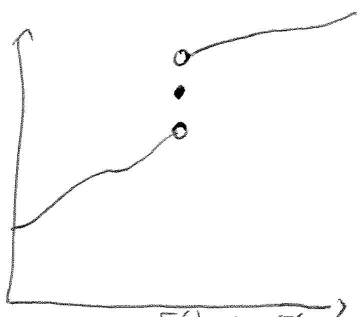
(Wir hätten auch $F(\lambda) = F(\lambda - 0)$ oder $F(\lambda) = \dfrac{F(\lambda+0) + F(\lambda-0)}{2}$ setzen können)



unsere Konvention $F(\lambda) = F(\lambda + 0)$



$F(\lambda) = F(\lambda - 0)$



$F(\lambda) = \dfrac{F(\lambda+0) + F(\lambda-0)}{2}$

$\Rightarrow$ Mit dieser Konvention werden solche Funktionen F immer rechtsseitig stetig!

Lemma 3.1.1. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $F: I \to \mathbb{R}$ monoton. Dann gelten: (2)

~~(1) Sei $x_0 \in I$. Wenn $x_0 \neq \inf I$, dann~~

(1) $F: I \to \mathbb{R}$ kann höchstens Sprungstellen haben und ist ansonsten stetig

(2) Die Menge aller Stellen, an denen F nicht stetig ist (die Sprungstellen also) ist ~~höchstens~~ abzählbar.

Beweis Klar, sonst Hausaufgabe

Ziel Konstruktion von Borel-Stieltjes-Maßen ~~mit~~ durch "Verteilungsfkt.en".

Erinnerung Sei X ein topologischer Raum. Dann heißt $\mathcal{B}(X)$ Borelsche σ-Algebra von X

minimale σ-Algebra, die durch alle offenen Mengen erzeugt wird

Mengen in $\mathcal{B}(X)$ heißen Borelmengen

(Menge X mit Familie von Teilmengen $\mathcal{A}$ heißt Algebra gdw

(1) $X \in \mathcal{A}$

(2) $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen unter endlichen ~~Schnitten~~ Vereinigungen

(3) $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen unter ~~Vereinigungen~~ Komplement-Nehmen

$\Rightarrow \emptyset \in \mathcal{A}$ & $X \setminus A \in \mathcal{A}$, wenn $A \in \mathcal{A}$

Wenn eine Algebra unter ~~endlichen~~ abzählbaren Vereinigungen (und damit auch abzählbaren Schnitten) abgeschlossen ist, heißt $\mathcal{A}$ σ-Algebra.

• Schnitte von Familien von (σ-) Algebren $\{\mathcal{A}_\alpha\}_\alpha$ ~~sind~~ ist wieder eine (σ-)Algebra

$\Rightarrow \forall$ Familien von Teilmengen S $\exists!$ kleinste (σ)Algebra $\Sigma(S)$, die durch Schneiden aller (σ-) Algebren, die S enthalten, hervorgeht

$$\Sigma(S) = \bigcap_{\substack{\alpha \\ S \subseteq \mathcal{A}_\alpha}} \mathcal{A}_\alpha$$ heißt von S erzeugte (σ-)Algebra)

Mengen in Σ heißen messbare Mengen

(X, Σ) heißt messbarer Raum; Menge, σ-Algebra

Ein Maß $\mu: \Sigma \to [0, \infty]$ $\Leftrightarrow$
- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$, falls $A_j \cap A_k = \emptyset$ $(j \neq k)$ — σ-Additivität

μ heißt σ-endlich, falls es eine abzählbare Überdeckung $\{X_j\}_{j=1}^{\infty}$ von X gibt mit $X_j \in \Sigma$ und $\mu(X_j) < \infty$ $\forall j$.

μ heißt endlich, falls $\mu(X) < \infty$

μ heißt WS-Maß, falls $\mu(X) = 1$.

(X, Σ, μ) heißt Maßraum

Ersetzt man Σ in (X, Σ, μ) durch eine Algebra (d.h. wir verlangen nur Abgeschlossenheit unter ~~beliebigen~~ endlichen, nicht ~~notwendigerweise~~ nur abzählbaren Vereinigungen), so heißt μ Prämaß.

In diesem Fall braucht σ-Additivität nur für solche disjunkten Mengen A_n gelten, für die $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$ (anstatt $A_n \in \mathcal{A}$)

~~Ein~~ Jedes Maß μ erfüllt $\mu(A) \le \mu(B)$, falls $A \subset B$

$\mu(A_n) \to \mu(A)$, falls $A_n \nearrow A$ (linksseitige Stetigkeit)

$\mu(A_n) \to \mu(A)$, falls $A_n \searrow A$ und $\mu(A_1) < \infty$ (rechtsseitige Stetigkeit)

$A_n \nearrow A$, falls $A_{n-1} \subseteq A_n$, $A = \bigcup A_n$

$A_n \searrow A$ falls $A_{n+1} \subseteq A_n$, $A = \bigcap A_n$

(Teschl Thm A.1)

Ein Maß auf einer Borel-σ-Algebra heißt Borelmaß, falls $\mu(K) < \infty$ für alle Kompakta K.

Es heißt von außen regulär, wenn $\mu(A) = \inf_{\substack{O \supset A \\ O \text{ offen}}} \mu(O)$ und

von innen regulär, wenn $\mu(A) = \sup_{\substack{K \subset A \\ \text{kompakt}}} \mu(K)$

Im Folgenden $X = \mathbb{R}$; In diesem Fall heißen Borelmaße μ auf $\mathbb{R}$ auch Borel-Stieltjes- oder Lebesgue-Stieltjes- oder einfach Stieltjesmaße.

Wie konstruiert man diese?

↳ wir beginnen mit der Algebra der endlichen Vereinigungen disjunkter Mengen und definieren μ für diese Mengen (als die Summe über Intervalle $\Rightarrow$ gibt ein Prämaß

- wir erweitern dieses Maß zu einem äußeren Maß für alle Teilmengen von $\mathbb{R}$
- wir zeigen, dass die Restriktion des so gewonnenen Maßes auf Borelmengen ein Maß ist.

Wir definieren μ zunächst auf Intervallen

Definition 3.1.2 Sei μ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}$. Dann heißt $\mu: \mathbb{R} \to [0, \infty]$

$$\mu(x) := \begin{cases} -\mu((x,0]) & x < 0 \\ 0 & 0 \\ \mu((0,x]) & x > 0 \end{cases}$$

Verteilungsfunktion. Diese ist offenbar rechtsseitig stetig und nicht-fallend.

Bemerkung 3.1.3 Für ein endliches Maß hätten wir auch $\tilde{\mu}(x) := \mu((-\infty, x])$ setzen können, was sich von $\mu(x)$ nur durch die Konstante $\tilde{\mu}(x) - \mu(x) = \mu((-\infty, 0])$ unterschieden hätte

Jetzt die Umkehrung: gegebene Verteilungsfkten erzeugen Borelmaße

Erinnerung Intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ sind von der Form $(a,b]$, $[a,b]$, (a,b), oder $[a,b)$ mit $a \le b$, $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Dabei meinen $(a,a) = (a,a] = [a,a) \equiv \emptyset$, wohingegen $[a,a] \equiv \underbrace{\{a\}}_{\text{„Singleton}}$

Definition 3.1.4 Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton nicht-fallend ~~mit $F(-\infty)=0$, $F(\infty)=\rho$.~~ Dann: $m_F(\emptyset) = 0$, $m_F(\{a\}) = F(a+0) - F(a-0)$ und ~~und entweder~~
~~(a) F rechtsseitig stetig ($F(x) = F(x+0)$), $m_F((a,b]) = F(b) - F(a)$)~~

$$m_F(I) = \begin{cases} F(b+0) - F(a+0) & I = (a,b] \\ F(b+0) - F(a-0) & I = [a,b] \\ F(b-0) - F(a+0) & I = (a,b) \\ F(b-0) - F(a-0) & I = [a,b) \end{cases}$$

und m_F heißt zu F gehörendes Borel-Stieltjes-Maß und $m_F(I)$ heißt Variation von F auf I

Beobachtungen
- ~~mit~~ $m_F(\{a\}) = 0 \Leftrightarrow F(\cdot)$ ist bei a stetig
- es kann nur abzählbar viele Stellen $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ geben, wo ~~$F(a_j)$ $m_F(\{a_j\})>0$~~ $m_F(\{a_j\}) > 0$
- Obige Definition von m_F involviert nicht den Wert von $m_F(\{a\})$
  $\Rightarrow$ jede andere Funktion $\tilde{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x-0) \le \tilde{F}(x) \le F(x+0)$ führt auf dasselbe m_F.

Bemerkung
- Wir werden oft voraussetzen, dass F rechtsseitig stetig ist, ~~und~~ sodass
  (nicht absurd in Anwendungen)
  es mit der Verteilungsfkt. von m_F bis auf einen Offset $F(0+)$ übereinstimmt $\underbrace{m_F(0,x]}_{\text{Borelmaß}} \equiv \underbrace{m_F(x)}_{\text{Verteilungsfkt}} \overset{\text{Def 3.1.4}}{=} F(x+0) - F(0+0)$.
- Weiter setzen wir oft voraus, dass $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = \rho < \infty$

Wir können jetzt die Algebra der endlichen Vereinigungen disjunkter ~~Teilmengen~~ Intervalle (warum ist dies eine Algebra?) betrachten und das in Def 3.1.4 konstruierte Maß auf endliche Vereinigungen disjunkter Intervalle durch Summation über Intervalle hochziehen

$$m_F(A) = \sum_{A=\bigcup_j I_j} m_F(I_j) \quad ((I_j)_{j=1}^k \text{ disjunkt})$$

~~Lemma 3.1.5 Die Intervallfkt. m_F aus Def 3.1.4~~

Lemma 3.1.5 Sei $\mathcal{A}$ die Algebra aller endlichen Vereinigungen disjunkter Intervalle und m_F die Intervallfkt. aus Def 3.1.4. Dann ist m_F wohldefiniert, additiv und ein σ-endliches Prämaß auf $\mathcal{A}$.

Beweis Wohldefiniertheit + Additivität klar, da eine Menge durch verschiedene Vereinigungen disjunkter Intervalle dargestellt werden kann.

σ-Additivität $\longrightarrow$ Cf. Teschl Lemma A. 2 (HA?) $\boxed{}$

Insbesondere ist m_F ein Prämaß auf der Algebra der endlichen Vereinigungen von Intervallen, welches zu einem Maß fortgesetzt werden kann

Thm 3.1.6 Für jede nicht-fallende Fkt $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt es ein eindeutiges Borelmaß, welches m_F aus Def 3.1.4 erweitert. Zwei unterschiedliche Fkt. en erzeugen dasselbe Maß g.d.w. die Differenz abseits der Sprungstellen konstant ist.

Beweis $\to$ Teschl Thm A.3

Definition 3.1.7 1) Eine Menge $A \in \Sigma$ heißt Träger von μ (Maß in (X, Σ, μ)), beliebige Menge wenn $\mu(X \setminus A) = 0$. Eine Menge $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ heißt minimaler Träger von μ in $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, falls alle Teilmengen $M_0 \subseteq M$ mit $\mu(M_0) = 0$ auch $Leb(M_0) = 0$ gilt

~~Bemerkungen 3.1.8~~

2) Falls X ein topologischer Raum und $\Sigma = \mathcal{B}(X)$ die zugehörige Borel-σ-Algebra, dann definiert man den Träger (auch topologischer Träger genannt) durch

$$\sigma(\mu) \equiv \operatorname{supp} \mu = \{x \in X : \mu(U_x) > 0 \text{ für jede Umgebung } U_x \text{ von } x\}$$

$\Rightarrow$ man erhält $\sigma(\mu)$ durch Entfernen aller Pkte, die eine offene Umgebung von Maß Null haben

$\Rightarrow \sigma(\mu)$ abgeschlossen

3) Falls $X = \mathbb{R}$, dann nennt man den topologischen Träger von μ auch die Menge aller Wachstumspunkte von μ, sprich

$$\sigma(\mu) := \operatorname{supp} \mu = \{ \lambda \in \mathbb{R} : \mu((\lambda-\epsilon, \lambda+\epsilon)) > 0 \ \forall \epsilon > 0 \}$$

$\sigma(\mu)$ wird auch als Spektrum von μ bezeichnet.

Bemerkungen 3.1.8

auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ od. Allgemeiner (X, Σ), falls X sep.

1) Man zeigt leicht, dass $\sigma(\mu)$ ein Träger von μ ist, sprich $\mu(\mathbb{R} \setminus \sigma(\mu)) = 0$.

2) Der Träger eines Maßes ist i.d.R. nicht eindeutig.

Bsp $X = \mathbb{R}$, $\Sigma = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mu =$ Leb.

z.B. $\operatorname{supp} \mu = \mathbb{R}$ oder $\operatorname{supp} \mu = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ oder $\operatorname{supp} \mu = \mathbb{R} \setminus$ Cantor

Jede Menge in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, deren Komplement abzählbar ist, ist ein Träger von μ

sogar überabzählbar viele Punkte können vergessen werden

äquivalente Def von $\operatorname{supp} \mu$ → 3) Man erhält $\operatorname{supp}(\mu)$ auch durch Entfernen aller Punkte, die eine Umgebung mit Maß 0 haben. Dies zeigt insbesondere, dass $\operatorname{supp}(\mu)$ abgeschlossen ist.

Wir besprechen nun einige Beispiele, die die extremst möglichen Eigenschaften allgemeiner Stieltjesmaße darstellen.

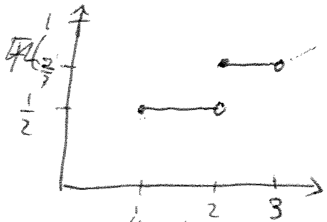
Beispiel 3.1.9 (Diskretes Maß 1, Dirac-Maß)

rechtsseitig stetig mit einer Sprungstelle und monoton

$F(\lambda) := \Theta(\lambda) = \begin{cases} 1 & \lambda \geq 0 \\ 0 & \lambda < 0 \end{cases}$ die Heavisidefunktion. Der topologische Träger ist $\operatorname{supp} m_F = \{0\}$ und jede Menge in $\mathbb{R}$, die 0 enthält ist ein Träger von m_F, sprich $m_F(V) = 1$ g.d.w. $V \cap \{0\} \neq \emptyset$. Bestimmung von m_F. Offenbar ist $m_F(V) = 0$, wenn $V \cap \{0\} = \emptyset$ und $m_F(V) = 1$, g.d.w. $V \cap \{0\} \neq \emptyset$.

Zugehörige Verteilungsfkt ~~$m_F(x)$~~ $m_F(x) = m_F((-\infty, x]) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$

Bsp 3.1.10 (Diskretes Maß 2)



$$F(\lambda) := \begin{cases} 0 & \lambda < 1 \\ \frac{k}{k+1} & \lambda \in [k, k+1) \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow F(\lambda)$ ist eine rechtsseitig stetige, monoton nicht-fallende Treppenfkt mit Sprungstellen bei $\mathbb{N}$

~~$\Rightarrow m_F$ ist nur an~~

$\Rightarrow \operatorname{supp} m_F = \mathbb{N}$ und Für jede Menge V mit ~~$V \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$ ist ein Träger~~ $V \supseteq \mathbb{N}$ ist ein Träger

sprich $m_F(\{\lambda\}) = 0$, falls $\lambda \notin \mathbb{N}$ und

$$\underset{F(\lambda+0) - F(\lambda-0)}{\overset{\shortparallel}{m_F}}(\{\lambda\}) = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{falls } \lambda = n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ für eine Borelmenge ~~Menge~~ $V \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt allgemeiner

$$m_F(V) = \sum_{n \in V \cap \mathbb{N}} \frac{1}{n(n+1)}$$

Definition 3.1.11 Ein Maß auf $\mathbb{R}$ wird diskret genannt, wenn es auf einer diskreten ~~Menge~~ Teilmenge (sprich isolierten Punkten) von $\mathbb{R}$ getragen ist.
($I \subseteq \mathbb{R}$ diskret $\Leftrightarrow I \cap K$ endlich $\forall$ Kompakta K)

Beispiel 3.1.12 (Reines Punktmaß)

Wir betrachten nun folgendes, etwas verwandte Bsp einer monoton nicht-fallenden ~~Funktion~~ Treppenfunktion, deren Sprungstellen ja abzählbar sind, aber nicht als isoliert vorausgesetzt werden.

Sei bspw. $\{r_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine Aufzählung von $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ und

$$F(\lambda) \equiv \sum_{r_j \leq \lambda} 2^{-j} \quad \text{(rechtsseitig stetig)}$$

$\Rightarrow F(\lambda) = 0$ für $\lambda \leq 0$ und $F(\lambda) = \sum_{j \geq 1} 2^{-j} = 1$ für $\lambda \geq 1$ und

F springt nur bei den rationalen Zahlen r_j in $(0,1)$ mit Sprunghöhe

$$F(r_j + 0) - F(r_j - 0) = 2^{-j}$$

$\Rightarrow$ zugehöriges Borelmaß $m_F(V) = \sum_{r_j \in V} m_F(\{r_j\}) = \sum_{r_j \in V} 2^{-j}$

mit topologischem Träger $\mathbb{Q} \cap (0,1)$

Def 3.1.13: Borelmaße, die nur auf abzählbar vielen, nicht notwendigerweise isolierten, Punkten getragen sind, nennt man reine Punktmaße oder atomare Maße. (oder: abzählbare Summe von Dirac-Maßen) (8)

Bsp 3.1.14 (Absolut-stetiges Maß)

Sei $F : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ stetig, dann hat jeder Singleton m_F-Maß Null (wie bei Lebesgue)

Denn: $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ ist $\lambda \in (\lambda - \epsilon, \lambda]$ $\forall \epsilon > 0$

$$\Rightarrow m_F(\{\lambda\}) \lim_{\epsilon \to 0} F(\lambda + \epsilon) - F(\lambda - \epsilon) \leq \underbrace{F(\lambda) - F(\lambda - \epsilon)}_{\xrightarrow{\epsilon \to 0} 0, \text{ da } F \text{ stetig}} \quad \forall \epsilon > 0$$

Bsp. für $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ monoton nicht-steigend, ~~rechtsstetig~~ stetig mit $F(-\infty) = 0$ und $F(\infty) = 1$ wäre

$$F(\lambda) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\epsilon\lambda} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + t^2}\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \theta(\epsilon\lambda - t) \cdot \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + t^2} \underset{t \mapsto t + \epsilon\lambda}{=} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \theta(-t) \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + (t + \epsilon\lambda)^2}\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \theta(t) \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + (t - \epsilon\lambda)^2}\, dt = \frac{1}{\pi} \quad e^{-\epsilon|p|} \theta(\cdot)$$

$$\underbrace{e^{-\epsilon|p|}(t - \epsilon\lambda)}_{\equiv P_\epsilon(t - \epsilon\lambda)}$$

$$= \frac{1}{\pi} (P_\epsilon * \theta)(\epsilon\lambda)$$

In jedem Fall ist offenbar, dass F sogar $ac^{\vee}$ ist (bzgl. Leb.), da es als Lebesgue Integral über eine L^1-Fkt geschrieben werden kann mit „Ableitung" gleich dem Poissonkern $P_{\epsilon=1}(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$.

Die Tatsache, dass $F = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(\lambda)$ f.ü. diffbar ist, folgt auch aus einem Satz von Lebesgue, der dies für monotone Fkten besagt.

Es gilt also $m_F(V) = \int_V g(t)\, dt$ mit $g(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$

<u>Definition 3.1.15</u> • Sei Σ eine σ-Algebra auf einer Menge X. Eine abzählbare Familie $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \Sigma$ heißt Partition / Zerlegung von E, wenn $E_i \cap E_j = \emptyset$ $(i\neq j)$ und $E = \bigcup_i E_i$

• Ein <u>komplexes Maß</u> μ auf Σ ist eine komplexe Fkt. auf Σ, sodass

$$\mu(E) = \sum_i \mu(E_i) \quad \text{für jede Zerlegung } \{E_i\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ von } E.$$

↑ Konvergenz d. Reihe ist Teil der Voraussetzung an das komplexe Maß!)

• Die <u>totale Variation</u> von μ ist durch

$$|\mu|(E) = \sup \sum_j |\mu(E_j)|$$

gegeben, wobei über alle Zerlegungen $\{E_j\}_j$ von E ge-sup't wird.

<u>Beobachtungen</u> • (Offenbar gilt per Definition $|\mu|(X) < \infty$)

• $|\mu(E)| \leq |\mu|(E) \leq |\mu|(X)$, d.h. jedes komplexe Maß μ auf jeder σ-Algebra Σ ist beschränkt, d.h. $\operatorname{ran}(\mu) \subseteq D_0(R)$ für ein R ($R = |\mu|(X)$) disk

• Falls $\mu \geq 0$, dann $|\mu|(A) = \mu(A)$ $\forall A \in \Sigma$.

<u>Thm 3.1.16</u> (Rudin Thm ~~6.2~~ 6.4) $|\mu|$ ist ein positives Maß auf Σ, falls μ ein komplexes Maß auf Σ, und $|\mu|(X) < \infty$

<u>Definition 3.1.17</u> Sei $\mu \geq 0$ ein Maß auf Σ und λ ein beliebiges Maß auf Σ (z.B. positiv oder komplex).

$\mu(A) = \infty$ erlaubt $\quad |\mu|(A) < \infty$!

• Wir sagen <u>λ ist ac bzgl. μ</u>, $\lambda \ll \mu$, falls $\lambda(E) = 0$ für alle $E \in \Sigma$ gilt, für die $\mu(E) = 0$

• Wir sagen, dass <u>λ auf einer Menge $A \in \Sigma$ konzentriert</u> ist, wenn $\lambda(E) = \lambda(A \cap E)$ $\forall E \in \Sigma$. Äquivalent formuliert gilt $\lambda(E) = 0$ ~~für~~ sobald $E \cap A = \emptyset$

• Seien μ_1, μ_2 zwei Maße auf (X, Σ) sowie $A, B \in \Sigma$ zwei disjunkte Mengen, sodass μ_1 auf A und μ_2 auf B konzentriert sind. Dann heißen μ_1 und μ_2 singulär zueinander, $\mu_1 \perp \mu_2$

Prop 6.8 in Rudin
Prop. 3.1.18 Seien $\mu, \lambda, \lambda_1, \lambda_2$ Maße auf einer σ-Algebra Σ und $\mu \geq 0$

$\Rightarrow$ 1) Wenn λ auf A konzentriert $\Rightarrow |\lambda|$ ebenfalls auf A konzentriert

2) $\lambda_1 \perp \lambda_2 \Rightarrow |\lambda_1| \perp |\lambda_2|$

3) $\lambda_1 \perp \mu$ und $\lambda_2 \perp \mu \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 \perp \mu$

4) $\lambda_1 \ll \mu$ und $\lambda_2 \ll \mu \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 \ll \mu$

5) $\lambda \ll \mu \Rightarrow |\lambda| \ll \mu$ (Hausaufgabe)

6) $\lambda_1 \ll \mu$ und $\lambda_2 \perp \mu \Rightarrow \lambda_1 \perp \lambda_2$

7) $\lambda \ll \mu$ und $\lambda \perp \mu \Rightarrow \lambda = 0$

Thm 6.10 in Rudin
Thm 3.1.19 Sei $\mu \geq 0$ ein σ-endliches Maß auf (X, Σ) und λ ein komplexes Maß auf Σ

a) (Lebesgue prelim.) Es gibt ein eindeutiges Paar von komplexen Maßen λ_a und λ_s auf Σ, sodass $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$ mit ($\Leftrightarrow \lambda(E) = \lambda_a(E) + \lambda_s(E)$)

$\lambda_a \ll \mu$ und $\lambda_s \perp \mu$.

Ist $\lambda \geq 0$ und endlich, dann sind es auch λ_a, λ_s.

b) (Radon-Nikodym) Es gibt ein eindeutiges $h \in L^1(\mu)$, sodass

$$\lambda_a(E) = \int_E h(x)\, d\mu(x) \quad \forall E \in \Sigma$$

(Die Umkehrung ist trivial!)

$\exists g \in L^1(\mu)$ s.d. $\lambda(E) = \int_E g \, d\mu \quad \forall E \in \Sigma \Rightarrow \lambda \ll \mu$)

Zur Bedeutung des Worts "Stetigkeit" in absolut stetiges Maß
Thm 6.11 in Rudin
Thm 3.1.20 Seien $\mu \geq 0$ und λ komplex Maße auf Σ. Dann sind äquivalent

a) $\lambda \ll \mu$

b) Für alle $\epsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$, sodass $|\lambda(E)| < \epsilon \ \forall E \in \Sigma$, mit $\mu(E) < \delta$.

Thm 3.1.20 rechtfertigt die Bezeichnung ac-Maß in Bsp 3.1.14.

Wie hat man sich nun also den Rest, der weder Sprünge noch ac-Teile hat, vorzustellen $\Rightarrow$ ~~us~~ sc-Maß

Dazu betrachten wir die klassische 3er-Cantormenge. Dies ist ein Beispiel für eine Menge mit fraktaler Dimension! und insb. verschwindendem Lebesguemaß, welches ~~bl~~ aber nirgends dicht ist.

Kleine Erinnerung an Hausdorffmaße

Def 3.1.21 Fixiere $\alpha > 0$, $E \subseteq \mathbb{R}^d$. Für $\epsilon > 0$ definiere

$$H_\alpha^\epsilon(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^\infty r_j^\alpha\right\},$$ wobei das inf über alle abzählbaren Überdeckungen von E mit Kugeln $B_{x_j}(r_j)$ mit $r_j < \epsilon$ genommen wird.

Offenbar fällt H_α^ϵ in ϵ. Wir definieren daher

$$H_\alpha(E) := \lim_{\epsilon \searrow 0} H_\alpha^\epsilon(E)$$

Außerdem ist klar, dass $H_\alpha^\epsilon(E) \leq H_\beta^\epsilon(E)$ falls $\beta < \alpha$ (f. $\epsilon \leq 1$), d.h.

$H_\alpha(E)$ ist nicht-steigend in α.

Bemerkungen 3.1.22 1) $H_\alpha^1(E) = 0 \Rightarrow H_\alpha(E) = 0$, da eine Überdeckung, die auf $H_\alpha^1(E) < \delta$ führt, notwendigerweise aus Kugeln mit Radius $\delta^{1/\alpha}$ besteht (~Pigeon holing)

2) Falls $\alpha > d$, dann $H_\alpha(E) = 0$, da man in diesem Fall bereits $\mathbb{R}^d$ mit Kugeln $B_{x_j}(r_j)$ überdecken kann, ~~mit sodass~~ mit beliebig kleinem $\sum r_j^\alpha$

Lemma 3.1.23 Es gibt eine eindeutige Zahl α_0, genannt Hausdorffdimension von E oder $\dim_H E$ für die gilt ~~a~~ $H_\alpha(E) = \infty \quad \alpha < \alpha_0$

$H_\alpha(E) = 0 \quad \alpha > \alpha_0$

Beweis Wir definieren α_0 als das Supremum aller α für die $H_\alpha(E) = \infty$ ist, sprich $H_\alpha(E) = \infty$ falls $\alpha < \alpha_0$.

Angenommen, $\alpha > \alpha_0$, dann sei $\beta \in (\alpha_0, \alpha)$ und definiere $M = 1 + H_\beta(E) < \infty$. Für gegebenes $\epsilon > 0$ ~~sei~~ überdecken wir E mit $\{B_{x_j}(r_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$, $r_j < \epsilon$ sodass $\sum r_j^\beta < M$. Dann $\sum r_j^{\alpha - \beta + \beta} \leq \epsilon^{\alpha - \beta} M \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 0$, d.h. $H_\alpha(E) = 0$ $\square$

Bemerkungen 3.1.24 1) Die Mengenfkt H_α ist abzählbar additiv auf (σ-)additiv

Borelmengen, d.h. $H_\alpha(\bigcup_{j=1}^{N} E_j) = \sum_{j=1}^{N} H_\alpha(E_j)$, $E_j \cap E_k = \emptyset$, $j \neq k$,

d.h. H_α definiert ein Borelmaß (~ z.B. Falconer) oder Carleson's Übersichtartikel)

(dies stimmt allerdings ~~nicht~~ für H'_α z.B. i.A. z.B. ist bereits $H_\alpha(E) + H_\alpha(F) = H_\alpha(E \cup F)$ für disjunkte Kompakta bereits falsch für H'_α

2) $H_d = \frac{1}{|B_0(1)|} \cdot Leb_{\mathbb{R}^d}$

Leb. maß

3) $\alpha < d \Rightarrow H_\alpha$ nicht ~~σ~~ additiv σ-endlich (folgt aus Lemma 3.1.23, da Mengen A_m mit $Leb(A) > 0$ bereits $H_\alpha(A) = \infty$ haben $\forall \alpha < d$. Außerdem weder von außen regulär (offene Mengen) inf über oder von innen regulär (Kompakta) sup über

sh auch Ziemer - Modern Real Analysis

Nun zur Cantormenge. (Es gibt zahlreiche Variationen, wie auch ursprünglich von Cantor selbst diskutiert; wir beschränken uns der Einfachheit halber auf die 3er-Cantormenge)

Bei Konstruktion Sei $I = [0,1]$, dann zerlege I in drei gleich große Teile und entferne das mittlere Stückchen $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ und sei

$A_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ die verbliebene Menge.

Wiederhole diese Prozedur für die beiden übrig gebliebenen Intervalle, d.h. schneide zwei $1/9$-breite Intervalle aus und verbleibe mit

$A_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$

$\vdots$

$A_k = \underbrace{[0, 3^{-k}] \cup [3^{-k} \cdot 2, 3^{1-k}] \cup \ldots [1-3^{-k}, 1]}_{2^k \text{ Intervalle der Länge } 3^{-k}.}$

Definition 3.1.25 Die 3er-Cantormenge ist die "Grenzmenge" dieses Prozesses, sprich $C_3 := \lim_{k\to\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$

<u>Beobachtung</u> Jedes Element in C_3 kann im 3er-Zahlensystem dargestellt werden, wobei jede Stelle entweder 0 oder 2, aber <u>nicht</u> 1 sein kann. Bei jeder Drittel-Entfernung werden Zahlen im 3er-System, die eine 1 beinhalten hinausgeworfen.

<u>Bsp.</u> Sei $x = 0,c_1c_2c_3\dots$ mit $c_j \in \{0,1,2\}$ und betrachte die erste Drittelentfernung, wo nur noch $[0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]$ übrig bleiben. Angenommen

- $x \in [0,\frac{1}{3}]$, dann muss $c_1 = 0$
- $x \in [\frac{2}{3},1]$, dann muss $c_1 = 2$

$\rightarrow$ Iterieren des Arguments zeigt, dass nach n-ter Drittelentfernung $c_n \in \{0,2\}$ sein muss.

Die Cantormenge hat jede Menge interessante Eigenschaften.
Offenbar haben wir bei der Konstruktion eine unendliche Zahl von Intervallen der Gesamtlänge $\sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k}\cdot 2^{k-1} = 1$ herausgeschnitten. Sprich, <u>C_3 kann kein Intervall mit nicht-verschwindender (Lebesgue)-Länge enthalten.</u> Und doch behält C_3 unendlich viele Punkte, besitzt also dieselbe Kardinalität wie das Intervall $[0,1]$ mit dem wir gestartet sind.
Weiter ist <u>C_3 nirgends dicht</u>, d.h. C_3 besitzt keine Punkte, die vollständig von all anderen Punkten umgeben sind.

Die Aussage, dass C_3 unendlich viele Punkte hat, mag trivial erscheinen, da wir bei jedem Schritt A_k die Randpunkte (die im Grenzwert $k \to \infty$ ~~unend~~ unendlich viele werden) immer zur Cantormenge dazuzählen. C_3 besitzt jedoch neben diesen Randwerten noch innere Punkte, wie z.B. $\frac{1}{4} \in C_3$, obwohl $\frac{1}{4}$ kein Randpunkt ist. Dass $\frac{1}{4} \in C_3$ ist, folgt aus $\frac{1}{4}$

$\frac{2}{9}+\frac{2}{9^2}+\frac{2}{9^3}+\dots = \frac{1}{4} = 0,\overline{02}$ im 3er-System. Jedoch haben die Randpunkte in A_k

2te 4te 6te Stelle
unteres Drittel dann oberes Drittel usw

die Form:
- es steht eine 2 an der ~~3~~ 3^{1-k}-ten Stelle, die sich unendlich fortsetzt
- die Entwicklung ist bei der 3^{-k}-ten Stelle zu Ende.

$0,\overline{02}$ fällt offenbar in keine der beiden Kategorien

	10er	3er
z.B.	$0 =$	0
	$1 =$	$0,\overline{2} = 1$
	$\frac{1}{3} =$	$0,0\overline{2}$
	$\frac{2}{3} =$	$0,2$

Eigenschaften der Cantormenge

a) Kardinalität (= Zahl d. Elemente) $= \infty$

b) beinhalten keine Intervalle

c) sind kompakt

d) perfekt (d.h. C_3 abgeschlossen & alle Elemente von C_3 sind Häufungspkte von C_3)
bzw.: C_3 hat keine isolierten Pkt.

e) nirgends dicht

f) nicht zusammenhängend $\to$ $C_3 = A \cup B$ wobei $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$ (separiert)

(Tatsächlich sind nicht-leere, perfekte Mengen nie abzählbar!

__Beweis__ a) Per Widerspruch: $C_3 = \{x \in [0,1] : x$ hat eine Entwicklung im 3er-System, die nur 0er und 2er beinhaltet$\}$

Angenommen C_3 wäre abzählbar. Dann gäbe es eine Bijektion
$f: \mathbb{N} \to C_3$ mit $x_n = f(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, d.h. $C_3 = \{x_1, \dots x_n, \dots\}$,

wobei $x_1 = 0.c_{1_1} c_{1_2} c_{1_3} \dots$ mit $c_{n_m} \in \{0, 2\}$

$x_2 = 0.c_{2_1} c_{22} c_{2_3} \dots$

$\vdots$

$x_n = 0.c_{n_1} c_{n_2} c_{n_3} \dots$

$\vdots$

Sei $c := 0.c_1 c_2 c_3 \dots$ ~~durch~~ mit
$$c_1 = \begin{cases} 2 & c_{1_1} = 0 \\ 0 & c_{1_1} = 2 \end{cases}$$
$$c_2 = \begin{cases} 2 & c_{2_2} = 0 \\ 0 & c_{2_2} = 2 \end{cases}$$
$$\vdots$$
$$c_n = \begin{cases} 2 & c_{n_n} = 0 \\ 0 & c_{n_n} = 2 \end{cases}$$

Dann ist offenbar auch $c \in C_3$ aber ~~ist~~ es gibt kein $n \in \mathbb{N}$ sodass $c = x_n$, ~~da~~ Tatsächlich unterscheiden sich c und x_n in der 3^{-n}-ten Stelle $\lightning$

$\Rightarrow$ C_3 überabzählbar.

C_3 hat keine Intervalle $\to$ b) bereits gezeigt, da die Länge aller entfernten Intervalle gerade
$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} \cdot 3^{-k} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-2/3} = \frac{3}{3 \cdot (1)} = 1$$

$\Rightarrow$ Cantormenge hat Länge $|[0,1]| - |\text{entfernter Bereich}| = 1 - 1 = 0$,
also keine Intervalle.

C_3 kompakt

c) Mit Heine-Borel genügt es z.z., dass C_3 beschränkt und abgeschlossen ist

- Beschränktheit folgt aus der Beschränktheit der A_k und $C_3 = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$
- Abgeschlossenheit folgt ebenfalls aus Abgeschlossenheit der A_k — " —

C_3 perfekt
(abgeschl. u. alle Elemente in C_3 sind Häufungspkte bzw. es gibt keine isolierten Pkte

d) Abgeschlossenheit bereits gezeigt.
~~Für jeden Randpunkt von C_3 gibt es immer einen weiteren Punkt in C_3~~
~~der~~
Wir zeigen, dass $x \in C_3$ nicht isoliert sein kann, indem wir eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_3$ konstruieren mit $x_n \to x$.
Offenbar muss $x \in A_1 = \underbrace{[0,\frac{1}{3}]}_{I_{11}} \cup \underbrace{[\frac{2}{3},1]}_{I_{12}}$ liegen, sagen wir $x \in I_{11} \equiv I_1$.

Der Schnitt $A_2 \cap I_1$ beinhaltet wieder zwei Intervalle, von denen eines den Punkt x beinhaltet.
Setze x_1 als den Randpunkt des anderen Intervalls, womit $x_1 \in C_3$ sichergestellt.
Da $x, x_1 \in I_1 = [0,\frac{1}{3}]$ ist $|x - x_1| \le \frac{1}{3}$
Angenommen $x \in I_2$, wobei $I_2 \in \{I_{2,j}\}_{j=1}^{4}$ mit $A_2 = \bigcup_{j=1}^{4} I_{2,j}$
Wieder besteht der Schnitt $A_3 \cap I_2$ aus zwei Intervallen, von denen eines den Pkt x beinhaltet. Setze wieder x_2 als Randpunkt des andere Intervalls. Da die Intervallänge nun $1/9$ ist $|x - x_2| \le 1/9$ und $x_2 \in C_3$.
Iteriert liefert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_3$ mit $|x - x_n| \le \frac{1}{3^n}$,
d.h. ~~h~~ wir haben $x \in C_3$ mit einer Folge in C_3 approximiert,
d.h. x ist nicht isoliert.

C_3 nirgends dicht

~~e) Dies bedeutet, dass das Innere des Abschlußes leer ist, (sprich, wenn wir jetzt noch alle Häufungspunkte zu C_3 dazunehmen wird C_3 immer noch keine Intervalle besitzen.)~~
~~Da aber C_3 nur Häufungspkte besitzt fällt der Abschluß mit C_3 selbst zusammen. Wir zeigen, dass das Innere von C_3 leer ist, (da es keine Intervalle gibt)~~
Angenommen wir hätten nach allen ~~Ha~~ Schritten des Herausnehmens von Intervallen doch noch ein Intervall von Pkt.en übrig.

C_3 nirgends dicht e) Das bedeutet, dass das Innere des Abschlusses von C_3 leer ist. Da C_3 abgeschlossen ist und keine Intervalle enthält, ist das Innere von $C_3 = \overline{C_3}$ leer. D.h. C_3 ist nirgends dicht

Alternativ Angenommen es gäbe doch noch ein Intervall $(a,b) \subseteq C_3$

Dann $Leb((a,b)) \leq Leb(C_3) = 0$.

~~Zeigen wir gleich~~!

C_3 nicht zusammenhängend f) klar

Wir berechnen jetzt die Hausdorffdimension.

$$\cancel{\sum 2^{k-1} \cdot 3^{-\alpha k}} \quad \cancel{2^{-k} \text{ falls } \alpha = \frac{\log 2}{\log 3}}$$

z.B. ist $C_3 \subseteq A_n$ und A_n besteht aus 2^n Intervallen der Länge 3^{-n} $\Rightarrow$ $3^{-n\cdot\alpha} \cdot 2^n \underset{\alpha = \log 2/\log 3}{=} 2^{-n} \cdot 2^n = 1$ für alle n! $\Rightarrow H_{\frac{\log 2}{\log 3}}(C_3) \leq 1$

wir haben nur eine Überdeckung angeschaut

Prop. 3.1.26 Sei $E \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und angenommen es gibt ein WS-Maß μ auf E mit $\mu(B_x(r)) \leq r^\alpha \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, r > 0$.
Dann $H_\alpha(E) > 0$. Umgekehrt folgt aus $H_\alpha(E)$ die Existenz eines WS-Maßes auf E mit $\mu(B_x(r)) \leq r^\alpha$.

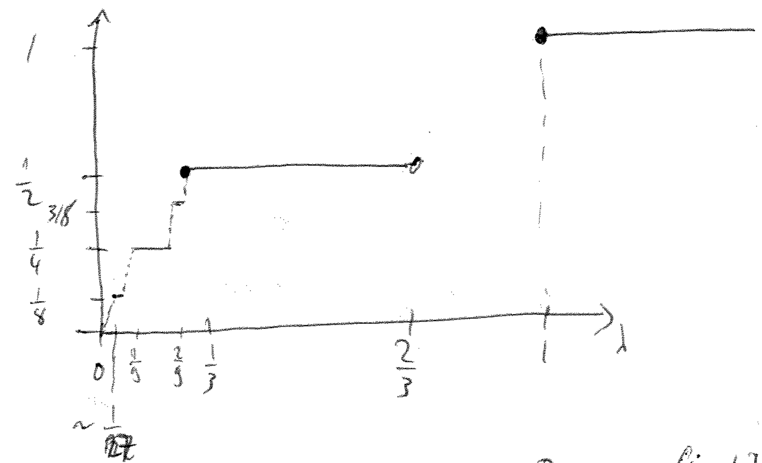
$\Rightarrow \exists$ WS-Maß auf C_3 mit $\mu(B_x(r)) \leq r^{\log 2/\log 3}$.

Wir bestimmen nun das Cantormaß und zeigen, dass $\mu_c(B_x(r)) \leq r^{\log 2/\log 3}$.

Bsp. 3.1.27 Die Cantorfkt $F: [0,1] \to [0,1]$ ist eine stetige, nicht-fallende Fkt, die an jedem Punkt außerhalb der Cantormenge diffbar ist (und damit Lebesgue-f.ü. diffbar) mit $F'(\lambda) = 0$, $\lambda \notin C_3$
$\Rightarrow F$ kann nicht Integral seiner Ableitung sein, da $\underbrace{\int_0^1 dt\, F'(t) = 0}_{= F(1) - F(0) = 1}$ ↯

Die Fkt erfüllt $F(\lambda) = \begin{cases} 0 & \lambda \leq 0 \\ 1 & \lambda \geq 1 \\ \frac{1}{2} & \lambda \in [0,1] \setminus A_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ 1/4 & \lambda \in (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \\ 3/4 & \lambda \in (7/9, 8/9) \end{cases}$

und die Werte $F(\lambda)$, $\lambda \in C_3$ sind durch (lineare) Stetigkeit d. Fkt. gegeben



$\Rightarrow$ zugehöriges Stieltjesmaß $m_F([a,b]) = F(b) - F(a)$ ist nur auf C_3 getragen (abseits von C_3 ist $m_F = 0$)

$\Rightarrow$ m_F ist ein Bsp. für ein sc Maß, welches folgende Def erfüllt ①

Def. 3.1.28
(1) $m_F((-\infty, \lambda]) = F(\lambda)$ mit stetigem F erfüllt (sprich es gibt keine Maße auf Singletons) (F hat keine Sprünge) ($m_F(\{x_i\}) = 0$)
(2) auf einer Lebesgue-Nullmenge getragen ist.

$\Rightarrow$ Die Cantorfkt ist ein Bsp für eine sc Fkt., also eine Fkt., die
(1) stetig ist
(2) auf dem Komplement einer $\underbrace{\text{Lebesgue-Nullmenge}}_{}$ $^{=C}$ differenzierbar ist ?
(3) deren Ableitung auf $\mathbb{R} \setminus C$ exakt verschwindet.

Def 3.1.28 Falls ein Maß μ auf Σ erfüllt, dass $\mu(\{x\}) = 0 \ \forall x \in X$, dann heißt μ stetig.

Um $\dim_H C_3 = \log 2 / \log 3$ zu zeigen, müssen wir noch $H_\alpha(C_3) > 0$ zeigen für $\alpha = \log 2 / \log 3$

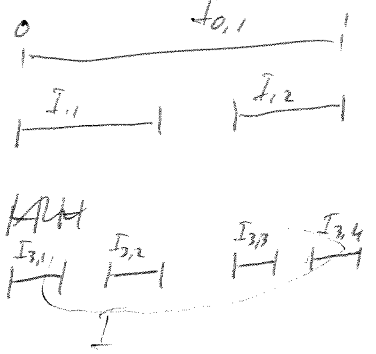
$(\dim_H C_n = \log 2 / \log n)$
$(n \geq 3$; statt $\frac{1}{3}$-Intervalle $\frac{1}{n}$-Intervalle ausschneide
$A_1 = [0, \frac{1}{n}] \cup [1 - \frac{1}{n}, 1]$ $A_2 \ldots$

$H_\alpha(C_3) = \lim_{\varepsilon \to 0} H_\alpha^\varepsilon(C_3) = \inf \sum_{j=1} r_j^\alpha$ über alle Überdeckungen $B_{x_j}(r_j)$ von C_3

Dazu zeigen wir, dass für eine beliebige! Überdeckung $C_3 \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty J_i$ es gilt
$$\sum |J_i|^\alpha \geq 1/4$$
(Für Bestimmung von H_α^ε spielt es keine Rolle, ob die Kugeln offen oder abgeschlossen sind $\rightarrow$ Federer oder stackexchange zu $\dim_H C_3$)

Lebesgue's number lemma (Lebesguezahl) Sei (X, d) ein kompakter, metrischer Raum mit einer offenen Überdeckung. Dann gibt es ein $\delta > 0$ (die Lebesguezahl), sodass jede Teilmenge von X mit diam(Teilmenge) $< \delta$ (definiert durch die Metrik d) in einem Element der Überdeckung enthalten ist.

(Ziel: möglichst großes δ?)



Wg Lebesguezahl-Lemma gibt es hinreichend großes k, sodass ~~I~~ jedes $I_{k,j}$ (in einem feste Level k) in einem Teil $\mathcal{J}_i$ der Überdeckung enthalten ist.

Wir zeigen dann für jedes offene Intervall I und festes l, dass

$$\sum_{I_{l,i}\subset I} |I_{l,i}|^\alpha \le 4\,|I|^\alpha \qquad (*)$$

Dies würde uns $\sum |\mathcal{J}_i|^\alpha \geq \frac{1}{4}$ a geben, denn

$$4\sum_i |\mathcal{J}_i|^\alpha \overset{(*)}{\geq} \sum_i \sum_{I_{k,j}\subset \mathcal{J}_i} |I_{k,j}|^\alpha$$

$$\geq \sum_j |I_{k,j}|^\alpha$$ da $\bigcup_j I_{k,j} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{J}_i$ by Lebesgue number lemma

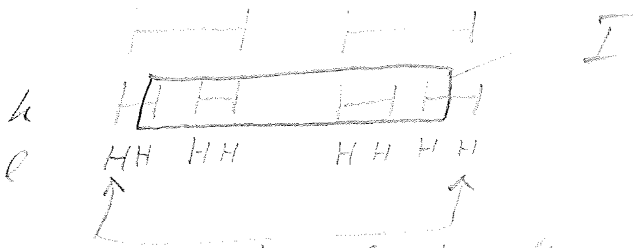
$= 1$ (hatten wir auf S. 16 ausgerechnet ~~$\sum 2^k$.~~ $3^{-\alpha k} 2^k$

Es verbleibt also (*) zu zeigen.
Angenommen also I beinhaltet ein Intervall $I_{l,i}$ im Level l. Sei k die kleinste Zahl, sodass I auch ein Intervall $I_{k,j}$ aus Level k beinhaltet, sprich $k \le l$. ~~Wie~~ In dem Fall kann I maximal vier Intervalle aus Level k schneiden; andernfalls würde I auch ein $I_{k-1,j}$ beinhalten. Wir bezeichnen diese vier Intervalle mit I_{k,k_m}, $m = 1,2,3,4$.

$$\Rightarrow \quad 4\,|I|^\alpha \geq \sum_{m=1}^{4} |I_{k,k_m}|^\alpha = \sum_{m=1}^{4} \sum_{I_{l,i}\subset I_{k,k_m}} |I_{l,i}|^\alpha \geq \sum_{I_{l,i}\subset I} |I_{l,i}|^\alpha,$$

($I \cap I_{k,k_m} \neq \emptyset \Rightarrow |I_{k,k_m}| \le |I|$ überdecken die I_{k,k_m} unterdecken

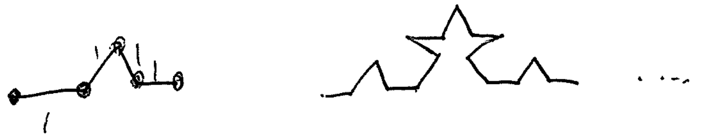
Was behauptet war. ☒



werden bei dieser Abschätzung nicht mehr mitgezählt

Addendum zur Cantormenge – Selbstähnlichkeit + alternative Herleitung der Hausdorffdimension

Viele, aber nicht alle, klassischen fraktalen Mengen sind selbstähnlich, wie z.B. die Koch-Schneeflocke in $\mathbb{R}^2$



- $\Psi: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $x \mapsto \Psi(x)$ heißt <u>Kontraktion mit Verhältnis</u> $c \in (0,1)$ gdw $|\Psi(x) - \Psi(y)| \le c|x-y|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$

- Eine Kontraktion, die jede Teilmenge in $\mathbb{R}^n$ auf eine geometrisch ähnliche Menge (~ Winkel bleiben erhalten, also z.B. Rotation, Reflexion, Skalierung) abbildet, heißt <u>Similitude</u> (Ähnlichkeitsabbildung)

$$\Psi(x) = c \cdot \underline{A}\,\underline{x} + t, \quad c \in (0,1), \quad A \in O(n), \quad t \in \mathbb{R}$$

- $E \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt <u>invariant</u> unter einer Menge von Kontraktionen $\Psi_1, \dots, \Psi_m$, falls $E = \bigcup_{j=1}^m \Psi_j(E)$. Falls die $\{\Psi_j\}_{j=1}^m$ Similituden sind und $H_\alpha(E) > 0$ aber
- $H_\alpha(\Psi_j(E) \cap \Psi_l(E)) = 0$, dann heißt E selbstähnlich.

<u>Bsp</u> Cantormenge $\Psi_1(x) = x/3$, $\Psi_2(x) = \frac{x+2}{3}$

(Thm 8.3 in Falconer)
<u>Thm 3.1.30</u> Sei $\{\Psi_j\}_{j=1}^m$ eine Menge von Kontraktionen mit Verhältnissen $r_j < 1$,
⇒ es gibt ein eindeutiges, nicht-leeres Kompaktum $E \subseteq \mathbb{R}^d$, sodass

$$E = \bigcup_{j=1}^m \Psi_j(E) \equiv \Psi(E).$$

Weiter gilt für jedes nicht-leere Kompaktum $F \subseteq \mathbb{R}^d$ die Konvergenz

$$\lim_{k\to\infty} \underbrace{\Psi^k(F)}_{\underbrace{\Psi(\Psi(\dots(F)\dots))}_{k\text{-fach iteriert}}} = E \quad \text{in Hausdorffmetrik}$$

- Wir sagen, dass die Kontraktionen $\{\Psi_j\}_{j=1}^m$ die <u>offene Mengen-Bedingung</u> erfüllen, falls es $V \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt gibt mit $\Psi(V) = \bigcup_{j=1}^m \Psi_j(V) \subsetneq V$, wobei die Vereinigung disjunkt ist.

(Thm 8.7)

Thm 9.1.31 Angenommen $\{\psi_j\}_{j=1}^{m}$ sind Similituden mit Verhältnissen r_j. Dann erfüllt ~~ist~~ ~~das~~ die in Thm 9.1.30 genannte invariante Menge Kompaktum

$$0 < H^{\alpha}(E) < \infty, \text{ wobei } \alpha \text{ durch } \sum_{j=1}^{m} r_j^{\alpha} = 1 \text{ bestimmt ist.}$$

(α wird dann auch Ähnlichkeitsdimension genannt) $(\Rightarrow \mathrm{Dim}_H E = \alpha)$

Bsp Cantor: $r_1 = r_2 = 1/3 \Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha} = 1$, falls $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$

Cor 8.7 in Falconer

Korollar 9.1.32 Falls die Kontraktionen $\{\psi_j\}_{j=1}^{m}$ die offene Mengen-Bed. erfüllen, dann gilt $H_\alpha(\psi_j(E) \cap \psi_\ell(E)) = 0$, d.h. E ist selbstähnlich aus Thm 9.1.30

~~3.~~ Lebesgue-Zerlegung und Radon-Nikodym (Rudin Sect 6.~~[illegible]~~)

Ziel: Jedes Stieltjes-Maß m_F auf $\mathbb{R}$, welches von einer Verteilungsfkt $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (monoton ~~[illegible]~~ nicht-fallend) lässt sich in

Sect. 4 $\xrightarrow{ac}$ Stetigkeit durch α-Hölder-Stetigkeit ersetzen

$$m_F = \underbrace{m_F^{ac} + \underbrace{m_F^{sc}}_{m_F^{s}} + m_F^{pp}}_{} \quad (\text{cf. } \%\ \text{Last!})$$

m_F^s (Thm 3.1.~~[illegible]~~, Def 3.1.17)

m_F^c (Def 3.1.28)

(Erinnere an ~~Defs~~ Bsp 3.1.12, Def 3.1.13 } m_F^{pp}

Bsp 3.1.14, Def 3.1.17 } m_F^{ac}

Bsp 3.1.27 Def 3.1.28 } m_F^{sc})

Genauer zeigen wir $m_F^{ac} = m_{F_{ac}}$ ... wobei $F = F_{ac} + F_{sc} + F_{pp}$ (*) und schauen uns dann das direkte tiefe Resultat über Lebesgue-Zerlegungssatz an (ch. Hewitt-Stromberg Kap V, (19.54) - (19.61)).

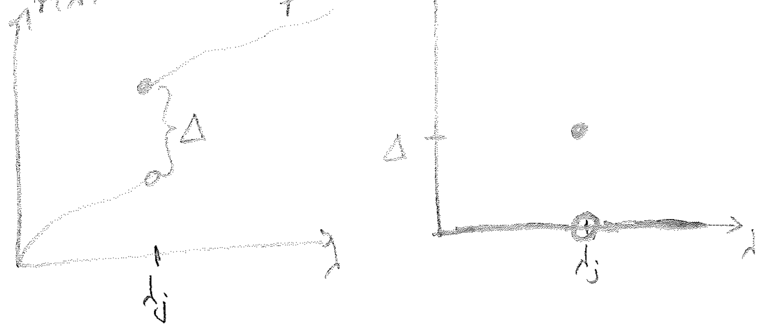
Zur Zerlegung (*) $F = F_{ac} + F_{sc} + F_{pp}$

$\int g\,dx$ — stetig ~~mit~~ u. f.ü. diffbar mit Ableitung $= 0$. — Treppen/Sprünge

(i) Im ersten Schritt sammeln wir alle Diskontinuitäts-/Sprungstellen der nicht-fallenden Fkt $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (rechtsseitig stetig) und nennen diesen Teil F^{pp}. Falls F keine Sprünge hat, setzen wir $F^{pp} = 0$. Ansonsten ~~bezeichne~~ seien $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ die Sprungstellen, die höchstens abzählbar sind, und definiere

$$F^{pp}(\lambda) = \sum_{\lambda_j \le \lambda} [F_j(\lambda) - F_j(\lambda - 0)] \equiv \sum_{\lambda_j \le \lambda} m_F(\{\lambda_j\})$$

$\Rightarrow F^{pp}$ ist die eindeutige "Sprungfkt", die dieselben Diskontinuitäten wie F aufweist



(ii) $F^c = F - F^{pp}$ ist offenbar nach Loswerden der Diskontinuitäten stetig und ist monoton nicht-fallend, also nach Lebesgues Satz f. ü. differenzierbar $\Rightarrow \exists$ eine Lebesgue-Nullmenge V, sodass $(F^c)'(\lambda)$ existiert und endlich ist für alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus V$

$\Rightarrow (F^c)'$ ist äquivalent (im Lebesgue-Sinne integrierbarer Fkt.en, deren Repräsentanten sich auf Lebesgue-Nullmengen voneinander unterscheiden können) zu einer nicht-negativen, integrierbaren Fkt. auf $\mathbb{R}$, d.h. ~~es gilt~~ man kann

$$F^{ac}(\lambda) := \int_{-\infty}^{\lambda} (F^c)'(t)\, dt$$

(iii) setzen. Offensichtlich ist dann auch noch $F^{sc}(\lambda) := F^c(\lambda) - F^{ac}(\lambda)$ stetig mit $(F^{sc})'(\lambda) = 0 \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \setminus V$, also dem Komplement einer Lebesgue-Nullmenge. Weiter kann nachgeprüft werden, dass auch F^{sc} immer noch monoton nicht-fallend ist.

$\rightarrow$ zu jedem der F^{pp}, F^{sc}, F^{ac} erhalten wir ein zugehöriges Stieltjesmaß

$$m_F^{pp} \quad m_F^{sc} \quad m_F^{ac}$$

welches wir auch mittels Lebesgue-Zerlegung erhalten hätten können

$$m_F = m^{ac} + m^s,$$ wobei wir m^{pp} aus m^s durch

$$m^{pp}(W) = \sum_{\lambda \in W} \underbrace{m^s(\{\lambda\})}_{= m_F(\{\lambda\}),} \quad \text{da} \quad m^{ac}(\{\lambda\}) = 0$$

extrahieren können. (Die Summe läuft hier nur über die Sprungstellen der Fkt $F(\lambda) \equiv m_s$ bzw. $m_s((-\infty, \lambda])$

Der übrige Teil $m^{sc} = m^s - m^{pp}$ gibt keine Masse auf Atome, ($\to$ stetig) und ist singulär bzgl. Lebesgue, sprich auf einer Lebesgue-Nullmenge getragen

3.2 Borel-Transformationen ~~Boreltrans~~ (Hilberttransformation)

Wir haben bereits bei linearen abgeschlossenen Operatoren gesehen, dass $\sigma(A)$ ~~mittels~~ durch die Resolvente $(A-z)^{-1}$, $z \in \rho(A) = \{z \in \mathbb{C} : A-z \text{ bijektiv}\}$ ~~definiert~~/charakterisiert wird. Tatsächlich steckt noch weitaus mehr Information in $R_A(z)$.

Definition 3.2.1 Sei μ ein Borelmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dann ist die Boreltransformation von μ formal durch

$$F_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z}$$

(recall: $H : L^1 \to L^{1,\infty}$ aber nicht $L^1 \to L^1$!)
$H(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \langle Q_\varepsilon, \varphi \rangle_S$
($pv \frac{1}{x}$)

Definition 3.2.2 Eine holomorphe Fkt $F : \mathbb{C}_+ \to \overline{\mathbb{C}_+}$, die die obere Halbebene in sich selbst abbildet heißt Herglotz-Nevanlinna-Pick-Funktion. Die Klasse aller Pick-Funktionen bezeichnen wir mit P.

Offenbar sind Summen und Kompositionen von Pick-Fkt.en wieder Pick.
Durch Reflexion an $\mathbb{R}$ kann F auch auf $\mathbb{C}_-$ definiert werden, indem man $F(\bar z) = \overline{F(z)}$ verwendet.

Bsp 3.2.3
- $az + b$, $\mathrm{Im}(a), b \geq 0$
- $(\lambda - z)^{-1}$ für $\mathrm{Im}(\lambda) \leq 0$

$\Big\}$ $F(\bar z) = \overline{F(z)}$ kann nur gelten, wenn $a, \lambda \in \mathbb{R}$

- $\log z$
- z^r mit $r \in (0,1]$
- $\tan z$
- $F \in P \Rightarrow -\frac{1}{F} \in P$

Def 3.2.4 Für $a < b \in \mathbb{R}$ bezeichne $P(a,b)$ die Klasse aller Pick-Fkt.en, die eine analytische Fortsetzung durch (a,b) in die untere Halbebene haben, wobei die Fortsetzung durch Reflexion an $\mathbb{R}$ erfolgt

Bemerkungen 3.2.5 (1) $F \in P(a,b)$ kann nur reelle Werte auf (a,b) annehmen

(2) $P(a,b)$ ist ein konvexer Kegel

(3) Angenommen $f(z) = u(z) + iv(z) \in P(a,b)$. Da $v(x) = 0$ für $x \in (a,b)$ ist $v(x+iy) - v(x) \geq 0$ für $y > 0$, d.h. die partielle Ableitung $v_y(x) \geq 0$ und damit (wg Cauchy-Riemann-Bed.) $u_x(x) \geq 0$
$\Rightarrow f(x) = u(x)$ ist monoton nicht-fallend auf (a,b)

(4) Die letzte Bemerkung lässt sich drastisch erweitern.
Sei $f: I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ (Intervall)). Seien A, B s.a. Operatoren mit gemeinsamen Formbereich Q und $\sigma(A), \sigma(B) \subseteq I$.
Definiere $f(A) = U f(D) U^*$, wobei $A = UDU^*$ und D diagonal
bzw. mit Spektralkalkül $f(A) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda)\, dE_A(\lambda)$ (später)

(1) $A \leq B :\Leftrightarrow B - A \geq 0$ im quad. Form Sinne
(2) $f: I \to \mathbb{R}$ heißt <u>operatormonoton</u> $:\Leftrightarrow A \leq B \Rightarrow f(A) \leq f(B)$
(3) — " — <u>operator konvex</u> $:\Leftrightarrow f((1-\lambda)A + \lambda B) \leq (1-\lambda) f(A) + \lambda f(B)$ $\forall \lambda \in [0,1]$

$\Rightarrow$ <u>Satz (Loewner)</u> $f: I \to \mathbb{R}$ operatormonoton $\Leftrightarrow$ f hat eine ~~analytische~~ / holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}_+$, welche $\mathbb{C}_+$ in sich selbst abbildet und eine Fortsetzung auf $\mathbb{C}_-$, die durch Reflexion gewonnen wird, sprich $f \in P(a,b)$.
in $P(\sigma(\mu))$ (Träger (supp))

(Teschl Thm 3.9)
<u>Satz 3.2.6</u> Die Boreltransformation eines endlichen ~~*~~ Borelmaßes ist ~~Pick~~ in $P(\sigma(\mu))$, sprich holomorph und bildet $\mathbb{C}_+ \to \overline{\mathbb{C}_+}$ bzw. durch Reflexion an $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}_- \to \overline{\mathbb{C}_-}$ ab.
Sie erfüllt außerdem $|F(z)| \leq \frac{\mu(\mathbb{R})}{\operatorname{Im}(z)}$, $z \in \mathbb{C}_+$

<u>Beweis</u> $\operatorname{Im} F(z) = \operatorname{Im}(z) \int \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda - z|^2} \Rightarrow F: \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$ und $F(\bar z) = \overline{F(z)}$ und

$$|F(z)| \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda - z|} \leq \frac{\mu(\mathbb{R})}{|\operatorname{Im}(z)|}$$

$|\lambda - z| = |\lambda - \operatorname{Re} z - \operatorname{Im}(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|$

Verbleibt Holomorphie ~~zu zeigen~~ auf $\mathbb{C} \setminus \sigma(\mu)$.
Da $\mu(\mathbb{C} \setminus \sigma(\mu)) = 0$, gilt $F(z) = \int_{\sigma(\mu)} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z}$. Kombiniert man dies mit $|\lambda - z|^{-1} \leq (\operatorname{dist}(z, \sigma(\mu)))^{-1}$, folgt Stetigkeit auf $\mathbb{C} \setminus \sigma(\mu)$. Die Holomorphie folgt aus Moreras Thm, sobald wir

$\int_\Gamma F(z)\, dz = 0$ für alle Dreiecke $\Gamma \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma(\mu)$ zeigen.
(oder alle geschlossene stückweise C^1-Kurven)

Da $(\lambda - z)^{-1}$ für $(\lambda, z) \in \sigma(\mu) \times \Gamma$ beschränkt ist, folgt dies aus $\int_\Gamma dz\, (\lambda - z)^{-1} = 0$ mittels Fubini, denn

$$\int_\Gamma dz\, F(z) = \int_\Gamma dz \int_{\sigma(\mu)} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z} = \int_{\sigma(\mu)} d\mu(\lambda) \int_\Gamma \frac{dz}{\lambda - z} = 0$$

$\square$

Bemerkung F kann nicht weiter in einen größeren Bereich als $\mathbb{C}\setminus\sigma(\mu)$ analytisch fortgesetzt werden. Wenn F in einer Umgebung von $\lambda\in\mathbb{R}$ holomorph ist, dann folgt $\operatorname{Im} F(\lambda)=0$ aus Reflexionsbedingung $F(\bar z)=\overline{F(z)}$.
(evtl. später)
Aus der Stieltjesschen Inversionsformel (für Pick-Fkt.en F)

$$\mu((\alpha,\beta])=\lim_{\eta\to 0}\frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta \underbrace{\operatorname{Im} F(x+i\eta)}_{\text{nicht holomorph}}\,dx$$

$$F(z)=a+bz+\int_{\mathbb{R}}\frac{1+z\lambda}{\lambda-z}\,\frac{d\mu(\lambda)}{1+\lambda^2}$$

$$=a+bz+\int\left(\underline{\underline{\frac{1}{\lambda-z}}}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)d\mu(\lambda)$$

(falls α,β keine Atome von μ, sprich $\mu(\{\alpha\})=\mu(\{\beta\})=0$)

folgt, dass $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\sigma(\mu)$ sein muss.

Wg. der oben angedeuteten Integralformel für allgemeine Pick-Fkt.en, ~~machen~~ nehmen wir im Folgenden $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{d\mu(\lambda)}{1+|\lambda|}<\infty$ an. Außerdem sei ab sofort μ immer ein positives Maß auf $[a,\infty)$ mit $a>-\infty$.
In diesem Fall ist $F(z)=\displaystyle\int\frac{d\mu(\lambda)}{\lambda-z}$ für $z\in\mathbb{C}\setminus[a,\infty)$, die Boreltransf. von μ wohldefiniert. (zerlege in Real- u. Imaginärteil)

Der upshot für folgende Diskussion ist, dass sich die ac-, sc- und pp-Teile von μ durch Grenzwerte von $F(z)$ extrahieren lassen.

Thm 3.27. Seien μ und $F(z)$ wie oben.
(1) F ist auf $\mathbb{C}\setminus[a,\infty)$ analytisch und $\operatorname{Im}(F)>0$ für $\operatorname{Im}(z)>0$
(2) F ist auf $(-\infty,a)$ positiv
(3) $\lim_{\gamma\to\infty}F(-\gamma)=0$
(4) $\lim_{\gamma\to\infty}\gamma\cdot F(-\gamma)=\int d\mu(\lambda)$ (wobei $\int d\mu=\infty$ erlaubt ist).

$$=\lim_{\gamma\to\infty}\gamma^2F'(-\gamma)$$

(5) $\displaystyle\lim_{\gamma\to\infty}\frac{F'(-\gamma)}{F^2(-\gamma)}=\frac{1}{\int_{\mathbb{R}}d\mu(\lambda)}$ wobei $\int d\mu=\infty$ mit $\frac{1}{\infty}=0$ erlaubt ist.

Beweis (1) ✓ (Thm 3.26)
(2) ~~Genügt~~ ebenfalls klar
(3) Folgt aus monotoner Konvergenz
(4) Die erste Aussage folgt ebenfalls aus monotoner Konvergenz.
Zweite Aussage: falls $\int d\mu<\infty$, dann folgt wieder mit monotoner Konv.

$$\gamma^2F'(-\gamma)=\gamma^2\int\frac{d\mu}{(\lambda+\gamma)^2}\xrightarrow{\gamma\to\infty}\int d\mu\ ;$$

falls $\int d\mu=\infty$, benutzen wir $|1/(zF(z))|\xrightarrow{|z|\to\infty}0$ für $\operatorname{Re}(z)<a$

$\frac{\gamma^2}{(\lambda+\gamma)^2}$ steigt oder fällt für ~~$\gamma\geq|\lambda|$~~ $\gamma+\lambda>0$ $(\gamma>-a)$

$\int d\mu = \infty$ (5) $\dfrac{F'(z)}{F^2(z)} = -\left(\dfrac{1}{F(z)}\right)'$ mit $\left(\dfrac{1}{F}\right)'(z) \underset{\text{Cauchy}}{=} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|w-z|=\frac{|z|}{2}} (w-z)^{-2} \dfrac{1}{F(w)}\, dw$

$\longrightarrow 0$, da $\dfrac{1}{|z F(z)|} \xrightarrow[\mathrm{Re}(z)<-a]{|z|\to\infty} 0$

$\int d\mu < \infty$ $\quad \dfrac{F'(-\gamma)}{F^2(-\gamma)} = \dfrac{\gamma^2 F'(-\gamma)}{\underbrace{\gamma^2 F^2(-\gamma)}_{(4)}} \xrightarrow[\gamma\to\infty]{(4)} \dfrac{\int d\mu}{(\int d\mu)^2}$ $\boxtimes$

Als Nächstes betrachten wir Grenzwerte von $F(z)$ an, wenn sich z der reellen Achse nähert. Dabei wird die Fkt

$$G(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{(x-\lambda)^2}$$

eine wichtige Rolle spielen.

<u>Thm 3.2.8</u> Seien μ und $F_\mu(z)$ wie zuvor.

(1) $G(x) < \infty \Rightarrow \displaystyle\int \frac{d\mu(\lambda)}{|x-\lambda|} \le G(x) + (|x|+2)\int \frac{d\mu(\lambda)}{1+|\lambda|} < \infty$ (nicht glm. in x allerdings)

Gordon, del Rio, Makarov, Simon → (2) $\{x\in\mathbb{R} : G(x) = \infty\}$ ist eine dichte G_δ-Menge in supp μ

(X top. Raum $\Omega \subseteq X$ ist eine G_δ-Menge gdw. Ω der Schnitt abzählbar vieler offener Mengen ist. Dichte G_δ-Mengen heißen auch Baire-generisch, s. auch Stein-Shakarchi) $\Leftrightarrow$ $\Omega \subseteq X$ "generisch", falls Ω = Komplement einer mageren Menge / Menge der ersten Kategorie, sprich einer Menge, die durch abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen hervorgeht)

(3) Falls $\displaystyle\int \frac{d\mu(\lambda)}{|x-\lambda|} < \infty$ (oder $G(x)<\infty$), dann existiert der Grenzwert

$\lim_{\epsilon\searrow 0} F(x+i\epsilon)$ und ist reell.

~~(4) $\lim_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{-1} F(x+i\epsilon)$~~

(4) $\lim_{\epsilon\searrow 0} \epsilon^{-1}\, \mathrm{Im}\, F(x+i\epsilon) = G(x)$

(5) Falls $G(x)<\infty$, dann $\lim_{\epsilon\to 0} \dfrac{1}{i\epsilon}\left[F(x+i\epsilon) - \underset{\text{existiert wg (3)}}{\overset{\lim_{\delta\to 0} F(x+i\delta)}{\overset{\shortparallel}{F(x+i0)}}}\right] = G(x)$

Beweis (2) → Del Rio, Makarov, Simon (Operators with sc spec II) - 1994
Gordon (Pure point spectrum under 1-parameter perturbations and instability of Anderson localization) - 1994

(1) $\int \frac{d\mu(y)}{|x-y|} \left(1\!\!1_{|x-y|<1} + 1\!\!1_{|x-y|\geq 1} \right)$

$\frac{1}{|x-y|} < \frac{1}{|x-y|^2}$ ✓ wg $G(x)<\infty$

wg $|y|+1 \leq |x| + |x-y| + 1 \leq |x-y|(|x|+2)$ (da $|x| \leq |x||x-y|$, $1 \leq |x-y|$)

folgt $\frac{1}{|x-y|} \leq \frac{|x|+2}{|y|+1}$ $\left(\frac{1}{|x-y|^2} + \frac{|x|+2}{|y|+1} \right)$

wg $\int \frac{d\mu(y)}{1+|y|} < \infty$ ist auch ~~Zweiter~~ dieser Summand beschr. (allerdings nicht glm. in x

(3) $\operatorname{Im} F(x+i\epsilon) = \epsilon \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{\epsilon^2 + (x-\lambda)^2}$

$$\leq \epsilon \int_{|x-\lambda|>\delta} \frac{d\mu(\lambda)}{(x-\lambda)^2} + \int_{|x-\lambda|<\delta} \frac{d\mu(\lambda)}{|x-\lambda|}$$

$G(x)<\infty$
$\Downarrow$
$\operatorname{Im}(F(x+i0)) = 0$
$\downarrow$
kein ac-Teil
später

$\Rightarrow \overline{\lim_{\epsilon\to 0}}\, F(x+i\epsilon) \leq \overline{\lim_{\delta \searrow 0}} \int_{|x-y|<\delta} \frac{d\mu(\lambda)}{|x-\lambda|} = 0$, falls $\int \frac{d\mu(\lambda)}{|x-\lambda|} < \infty$

$\operatorname{Re} F(x+i\epsilon) = \int \frac{x-\lambda}{\epsilon^2 + (x-\lambda)^2}\, d\mu(\lambda) \xrightarrow[\text{majorisiert}]{\epsilon\to 0} \int \frac{d\mu(\lambda)}{|x-\lambda|}$

falls $\int \frac{d\mu}{|x-\lambda|} < \infty$

(4) Folgt aus monotoner Konvergenz

(5) Falls $G(x)<\infty$, ist der Beweis von (3) anwendbar, d.h.

$$F(x+i0) = \int \frac{d\mu(\lambda)}{x-\lambda}$$

und somit

$$\frac{1}{i\epsilon}\left(F(x+i\epsilon) - F(x+i0)\right) = \frac{1}{i\epsilon} \int d\mu(\lambda) \left[\frac{1}{\lambda - x} + \frac{1}{x+i\epsilon-\lambda} \right]$$

$$= \int \frac{d\mu(\lambda)}{(\lambda-x)(\lambda-x-i\epsilon)} \xrightarrow{\epsilon\to 0} G(x) \text{ majorisiert}$$

($|\lambda-x-i\epsilon| > |\lambda-x|$
u. $G(x)<\infty$

$\boxtimes$

Addendum: Holomorphe Fkt.en, harmonisch konjugierte Fkt.en (folgt aus Ergebnissen auf $D_0(1)$ mittels Möbiustransf. $D_0(1) \leftrightarrow \mathbb{C}_+$) $\boxed{4}$
(Koosis-old: p. 142 ff)

Sei $f(z) = u(z) + i v(z) : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $u, v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ wg Cauchy-Riemann folgt, dass $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, d.h. $u(x,y)$, $v(x,y)$ sind harmonisch auf U, genauer gesagt harmonisch konjugiert zueinander

Thm 1 Sei ~~$U(z)$~~ $\underset{u(z)}{\overset{\shortparallel}{u}} : U \to \mathbb{R}$ harmonisch und beschränkt für $\mathrm{Im}(z) > 0$. Dann

gilt ~~$u(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{Im}(z)}{(\mathrm{Re}(z) t)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} u(t)\,dt$~~

$$u(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{\mathrm{Im}(z)}{(\mathrm{Re}(z)-t)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}}_{P_{\mathrm{Im}(z)}(\mathrm{Re}(z)-t)} u(t)\,dt \,,$$ wobei ~~und insbesondere existiert~~

$=: P_{R_0}$

der pktweise Grenzwert $u(x) := \lim_{\substack{z \to x \\ \shortparallel \\ \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z) = x + iy}} u(z)$ existiert für fast alle $x \in \mathbb{R}$,

sofern der Grenzwert nicht-tangential genommen wird.
(insb. existiert der radiale Grenzwert)

Thm 2 Sei $u : U \to \mathbb{R}$ harmonisch und nicht-negativ für $\mathrm{Im}(z) > 0$. Dann gibt es $\alpha \geq 0$ und ein Maß $\mu \geq 0$ auf $\mathbb{R}$ mit $\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{1+|\lambda|^2} < \infty$, sodass

$$u(z) = \alpha\, \mathrm{Im}(z) + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{Im}(z)}{(\mathrm{Re}(z)-t)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}\, d\mu(t).$$

Bem 3 a) Die harmonisch Konjugierte zu $u : U \to \mathbb{R}$ ist durch

$$\tilde{u}(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{Re}(z) - t}{(\mathrm{Re}(z)-t)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}\, d\mu(t) \,, \quad \text{falls } \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{1+|\lambda|} < \infty$$

oder $$\tilde{u}(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\mathrm{Re}(z)-t}{(\mathrm{Re}(z)-t)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} + \frac{t}{t^2+1} \right) d\mu(t) \,, \quad \text{falls } \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{1+t^2} < \infty$$

gegeben.

(Grund: $$\frac{1}{z-t} = \underbrace{\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2}}_{\text{konj. Poissonkern}} - \underbrace{\frac{iy}{(x-t)^2+y^2}}_{\text{Poissonkern}})$$

(u harmonisch) b) Falls $\int_{\mathbb{R}} |u(t+iy)|^p\, dt \leq 1$ für $p \geq 1$ glm. in y und

$$\begin{cases} p > 1 \Rightarrow u(z) = \frac{1}{\pi}\int \frac{y}{(x-t)^2+y^2} u(t)\,dt, & u \in L^p(\mathbb{R}) \\ p = 1 \Rightarrow u(z) = \frac{1}{\pi}\int \frac{y}{(x-t)^2+y^2}\, d\mu(t), & \int |d\mu| < \infty \end{cases}$$

Thm 4 Sei $\mu \geq 0$ ~~ein~~ Maß auf $\mathbb{R}$ mit $\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu}{1+\lambda^2} < \infty$ und

(sanfter als $\int \frac{d\mu}{1+|\lambda|} < \infty$
↳ brauchen wir für konj. Poissonkern)

$$u(z) := \frac{1}{\pi} \int \frac{\operatorname{Im}(z)}{(\operatorname{Re}(z)-t)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} \, d\mu(t)$$

$$\equiv (P_{\operatorname{Im}(z)} * d\mu)(\operatorname{Re}(z))$$

$\Rightarrow$ An allen t_0, wo $\mu'(t_0)$ existiert und endlich ist gilt
(also Lebesgue - f. ü.)

$u(z) \longrightarrow \mu'(t_0)$, wenn $z \xrightarrow[\measuredangle]{} t_0$
(nicht-tangential, also insb. radial)

~~Thm 5~~

[Erinnere: • $\varphi_\epsilon * f(x) \to f(x)$ pktweise f.ü. falls $f \in L^p$ $1 \leq p \leq \infty$ für alle Approximationen der 1 φ_ϵ; $\sup_{\epsilon>0} |(\varphi_\epsilon * f)(x)| \leq (Mf)(x) < \infty$ f. ü.

• $(Hf)(x) = pv \frac{1}{x} * f = \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy = \lim_{t \to 0} \langle Q_t(\cdot - x), f \rangle$, wobei

$Q_t(x) = \frac{x}{x^2+t^2}$ der konjugierte Poissonkern

u. pktweise Konv. für $t \to 0$ gilt f.ü., falls $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$

u. die maximale Hilberttransf $T^* f = \sup_{\epsilon>0} \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy$ ist $L^p \to L^p$- und $L^1 \to L^{1,\infty}$- bdd., das heißt der Grenzwert ist f.ü. endlich.

Thm 5 Angenommen $\int_{\mathbb{R}} \frac{F(t)}{1+t^2} dt < \infty$ und $\tilde{u}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2} + \frac{t}{t^2+1} \right) F(t) dt$.

Dann konvergiert für fast alle $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{\pi} \int_{|x-t|>y} \left(\frac{1}{x-t} + \frac{t}{t^2+1} \right) F(t) dt - \tilde{u}(x+iy) \xrightarrow{y \to 0} 0$$

Falls nur $\int \frac{F(t)}{1+|t|} dt < \infty$, dann braucht es die beiden $\frac{t}{t^2+1}$ - Summanden nicht.

Thm 3.2.9 Angenommen $\int \frac{d\mu}{|t|\lambda|} < \infty$. Dann existiert der pktweise Grenzwert $\lim_{\epsilon \to 0} F(x+i\epsilon)$ Lebesgue-f.ü. und ist endlich (später p. 31)

(sicher auch für $\mathrm{Re}\, F(z)$) ja → Jakšić! p. 27) Thm 2.17 ↳ p. 31

28

Beweis $F(x+i\epsilon) = \int d\mu(t) \left[\underbrace{\frac{x-t}{(x-t)^2+\epsilon^2}} + i \underbrace{\frac{\epsilon}{(x-t)^2+\epsilon^2}} \right]$

konj. Poissonkern, der gegen Hilberttransf. konvergiert, A

Poissonkern; Grenzwert existiert f.ü. und ist an solchen x endlich, wo $\mu'(x) < \infty$, also Lebesgue-f.ü. (Thm 4)

f.ü. Existenz und Endlichkeit des Grenzwerts folgt aus Thm 5 und Bem. 3 für den ac-Teil von μ. Das ist aber alles, was wir brauchen, da der singuläre Teil auf Lebesgue-Nullmenge getragen ist. Wirklich?

$d\mu^{ac} = f(x)dx$ mit $f \in L^1$
⇒ alle obigen Ergebnisse für Hilberttransf. anwendbar!

~~Allerdings hat man pktweise f.ü. Konvergenz nur dann, wenn $d\mu^{ac} =$~~

Thm 3.2.10 Ang $\int \frac{d\mu(\lambda)}{|t|\lambda|} < \infty$, $F(z) = \int \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z}$

(1) $\frac{1}{\pi} \int f(E)\, \mathrm{Im}\, F(E+i\epsilon) dE \xrightarrow{\epsilon \to 0} \int f(E) d\mu(E)$, $f \in C_c(\mathbb{R})$

(2) μ_s ist auf $\{E : \lim_{\epsilon \to 0} \mathrm{Im}\, F(E+i\epsilon) = \infty\}$ getragen (Vallée-Poussin ↳ Satz aber Addendum I in Simon I)

(3) $\mu(\{E_0\}) = \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \cdot \mathrm{Im}\, F(E_0+i\epsilon)$.
Insbesondere gilt für alle $E_0 \in \mathbb{R}$, $\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \cdot \mathrm{Re}\, F(E_0+i\epsilon) = 0$

(4) $d\mu_{ac}(E) = \frac{1}{\pi} \mathrm{Im}\, F(E+i0) dE$

T(x,t) {λ : lim F(λ+iε) ...}

~~d. Thm 7.15 in Rudin~~
d. Jakšić - Topics in spectral theory

Bew (1) Poissonintegrale konvergieren glm. auf Kompakta, d.h. für $f \in C_{b}^{0}$ sogar
beschr.
$P_\epsilon * f(E) \to f(E)$ glm. für $E \in K$ $\forall$ Kompakta K
⇒ Behauptung folgt aus majorisierter Konvergenz

(2) Später

(3) $\epsilon \cdot \operatorname{Im} F(E+i\epsilon) = \int \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2+(\lambda-E)^2}\, d\mu(\lambda)$

$\xrightarrow[\text{monotone Konv.}]{\epsilon\to 0} \mu(\{E\})$

da $\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2+(\lambda-E)^2} \longrightarrow \begin{cases} 0 & \lambda \neq E \\ 1 & \lambda = E \end{cases}$

$\epsilon \operatorname{Re}(E+i\epsilon) = \epsilon \int \frac{\lambda-E}{\epsilon^2+(\lambda-E)^2} \cancel{d\mu(\lambda)} \left(\mathbb{1}_{|\lambda-E|\geq 1} + \mathbb{1}_{|\lambda-E|<1}\right) d\mu(\lambda)$

$\overset{\epsilon\to 0}{=} 0$ majorisiert, mit Majorante $\frac{\epsilon(\lambda-\epsilon)}{\epsilon^2+(\lambda-\epsilon)^2} \leq 1$.

$\frac{\epsilon(\lambda-\epsilon)}{\leq \epsilon^2+(\lambda-\epsilon)^2}$

$\leq \epsilon \int_{|\lambda-E|\geq 1} \frac{d\mu(\lambda)}{|\lambda-E|} \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0$

(4) $d\mu_{ac}(E) = h(E)\,dE$ mit zugehöriger Boreltransf. $F_{ac}(z)$

$\Rightarrow \operatorname{Im} F_{ac}(E+i\epsilon) = \int \frac{\epsilon\, h(\lambda)}{\epsilon^2+(E-\lambda)^2}\, dE \underset{\text{Poisson}}{\longrightarrow} h(E)$ für f.a. $E \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ mit Fatou erhalten wir für $0 \leq f \in C^0$

$\frac{1}{\pi}\int \operatorname{Im} F(E+i0) f(E)\, dE \leq \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\pi}\int \operatorname{Im}(F(E+i\epsilon)) f(E)\, dE$

Spezialfall für $\operatorname{Im} F(z)$ wie Thm 3.2.19

$= \cancel{\int f(E) h(E)\, dE =} \int f(E)\, d\mu(E)$

d.h. $\frac{1}{\pi}\operatorname{Im} F(E+i0) \leq d\mu(E)$, d.h. für fast alle E,

$\frac{1}{\pi}\operatorname{Im} F(E+i0) \leq d\mu_{ac}(E)/dE = h(E) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Im} F_{ac}(E+i0)$

$\underset{\text{Poissonkern pos.}}{\leq} \frac{1}{\pi}\operatorname{Im} F(E+i0)$

$\Rightarrow \operatorname{Im} F(E+i0) = h(E)$ f.ü., was zu zeigen war.

(2) (→ Simon – Trace Ideals oder Jaksic – Topics in Spectral theory)

Um Vallée-Poussin zu zeigen, zeigen wir

Thm ~~Sei $\mu = f\, d\mu_{ac} + $~~

Sei $d\mu = f\,dx + d\mu_s$ sollen $\int \frac{d\mu(\lambda)}{1+|\lambda|} < \infty$, $F(z) = \int \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z}$

(1) a) $\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} F(x+i\epsilon) = f(x)$ für ~~μ-fast~~ Lebesgue-fast alle x ($\to$ (4) von Thm 3.2 10)

b) $d\mu \perp$ Lebesgue $\Leftrightarrow \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} F(x+i\epsilon) = 0$ für Lebesgue fast alle x

(2) Falls $\mu \geq 0$, dann $\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} F(x+i\epsilon) = \infty$ für μ_s-fast alle x.

Insbesondere ist also $d\mu_s$ auf $\{E \in \mathbb{R} : \lim_{\epsilon \to 0} \operatorname{Im} F(E+i\epsilon) = \infty\}$ getragen. (cf. Thm 3.15 in Jalese)

Pf (1) a) schon in (4) gezeigt

b) "$\Rightarrow$" Sei $S \subseteq \mathbb{R}$ Borel mit $\mathrm{Leb}(S) = 0$ und $\mu \perp \mathrm{Leb}$, $\mu(\mathbb{R} \setminus S) = 0$.

Dann gilt
$$\frac{\operatorname{Im} F_\mu(x+i\epsilon)}{\operatorname{Im} F_\mu(x+i\epsilon) + \pi} = \underbrace{\frac{\operatorname{Im} F_{1_S(\mu+\mathrm{Leb})}(x+i\epsilon)}{\operatorname{Im} F_{\mu+\mathrm{Leb}}(x+i\epsilon)}}_{} \quad \text{alle } x \in S.$$

$$\xrightarrow{\epsilon \to 0} \begin{cases} 1_S(x) & \mu+\mathrm{Leb.\ f.\ alle}\ x \\ 0 & \mathrm{Leb.\ f.\ alle}\ x \end{cases}$$

da $1_S(x) = 0$ für Leb.-fast alle x.

Umkehrung analog

(2) Da $\mu \geq 0$ ist $\mu(I_x(r)) \geq \mu_s(I(x,r))$ (radiales Intervall um x) $\Rightarrow$ Sei wlog $\mu \perp \mathrm{Leb}$.

$\Rightarrow$ mit Rechnungen von gerade eben

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\operatorname{Im} F_\mu(x+i\epsilon)}{\operatorname{Im} F_\mu(x+i\epsilon) + \pi} = 1 \quad \text{für } \mu\text{-f.a. } x$$

$\pi = F_{\mathrm{Leb}}(x+i\epsilon)$

d.h. $\lim \operatorname{Im} F_\mu(x+i\epsilon) = \infty$ — " —

~~Simon-Wolff Kriterien~~

Nochmals zu $\mu \geq 0$ (falls nicht → zerlege in $\mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4)$)

Thm 3.2.9 Angenommen $\int \frac{d\mu}{1+|\lambda|} < \infty \Rightarrow \lim_{\epsilon \to 0} F(x+i\epsilon)$ existiert pktweise f.ü. und ist f.ü. endlich. Insb. existiert $\lim_{\epsilon\to 0} \operatorname{Im} F(x+i\epsilon)$ Lebesgue- und μ-fast-überall.
↳ im Lebesgue- ~~und~~ μ-Sinne

Pf (Siehe Jaksic Thm 2.17 (1) und (3))

Bemerkungen Es ist möglich, dass $\underbrace{\mu \neq 0, \text{ aber } F_\mu \equiv 0}_{\xRightarrow{\text{F. u. M. Riesz}} d\mu = h(x)dx \text{ Leb. - fast sicher}}$; bspw. $d\mu = \frac{dx}{(x-2i)(x-i)}$

Allerdings: $F \equiv 0 \Rightarrow \mu = 0$, falls μ reell oder $|\mu|(S) = 0$ für ein offenes S, oder $\int \exp(p|x|)d|\mu| < \infty$ für ein $p>0$.

Pf Wir zeigen zunächst $F(z) = \frac{R(z)}{G(z)}$, wobei $R, G \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$

↳ Hardy-Raum aller in $\mathbb{C}_+$ holomorphen Fkten, sodass

$\|f\|_\infty \equiv \sup_{z \in \mathbb{C}_+} |f(z)| < \infty$

(Banachraum)

wobei G keine Nullstellen in $\mathbb{C}_+$ hat. ~~Falls $\mu \geq 0$~~ Wlog $\mu \geq 0$.

→ setze $G(z) = \frac{1}{i + F_\mu(z)}$, d.h. G ist holomorph in $\mathbb{C}_+$ mit $|G(z)| \leq 1$

(da $\operatorname{Im} F_\mu(z) \geq 0$) und $F_\mu(z) = \frac{1 - iG(z)}{G(z)}$.

Tatsache Zur fast-überall-Existenz u. Endlichkeit: a) falls $f \in H^\infty(\mathbb{C}_+) \xRightarrow{\text{Thm 2.13}} \lim_{\epsilon \to 0} f(x+i\epsilon) \equiv f(x)$ existiert Leb.-fast-sicher u. $f \in L^\infty(\mathbb{R}, dx)$

→ (Koosis)

b) $f \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$, $f(x) := \lim_{\epsilon \to 0} f(x+i\epsilon) \Rightarrow \int \frac{|\log f(x)|}{1+x^2} dx < \infty$

und insb. gilt für $\alpha \in \mathbb{C}$ entweder $f(z) \equiv \alpha$ oder $\operatorname{Leb}\{x \in \mathbb{R} : f(x) = \alpha\} = 0$

– Existenz f.ü.: offenbar existieren $\lim_{\epsilon\to 0} R(x+i\epsilon)$, $\lim G(x+i\epsilon)$, da $R, G \in H^\infty$, → $\lim_{\epsilon \to 0} F(x+i\epsilon) \equiv F(x)$ existiert Leb.-fast-sicher, d.h. Lebesgue-fast-sicher.

– Endlichkeit f.ü.: $\operatorname{Leb}\{x : F_\mu(x) = \alpha\} = \operatorname{Leb}\{x : R(x) = \alpha G(x)\}$

Falls $\operatorname{Leb}\{x : R(x) = \alpha G(x)\} > 0$, dann muss $R(z) - \alpha G(z) \equiv 0$, d.h. $F_\mu(z) \equiv \alpha$ für alle $z \in \mathbb{C}_+$. Da aber $\lim_{\epsilon\to\infty} |F(x+i\epsilon)| = 0$, muss $\alpha = 0$, d.h. $F_\mu(z) \equiv 0$. ⇔ Falls $F_\mu \not\equiv 0$, muss $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ $\operatorname{Leb}\{x \in \mathbb{R} : F(x) = \alpha\} = 0$

Insb. ist mit analogem Argument für $F \not\equiv 0$, $\int \frac{|\log F(x)|}{1+x^2} dx < \infty$ ∎

Um die Träger von μ, μ_{ac}, μ_s, μ_{pp} zu verstehen, müssen wir Ableitungen von Maßen verstehen.

Wir definieren bereits jetzt

$$M_{ac} = \{E \in \mathbb{R} : 0 < \overline{\lim_{\epsilon \to 0}} \operatorname{Im} F(E+i\epsilon) < \infty\}$$

$$M_s = \{E \in \mathbb{R} : \overline{\lim_{\epsilon \to 0}} \operatorname{Im} F(E+i\epsilon) = \infty\}$$

$$M_p = \{E \in \mathbb{R} : \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \operatorname{Im} F(E+i\epsilon) > 0\}$$

$$M = M_{ac} \cup M_s = \{E \in \mathbb{R} : 0 < \overline{\lim_{\epsilon \to 0}} \operatorname{Im} F(E+i\epsilon)\}$$

Zur Erinnerung: in Thm 3.2.9 hatten wir gezeigt, dass $\lim \operatorname{Im} F(E+i\epsilon)$ Lebesgue-und μ-f.ü. existiert und endlich ist. Darüberhinaus ist offenbar, dass M_p ein minimaler Träger für μ_{pp} ist (sh Thm 3.2.10 (3)) (Teschl Lemma 3.25)

Wir behaupten zunächst, dass ähnlich M_{ac} und $\{E \in \mathbb{R} : 0 < \operatorname{Im} F(E) < \infty\}$ ein minimaler Träger von μ_{ac}

klar, wenn für M_{ac} gezeigt, da $\operatorname{Im} F(E) < \infty$ f.ü.

sowie M_s ein minimaler Träger für μ_s (p. 116 in Teschl) und $\{\lambda : \operatorname{Im} F(\lambda) = \infty\}$ ein Träger für ~~den~~ μ_{sc} ist (p. 127 in Teschl.)

<u>Def 3.2.11</u> Sei μ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}^d$. Dann heißt

$$(D_\mu)(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\mu(B_x(\epsilon))}{|B_x(\epsilon)|_{\text{Lebesgue}}}$$

Ableitung von μ bei $x \in \mathbb{R}^d$, sofern der Grenzwert existiert

Weiter heißen $(\overline{D}_\mu)(x) = \overline{\lim_{\epsilon \to 0}} \frac{\mu(B_x(\epsilon))}{|B_x(\epsilon)|}$ und $(\underline{D}_\mu)(x) = \underline{\lim_{\epsilon \to 0}} \frac{\mu(B_x(\epsilon))}{|B_x(\epsilon)|}$

obere und untere Ableitung

→ • μ bei x diffbar falls $\underline{D}_\mu(x) = (\overline{D}_\mu)(x) < \infty$

• D_μ, $\underline{D}_\mu$ und $\overline{D}_\mu$ sind messbar, denn $(\overline{D}_\mu)(x) = \lim_{n \to \infty} \sup_{0 < \epsilon < \frac{1}{n}} \frac{\mu(B_\epsilon(x))}{|B_\epsilon(x)|}$, da dann $\sup_{0 < \epsilon < 1/n} \frac{\mu(B_x(\epsilon))}{|B_x(\epsilon)|}$ unterhalbstetig bzgl. $x \in \mathbb{R}^d$, da $\mu(B_\epsilon(x))$ unterhalbstetig bzgl. x. (Ähnlich für $\underline{D}_\mu$)

Lemma 3.2.12 (Vitalis Überdeckungslemma)
Seien $\{B_j\}_{j=1}^m = \{B_{x_j}(r_j)\}_{j=1}^m$ eine gegebene Familie von Kugeln $\Rightarrow \exists$ Teilfamilie $\{B_{j_k}\}_{k=1}^K$ disjunkter Kugeln mit $\bigcup B_j \subseteq \bigcup_{k=1}^K B_{x_{j_k}}(3r_{j_k})$

Lemma 3.2.13 Sei $\alpha > 0$, dann gilt für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

(1) $|\{x \in A : \bar{D}_\mu(x) > \alpha\}| \leq 3^d \frac{\mu(A)}{\alpha}$

(2) $|\{x \in A : \bar{D}_\mu(x) > 0\}| = 0$, sobald $\mu(A) = 0$.

Bew Sei $A_\alpha = \{x \in A : \bar{D}_\mu(x) > \alpha\}$. Um (1) zu zeigen, genügt es
$$|K| \leq 3^d \frac{\mu(O)}{\alpha}$$ für alle offenen $O \supseteq A_\alpha$ und Kompakta $K \subseteq A_\alpha$
zu zeigen, da μ außen regulär (d.h. $\mu(B) = \inf\{\mu(U) : B \subseteq U,\ U \text{ offen}\}$) und Lebesgue innen regulär (d.h. $|B| = \sup\{|K| : K \subseteq A,\ K \text{ kompakt}\}$).

Dazu $\forall x \in K \subseteq A_\alpha \subseteq O$ gibt es $r_x > 0$ mit $B_x(r_x) \subseteq O$ und $|B_x(r_x)| \underset{\text{Def. v. } A_\alpha \text{ u. } \bar{D}_\mu}{<} \frac{1}{\alpha} \mu(B_x(r_x))$

Da K kompakt, gibt es eine endliche Teilüberdeckung von K mit solchen Kugeln. Wg Vitali brauchen wir nur einen Teil dieser Kugeln zu nehmen und aufzublasen und wir erhalten
$$|K| \leq 3^d \sum_{k=1}^K |B_{x_k}(r_{x_k})| \leq \frac{3^d}{\alpha} \sum_{k=1}^K \mu(B_{x_k}(r_{x_k})) < \frac{3^d}{\alpha} \mu(O)$$

Dies zeigt (1).
Um (2) zu zeigen, beobachten wir $A_0 = \bigcup_{j=1}^\infty \underbrace{A_{1/j}}_{\{x \in A : \bar{D}_\mu > 1/j\}}$. Aber wg (1) ist $|A_{1/j}| = 0$, falls $\mu(A) = 0$ für alle j.

$\square$

Thm 3.2.14 (Lebesgue) Sei $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B_x(r)|} \int_{B_x(r)} |f(x) - f(y)| \, dy = 0$$ und die Menge aller x, für die das gilt heißen Lebesguepunkte. (die nur von f abhängen).

Dieser Satz ist stärker als $\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B_x(r)|} \int_{B_x(r)} f = f(x)$ f.ü. und folgt aus der $L^1 \to L^{1,\infty}$-Beschränktheit von $M_f(x) = \sup_{r > 0} \frac{1}{|B_x(r)|} \int_{B_x(r)} |f|$. Da der

$$\left| \frac{1}{|B|} \int_B f(y) - f(x) \frac{|B|}{|B|} \right| \le \frac{1}{|B|} \int_B |f(y) - f(x)|$$

Beweis von Vitali's Lemma abhängt, kann man solche Ungleichungen auch für andere, nette Mengen ~~zeigen~~ U zeigen, für die gilt $U \subseteq B_x(r)$, aber es gibt $c > 0$ sodass $|B_x(r)| < c|U|$

Genauer **Def** Eine Familie V von Mengen heißt regulär, wenn
(1) jedes $U \in V$ in einer Kugel B enthalten ist, es aber $c > 0$ gibt, sodass $|U| > c|B|$
(2) jedes $x \in \mathbb{R}^d$ ist in einer beliebig kleinen Menge U enthalten

Def Eine Folge von Mengen $U_j(x)$ zieht sich schön auf $x \in \mathbb{R}^d$ zusammen, wenn es Kugeln $B_x(r_j)$ mit $r_j \to 0$ und $\epsilon > 0$ gibt sodass
$A_j(x) \subseteq B_x(r_j)$ und $|A_j| > \epsilon |B_x(r_j)|$
(z.B. Kugel, Würfel, Rechtecke mit fester Exzentrizität)

Bem Die A_j müssen dabei <u>nicht</u> unbedingt x enthalten.

$\Rightarrow$ aus neuer Maximalungleichung für V folgt ~~vor~~ Lebesgue für V, d.h.

Kor. 3.2.15 $\lim_{j \to \infty} \frac{1}{|A_j(x)|} \int_{A_j(x)} |f(x) - f(y)| \, dy = 0$ für alle (Kugel)-Lebesgue-Pkte.

Der Punkt ist: die Ausnahmemenge, für die die Konv. <u>nicht</u> gilt, hängt <u>nicht</u> von der Familie der involvierten Mengen ab!

Beweis vom Kor. $\left(\frac{1}{|U|} \int_U |f(x) - f(y)| \, dy \le \frac{1}{c|B|} \int_B |f(x) - f(y)| \, dy \right)$

offene Frage: wie steht es mit nicht-regulären Familien?
$\to$ Kakeya-Maximalvermutung f. Rechtecke mit bel. kleiner Exzentrizität)

Korollar 3.2.16 Sei μ ein Borelmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, welches ac bzgl. Lebesgue ist.
$\Rightarrow$ zugehörige Verteilungsfkt $\mu(x)$ ist ~~f.ü.~~ Leb.-f.ü. differenzierbar mit $d\mu(x) = \mu'(x)dx$

Beweis Per Voraussetzung gibt es $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit $d\mu(x) = f(x)dx$, d.h. Insb. ist $\mu(x) = \int_0^x f(x)dx$ stetig. Da Intervalle $\cong$ Kugeln folgt aus verstärktem Lebesgue-Differentiationssatz

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mu((x, x+r))}{r} \underset{\text{Keine Masse auf Atome}}{=} \lim_{r\to 0} \frac{\mu(x+r)-\mu(x)}{r} = f(x)$$ an jedem Lebesguepunkt von f

$\Rightarrow$ analog ~~ff~~ $\lim_{r\to 0} \frac{\mu((x-r, x))}{r} = f(x)$ $\forall$ Lebesguepkte x von f.

$\Rightarrow$ $\mu(x)$ ist Leb.-f.ü. diffbar mit $\mu'(x) = f(x)$, Leb.-f.ü. $\square$

Weitere Konsequenz v. Lebesgue-Differentiation

Thm 3.2.17 Sei μ Borelmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. $\Rightarrow$ $D\mu$ existiert Lebesgue-f.ü. und stimmt mit der Radon-Nikodym-Ableitung von μ_{ac} (bzgl. Lebesgue) überein, d.h. $\mu_{ac}(A) = \int (D\mu)(x)\,dx$. ~~Insb. ist $D\mu_s(x) = 0$ für Lebesgue-f.a. x.~~

Insb. ist $\mu \perp$ Leb. $\Leftrightarrow$ $D\mu = 0$ Lebesgue-f.ü.

Pf Falls $\mu = \mu_{ac}$ mit $d\mu = f\,dx$, dann folgt ~~f~~ $= D\mu(x)$ an jedem Lebesguepunkt von f aus Lebesgue-Differentiation, wie in Kor. 3.2.16.
Falls $\mu_s \neq 0$ sein sollte mit einem Träger $N \subseteq \mathbb{R}^d$, ($|N| = 0$) dann gilt die Aussage dennoch, da nach Lemma 3.2.13(2) gilt $(\overline{D}\mu_s)(x) = 0$ für Leb.-fast alle $x \in \mathbb{R}^d \setminus N$. $\square$

Thm 3.2.18 μ Borelmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

(1) $\{x : 0 < (\overline{D}\mu)(x) < \infty\}$ ist ein Träger ~~f~~ für μ_{ac} und

(2) $\{x : (\underline{D}\mu)(x) = \infty\}$ ——— " ——— μ_s

Pf (Thm 3.2.18)

(1) folgt aus Thm 3.2.17

wenn $\{\exists x: D_\mu(x) = 0$ oder $\infty\}$ positives Lebesgue-maß hätte, dann $\mu_{ac}(A \cap C) = 0$ od. ∞ ↯ zu kein Träger ↯ zu $\mu(\mathbb{R}) < \infty$

(2): Da $\underline{D}\mu > \underline{D}\mu_s$ können wir wlog annehmen, dass $\mu = \mu_s$.

Wir zeigen jetzt $\mu(A_h) = 0 \; \forall h \in \mathbb{N}$, wobei $A_h = \{x \in \mathbb{R} : (\underline{D}\mu)(x) < h\}$

Sei dazu $K \subseteq A_h$ kompakt und $V_j \supseteq K$ ~~u. $V_j \supseteq A_h$~~ offen mit $|V_j \setminus K| \leq 1/j$.

Für jedes $x \in K$ gibt es $\epsilon = \epsilon(x)$ sodass $B_x(\epsilon) \subseteq V_j$ und

$$\mu(B_x(3\epsilon)) \underset{\text{Def. von } A_h}{\leq} h\,|B_x(3\epsilon)|. \quad (*)$$

Da K kompakt, können wir endlich viele $B_x(\epsilon)$ zum Überdecken von K nehmen und insb. $\mu(K) \leq \sum_\ell \mu(B_{x_\ell}(\epsilon_\ell(x_\ell)))$

Mit Vitali finden wir wieder eine disjunkte Teilfamilie dieser Kugeln, die, wenn wir sie aufblasen, wieder K überdecken, d.h.

$$\mu(K) \leq \sum_{\tilde\ell} \mu(B_{x_{\ell_{\tilde\ell}}}(3\epsilon_{\ell_{\tilde\ell}})) \overset{(*)}{\leq} h \cdot 3^d \sum_{\tilde\ell} |B_{x_{\ell_{\tilde\ell}}}(\epsilon_{\ell_{\tilde\ell}})| \leq h \cdot 3^d |V_j|$$

Lässt man $j \to \infty$, so schmiegen sich die V_j an ~~A_h~~ K ~~$\Rightarrow$ mit innerer Reg~~

~~$\Rightarrow \mu(K) \leq h \cdot 3^d |K|$ und äußerer Regularität von μ~~

~~$\Rightarrow$ mit innerer Regularität von Leb~~

~~folgt~~

$\Rightarrow \mu(K) \leq h \cdot 3^d |K|$ und äußerer Regularität von Leb

$\Rightarrow$ mit innerer Regularität von μ ~~Leb~~

folgt $\mu(A) \leq h \cdot 3^d |A|$ für alle $A \subseteq A_h$

~~$\Rightarrow$~~ Das bedeutet aber $\mu \ll$ Leb auf A_h; da wir aber $\mu \perp$ Leb vorausgesetzt hatten, folgt $\mu(A_h) = 0$, was behauptet war ☒

Erinnerung: Ein Träger M von μ heißt minimaler Träger, falls $\forall$ Teilmengen $M_0 \subseteq M$ mit $\mu(M_0) = 0$ gilt $|M_0| = 0$.

Bsp: In $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ mit $d\mu(x) = \sum \alpha_n \, d\theta(x - x_n)$ (Summe von Diracmaßen) (θ: Heaviside)

ist $\{x_n\}_n$ ein minimaler Träger. Außerdem ist es der kleinste Träger, da kein x_n entfernt werden kann.

Falls $\{x_n\}_n = \mathbb{Q}$, dann ist $\operatorname{supp}(\mu) = \mathbb{R}$ (topolog. Träger; da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$), aber $\mathbb{R}$ ist nicht minimal, da die irrationalen Zahlen entfernt werden können.

Wenn wir andererseits $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), Leb)$ betrachten, so ist $\mathbb{R}$ ein minimaler Träger. Allerdings ist $\mathbb{R}$ nicht der einzige minimale Träger, sondern auch jede andere Menge, die sich durch Ausschneiden von Lebesgue-Nullmengen, wie $\mathbb{Q}$ oder Cantormengen, ergeben.

$\to$ Minimale Träger sind, wie "normale" Träger, nicht eindeutig bestimmt.

genauer als Thm 3.2.18 M_{ac}

<u>Lemma 3.2.19</u> $M_{ac} = \{x : 0 < (D\mu)(x) < \infty\}$ ist ein minimaler Träger von μ_{ac}.

<u>Bew</u> Sei $M_0 \subset M_{ac}$ mit $\mu_{ac}(M_0) = 0$. Setze $M_\epsilon = \{x \in M_0 : \epsilon < (D\mu)(x)\}$ f. $\epsilon > 0$, d.h. $M_\epsilon \nearrow_{\epsilon \searrow 0} M_0$, d.h. $|M_0| = \lim_{\epsilon \to 0} |M_\epsilon|$. Da

$$|M_\epsilon| = \int_{M_\epsilon} dx \leq \frac{1}{\epsilon} \int_{M_\epsilon} (D\mu)(x)\,dx = \frac{1}{\epsilon}\mu_{ac}(M_\epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon}\mu_{ac}(M_0) = 0,$$ folgt die Aussage $\square$

Daraus folgt, dass $M = \{x : 0 < (D\mu)(x)\}$ ein minimaler Träger von μ ist.

Thm 3.27 in Teschl $\to$ allgemeiner für alle Pick-Fkt; diese haben die Form $a + bz + \int \frac{d\mu}{\lambda - z}$

Zusammenhang zwischen $D\mu$ und $\operatorname{Im} F$ bereits in Thm 3.2.10 (4) erklärt, nämlich $\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} F(E + i\epsilon)\,dE = \underbrace{d\mu_{ac}(E)}_{\equiv f(E)\,dE}$, d.h. $f(E) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} F(E + i\epsilon)$
$= D\mu(E)$ Lebesgue-f.ü.
man immer $D\mu$ existiert f.ü.
(mit Thm 3.2.11)

Außerdem folgt aus Thm 3.2.10 (4) und Lem 3.2.19, dass neben $M_{ac} = \{x : 0 < (D\mu)(x) < \infty\}$ auch $M_{ac} = \{x : 0 < \operatorname{Im} F(x) < \infty\}$ ein minimaler Träger von μ_{ac} ist.

Schließlich folgt aus ~~Thm 3.2.18 (2) und~~ Thm 3.2.17 Thm 3.2.18 (2), ~~das~~ wieder Thm 3.2.10 (2), d.h. $\{x : \lim_{\epsilon \to 0} F(x + i\epsilon) = \infty\}$ ist ein Träger für μ_s.

3.2.17 : $\mu \perp Leb \Leftrightarrow \underbrace{D\mu}_{= \lim \operatorname{Im} F(x+i\epsilon)} = 0$ Lebesgue-f.ü.
f.ü. (Leb)

3.2.18 : μ_s auf $\{x : (D\mu)(x) = \infty\}$ getragen

Insb. folgt, dass $\mu \ll Leb.$, falls $\operatorname{Im} F(x + i0) < \infty$ $\underline{\forall}$ $x \in \mathbb{R}$.

Insgesamt folgt also, dass $M := M_{ac} \cup M_s = \{x : \operatorname{Im} F(x + i0) > 0\}$ ein Träger für μ.

Jetzt endlich zum topologischen Träger / Spektrum von μ

Prop 3.2.20 $\sigma(\mu) = \operatorname{supp} \mu = \overline{M}$, $\quad M = \{x : \lim_{\epsilon \to 0} F(x+i\epsilon) > 0\}$

Pf $F(z) = \int \frac{d\mu}{\lambda - z}$ ist für $z \notin \sigma(\mu)$ holomorph, d.h. $\operatorname{Im} F(\operatorname{Re}(z) + i0) = 0$ auch für solche z mit $\operatorname{Re}(z) \notin \sigma(\mu)$ $\Rightarrow$ $M \subseteq \sigma(\mu)$ und da $\sigma(\mu) = \overline{\sigma(\mu)}$

$\overline{M} \subseteq \sigma(\mu)$

Zu $\sigma(\mu) \subseteq \overline{M}$: wir haben eben gesehen, dass M ein Träger für μ ist,

d.h. für ~~$\lambda \in \mathbb{R} \cap \sigma$~~ $\lambda \in \sigma(\mu)$ gilt

$$0 < \mu((\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)) = \mu(M \cap (\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)) \quad \forall \epsilon > 0$$

Wir können also eine Folge $\lambda_n \in (\lambda - \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n}) \cap M$ finden, die in M gegen λ konvergiert. D.h. aber $\sigma(\mu) \subseteq \overline{M}$. ☐

In Thm 3.2.10 haben wir bereits gesehen, dass $M_p = \{x : \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \operatorname{Im} F(x + i\epsilon) > 0\}$ gerade die Menge aller Atome von μ sind, sprich $\mu(\{E_0\}) = \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \operatorname{Im} F(E_0 + i\epsilon)$

$\Rightarrow \quad \sigma(\mu_{pp}) = \overline{M_p}$

Für $\sigma(\mu_{ac})$ erinnern wir an den wesentlichen Abschluß einer Borelmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

$$\overline{\Omega}^{ess} := \{\lambda \in \mathbb{R} : |(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon) \cap \Omega| > 0 \ \forall \epsilon > 0\}.$$

Bem $\overline{\Omega}^{ess}$ ist abgeschlossen, wobei ~~d.h.~~ es passieren kann ~~sein~~, dass $\Omega \not\subseteq \overline{\Omega}^{ess}$, z.B. dadurch, dass isolierte Punkte / Singletons verschwinden!

D.h. der gewöhnliche Abschluss und der wesentliche Abschluß stimmen i.A. nicht überein, da $\overline{\Omega} \supseteq \Omega$.

Prop 3.2.21 $\sigma(\mu_{ac}) = \overline{M_{ac}}^{ess}$, wobei $M_{ac} = \{x \in \mathbb{R} : 0 < \operatorname{Im} F(x + i0) < \infty\}$

Pf Beobachte, dass $0 < \mu_{ac}((\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)) = \mu_{ac}((\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon) \cap M_{ac})$

$$\Leftrightarrow 0 < |(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon) \cap M_{ac}|$$

3.3 Einige "dynamische" Ergebnisse

(Überlebens-WS)
Recurrence probability $|(\psi, e^{itH}\psi)|^2 \overset{\text{spec thm}}{=} \left| \int d\mu_\psi(\lambda)\, e^{it\lambda} \right|^2 = |\hat{\mu}_\psi(t)|^2$

$\|$

FT vom Spektralmaß im Zst ψ

Prop 3.3.1 Sei μ ein pos. WS Borelmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \Rightarrow$ (1) $\widehat{\mu_{ac}}(t) \in C_*^0$ (stetig und im Unendlichen verschwindend, $\lim_{t \to \pm\infty} \hat{\mu}(t) = 0$.

(2) $|\hat{\mu}(t) - \hat{\mu}(t-\epsilon)| \leq \int d\mu(\lambda)\, |1 - e^{i\epsilon\lambda}|$

d.h. $\hat{\mu}(t)$ ist glm. stetig.

Bew Riemann-Lebesgue / major. Konv.

Prop 3.3.2 (Wiener) Sei μ ein pos. WS-Borelmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

$$\Rightarrow \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\hat{\mu}(t)|^2 dt = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} |\mu(\{\lambda\})|^2$$

Bem (1) In QM bedeutet das, dass über lange Zeiten die Zst. aus dem stetigen Spektrum (in einem gemittelten ((Cesaro)-Sinne) dispergieren und nur noch Zst., die zu Eigenwerten (ob diskret oder nicht!) überbleiben. Diese werden als gebundene Zst. bezeichnet

(2) Für isolierte EW kann die Proj. auf den zugehörigen EV mittels Riesz (d.h. Cauchy + Spektralsatz) $P(\{\lambda\}) = |\psi_\lambda\rangle\langle\psi_\lambda| = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda - z| = \epsilon} (H-z)^{-1} dz$ geschrieben, wobei $\epsilon \ll 1$ so klein, dass $\{z : |\lambda - z| = \epsilon\}$ nur λ umzirkelt.

Für nicht-isolierte, z.B. eingebettete EW geht das nicht mehr und Wiener kann in dem Fall als Ersatz gesehen werden.

Vgl. mit Katos "mean ergodic thm"

$$P(\{\lambda\}) = \operatorname*{s-lim}_{t_2 - t_1 \to \infty} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} e^{it(H-\lambda)} dt$$

$$\mu_\psi(\{\lambda\}) = \lim_{t_2 - t_1 \to \infty} \underbrace{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\int d\mu_\psi(E)\, e^{it(E-\lambda)}}_{\widehat{\mu_\psi}(t)\, e^{-it\lambda}}}_{(\widehat{\mu_\psi}\, 1_{[t_1, t_2]})^\vee(\lambda)}$$

Bf (Prop 3.3.2)

$$\frac{1}{T}\int_0^T |\hat\mu(t)|^2 dt = \iint_{\mathbb{R}\mathbb{R}} \Big(\overbrace{\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T e^{it(\lambda-\lambda')}dt}_{= \frac{e^{iT(\lambda-\lambda')}-1}{T(\lambda-\lambda')} \xrightarrow{T\to\infty} \delta_{\lambda,\lambda'}}}^{\leq 1}\Big) d\mu(\lambda)\, \overline{d\mu(\lambda')}$$

$$\xrightarrow[T\to\infty]{\text{majorisiert}} \iint \delta_{\lambda\lambda'}\, d\mu(\lambda)\,\overline{d\mu(\lambda')} = \int \overline{d\mu(\lambda')}\ \mu(\{\lambda'\})$$

$$= \sum_\lambda |\mu(\{\lambda\})|^2$$

(μ_c gibt keine Masse auf Atome) $\square$

Bisher haben wir Lebesgues Zerlegungsatz immer benutzt, um ac-Teil von μ bzgl. Lebesgue zu extrahieren.
Wir hätten allerdings auch ac bzgl. Hausdorffmaßen extrahieren können
→ Theorie von Rogers und Taylor; angewandt von Y. Last, um dynamische Eigenschaften von Zst. aus σ_{sc} zu verstehen ($H_0 \to$ Zählmaß, $H_1 \to$ Lebesguemaß)

$\longrightarrow$ $d\mu = d\mu_{\alpha s} + d\mu_{\alpha c}$, wobei $\mu_{\alpha s}$ singulär bzgl H_α (α-dim Hausdorff) ($\mu_\alpha(S)=0$ falls $H_\alpha(S)>0$)
$\mu_{\alpha c}$ stetig bzgl H_α, d.h. $\mu_{\alpha c}$ gibt keine Masse auf Mengen ~~der~~ E mit $H_\alpha(E)=0$

($\alpha = 1 \Rightarrow$ Lebesgue und $\mu_{\alpha c} = \mu_{ac}$, $\mu_{\alpha s} = \mu_s$)
($\alpha = 0 \Rightarrow d\mu_{\alpha s} = 0 \Rightarrow d\mu = d\mu_c + d\mu_{pp}$ ~~[illegible]~~)

Def 3.3.3 Sei $\mu \geq 0$ ein VS-Borelmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $\alpha \in [0,1]$. Dann heißt μ glm.-α-Hölderstetig (UαH), falls für alle Intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $|I| \leq 1$ gilt, dass $\mu(I) \lesssim |I|^\alpha$.

$\alpha = 0 \to$ keine zusätzliche Information; Bedingung wird sogar für reine Punktmaße erfüllt

$\alpha = 1 \Rightarrow \mu \ll$ Lebesgue

Prop 3.3.4 (Last-Thm 4.2) (Rogers-Taylor) Sei μ ein VS-Borelmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\alpha \in [0,1]$
~~W~~ $\Rightarrow$ μ ist α-stetig $\Leftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0$ gibt es zwei zueinander singuläre Borelmaße μ_1^ϵ, μ_2^ϵ mit $d\mu = d\mu_1^\epsilon + d\mu_2^\epsilon$, wobei μ_1^ϵ ist UαH und $\mu_2^\epsilon(\mathbb{R}) < \epsilon$.

D.h. α-stetige Maße sind Grenzwerte (in geeigneter Topologie) von UαH-Maßen

Thm 3.3.5 (Strichartz 1990, sh. auch Last Thm 2.5, 3.1)

Sei μ ein WS-Borelmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, ~~welches UαH für ein~~ $\alpha \in [0,1]$

(1) Falls μ UαH, dann gilt für alle $T > 0$ $\quad \frac{1}{T}\int_0^T dt\, |\hat{\mu}(t)|^2 \lesssim T^{-\alpha}$.

(2) Falls $\frac{1}{T}\int_0^T dt\, |\hat{\mu}(t)|^2 \lesssim T^{-\alpha}$ $\forall T > 0$, dann ist μ ein $U\frac{\alpha}{2}H$-Maß.

3.4 Einige

3.4 Lokale L^p-Normen der Poisson-Transformierten von μ ($\to$ Simon 1995)

Sei μ ein positives Borelmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit $\int \frac{d\mu(\lambda)}{1+|\lambda|} < \infty$, wobei für die Diskussion hier auch $\int \frac{d\mu}{1+\lambda^2} < \infty$ genügt.

Upshot $\quad \int_a^b |\mathrm{Im}\, F(x+i\epsilon)|^p dx$ ist sensitiv für $d\mu_s$ ~~wahrend~~ wenn $p > 1$,

wohingegen μ_s irrelevant ist, wenn $p < 1$

Genauer Lokale L^p-Integrierbarkeit gibt an, ob $\mu_s = 0$ $(p > 1)$

oder $\mu_{ac} = 0$ $(p < 1)$ $\quad$ L^p-Beschränktheit d. Maximalfkt

Thm 3.4.1 Sei $p > 1$ und angenommen $\sup_{0<\epsilon<1} \int_a^b |\mathrm{Im}\, F(x+i\epsilon)|^p dx < \infty$. Sei $\mu = g\,dx + \mu_s$.

$$\Rightarrow \underbrace{d\mu\big|_{[a,b)}}_{\equiv \mathbb{1}_{(a,b)}\, d\mu} = g(x)\,dx, \text{ ~~für ein~~ } g \in L^p(a,b), \text{ also ac auf } (a,b)$$

und $\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\, F(x+i\epsilon) \xrightarrow[L^p]{\epsilon\to 0} g(x)$ in $L^p([c,d])$ $\forall [c,d] \subset (a,b)$

Ist umgekehrt $[a,b] \subseteq (e,f)$ und μ ist ac auf (e,f), und $g \in L^p(e,f)$, dann gilt $\sup_{0<\epsilon<1} \int_a^b |\mathrm{Im}\, F(x+i\epsilon)|^p dx < \infty$

Beweis Sei $d\mu_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\, F(x+i\epsilon)$, dann gilt (Thm 3.2.10 (1)) $d\mu_\epsilon \to d\mu$, d.h.

$\int f(x)\,d\mu_\epsilon(x) \longrightarrow \int f(x)\,d\mu(x)$, $f \in C_c^0(\mathbb{R})$. Damit folgt, wenn $\mathrm{supp}\, f \subseteq (a,b)$

$$\left|\int f\,d\mu\right| = \lim_{\epsilon\to 0}\left|\int f\,d\mu_\epsilon\right| \leq \overline{\lim_{\epsilon\to 0}}\, \|f\|_{L^{p'}(a,b)} \cdot c = \|f\|_{p'} \cdot c, \text{ wobei}$$

$$c = \sup_{0<\epsilon<1} \int_a^b |\mathrm{Im}\, F(x+i\epsilon)|^p$$

$\Rightarrow$ Das Funktional $\begin{array}{l} L^{p'}(a,b) \to \mathbb{C} \\ f \mapsto \int f\,d\mu \end{array}$ ist beschränkt, d.h. $\mathbb{1}_{(a,b)}\, d\mu = \tilde{g}\,dx$

für ein $\tilde{g} \in L^p(a,b)$

Wir haben also $\int_a^b f(x)\,d\mu(x) = \int_a^b f(x)\cdot \tilde g(x)\,dx$, d.h. $\mu|_{(a,b)}$ ist ac bzgl. Lebesgue und $\tilde g(x) = g(x)$ (aus $d\mu = g\,dx + d\mu_s$) gilt f.ü., d.h. insbesondere $g \in L^p(a,b)$, und $d\mu|_{(a,b)} = g\,dx$

Wir zeigen nun noch $\forall\, [c,d] \subset (a,b)$, dass $\frac{1}{\pi}\operatorname{Im} F(x+i\epsilon) \to g$ in $L^p(c,d)$

Dazu zerlegen wir $F(z) = \int \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z} \equiv F_1(z) + F_2(z)$, wobei F_1 die Boreltransf. von $d\mu_1 \equiv \mathbb{1}_{(a,b)}\underbrace{d\mu}_{=g\,dx}$ und F_2 die Boreltransf. von $d\mu_2 = (1 - \mathbb{1}_{(a,b)})\,d\mu$

- $\frac{1}{\pi}\operatorname{Im} F_1(x+i\epsilon) = \frac{1}{\pi}\int_a^b \underbrace{\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + (x-\lambda)^2}}_{\uparrow\ \text{Poissonkern}} \underbrace{d\mu(\lambda)}_{= g\,dx} \xrightarrow{\epsilon \to 0} g$ in $L^p([c,d])$

- $\operatorname{Im} F_2(x+i\epsilon) = \int_{\mathbb{R}\setminus(a,b)} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + \underbrace{(x-\lambda)^2}_{>\delta}}\, d\mu(\lambda)$

$\leq \frac{\epsilon}{\operatorname{dist}((c,d), \mathbb{R}\setminus(a,b))} \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0$ pktweise f. $x \in (c,d) \subseteq (a,b)$

also insb. auch in $L^p(c,d)$

Die Umkehrung, sprich $\sup_{0<\epsilon<1} \int_a^b |\operatorname{Im} F(x+i\epsilon)|^p\,dx < \infty$ folgt analog, falls $d\mu|_{(e,f)} = d\mu_{ac}|_{(e,f)} \equiv g\,\mathbb{1}_{(e,f)}\,dx$ mit $g \in L^p(e,f)$, $(e,f) \supseteq (a,b)$

Im Prinzip ist die gesamte Aussage eine Manifestation des Prinzips d. glm. Beschränktheit ($T_\epsilon f \underset{L^p}{\to} Tf \iff \|T_\epsilon\|_{p,p} \leq 1\ \forall \epsilon \in (0,1)$ u. $T_\epsilon f \underset{f}{\to} Tf$

$\square$

Thm 3.4.2 (Lokales Wiener-Thm)

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon \cdot \int_a^b |\operatorname{Im} F(x+i\epsilon)|^2\, dx = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\mu(\{a\})^2 + \frac{1}{2}\mu(\{b\})^2 + \sum_{x\in(a,b)} \mu(\{x\}) \right)$$

~ Resolvente, nicht Zeitentwicklung

(Vgl $\int dt\, e^{-2\epsilon t} |\hat{\mu}(t)|^2 = \int d\lambda\, |F(\lambda+i\epsilon)|^2$

$$\| $$

$$\cancel{\int dt\, e^{-2\epsilon t} \left|\int d\mu(\xi)\, e^{it\xi}\right|^2}$$

$$= \cancel{\int\int d\mu(\xi)\, d\mu(\tilde\xi) \int dt\, e^{-2\epsilon t} e^{-t(2\epsilon + i\xi - i\tilde\xi)}}$$

$$= \int \frac{d\mu}{}$$

denn $e^{-\epsilon t}\hat{\mu}(t) = \int d\mu(\xi)\, e^{it\xi-\epsilon t} \equiv f_\epsilon(t)$

weshalb und $\hat{f}_\epsilon(\lambda) = \int_0^\infty dt\, d\mu\, e^{-i\lambda t + it\xi - \epsilon t}$

$$= \int d\mu(\xi)\, \frac{1}{\epsilon + i(\lambda-\xi)} = +i\int \frac{d\mu(\xi)}{(-\lambda+\xi)+i\epsilon} = i\, F(\lambda - i\epsilon)$$

$\Rightarrow$ mit Plancherel $\int |\hat{f}_\epsilon(\lambda)|^2 = \int |f_\epsilon(t)|^2 dt$

d.h. $\int_{\mathbb{R}} d\lambda\, |F(\lambda-i\epsilon)|^2 = \int_0^\infty dt\, e^{-2\epsilon t} |\hat{\mu}(t)|^2$

Pf $|\operatorname{Im} F(x+i\epsilon)|^2 = \epsilon^2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mu(t)\, d\mu(t')}{((x-t)^2+\epsilon^2)((x-t')^2+\epsilon^2)}$

$$\Rightarrow \epsilon\int_a^b |\operatorname{Im} F(x+i\epsilon)|^2 dx = \iint_{\mathbb{R}^2} g_\epsilon(t,t')\, d\mu(t)\, d\mu(t')$$

mit $g_\epsilon(t,t') = \int_a^b \frac{\epsilon^3}{((x-t)^2+\epsilon^2)((x-t')^2+\epsilon^2)}\, dx$

Beobachtunge: (1) $0 \le g_\epsilon(t,t') \le \pi \cdot \frac{1}{1+\operatorname{dist}(x,[a,b])^2} \le \pi$

(2) $\lim_{\epsilon\to 0} g_\epsilon(t,t') = 0$, falls $t \neq t'$, oder $t \notin [a,b]$ oder $t' \notin [a,b]$

(3) Falls $t = t' \in (a,b)$, dann $\lim_{\epsilon\to 0} g_\epsilon(t,t) = \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^3 \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2+\epsilon^2)^2} \overset{!}{=}$

($(a,b) \to (-\infty,\infty)$ ohne Umstände vergrößerbar

wg Beob. (2))

(4) Falls $t = t' = a$ oder $t = t' = b$, dann

$$\lim_{\epsilon \to 0} g_\epsilon(t,t) = \lim_{\epsilon\to 0} \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\epsilon^2)^2} = \pi/4$$

→ Behauptung folgt daraus, sowie majorisierter Konvergenz ☐

Bem 1) Thm bleibt gültig (mit ~~selbem~~ ähnlichem Beweis), wenn LHS durch

$$\epsilon^{p-1} \int_a^b |\operatorname{Im} F(x+i\epsilon)|^p dx \,, \quad p > 1$$ ersetzt wird.

Auf RHS werden dann $\left.\begin{array}{l} \pi \text{ durch } \int_{\mathbb{R}} dx\, (x^2+1)^{-p/2} \\ \mu(\{x\})^2 \text{ durch } \mu(\{x\})^p \end{array}\right\}$ ersetzt

[Genauer: zunächst für $p = 3, 4, 5, \dots$ zeigen und dann interpolieren, wobei μ_c beim Grenzwertnehmen keinen Beitrag erzeugt)

2) $\sup_{0<\epsilon<1} \epsilon^\alpha \int_a^b |\operatorname{Im} F(x+i\epsilon)|^2 < \infty$ für $0 < \alpha < 1$ sagt $\mu(A) = 0 \;\forall\, A \subseteq [a,b]$ mit $\dim_H A < 1-\alpha$ (→ del Rio, Jitomirskaya, Last, Simon 1996)

Thm 3.4.3 ($p<1$ über ac-Teil)

Sei $p<1$, dann $\lim_{\epsilon\to 0} \int_a^b \left|\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} F(x+i\epsilon)\right|^p dx = \int_a^b \left(\frac{d\mu_{ac}}{dx}\right)^p dx$

Pf (Wolff) $\mu = \mu_1 + \mu_2$, wobei $\mu_1(\mathbb{R}) < \infty$ und μ_2 erfüllt $\int \frac{d\mu_2}{H(\lambda)} < \infty$ und ist auf $\mathbb{R} \setminus [a,b]$ getragen

→ μ_2 liefert keinen Beitrag, da Imaginärteil ~~verschwindet~~, wenn von $F_2(x+i\epsilon)$ für $x \in (a,b)$ verschwindet

→ konzentrieren uns auf $\mu_1 \equiv \mu$. mit $\mu(\mathbb{R}) < \infty$.

Sei $M_\mu(x) := \sup_{t>0} \frac{1}{2t} \mu(x-t, x+t)$ die zu μ gehörende Hardy-Littlewood-Maximalfkt.

⇒ H die $L^1 \to L^{1,\infty}$-bdd ist, also $|\{x \in \mathbb{R} : M_\mu(x) > t\}| \lesssim t^{-1} \mu(\mathbb{R})$,

d.h. aber ~~$\int_a^b M_\mu(x)^p$~~ $\lesssim_{a,b} \left(\int_a^b M_\mu(x)^q \, dx\right)^{p/q}$ ~~$\int_0^\infty \alpha^{q-1} |\{x \in \mathbb{R} \cap (a,b) : M_\mu(x) > \alpha\}|$~~ $\sim t^{-1}$

~~Hölder~~ ~~layer cake~~

$$\int_a^b M_\mu(x)^p\,dx = \int_a^b M_\mu(x)^p \big(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{layer-cake}}}{\mathbb{1}_{M_\mu > t}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{easy}}}{\mathbb{1}_{M_\mu < t}} \big)\,dx\,, \qquad t<\infty \text{ fix}$$

$$= -t^p(a-b) + p\int_t^\infty \underbrace{|\{x\in(a,b) : M_\mu > \alpha\}|\,\alpha^{p-1}}_{\lesssim\ \alpha^{p-2}}\,d\alpha \ \leq C_{a,b,t} < \infty$$

Stein 1970, p. 62, 63

Außerdem gilt $\frac{1}{\pi}|\mathrm{Im}\,F(x+i\epsilon)| \leq M_\mu(x)\ \ \forall \epsilon\geq 0,\ \overset{x\in\mathbb{R}}{\cancel{x\in(a,b)}}$ sowie (Thm 3.2.10)

$\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\,F(x+i\epsilon) \longrightarrow \frac{d\mu_{ac}}{dx}(x)$ für Lebesgue-f.ü. x, d.h.

$\int_a^b \left|\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\,F(x+i\epsilon)\right|^p \longrightarrow \int_a^b \left(\frac{d\mu_{ac}}{dx}\right)^p dx$ folgt aus majorisierter Konvergenz ▨

$\hookrightarrow\ |(\varphi_\epsilon * f)(x)| \leq A\,(Mf)(x),\quad A = \int \psi(x)\,dx,\quad \psi(|x|) := \sup_{|y|\geq|x|} |\varphi(y)|$ (langsamst abfallende Majorante)