Seminar zu Streutheorie

October 13, 2020

Geplanter Termin: Montags um 17.00 Uhr, ab dem 09.11.2020, außer den ersten Montagen des Monats.

Die Aufteilung der Themen (insbesondere der Punkte 1-3) ist bewusst fein gehalten, sodass einzelne Punkte auch kombiniert oder weggelassen werden können.

1. Einführung in Fourierrestriktion. Siehe z.B. die Notizen von Tao [16, Vorlesung 1], oder seinen Übersichtsartikel [18, Abschnitte 1-4] (siehe auch [17] für eine umfassendere Version), sowie die leserfreundliche Einführung von Stovall [14].

   (a) Was ist das Problem? Vielleicht kurze Verbindung zu anderen Themen wie Kakeya, Strichartz, Bochner–Riesz?

   (b) Restriktions- und Erweiterungsoperator

   (c) Notwendige Bedingungen und die Restriktionsvermutung

   (d) Kann auf Hyperebenen restringiert werden? (Bedeutung der Krümmung)

   (e) Erinnerung an klassisches Spurlemma für $f \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^d)$ und uniforme Sobolewabschätzung (a.k.a. Grenzabsorptionsprinzip), siehe z.B. Reed–Simon [10, Abschnitt XIII.6-8] (insbesondere aber Abschnitt XIII.6) aber auch Taos Blogeintrag `https://terrytao.wordpress.com/2011/04/21/the-limiting-absorption-principle/`

2. Tomas–Stein-Theorem

   (a) Zunächst kompakte, glatte Hyperflächen mit nirgends verschwindender Gauss-Krümmung. Dazu zunächst punktweise Abschätzung an Fouriertransformation des Flächenmaßes mittels oszillierender Integrale, siehe z.B. Stein [12, Abschnitte XIII.1-3].

   (b) Der erste Beweis von Stein (nicht veröffentlicht, siehe aber z.B. Stein [12, Abschnitt XIII.4] oder Tao [16, Vorlesung 2]) mittels Hardy–Littlewood–Sobolew und Marcinkiewicz-Interpolation?

   (c) Der Beweis von Tomas [19] mittels dyadischer Zerlegung des Integralkerns und Riesz–Thorin-Interpolation (siehe ebenfalls [16, Vorlesung 2])

(d) Der Beweis von Stein mittels komplexer Interpolation, siehe Stein [11, Theorem 10], Stein–Shakarchi [13, Kapitel 8, Theorem 5.2], oder Frank–Sabin [4, Theorem 2]

(e) Tomas–Stein für Spurideale, siehe Frank–Sabin [4, Proposition 1, Theorem 2]

(f) Tomas–Stein-Theorem für nicht-kompakte, quadratische Hyperflächen und Verbindung zu PDE, siehe Strichartz [15] oder Frank–Sabin [4, Theorem 3]

3. Zusammenhang mit uniformen Sobolewabschätzungen (a.k.a. Grenzwertabsorptionsprinzipien) der Art

$$\|(-\Delta - z)^{-1}\|_{p\to p'} \lesssim |z|^{-d/2+d/p-1}, \qquad p \in \left(\frac{2d}{d+2}, \frac{2(d+1)}{d+3}\right]. \qquad (1)$$

Diese implizieren Tomas–Stein, denn $(-\Delta-\lambda-i\epsilon)^{-1}-(-\Delta-\lambda+i\epsilon)^{-1} \to 2\pi i\delta(-\Delta - \lambda)$, siehe Kenig–Ruiz–Sogge [9, Theorem 2.3] (oder Frank–Simon [5]). Der Beweis ähnelt sehr stark dem Beweis von Strichartz Verallgemeinerung des Tomas–Stein-Theorems. Darüberhinaus zeigt die Restriktionsvermutung (genauer gesagt, das Gegenbeispiel von Knapp), dass die gleichmäßigen Sobolewabschätzungen (1) optimal sind in dem Sinne, dass p nicht größer sein kann.

(Einfache und schöne Anwendung von gleichmäßigen Sobolewabschätzung für Lieb–Thirring für nicht-selbstadjungierte Schrödingeroperatoren, siehe Frank [3].)

4. Hintergrund zu Streutheorie, siehe Cycon–Froese–Kirsch–Simon [2, Kapitel 4 und 5] und Yafaev [20, Einleitung und Kapitel 0]

5. Anwendung von Tomas–Stein im Rahmen des Zwei-Körper-Streuproblems mit L^p-Potentialen nach Ionescu–Schlag [8] (entspricht kurzreichweitiger Streutheorie, da die gewöhnlichen Wellenoperatoren hier tatsächlich existieren). Hier werden im Wesentlichen die Argumente von Agmon–Hörmander [1] (siehe auch Hörmander [7, Kapitel XIV]) für Potentiale, die – moralisch – schneller als $|x|^{-1-\epsilon}$ abfallen, und auf dem klassischen Spurlemma basieren, adaptiert.

6. N-Teilchen-Streuung, siehe Graf [6]

References

[1] S. Agmon and L. Hörmander. Asymptotic properties of solutions of differential equations with simple characteristics. *J. Analyse Math.*, 30:1–38, 1976.

[2] Hans L. Cycon, Richard G. Froese, Werner Kirsch, and Barry Simon. *Schrödinger Operators with Application to Quantum Mechanics and Global Geometry*. Text and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1 edition, 1987.

[3] Rupert L. Frank. Eigenvalue bounds for Schrödinger operators with complex potentials. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 43(4):745–750, 2011.

[4] Rupert L. Frank and Julien Sabin. Restriction theorems for orthonormal functions, Strichartz inequalities, and uniform Sobolev estimates. *Amer. J. Math.*, 139(6):1649–1691, 2017.

[5] Rupert L. Frank and Barry Simon. Eigenvalue bounds for Schrödinger operators with complex potentials. II. *J. Spectr. Theory*, 7(3):633–658, 2017.

[6] Gian Michele Graf. Asymptotic completeness for N-body short-range quantum systems: a new proof. *Comm. Math. Phys.*, 132(1):73–101, 1990.

[7] Lars Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. II*, volume 257 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1983. Differential Operators with Constant Coefficients.

[8] Alexandru D. Ionescu and Wilhelm Schlag. Agmon-Kato-Kuroda theorems for a large class of perturbations. *Duke Math. J.*, 131(3):397–440, 2006.

[9] C. E. Kenig, A. Ruiz, and C. D. Sogge. Uniform Sobolev inequalities and unique continuation for second order constant coefficient differential operators. *Duke Math. J.*, 55(2):329–347, 1987.

[10] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics*, volume 4: Analysis of Operators. Academic Press, New York, 1 edition, 1978.

[11] E. M. Stein. Oscillatory integrals in Fourier analysis. In *Beijing Lectures in Harmonic Analysis (Beijing, 1984)*, volume 112 of *Ann. of Math. Stud.*, pages 307–355. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1986.

[12] Elias M. Stein. *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, volume 43 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III.

[13] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Functional Analysis*, volume 4 of *Princeton Lectures in Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2011. Introduction to further topics in analysis.

[14] Betsy Stovall. Waves, spheres, and tubes: A selection of Fourier restriction problems, methods, and applications. *Notices Amer. Math. Soc.*, 66(7), Aug 2019.

[15] Robert S. Strichartz. Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations. *Duke Math. J.*, 44(3):705–714, 1977.

[16] Terence Tao. Lecture notes: Restriction theorems and applications. Available at `https://www.math.ucla.edu/~tao/254b.1.99s/`, 1991.

[17] Terence Tao. Recent progress on the restriction conjecture. *arXiv Mathematics e-prints*, page math/0311181, November 2003.

[18] Terence Tao. Some recent progress on the restriction conjecture. In *Fourier Analysis and Convexity*, Appl. Numer. Harmon. Anal., pages 217–243. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004.

[19] Peter A. Tomas. A restriction theorem for the Fourier transform. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 81:477–478, 1975.

[20] D. R. Yafaev. *Mathematical Scattering Theory*, volume 158 of *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. Analytic Theory.