Institut für Analysis und Algebra
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Wintersemester
2019/20

Partielle Differentialgleichungen 2
9. Übungsblatt

Ausgabe am 6.1.2020, Abgabe am 13.1.2020 vor der Vorlesung

Aufgabe 9.1 (15 Punkte)

1. Zeigen Sie die Hardy–Littlewood–Sobolew-Ungleichungen

$$\|f * |\cdot|^{-\gamma}\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{d,p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

für $0 < \gamma < d$, $1 < p < q < \infty$, $1/q = 1/p - (d-\gamma)/d$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und

$$|\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)|x-y|^{-\gamma}h(y)\,dx\,dy| \lesssim_{d,\gamma,p} \|f\|_p\|h\|_r \tag{1}$$

für $0 < \gamma < d$, $1 < p, r < \infty$, $1/r + [1/p + (\gamma - d)/d] = 1$ und $h \in L^r(\mathbb{R}^d)$. (Anleitung: Betrachten Sie zunächst $f * |\cdot|^{-\gamma}(x)$ punktweise, indem Sie die Faltung in $|x-y| < R$ und $|x-y| > R$ zerlegen. Behandeln Sie den $|x-y| > R$-Teil mit der Hölderungleichung und beschränken Sie den $|x-y| < R$-Teil mit Hilfe der *Hardy–Littlewoodschen Maximalfunktion*

$$(Mf)(x) = \sup_{B_x(R)} \frac{1}{B_x(R)} \int_{B_x(R)} |f(y)|\,dy\,,$$

wobei $B_x(R) = \{y \in \mathbb{R}^d : |x-y| \le R\}$. Dazu dürfen Sie folgendes Resultat verwenden.

Lemma 0.1. *Sei $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und setze $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d}\varphi(x/\varepsilon)$. Angenommen die langsamst abfallende, radiale Majorante von φ ist integrierbar; sprich, sei $\psi(x) = \sup_{|y|\ge|x|} |\varphi(y)|$, dann nehmen wir $\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\,dx = A < \infty$ an. Dann gilt mit diesem A, dass $\sup_{\varepsilon>0} |f * \varphi_\varepsilon)(x)| \le A(Mf)(x)$ für $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $1 \le p \le \infty$.*

Verwenden Sie schließlich die Tatsache, dass $Mf \in L^p(\mathbb{R}^d)$ mit $\|Mf\|_p \lesssim_p \|f\|_p$ für alle $1 < p \le \infty$ gilt.)

2. Zeigen Sie mittels Dualität, dass die Sobolewungleichung

$$\|f\|_q^2 \lesssim_d \|\nabla f\|_2^2$$

für $d \ge 3$, $f \in H^1(\mathbb{R}^d) \cap L^q(\mathbb{R}^d)$ und $q = 2d/(d-2)$ aus der HLS-Ungleichung (1) folgt. (Hinweis: Erinnern Sie sich an die Fouriertransformation von $|\xi|^{-\alpha}$ für $0 < \alpha < d$ aus Aufgabe 3.1.)

Bemerkungen: (1) Wegen des Integralkerns von $|p|^{-d+\gamma}$ für $\gamma < d$ wird die HLS-Ungleichung manchmal auch "fractional integration lemma" genannt.
(2) Lieb (1983) bestimmte die optimale Konstante in (1) für $p = r = 2d/(2d-\gamma)$. Die Minimierer erfüllen $h \equiv \text{konst} \cdot f$ und

$$f(x) = A(\lambda^2 + |x-a|^2)^{-(2d-\gamma)/2}$$

für ein $A \in \mathbb{C}$, $0 \ne \lambda \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^d$.

(3) Mit einem Approximationsargument kann die Einschränkung $f \in L^q(\mathbb{R}^d)$ in der Sobolewungleichung, entfernt werden.
(4) Tatsächlich ist die HLS-Ungleichung nur ein Spezialfall. Definiert man die schwachen L^p-Räume als die Menge aller messbaren Funktionen f auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, sodass die Norm

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \inf\{c > 0 : d_f(\alpha) \le \frac{c^p}{\alpha^p}\} = \sup\{\gamma > 0 : \gamma d_f(\gamma)^{1/p}\}$$

mit $d_f(\alpha) = |\{x \in \Omega : |f(x)| > \alpha\}|$, dann sagt die schwache Young-Ungleichung

$$\|f * g\|_r \le \|f\|_{L^{p,\infty}} \|g\|_q$$

für $f \in L^{p,\infty}$, $g \in L^q$ und $1 + 1/r = 1/p + 1/q$. Mit der Rieszschen Umordnungsungleichung

$$|\int f(x)g(x-y)h(y)\,dx\,dy| \le |\int f^*(x)g^*(x-y)h^*(y)\,dx\,dy|\,,$$

und der Schranke $f^*(x) \le |x|^{-n/q}\|f\|_{q,\infty}$ folgt die schwache Young-Ungleichung aus (1), der layer-cake-Darstellung von $f * h$ und Dualität.

Aufgabe 9.2 (15 Punkte)
Für $d \ge 3$ und $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ sei

$$D(f,g) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\overline{f(x)}g(y)}{|x-y|^{d-2}}\,dx\,dy$$

die *Coulombenergie*. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

1. Angenommen, $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ erfüllt $D(|f|,|f|) =: D[|f|] < \infty$, dann ist $D[f] \ge 0$. Es gilt Gleichheit genau dann, wenn $f \equiv 0$.
2. Wenn darüberhinaus auch $D[|g|] < \infty$ ist, so gilt die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung $|D(f,g)|^2 \le D[f]D[g]$ mit Gleichheit genau dann, wenn $g \not\equiv 0$ und, wenn $f = cg$ für eine Konstante c.
3. Die Abbildung $f \mapsto D[f]$ ist streng konvex, sprich, wenn $f \ne g$ und $0 < \lambda < 1$, dann gilt
$$D[\lambda f + (1-\lambda)g] < \lambda D[f] + (1-\lambda)D[g]\,.$$

Aufgabe 9.3 (10 Punkte)
Sei $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ messbar und sphärisch symmetrisch, sprich $\rho(x) = \rho(|x|)$. Sei weiter

$$V(x) := \int \frac{\rho(y)}{|x-y|}\,dy\,.$$

Zeigen Sie das *Newtonsche Theorem*,

$$V(x) = V(|x|) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{\max\{|x|,|y|\}}\,dy\,.$$

Bestimmen Sie insbesondere $V(|x|)$ für

$$\rho(x) = \begin{cases} 1/(4\pi r_0^3/3) & \text{falls } |x| < r_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei $r_0 > 0$. (Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung

$$\frac{1}{|x-y|} = \sum_{\ell \geq 0} \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta)$$

mit $r_< = \min\{|x|, |y|\}$, $r_> = \max\{|x|, |y|\}$, θ dem Winkel zwischen x und y sowie den Legendre-polynomen $P_\ell(u)$ für $u \in [-1, 1]$. Verwenden Sie außerdem, dass die P_ℓ im L^2-Sinne orthogonal zueinander sind, sprich $\int_{-1}^{1} P_\ell(u) P_{\ell'}(u)\, du = 2/(2\ell+1)\ \delta_{\ell,\ell'}$ sowie $P_0(u) = 1$.)