Institut für Analysis und Algebra
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Wintersemester
2019/20

# Partielle Differentialgleichungen 2
# 8. Übungsblatt

Ausgabe am 16.12.2019, Abgabe am 6.1.2020 vor der Vorlesung

**Aufgabe 8.1** (10 Punkte)
Mit Hilfe von Plancherel (des Spektralsatzes) definieren wir Funktionen von $-\Delta$ über die Wärmeleitungskerndarstellung. Für $\alpha > 0$ ist insbesondere

$$(-\Delta+1)^{-\alpha} = a_\alpha \int_0^\infty \mathrm{e}^{t(\Delta-1)} t^\alpha \frac{dt}{t}$$

mit $a_\alpha = \pi^{-\alpha}\Gamma(\alpha)$ definiert. Im Folgenden seien $1 \leq p \leq q \leq \infty$ und

$$\alpha > \frac{d}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}).$$

1. Zeigen Sie, dass $(-\Delta+1)^{-\alpha}$ ein $L^p(\mathbb{R}^d) \to L^q(\mathbb{R}^d)$-beschränkter Operator ist. (Hinweis: Zeigen Sie $L^p \to L^q$-Schranken von $\mathrm{e}^{t\Delta}$, die man mit den Schranken des sechsten Blatts erhalten kann.)

2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ messbar und erfülle $|f(\xi)| \lesssim (1+|\xi|)^{-\alpha}$. Sei zudem $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$. Zeigen Sie $\|f(-\Delta)\psi\|_q \lesssim \|\psi\|_p$ für alle $\psi \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$.

**Aufgabe 8.2** (20 Punkte)
Sei $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

1. Seien $S : \mathcal{D}(S) \to \mathcal{H}$ und $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ lineare Operatoren. Sei $T$ zudem abgeschlossen und bijektiv. Angenommen, es gilt $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(S)$ mit $\|ST^{-1}\| < 1$. Zeigen Sie, dass dann auch $S+T$ abgeschlossen und bijektiv ist sowie die Gültigkeit der Neumann-Reihe

   $$(S+T)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} (-1)^n T^{-1}(ST^{-1})^n = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} (-1)^n (T^{-1}S)^n T^{-1}\,.$$

   Die Konvergenz ist in der Operatornormtopologie zu verstehen.

   Bemerkung: Die beiden Reihen sind offenbar identisch. Formal erhält man sie, indem man in

   $$(T+S)^{-1} = [T(1+T^{-1}S)]^{-1} = (1+T^{-1}S)^{-1}T^{-1}$$

   den Term $(1+T^{-1}S)^{-1}$ als geometrische Reihe schreibt.

2. Sei $V \in R$, der Rollnik-Klasse, und $H := H_0 + V := -\Delta + V$ definiert im Sinne quadratischer Formen mit Formbereich $H^1(\mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie für $E < 0$ die folgende Verallgemeinerung der Resolventenformel.

**Satz 0.1** (Tiktopoulos, Simon (1971)). *Für hinreichend negatives $E$ existiert $B(E) = (H_0-E)^{-1/2}(1+A_E)^{-1}(H_0-E)^{-1/2}$, wobei $A_E = (H_0-E)^{-1/2}V(H_0-E)^{-1/2}$. Darüberhinaus ist $B_E$ durch die Operatornormkonvergente Reihe*

$$B_E = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}U_n$$

*mit*

$$U_1 = (H_0 - E)^{-1}\,, \quad U_n = (H_0 - E)^{-1}(V(H_0 - E)^{-1})^{n-1}$$

*gegeben. Des Weiteren gilt $B_E = (H - E)^{-1}$.*

(Hinweise: Zeigen Sie zunächst die Endlichkeit von $\|A_E\|$ mit Hilfe der Tatsache

$$\|A_E\|^2 \leq \operatorname{Tr} A_E^* A_E = \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} |A_E(x,y)|^2\,dx\,dy.$$

Verwenden Sie dann die Argumente der vorigen Teilaufgabe.)

**Aufgabe 8.3** (10 Punkte)
Seien $H_0 : \mathcal{D}(H_0) \to \mathcal{H}$ ein nicht-negativer Operator und $V : \mathcal{D}(V) \to \mathcal{H}$ ein linearer Operator mit $\mathcal{D}(H_0) \subseteq \mathcal{D}(V)$. Zeigen Sie, dass $V$ genau dann $H_0$-beschränkt ist, wenn $a_0 := \lim_{E\to\infty} \|(H_0 + E)^{-1}V\|$ endlich ist. In diesem Fall ist $a_0$ das Infimum aller $a > 0$, für die

$$\exists\, b < \infty\ \forall\, \psi \in \mathcal{D}(H_0): \quad \|V\psi\| \leq a\|H_0\psi\| + b\|\psi\|$$

gilt. Man sagt auch „$a_0$ ist die $H_0$-Schranke von $V$“.