Institut für Analysis und Algebra
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Wintersemester
2019/20

Partielle Differentialgleichungen 2
Lösungsskizze zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 7.1 (20 Punkte)
Sei $\varphi \in \mathcal{D}(-\Delta) = H^2(\mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Ist $d \leq 3$, so ist φ stetig und beschränkt und für alle $a > 0$ gibt es $b = b(a)$, sodass

$$\|\varphi\|_\infty \leq a\| - \Delta\varphi\|_2 + b\|\varphi\|_2.$$

b) Ist $d \geq 4$ und $2 \leq q < 2d/(d-4)$, dann ist $\varphi \in L^q(\mathbb{R}^d)$ und für alle $a > 0$ gibt es $b = b(q, d, a)$, sodass

$$\|\varphi\|_q \leq a\| - \Delta\varphi\|_2 + b\|\varphi\|_2.$$

c) Sei $V \in L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$ reellwertig. Zeigen Sie, dass $-\Delta + V(x)$ wesentlich selbst-adjungiert auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ und selbst-adjungiert auf $\mathcal{D}(-\Delta) = H^2(\mathbb{R}^3)$ ist.

d) Seien $d \geq 4$ und $V \in L^p(\mathbb{R}^d)$ für ein $p > d/2$. Dann gilt die Folgerung aus c).

Beweis. a) Für unbestimmtes $a > 0$ ist dies ist gerade Aufgabe 2.2 b) des zweiten Übungsblatts. Wir zeigen nun, wie wir a beliebig klein machen können. Für $r > 0$ definieren wir $\hat{\varphi}_r(\xi) = r^d\hat{\varphi}(r\xi)$, dann ist $\|\hat{\varphi}_r\|_1 = \|\hat{\varphi}\|_1$, $\|\hat{\varphi}_r\|_2 = r^{d/2}\|\hat{\varphi}\|_2$ und $\|\xi^2\hat{\varphi}_r\|_2 = r^{d/2-2}\|\xi^2\hat{\varphi}\|_2$. Somit erhält man

$$\|\varphi\|_\infty \leq \|\hat{\varphi}\|_1 \lesssim r^{d/2-2}\|\xi^2\hat{\varphi}\|_2 + r^{d/2}\|\hat{\varphi}\|_2$$

für alle $r > 0$. Wählt man nun r entsprechend groß, so folgt die Behauptung.

b) Mit Hausdorff–Young (mit $1 = 1/p + 1/q$) und Plancherel müssen wir lediglich die zweite Ungleichung in

$$\|\varphi\|_q \leq \|\hat{\varphi}\|_p \leq a\|\xi^2\hat{\varphi}\|_2 + b\|\hat{\varphi}\|_2 = a\| - \Delta\varphi\|_2 + b\|\varphi\|_2$$

für $2 \leq q < 2d/(d-4)$, also für $2d/(d+4) < p \leq 2$ beweisen. Mit der Hölder Ungleichung ist

$$\|\hat{\varphi}\|_p^p \leq \|(1+\xi^2)^{-p}\|_r\|(1+\xi^2)^p|\hat{\varphi}|^p\|_s$$

für $1/r + 1/s = 1$. Wählt man nun $s = 2/p$, so ist mit der Dreiecksungleichung

$$\|(1+\xi^2)^p|\hat{\varphi}|^p\|_s = \left(\|(1+\xi^2)|\hat{\varphi}|\|_2\right)^p \leq \left(\|\hat{\varphi}\|_2 + \|\xi^2\hat{\varphi}\|_2\right)^p.$$

Andererseits ist $\|(1+\xi^2)^{-p}\|_r$ (mit $r = 2/(2-p)$) genau dann endlich, wenn $4p(2-p)^{-1} > d$, sprich $p > 2d/(d+4)$. Damit ist

$$\|\hat{\varphi}\|_p \leq a_1\left(\|\hat{\varphi}\|_2 + \|\xi^2\hat{\varphi}\|_2\right).$$

Mit obigem Skalierungstrick kann der Koeffizient von $\|\xi^2\hat{\varphi}\|_2$ wieder beliebig klein gemacht werden.

c) Da V reellwertig ist, ist der Multiplikationsoperator mit V auf dem maximalen Definitionsbereich

$$\mathcal{D}(V) = \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3) : V\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3)\}$$

selbst-adjungiert. Sei nun $V = V_1 + V_2$ mit $V_1 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ und $V_2 \in L^\infty$. Dann ist

$$\|V\varphi\|_2 \leq \|V_1\|_2\|\varphi\|_\infty + \|V_2\|_\infty\|\varphi\|_2,$$

das heißt es gilt $C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \subseteq \mathcal{D}(V)$. Nach Teilaufgabe a) gibt es für alle $a > 0$ ein $b = b(a) > 0$, sodass

$$\|\varphi\|_\infty \leq a\| - \Delta\varphi\|_2 + b\|\varphi\|_2$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Diese und vorige Ungleichung zusammen geben

$$\|V\varphi\|_2 \leq a\|V_1\|_2\| - \Delta\varphi\|_2 + (b + \|V_2\|_\infty)\|\varphi\|_2$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Daher ist V relativ $-\Delta$-beschränkt mit beliebig kleiner relativer Schranke $a > 0$ auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Da $-\Delta$ wesentlich selbstadjungiert auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ ist, ist wegen des Satzes von Kato und Rellich $-\Delta + V$ ebenfalls wesentlich selbst-adjungiert auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$.

d) Folgt aus $\|V\varphi\|_2 \leq \|V\|_p\|\varphi\|_q$ mit $1/2 = 1/p + 1/q$ sowie den Teilaufgaben b) (sprich $\varphi \in L^q$ für alle $2 \leq q < 2d/(d-4)$) und c).

□

Aufgabe 7.2 (20 Punkte)
Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Sei $V \in L^1 \cap L^2$. Dann ist $V \in R$ mit $\|V\|_R \leq \sqrt{3}(2\pi)^{1/3}\|V\|_1^{1/3}\|V\|_2^{2/3}$.

b) Sei $V \in R + L^\infty$ mit beschränktem Träger (sprich, es gibt ein $\rho > 0$, sodass $V(x) = 0$ für alle $|x| > \rho$). Dann ist $V \in R \cap L^1$. Insbesondere ist jedes $V \in R + L^\infty$ lokal integrierbar.

c) Sei $V \in L^1 \cap L^2$. Dann gilt für jedes $a > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{V(x)V(y)}{a^2 + |x-y|^2}\, dx\, dy = \pi \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\hat{V}(\xi)|^2}{|\xi|} \mathrm{e}^{-2\pi a|\xi|}\, d\xi\,.$$

d) Sei $0 \leq V \in L^1(\mathbb{R}^3)$. Dann ist $V \in R$ genau dann, wenn

$$\int \frac{|\hat{V}(\xi)|^2}{|\xi|}\, d\xi < \infty\,.$$

Falls $V \in R \cap L^1$, dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{V(x)V(y)}{|x-y|^2}\, dx\, dy = \pi \int \frac{|\hat{V}(\xi)|^2}{|\xi|}\, d\xi$$

selbst, wenn V nicht als positiv vorausgesetzt wird.

e) Sei $V \in R$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{V(x)V(y)}{|x-y|^2}\, dx\, dy \geq 0\,.$$

f) Sei $V \in R$. Zeigen Sie, dass es für alle $a > 0$ ein $b = b(a) > 0$ gibt, sodass
$$\langle \psi, |V|\psi\rangle \leq a\langle \psi, -\Delta\psi\rangle + b\|\psi\|^2$$
für $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ gilt.

Beweis. a) Sei $r > 0$ beliebig. Dann gelten
$$\int\limits_{|x-y|\geq r} \frac{|V(x)||V(y)|}{|x-y|^2}\,dx\,dy \leq \frac{\|V\|_1^2}{r^2}$$
und
$$\int\limits_{|x-y|\leq r} \frac{|V(x)|^2}{|x-y|^2}\,dx\,dy \leq 4\pi r\|V\|_2^2\,.$$
Letztere Ungleichung sagt, dass $|V(x)||x-y|^{-1} \in L^2$ und $|V(y)||x-y|^{-1} \in L^2$ als Funktionen auf $\{(x, y) : |x-y| \leq r\}$. Aus Cauchy–Schwarz folgt dann
$$\int\limits_{|x-y|\leq r} \frac{|V(x)||V(y)|}{|x-y|^2}\,dx\,dy \leq 4\pi r\|V\|_2^2\,.$$
Kombiniert man dies mit der ersten Abschätzung folgt
$$\|V\|_R^2 \leq \frac{\|V\|_1^2}{r^2} + 4\pi r\|V\|_2^2$$
für alle $r > 0$. Optimieren in $r > 0$ liefert $r = (\|V\|_1^2/(2\pi\|V\|_2^2))^{1/3}$ und damit die Behauptung.

b) Da jede kompakt getragene L^∞-Funktion in $L^{3/2}$ ist, ist sie wegen der Hardy–Littlewood-Sobolew-Ungleichung automatisch auch in R. Wir können daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit $V \in R$ annehmen. Da $\|V\|_R^2 < \infty$, folgt aus dem Satz von Fubini, dass $\int_{\mathbb{R}^3} |V(y)||x-y|^{-1}$ für ein $x \in \mathbb{R}^3$. Da $|x-y|^2 \leq |x|^2 + \rho^2$ auf dem Träger von $V(y)$ gilt, gilt entsprechend auch $\int |V(y)|\,dy < \infty$, sprich $V \in L^1(\mathbb{R}^3)$.

c) Mit dem Faltungssatz und Plancherel gilt für beliebiges $f, h \in L^2$ und $g \in L^1$ die Gleiccheit
$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \overline{f(x)}h(x-y)g(y)\,dx\,dy = \langle f, h * g\rangle = \langle \hat{f}, \hat{h}\hat{g}\rangle\,.$$
Setzt man nun $f = g = V$ und $h(k) = (k^2 + a^2)^{-1}$, folgt die Aussage aus Aufgabe 4.1 c), da
$$\hat{h}(\xi) = \pi\,\frac{\mathrm{e}^{-2\pi a|\xi|}}{|\xi|}\,.$$

d) Offenbar gilt die Gleichheit aus Teilaufgabe c) für alle $V \in L^1$ mit einem einfachen Grenzwertargument. Wenn $V \geq 0$ ist, haben beide Integranden einen monotonen Grenzwert für $a \searrow 0$, weshalb beide Seiten gleichzeitig endlich sind. Dies zeigt die erste Aussage. Wenn $V \in R$ ist, ist der Integrand der linken Seite der Behauptung von Aufgabe c) durch $|V(x)||V(y)||x-y|^{-2}$ beschränkt, weshalb der Grenzwert immer noch durchgeführt werden darf.

e) Sei $V_n \in L^1$ eine Folge abgeschnittener V's, sodass $V_n(x) \to V(x)$ punktweise und $|V_n(x)| \leq |V(x)|$. Dann folgt aus der vorigen Aufgabe

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{V(x)V(y)}{|x-y|^2}\, dx\, dy = \pi \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\hat{V}_n(\xi))|^2}{|\xi|}\, d\xi \geq 0\,.$$

f) Da $V \in R$, ist V auch lokal integrierbar und insbesondere ist $\langle \psi, V\psi\rangle < \infty$ für $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Unser Ziel ist es eine Schranke an $\||V|^{1/2}(-\Delta + b)^{-1/2}\|$ zu erhalten. Wegen $\|T\| = \|T^*\|$ ist dies äquivalent dazu, eine Schranke an $\|(-\Delta + b^2)^{-1/2}|V|^{1/2}\|$ zu finden. Wegen Teilaufgabe 4.1 c) gilt

$$((-\Delta + b^2)^{-1}|V|^{1/2}\psi)(x) = \pi \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{e}^{-2\pi b|x-y|}}{|x-y|}|V(y)|^{1/2}\psi(y)\, dy\,.$$

Zusammen mit der Rollnik-Bedingung zeigt dies, dass $(-\Delta + b^2)^{-1}|V|^{1/2}\psi \in \mathcal{D}(|V|^{1/2})$. Aus Cauchy–Schwarz folgt insbesondere

$$\langle \psi, |V|^{1/2}(-\Delta + b^2)^{-1}|V|^{1/2}\psi\rangle \leq \pi\|\psi\|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|V(x)||V(y)|\mathrm{e}^{-2\pi b|x-y|}}{|x-y|^2}\, dx\, dy\right)^{1/2}$$

Für $b \to \infty$ konvergiert der Integrand auf der rechten Seite monoton gegen 0. Für gegebenes $a > 0$, können wir also $b = b(a)$ so groß wählen, dass die linke Seite der letzten Formel durch $a^2\|\psi\|^2$ beschränkt ist, sprich

$$\|(-\Delta + b^2)^{-1/2}|V|^{1/2}\psi\|_2 \leq a\|\psi\|$$

beziehungsweise

$$\||V|^{1/2}\psi\|^2 = \langle \psi, |V|\psi\rangle \leq a^2\langle \psi, (-\Delta + b^2)\psi\rangle\,,$$

was die Behauptung zeigt.

$\square$