Institut für Analysis und Algebra
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Wintersemester
2019/20

Partielle Differentialgleichungen 2
7. Übungsblatt

Ausgabe am 09.12.2019, Abgabe am 16.12.2019 vor der Vorlesung

Aufgabe 7.1 (20 Punkte)
In dieser Übung sollen Beispiele von Störungen selbstadjungierter Operatoren behandelt werden. Erinnern Sie sich an die Definition von relativer Beschränktheit abgeschlossener Operatoren des letzten Übungsblatts. Weiter heißt für einen abschließbaren Operator T ein Teilraum $D \subseteq \mathcal{D}(T)$ ein *determinierender Bereich (engl. core) von T*, wenn der Abschluß von $T|_D$ eine Fortsetzung von T ist; falls T abgeschlossen ist, ist dann $\overline{T|_D} = T = \overline{T}$. Ist $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, so ist jeder dichte Teilraum von $\mathcal{H}$ ein determinierender Bereich von T. Es gilt folgender

Satz 0.1 (Kato–Rellich). *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $A : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$ selbstadjungiert, $B : \mathcal{D}(B) \to \mathcal{H}$ symmetrisch und A-beschränkt mit relativer Schranke $a < 1$. Dann ist $A + B$ auf $\mathcal{D}(A)$ selbstadjungiert und auf jedem determinierenden Bereich von A wesentlich selbstadjungiert.*

Bemerkung: Falls die relative Schranke a beliebig klein gemacht werden kann, sagt man, dass *B infinitesimal klein bezüglich A ist* und schreibt manchmal $B \ll A$.
Sei $\varphi \in \mathcal{D}(-\Delta) = H^2(\mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Ist $d \leq 3$, so ist φ stetig und beschränkt und für alle $a > 0$ gibt es $b = b(a)$, sodass

$$\|\varphi\|_\infty \leq a\| - \Delta\varphi\|_2 + b\|\varphi\|_2.$$

b) Ist $d \geq 4$ und $2 \leq q < 2d/(d-4)$, so ist $\varphi \in L^q(\mathbb{R}^d)$ und für alle $a > 0$ gibt es $b = b(q, d, a)$, sodass

$$\|\varphi\|_q \leq a\| - \Delta\varphi\|_2 + b\|\varphi\|_2.$$

c) Sei $V \in L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$ reellwertig. Zeigen Sie, dass $-\Delta + V(x)$ wesentlich selbstadjungiert auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ und selbstadjungiert auf $\mathcal{D}(-\Delta) = H^2(\mathbb{R}^3)$ ist. (Hinweis: Verwenden Sie, dass $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ ein determinierender Bereich von $-\Delta$ ist.)

d) Seien $d \geq 4$ und $V \in L^p(\mathbb{R}^d)$ für ein $p > d/2$. Dann gilt die Folgerung aus c).

Aufgabe 7.2 (20 Punkte)

Definition 0.2 (Rollnik-Potential). *Eine messbare Funktion $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ heißt* Rollnik Potential*, wenn*

$$\|V\|_R^2 := \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|V(x)||V(y)|}{|x-y|^2}\, dx\, dy < \infty\,.$$

Die Menge aller Rollnik-Potentiale wird mit R bezeichnet.

Bemerkung 0.3. Es stellt sich heraus, dass R ein unter der Rollnik-Norm $\|\cdot\|_R$ vollständiger Vektorraum ist. Darüberhinaus folgt aus der Hardy–Littlewood–Sobolew-Ungleichung

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|f(x)||h(y)|}{|x-y|^\lambda}\,dx\,dy \lesssim_{p,r,\lambda,d} \|f\|_p\|h\|_r$$

(für alle $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$, $h\in L^r(\mathbb{R}^d)$ mit $1/p+1/r+\lambda/d=2$ und $1<p,r<\infty$), dass $L^{3/2}\subseteq R$. Insbesondere ist $r^{-\alpha}\in R+L^\infty$ für $\alpha<2$.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Sei $V\in L^1\cap L^2$. Dann ist $V\in R$ mit $\|V\|_R\le\sqrt{3}(2\pi)^{1/3}\|V\|_1^{1/3}\|V\|_2^{2/3}$.

b) Sei $V\in R+L^\infty$ mit beschränktem Träger (sprich, es gibt ein $\rho>0$, sodass $V(x)=0$ für alle $|x|>\rho$). Dann ist $V\in R\cap L^1$. Insbesondere ist jedes $V\in R+L^\infty$ lokal integrierbar. (Hinweis: Verwenden Sie die Hardy–Littlewood–Sobolew-Ungleichung.)

c) Sei $V\in L^1\cap L^2$. Dann gilt für jedes $a>0$,

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{V(x)V(y)}{a^2+|x-y|^2}\,dx\,dy=\pi\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|\hat{V}(\xi)|^2}{|\xi|}\mathrm{e}^{-2\pi a|\xi|}\,d\xi\,.$$

(Hinweis: Erinnern Sie sich an das vierte Übungsblatt.)

d) Sei $0\le V\in L^1(\mathbb{R}^3)$. Dann ist $V\in R$ genau dann, wenn

$$\int\frac{|\hat{V}(\xi)|^2}{|\xi|}\,d\xi<\infty\,.$$

Falls $V\in R\cap L^1$, dann gilt

$$\|V\|_R^2=\pi\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|\hat{V}(\xi)|^2}{|\xi|}\,d\xi$$

selbst, wenn V nicht als positiv vorausgesetzt wird.

e) Sei $V\in R$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{V(x)V(y)}{|x-y|^2}\,dx\,dy\ge 0\,.$$

(Hinweis: Verwenden Sie den vorigen Aufgabenteil.)

f) Sei $V\in R$. Zeigen Sie, dass es für alle $a>0$ ein $b=b(a)>0$ gibt, sodass

$$\langle\psi,|V|\psi\rangle\le a\langle\psi,-\Delta\psi\rangle+b\|\psi\|^2$$

für $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ gilt.