Institut für Analysis und Algebra
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Wintersemester
2019/20

Partielle Differentialgleichungen 2
6. Übungsblatt

Ausgabe am 02.12.2019, Abgabe am 09.12.2019 vor der Vorlesung

Aufgabe 6.1 (10 Punkte)
Sei $t > 0$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) $\|\mathrm{e}^{t\Delta} f\|_\infty \lesssim t^{-d/2}\|f\|_1$ für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

b) $\|\mathrm{e}^{t\Delta} f\|_p \leq \|f\|_p$ für alle $p \in [1, \infty]$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

c) $\|\mathrm{e}^{t\Delta} f\|_2 \lesssim t^{-d/4}\|f\|_1$ für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und $\|\mathrm{e}^{t\Delta} f\|_\infty \lesssim t^{-d/4}\|f\|_2$ für $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Aufgabe 6.2 (10 Punkte)
Sei $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, das im rechten Eintrag linear und im linken Eintrag antilinear ist. Analog versehen wir $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ mit dem Skalarprodukt

$$\begin{aligned}\langle\cdot,\cdot\rangle : (\mathcal{H} \times \mathcal{H}) \times (\mathcal{H} \times \mathcal{H}) &\to \mathbb{C}\\ ((\varphi_1, \varphi_2), (\psi_1, \psi_2)) &\mapsto \langle\varphi_1, \psi_1\rangle + \langle\varphi_2, \psi_2\rangle\end{aligned}$$

und mit der dadurch induzierten Norm

$$\begin{aligned}\|\cdot\| : \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\to [0, \infty)\\ (\varphi_1, \varphi_2) &\mapsto (\|\varphi_1\|^2 + \|\varphi_2\|^2)^{1/2}\end{aligned}$$

Zunächst gilt folgende Charakterisierung von Abgeschlossenheit.

Satz 0.1. *Sei $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ ein linearer Operator, dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

1. *$T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ ist abgeschlossen.*
2. *Für jede Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}(T)$ mit $\varphi_n \to \varphi$ und $T\varphi_n \to T\psi$ gilt $\varphi \in \mathcal{D}(T)$ und $T\varphi = \psi$.*
3. *Versehen mit der Graphennorm*

$$\begin{aligned}\|\cdot\|_T : \mathcal{D}(T) &\to [0, \infty)\\ \varphi &\mapsto (\|\varphi\|^2 + \|T\varphi\|^2)^{1/2}\end{aligned}$$

ist $(\mathcal{D}(T), \|\cdot\|_T)$ vollständig.

Wir möchten nun die Stabilität der Abgeschlossenheit von T unter Störungen untersuchen. Dazu müssen wir quantifizieren, was eine Störung überhaupt ist.

Definition 0.2. *Seien $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ und $S : \mathcal{D}(S) \to \mathcal{H}$ Operatoren. Dann heißt S* relativ T-beschränkt *genau dann, wenn*

- *$\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(S)$ und*
- *es gibt $a, b > 0$, sodass $\|S\psi\| \leq a\|T\psi\| + b\|\psi\|$*

für alle $\psi \in \mathcal{D}(T)$. In diesem Fall heißt

$$\inf\{a \geq 0 : \textit{Es gibt } b \geq 0, \textit{ sodass } \|S\psi\| \leq a\|T\psi\| + b\|\psi\| \textit{ für alle } \psi \in \mathcal{D}(T) \textit{ gilt}\}$$

die T-Schranke von S.

Zeigen Sie dann die folgenden Aussagen.

a) Angenommen, es gilt $\|S\psi\|^2 \leq a^2\|T\psi\|^2 + b^2\|\psi\|^2$. Dann gilt $\|S\psi\| \leq a\|T\psi\| + b\|\psi\|$.

b) Angenommen, es gilt $\|S\psi\| \leq a\|T\psi\| + b\|\psi\|$. Dann gilt $\|S\psi\|^2 \leq a^2(1+\varepsilon^2)\|T\psi\|^2 + b^2(1+\varepsilon^{-1})\|\psi\|^2$ für alle $\varepsilon > 0$.

c) Angenommen, S sei ein T-beschränkter Operator mit T-Schranke < 1. Dann ist T genau dann abgeschlossen, wenn $T + S : \mathcal{D}(T) \cap \mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 6.3 (10 Punkte)
Seien $S : \mathcal{D}(S) \to \mathcal{H}$ und $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ bijektive Operatoren mit beschränkten Inversen $S^{-1}, T^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Ist $\mathcal{D}(S) \subseteq \mathcal{D}(T)$, so gilt $T^{-1} - S^{-1} = T^{-1}(S-T)S^{-1}$.

b) Ist $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(S)$, so gilt $T^{-1} - S^{-1} = S^{-1}(S-T)T^{-1}$.

c) Ist $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(S)$, so gilt $T^{-1} - S^{-1} = T^{-1}(S-T)S^{-1} = S^{-1}(S-T)T^{-1}$.

Seien nun $S : \mathcal{D}(S) \to \mathcal{H}$ und $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ abgeschlossene Operatoren in $\mathcal{H}$. Zeigen Sie die Resolventenformeln.

a) Für $w, z \in \rho(T)$ gilt

$$(T-z)^{-1} - (T-w)^{-1} = (z-w)(T-z)^{-1}(T-w)^{-1} = (z-w)(T-w)^{-1}(T-z)^{-1}\,.$$

b) Ist $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(T)$, dann gilt für $z \in \rho(T) \cap \rho(S)$,

$$(T-z)^{-1} - (S-z)^{-1} = (T-z)^{-1}(S-T)(S-z)^{-1} = (S-z)^{-1}(S-T)(T-z)^{-1}\,.$$

Zeigen Sie schließlich für einen abgeschlossenen Operator $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ die Abschätzung

$$\|(T-z)^{-1}\| \geq \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \sigma(T))}\,.$$

für alle $z \in \rho(T)$ mit Hilfe von

Satz 0.3 (Stabilität der stetigen Invertierbarkeit)**.** *Seien $S : \mathcal{D}(S) \to \mathcal{H}$ und $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ lineare Operatoren. Angenommen T ist abgeschlossen und beschränkt invertierbar und es gilt $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(S)$ mit $\|ST^{-1}\| < 1$. Dann ist auch $T + S$ beschränkt invertierbar.*

Aufgabe 6.4 (10 Punkte)
Seien $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ eine messbare Funktion und $M_V : \mathcal{D}(M_V) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ der Multiplikationsoperator, der wie $(M_V\psi)(x) := V(x)\psi(x)$ für $\psi \in \mathcal{D}(M_V) := \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^d) : V\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$ und $x \in \mathbb{R}^d$ wirkt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) M_V ist auf dem maximalen Definitionsbereich $\mathcal{D}(M_V)$ abgeschlossen.

b) Das Spektrum ist der wesentliche Bildbereich, sprich

$$\sigma(M_V) \;=\; \operatorname{ess\,ran}(V) \;:=\; \Big\{ z \in \mathbb{C} \;\Big|\; \forall \varepsilon > 0 : |\{x \in \mathbb{R}^d : |V(x) - z| < \varepsilon\}| > 0 \Big\},$$

wobei $|A|$ das Lebesguemaß einer Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ meint.