Institut für Analysis und Algebra
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Wintersemester
2019/20

Partielle Differentialgleichungen 2
5. Übungsblatt

Ausgabe am 25.11.2019, Abgabe am 02.12.2019 vor der Vorlesung

Aufgabe 5.1 (10 Punkte)
Sei $d \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(-\Delta+1)^{-1}$ kein kompakter Operator auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ ist, sprich, finden Sie eine in $L^2(\mathbb{R}^d)$ beschränkte Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass $((-\Delta+1)^{-1}u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine in $L^2(\mathbb{R}^d)$ konvergente Teilfolge besitzt.

Aufgabe 5.2 (10 Punkte)

a) Seien $p \in [2,\infty)$ und $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to L^p(\mathbb{R}^d) \\ t &\mapsto \mathrm{e}^{it\Delta} f \end{aligned}$$

stetig ist.

b) Für $x \in \mathbb{R}^d$ und $t \in \mathbb{R}$ (kurz $(x,t) \in \mathbb{R}^{d+1}$) betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} i\partial_t u(x,t) &= -\pi\Delta u(x,t) \\ u(x,0) &= f(x) \end{aligned}$$

mit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Mittels Fouriertransformation kann man zeigen, dass das Problem durch

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-i\pi t\xi^2}\hat{f}](x)$$

gelöst wird.

Bestimmen Sie die Lösungen $u(x,t)$ für $f(x) = \mathrm{e}^{-a\pi|x|^2}$ (einer Gauß-Funktion mit Breite $a^{-1/2}$) und $f(x) = \mathrm{e}^{2\pi i x\cdot\eta}\mathrm{e}^{-\pi|x|^2}$ mit $\eta \in \mathbb{R}^d$.

c) Seien $p \in [1,2]$, $t \in \mathbb{R}$ und $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie $\|\mathrm{e}^{it\Delta}u\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \lesssim |t|^{-d(1/p-1/2)}\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$.

Aufgabe 5.3 (10 Punkte)
Typischerweise liegen die Anfangsdaten der Schrödingergleichung lediglich in L^2-Sobolewräumen. Diese Aufgabe zeigt, dass man auch in diesem Fall noch dispersive Abschätzungen erhält. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt. Dann gilt

$$\int_K |\mathrm{e}^{it\Delta} f|^2\, dx \to 0 \quad \text{für } |t| \to \infty\,.$$

Für $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ oder $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ (insbesondere also für $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ mit kompaktem Träger) gilt dies sogar mit Konvergenzrate t^{-d}.

b) Sei $u(x,t)$ die Lösung der homogenen freien Schrödingergleichung in $\mathbb{R}^d$, sprich

$$\begin{aligned} i\partial_t u(x,t) &= -2\pi\Delta u(x,t) \\ u(x,0) &= f(x) \end{aligned}$$

mit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Dann ist $u \in L^q(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ für $q = 2(d+2)/d$ mit $\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^{d+1})} \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$.

Anleitung: Verwenden Sie die obige Fourierdarstellung der Lösung $u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-2\pi it\xi^2}\hat{f}](x)$ des Anfangswertproblems sowie die folgende Tatsache.

Sei S eine quadratische Fläche, die durch

$$S = \{\eta \in \mathbb{R}^n : R(x) = r\}$$

gegeben ist, wobei $r \in \mathbb{R}$ eine Konstante und $R(\eta)$ ein Polynom zweiten Grades mit reellen Koeffizienten ist, welches von nicht weniger als n Variablen abhängt. Abgesehen von isolierten Punkten ist S also eine $n-1$-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit. Für $\eta \in S$, sodass $\partial R/\partial\eta_n \neq 0$ in einer offenen Umgebung von η ist, sei

$$d\mu(\eta) = \frac{|\nabla R(\eta_1, ..., \eta_n)|}{|\partial R/\partial \eta_n|}\, d\eta_1 ... d\eta_{n-1}\,, \qquad \eta = (\eta_1, ..., \eta_n) \in S$$

das kanonische Flächenmaß assoziiert zu R. Somit kann S lokal beschrieben werden, indem η_n als Funktion von $\eta_1, ..., \eta_{n-1}$ ausgedrückt wird. Beispiele für quadratische Flächen sind etwa die um den Ursprung zentrierte Kugelschale $\mathbb{S}^{n-1}$ mit $R(\eta) = \eta^2$ und $r = 1$ oder der in η_n-Richtung orientierte, beim Ursprung beginnende Paraboloid $\mathbb{P}^{n-1}$ mit $R(\eta', \eta) = \eta'^2 - \eta_n$, $\eta' = (\eta_1, ..., \eta_{n-1})$ und $r = 0$.

Dann gilt folgender

Satz 0.1 (Tomas (1975), Stein (1975, unpubliziert))**.** *Seien $q = 2(n+1)/(n-1)$ und $F \in L^2(S, d\mu)$. Dann gilt*

$$\|(F d\mu)^\vee\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \lesssim_q \left(\int_S |F(\eta)|^2 d\mu(\eta)\right)^{1/2},$$

wobei

$$(F d\mu)^\vee(x) = \int_S F(\eta)\mathrm{e}^{2\pi i x\cdot\eta}\, d\mu(\eta)\,.$$

Bemerkung: Mittels Duhamel und der Hardy–Littlewood–Sobolew-Ungleichung kann auch das inhomogene Problem betrachtet werden. Für eine Inhomogenität $g \in L^p(\mathbb{R}^{d+1})$ mit $p = 2(d+2)/(d+4)$ erhält man dann die Abschätzung $\|u\|_q \lesssim \|f\|_2 + \|g\|_p$.

Aufgabe 5.4 (10 Punkte)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Zeitintervall. Angenommen $u(x,t) \in \mathcal{S}_x C_t^1(\mathbb{R}^d \times I)$ (Schwartz in x und stetig differenzierbar in t) und $F(x,t) \in \mathcal{S}_x C_t^0(\mathbb{R}^d \times I)$ lösen

$$i\partial_t u(x,t) = -\Delta u(x,t) + F(x,t)$$

für alle $t \in I$. Zeigen Sie die Duhamelformel

$$u(t) = \mathrm{e}^{i(t-t_0)\Delta}u(t_0) - i\int_{t_0}^t \mathrm{e}^{i(t-s)\Delta}F(s)\, ds$$

für alle $t, t_0 \in I$.