Institut für Analysis und Algebra
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Wintersemester
2019/20

Partielle Differentialgleichungen 2
4. Übungsblatt

Ausgabe am 18.11.2019, Abgabe am 25.11.2019 vor der Vorlesung

Aufgabe 4.1 (20 Punkte)

a) Sei $m \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie

$$(m(-i\nabla)f)(x) := \mathcal{F}^{-1}[m\hat{f}](x) = \int_{\mathbb{R}^d} \check{m}(x-y)f(y)\,dy$$

für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Insbesondere konvergiert das Integral für alle $x \in \mathbb{R}^d$. (Hinweis: Verwenden Sie, dass $\mathcal{S}$ dicht in L^2 liegt sowie den Satz von Plancherel.)

b) Seien $t \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie in $\mathbb{R}^d$, dass

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-i\pi(t-i\varepsilon)\xi^2}](x) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{\varepsilon+it}}}{(\varepsilon+it)^{d/2}}\,.$$

Zeigen Sie weiter, dass für $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und $\check{f} = \mathcal{F}^{-1}[f]$,

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-i\pi t\xi^2}\check{f}](x) = \lim_{R\to\infty} \int_{|y|\le R} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{it}}}{(it)^{d/2}} f(y)\,dy$$

gilt, wobei der Grenzwert in der $L^2(\mathbb{R}^d)$-Norm zu verstehen ist. Darüberhinaus ist $(it)^{d/2}$ als $((it)^{1/2})^d$ zu verstehen mit $\operatorname{Re} z^{1/2} > 0$ für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

c) Sei $\kappa \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\kappa > 0$ und $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie (mit Teilaufgabe a))

$$[(-\Delta+\kappa^2)^{-1}f](x) = \pi \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{e}^{-2\pi\kappa|x-y|}}{|x-y|} f(y)\,dy\,.$$

Aufgabe 4.2 (20 Punkte)
Zeigen Sie das „p, q, r-Lemma“.

Lemma 0.1. *Seien $1 \le p < q < r \le \infty$ und $g \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^r(\mathbb{R}^d)$ mit $\|g\|_p^p \le C_p < \infty$, $\|g\|_r^r \le C_r < \infty$ und $\|g\|_q^q \ge C_q > 0$. Dann gibt es Konstanten $\varepsilon > 0$ und $M > 0$, welche von p, q, r, C_p, C_q, C_r abhängen, sodass $f(\varepsilon) := |\{x \in \mathbb{R}^d : |g(x)| \ge \varepsilon\}| > M$.*

Hierbei bezeichnet $|A|$ das Lebesgue-Maß einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}^d$.
(Hinweis: Zeigen und verwenden Sie die „layer cake“-Darstellung $\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^p\,dx = p\int_0^\infty f(\varepsilon)\varepsilon^{p-1}\,d\varepsilon$.)