Institut für Analysis und Algebra
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Wintersemester
2019/20

Partielle Differentialgleichungen 2
2. Übungsblatt

Ausgabe am 04.11.2019, Abgabe am 11.11.2019 vor der Vorlesung

Aufgabe 2.1 (15 Punkte)
In dieser Aufgabe sammeln wir weitere wichtige Eigenschaften der Fouriertransformation.

a) Für $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ definieren wir die *inverse Fouriertransformation* $\mathcal{F}^{-1}$ durch

$$\mathcal{F}^{-1}[g](x) := \check{g}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{2\pi i x\cdot\xi} g(\xi)\, d\xi\,.$$

Für Schwartz-Funktionen $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ gilt mit dieser Definition $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = f(x)$ und darüberhinaus ist $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ein linearer Isomorphismus.

Zeigen Sie darauf aufbauend den Satz von Plancherel, sprich

$$\int_{\mathbb{R}^d} \overline{\hat{f}(\xi)}\hat{g}(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)} g(x)\, dx$$

für alle $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Insbesondere folgt $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$. Zeigen Sie weiter, dass sich $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ zu einem linearen Isomorphismus $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$ fortsetzen lässt. (Hinweis: Verwenden Sie die Tatsache, dass C_0^∞ dicht in L^2 ist.)

b) Folgern Sie mittels Interpolation (siehe Satz 0.1), dass $\mathcal{F} : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^{p'}(\mathbb{R}^d)$ mit $1 \le p \le 2$ und $1/p + 1/p' = 1$ eine beschränkte Abbildung ist und zeigen Sie die (nicht optimale) Hausdorff–Young-Ungleichung $\|\hat{f}\|_{p'} \le \|f\|_p$. Wieso kann p' nicht durch ein beliebiges $q \in [1, \infty]$ ersetzt werden?

c) Wir betrachten nun Fouriermultiplikatoren. Sei $m : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ eine messbare und beschränkte Funktion und definiere

$$(m(D_x)f)(x) := \mathcal{F}^{-1}[m\hat{f}](x) \quad \text{für } f \in L^2(\mathbb{R}^d)\,.$$

Zeigen Sie, dass $m(D_x)$ auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ wohldefiniert ist mit $\|m(D_x)\|_{L^2\to L^2} \le \|m\|_{L^\infty}$.

Bemerkung: Die umgekehrte Richtung ist ebenfalls wahr und es gilt $\|m(D_x)\|_{L^2\to L^2} = \|m\|_{L^\infty}$.

Satz 0.1 (Riesz–Thorin)**.** *Seien $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ zwei σ-endliche Maßräume. Angenommen, $1 \le p_0 \le p_1 \le \infty$ und $1 \le q_0 \le q_1 \le \infty$. Sei $T : L^{p_0}(\Omega_1) + L^{p_1}(\Omega_1) \to L^{q_0}(\Omega_2) + L^{q_1}(\Omega_2)$ ein linearer Operator, der $L^{p_j}(\Omega_j)$ beschränkt nach $L^{p_j}(\Omega_j)$ abbildet ($j = 0, 1$). Für $\theta \in (0, 1)$ seien*

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad \text{und} \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}\,.$$

Dann bildet T den Raum $L^{p_\theta}(\Omega_1)$ beschränkt nach $L^{q_\theta}(\Omega_2)$ ab mit

$$\|T\|_{L^{p_\theta}\to L^{q_\theta}} \le \|T\|_{L^{p_0}\to L^{q_0}}^{1-\theta} \|T\|_{L^{p_1}\to L^{q_1}}^{\theta}\,.$$

Wir betrachten im Folgenden den *Raum der temperierten Distributionen.*

Definition 0.2. *Der Raum der temperierten Distributionen $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) := (\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))'$ ist der Raum aller beschränkten, linearen Funktionale $L : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$. Wir sagen, dass eine Folge $(L_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ gegen $L \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ konvergiert genau dann, wenn für jedes $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ die Konvergenz $L_n[\varphi] = \langle L_n, \varphi\rangle_{\mathcal{S}} \to L[\varphi]$ für $n \to \infty$ gilt. Wir bezeichnen mit $L[\varphi] = \langle L, \varphi\rangle_{\mathcal{S}}$ das Dualitätsprodukt zwischen $\mathcal{S}'$ und $\mathcal{S}$.*

Bemerkung 0.3.

1. Die Delta-Distribution $\langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle_{\mathcal{S}} := \varphi(x_0)$ ist eine temperierte Distribution für alle $x_0 \in \mathbb{R}^d$.

2. $L : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ ist genau dann beschränkt, wenn es ein $m \in \mathbb{N}_0$ gibt, sodass $|L[\varphi]| \lesssim \|\varphi\|_{m,\mathcal{S}}$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}$ gilt. Hierbei war $\|\cdot\|_{m,\mathcal{S}}$ die Halbnorm des letzten Übungsblatts.

3. Ist $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, sodass $(1+|x|)^{-N} f \in L^1$ für ein $N \in \mathbb{N}_0$, dann definiert
$$L_f[\varphi] := \int f(x)\varphi(x)\,dx$$
ein Element $L_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Darüberhinaus gilt
$$|L_f[\varphi]| \le \int (1+|x|)^{-N}|f(x)|(1+|x|)^N|\varphi(x)|\,dx \le \|(1+|\cdot|)^{-N} f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\|\varphi\|_{N,\mathcal{S}}\,.$$
Solche F_f nennt man *reguläre Distributionen.*

4. $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ ist ein linearer Isomorphismus auf $\mathcal{S}'$ mit Inverser $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Aufgabe 2.2 (15 Punkte)
Wir betrachten im Folgenden die sogenannten Bessel-Potential-Räume $\tilde{H}^s$ mit $s \in \mathbb{R}$. Diese sind mittels der Fouriertransformation durch

$$\begin{aligned}\tilde{H}^s(\mathbb{R}^d) &:= \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) :< D_x >^s f \in L^2(\mathbb{R}^d)\}\\ \|f\|_{\tilde{H}^s} &:= \| < D_x >^s f\|_{L^2}\end{aligned}$$

definiert. Hierbei meint $< D_x >^s f := \mathcal{F}^{-1}[< \xi >^s \hat{f}]$ mit dem Symbol $< \xi >:= \sqrt{1+|\xi|^2}$. (Da $< \xi >^s$ glatt und polynomiell beschränkt ist, ist $< \xi >^s \hat{f} \in \mathcal{S}$ für $f \in \mathcal{S}$. Wegen Dualität ist damit auch $< \xi >^s \hat{f} \in \mathcal{S}'$ für $f \in \mathcal{S}'$, weshalb $< D_x >^s: \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ wohldefiniert ist.) Aus obiger Definition ist ersichtlich, dass $\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \infty$ für $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ und $g \in H^{-s}(\mathbb{R}^d)$. Insbesondere ist H^{-s} der zu H^s gehörende Dualraum.
Zeigen Sie:

a) Sei $m \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $H^m(\mathbb{R}^d) = \tilde{H}^m(\mathbb{R}^d)$, wobei H^m den in der Vorlesung definierten Sobolewraum bezeichnet. Dies rechtfertigt den folgenden Missbrauch der Notation $H^s \equiv \tilde{H}^s$.

b) Ist $s > d/2$, dann ist $H^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C_b(\mathbb{R}^d)$ (sprich $H^s(\mathbb{R}^d) \subseteq C_b(\mathbb{R}^d)$ mit $\|f\|_{C_b(\mathbb{R}^d)} \lesssim_s \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$ für alle $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$), wobei C_b den Raum der stetigen und beschränkten Funktionen meint. (Hinweis: Erinnern Sie sich an $\|\hat{f}\|_\infty \le \|f\|_1$ und die Cauchy–Schwarz-Ungleichung.)

c) $\delta_0 \in H^{-s}(\mathbb{R}^d)$ für jedes $s > d/2$. (Hinweis: Verwenden Sie die Dualität.)

d) Für $s > d/2$ ist $H^s(\mathbb{R}^d)$ eine Algebra unter punktweiser Addition und Multiplikation, das heißt $f_1 + f_2, f_1 f_2 \in H^s$ für $f_1, f_2 \in H^s$ und Addition und Multiplikation sind bilineare Verknüpfungen. (Hinweis: Sie dürfen $\mathcal{F}(f_1 f_2) = \hat{f}_1 * \hat{f}_2$ für $f_j \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und Peetres Ungleichung $< \xi >^{2p} \leq a_p(< \xi - \eta >^{2p} + < \eta >^{2p})$ für alle $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$ und $p > 0$ mit $a_p = \max\{2^p, 2^{2p-1}\}$ ohne Beweis verwenden. Erinnern Sie sich auch an die Young-Ungleichung $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ mit $1 + 1/r = 1/p + 1/q$.)

Aufgabe 2.3 (10 Punkte)
Sei $R > 0$ und $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ so, dass $\operatorname{supp} f \subseteq \overline{B}_0(R) \equiv \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq R\}$. Zeigen Sie, dass $\hat{f}$ holomorph ist und $|\hat{f}(\xi)| \lesssim \mathrm{e}^{2\pi R |\operatorname{Im} \xi|}$ für $\xi \in \mathbb{C}$ erfüllt. Schließen Sie daraus, dass $\operatorname{supp} \mathcal{F}[f]$ nicht kompakt sein kann, es sei denn $\hat{f} \equiv 0$.