Institut für Analysis und Algebra
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Wintersemester
2019/20

Partielle Differentialgleichungen 2
12. Übungsblatt

Ausgabe am 27.1.2020, Abgabe am 3.2.2020 vor der Vorlesung

Aufgabe 12.1 (30 Punkte)
Wir betrachten die masselose Bosonen-Stern-Gleichung in drei Dimensionen, welche durch

$$\begin{cases} \sqrt{-\Delta}u - (|u|^2 * |x|^{-1})u = -u\,, \\ u \in H^{1/2}(\mathbb{R}^3)\,, u \not\equiv 0 \end{cases} \tag{1}$$

gegeben ist. Die Gleichung ist im $H^{-1/2}$-Sinne zu verstehen, sprich $u \in H^{1/2}$ löst genau dann (1), wenn

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|\overline{\hat{v}(\xi)}u(\xi)\,d\xi - \int_{\mathbb{R}^3} dx \int_{\mathbb{R}^3} dy\, \frac{\overline{v(x)}u(x)\cdot|u(y)|^2}{|x-y|} = -\int_{\mathbb{R}^3} \overline{v(x)}u(x)\,dx$$

für alle $v \in H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ gilt.
Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

1. Angenommen $u \in H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ löst (1). Dann gilt $u \in H^s(\mathbb{R}^3)$ für alle $s \geq 1/2$, sprich Lösungen werden geglättet. (Hinweis: Verwenden Sie, dass $u \mapsto F(u) := (|u|^2 * |x|^{-1})u$ für $s \geq 1/2$ ein $H^s(\mathbb{R}^3)$-beschränkter Operator ist.)

2. Jede Lösung $u \in H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ von (1) erfüllt

$$|u(x)| \lesssim (1+|x|)^{-4} \tag{2}$$

und

$$(|u|^2 * |x|^{-1})(x) \lesssim (1+|x|)^{-1}\,. \tag{3}$$

(Hinweis: Verwenden Sie folgendes Resultat von Carmona–Masters–Simon (1990). Sei $V(x)$ eine stetige Funktion mit $V(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$ und $u \in L^2(\mathbb{R}^3)$ eine Eigenfunktion des relativistischen Schrödingeroperators $(-\Delta)^{\alpha/2} + V$, die zu einem negativen Eigenwert gehört. Dann gilt $|u(x)| \lesssim (1+|x|)^{-3-\alpha}$. Verwenden Sie außerdem Katos Ungleichung

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(y)|^2}{|x-y|}\,dy \leq \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \overline{u(y)}(\sqrt{-\Delta}u)(y)\,dy \leq \frac{\pi}{2}\|u\|_{H^{1/2}}^2$$

sowie das Newtonsche Theorem.)

3. Sei V eine formbeschränkte Störung von $\sqrt{-\Delta}$ so, dass für alle $\lambda > 1$ der Definitionsbereich $\mathcal{D}(V(x)) = \mathcal{D}(V(\lambda x))$ erhalten bleibt. Angenommen weiter

$$\lim_{\lambda\to 1} \frac{V(\lambda x) - V(x)}{\lambda - 1} = x \cdot \nabla V(x) \quad \text{existiert für alle } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

und $\mathcal{Q}(\sqrt{-\Delta}+V) \subseteq \mathcal{Q}(x \cdot \nabla V)$ (wobei $\mathcal{Q}$ den Formbereich bezeichnet.) Zeigen Sie die Virialidentität

$$\langle u, x \cdot \nabla V u \rangle = \langle u, (E-V)u \rangle ,$$

wobei u eine Eigenfunktion von $\sqrt{-\Delta}+V$ mit Eigenwert E sein soll. Folgern Sie daraus

$$\|(-\Delta)^{1/4}u\|^2 = \int |x|\partial_r V|u|^2 \, dx$$

für $V := -|u|^2 * |x|^{-1}$ und radiale u. (Hinweis: Betrachten Sie zunächst formal $\langle u_\lambda, (\sqrt{-\Delta}+V)u_\lambda\rangle$ mit $u_\lambda = \lambda^{3/2}u(\lambda x)$, leiten Sie dies nach λ ab und setzen $\lambda = 1$. Setzen Sie dann diese Heuristik in einen Beweis um, indem Sie den Erwartungswert des Kommutators $[(\sqrt{-\Delta}+V-E), U_\lambda]$ im Eigenzustand u (zum Eigenwert E) untersuchen. Hierbei ist $(U_\lambda u)(x) := \lambda^{3/2}u(\lambda x)$ der Dilatationsoperator, welcher für alle $\lambda > 0$ unitär ist und stark stetig von λ abhängt.)

4. Angenommen $u \in H^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ ist radial und löst

$$\sqrt{-\Delta}u - (|u|^2 * |x|^{-1})(x) = Eu$$

für ein $E \geq 0$. Dann ist $u \equiv 0$. (Hinweis: Verwenden Sie den Virialsatz und das Newtonsche Theorem.)

Aufgabe 12.2 (10 Punkte)
Eine klassische, weitestgehend offene Frage ist, unter welchen Regularitätsbedingungen an einen Zustand f zur Zeit $t = 0$ die punktweise (fast überall) Konvergenz

$$\lim_{t\to 0} \mathrm{e}^{it\Delta} f(x) = f(x)$$

gilt.
Zeigen Sie folgende Aussage, welche einen Zugang zur obigen Frage liefert.
Seien $1 \leq p < \infty$, $T_R : L^p \to L^p$ eine Folge (indiziert durch $R > 0$) linearer L^p-beschränkter Operatoren sowie

$$(T^* f)(x) := \sup_{R>0} |(T_R f)(x)|$$

die zu T_R gehörige *Maximalfunktion*. Sei $\mathcal{S} \subseteq L^p$ eine dichte Teilmenge. Angenommen folgende Bedingungen seien erfüllt.

1. Für alle $s \in \mathcal{S}$ existiert der Grenzwert $\lim_{R\to\infty}(T_R s)(x) \equiv (Ts)(x)$ in $\mathbb{C}$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ und einen weiteren L^p-beschränkten Operator T.

2. Der Maximaloperator T^* ist vom schwachen (p,p)-Typ, sprich für alle $\alpha > 0$ gilt

$$|\{x \in \mathbb{R}^d : (T^* f)(x) > \alpha\}| \lesssim \alpha^{-p}\|f\|_p^p \quad \text{für alle } f \in L^p .$$

Dann existiert für alle $f \in L^p$ der Grenzwert $\lim_{R\to\infty}(T_R f)(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$. (Hinweis: Vergleichen Sie die Aussage mit dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit.)