Institut für Analysis und Algebra
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Wintersemester
2019/20

Partielle Differentialgleichungen 2
11. Übungsblatt

Ausgabe am 20.1.2020, Abgabe am 27.1.2020 vor der Vorlesung

Aufgabe 11.1 (20 Punkte)
Sei $u_0 \in \mathcal{S}_x(\mathbb{R}^d)$ so, dass $\operatorname{supp} \hat{u}_0 \subseteq B_0(1)$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

1. Es gilt $|\mathrm{e}^{it\Delta} u_0(x)| \lesssim_{N,u_0} < t >^{-N} < x >^{-N}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$ und $|x| > 5|t|$. (Hinweis: Zeigen Sie die Aussage für $x = (x_1, 0, ..., 0)$ und verwenden Sie die Rotationssymmetrie des Problems. Verwenden Sie dann die Fourierdarstellung von $\mathrm{e}^{it\Delta} u_0$ und integrieren Sie partiell in der x_1-Richtung.)

2. Zeigen Sie $|\mathrm{e}^{it\Delta} u_0(x)| \lesssim_{u_0} < t >^{-d/2}$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$. (Diese Abschätzung ist für $|t| \gg |x|$ wertvoll.)

3. Folgern Sie aus den vorigen Teilaufgaben $\|\mathrm{e}^{it\Delta} u_0\|_{L^p_x(\mathbb{R}^d)} \sim_{d,u_0,p} < t >^{-d(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})}$ für alle $1 \leq p \leq \infty$. (Hierbei meint $X \sim Y$ für zwei nichtnegative Größen X und Y, dass es eine Konstante $c > 1$ gibt, sodass $c^{-1} Y \leq X \leq cY$.) (Hinweis: Beweisen Sie die Aussage zunächst für $p = 2$ und zeigen dann die obere Schranke für $p \neq 2$, indem Sie $|x| < a|t|$ und $|x| > a|t|$ für ein $a > 0$ untersuchen. Verwenden Sie dann die Hölderungleichung, um die untere Schranke zu zeigen.)

Aufgabe 11.2 (Notwendige Bedingungen für Schrödinger zu festen Zeiten) (20 Punkte)
Seien $1 \leq p, q \leq \infty$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass die Abschätzung

$$\|\mathrm{e}^{it\Delta} u_0\|_{L^q_x(\mathbb{R}^d)} \leq C t^\alpha \|u_0\|_{L^p_x(\mathbb{R}^d)}$$

für alle $u_0 \in \mathcal{S}_x(\mathbb{R}^d)$, $t \neq 0$ und einer von t und u_0 unabhängigen Konstanten C gilt. Zeigen Sie mit Hilfe von Skalierungsargumenten, dass $2\alpha = d(1/q - 1/p)$ gelten muss. (Hinweis: Verwenden und zeigen Sie, dass, wenn $u(x,t)$ die Schrödingergleichung $i\partial_t u = -\Delta u$ löst, dann tut es auch $u(x/\lambda, t/\lambda^2)$ für $\lambda > 0$.) Verwenden Sie dann die vorige Aufgabe und Zeittranslationsinvarianz, um $q \geq p$ und $q = p'$ (und damit $1 \leq p \leq 2$) zu zeigen.
Bemerkung: Dies zeigt insbesondere, dass der Schrödinger-Evolutionsoperator nicht $L^p_x(\mathbb{R}^d)$-beschränkt ist, es sei denn $p = 2$. Dies ist ein Beispiel für die Daumenregel, dass dispersive Evolutionsoperatoren lediglich L^2-basierte Räume erhalten. Insbesondere zeigt die Aufgabe, dass die dispersive Abschätzung aus Aufgabe 5.2 c) optimal ist!