Institut für Analysis und Algebra
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Wintersemester
2019/20

Partielle Differentialgleichungen 2
10. Übungsblatt

Ausgabe am 13.1.2020, Abgabe am 20.1.2020 vor der Vorlesung

Aufgabe 10.1 (20 Punkte)
Um die Wohlgestelltheit der kubischen nichtlinearen Schrödingergleichung in zwei Dimensionen zu zeigen, können bestimmte Strichartz-Abschätzungen, die ähnlich zu denen des fünften Blattes sind, hilfreich sein. Zeigen Sie die *homogene Strichartz-Abschätzung*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2} dx \int_{\mathbb{R}} dt \; |\mathrm{e}^{-it\Delta} f(x)|^4\right)^{1/4} \equiv \|\mathrm{e}^{-it\Delta} f\|_{L^4_{x,t}(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R})} \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\,, \tag{1}$$

die *duale homogene Strichartz-Abschätzung*

$$\| \int_0^\infty \mathrm{e}^{it\Delta} F(t)\, dt\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \lesssim \|F\|_{L^{4/3}_{x,t}(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R})}\,, \tag{2}$$

sowie die *retardierte Strichartz-Abschätzung*

$$\| \int_0^t \mathrm{e}^{-i(t-s)\Delta} F(s)\, ds\|_{L^4_{x,t}(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R})} \lesssim \|F\|_{L^{4/3}_{x,t}(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R})}\,. \tag{3}$$

(Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Implikationen (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) und zeigen Sie schließlich (3). Verwenden Sie die Dualität der L^p-Räume sowie $\|g\|_2^2 = \langle g, g\rangle$.)

Aufgabe 10.2 (20 Punkte)
Wir betrachten den Kegel

$$\{x \in \mathbb{R}^d : x \neq 0, 0 < x_d < |x| \cos\theta\}$$

dessen Eckpunkt am Ursprung sitzt und den Öffnungswinkel θ besitzt. Schneidet man diesen Kegel mit $B_0(r)$, erhält man den *endlichen Kegel* $K_{\theta,r}$. Wir sagen, dass ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ genau dann die *Kegel-Eigenschaft* besitzt, wenn es einen festen, endlichen Kegel $K_{\theta,r}$ gibt, sodass es für jeden Punkt $x \in \Omega$ einen endlichen Kegel K_x gibt, dessen Eckpunkt bei x ist, der kongruent zu $K_{\theta,r}$ ist und in Ω enthalten ist.

Sei nun $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ eine beschränkte, zusammenhängende und offene Menge, welche die Kegel-Eigenschaft für ein θ und r besitzt. Sei $1 \leq p < \infty$ und $g \in L^{p'}(\Omega)$, sodass $\int_\Omega g = 1$. Sei $1 \leq q < dp/(d-p)$ für $p < d$, $q < \infty$ für $p = d$ und $1 \leq q \leq \infty$ für $p > d$. Zeigen Sie, dass es dann eine Konstante $S_{\Omega,g,p,q} \equiv S > 0$ gibt, sodass für alle $f \in W^{1,p}(\Omega)$ die *Poincaré-Ungleichung*

$$\|f - \int_\Omega fg\|_{L^q(\Omega)} \leq S\|\nabla f\|_{L^p(\Omega)}$$

gilt. (Hinweis: Zeigen, Sie zunächst mit der Hölderungleichung und der Beschränktheit von Ω, dass es genügt $q \geq p$ zu betrachten. Argumentieren Sie dann per Widerspruch, indem Sie eine Funktionenfolge $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ betrachten, sodass die linke Seite für alle j gleich 1 ist und die rechte Seite für $j \to \infty$ gegen Null konvergiert. Betrachten Sie dann die Folge $h_j = f_j - \int_\Omega g f_j$ und verwenden Sie die folgende Baby-Version des Banach–Alaoglu-Satzes sowie den Satz von Rellich und Kondrachov, welcher ebenfalls für Gebiete, die die Kegel-Eigenschaft besitzen, gilt, um einerseits $h = 0$ und andererseits $\|h\|_q = 1$ zu zeigen.)

Satz 0.1 (Banach–Alaoglu). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ eine messbare Menge und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in W^{1,p}(\Omega)$ für $1 < p < \infty$. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ und ein $f \in W^{1,p}(\Omega)$, sodass $f_{n_j} \rightharpoonup f$ (schwache Konvergenz in $W^{1,p}(\Omega)$) für $j \to \infty$, sprich für jedes $(g_0, g_1, ..., g_d) \in L^{p'}(\Omega : \mathbb{C}^d)$ gilt*

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_{n_j}(x) g(x)\, dx + \sum_{i=1}^d \int_\Omega \partial_i f_{n_j}(x) g_i(x)\, dx = \int_\Omega f(x) g_0(x)\, dx + \int_\Omega \partial_i f(x) g_i(x)\, dx\,.$$

Bemerkung: Obwohl der Satz von Rellich und Kondrachov nicht für $q = dp/(d-p)$ gilt, kann man die Poincaré-Ungleichung auch in diesem Fall beweisen, indem man die Sobolewungleichung verwendet, um $\|f - \int_\Omega fg\|_{L^q(\Omega)} \lesssim \|f - \int_\Omega fg\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)}$ abzuschätzen. Die Aussage folgt dann aus der obigen Poincaré-Ungleichung.