Institut für Analysis und Algebra
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Wintersemester
2019/20

Partielle Differentialgleichungen 2
1. Übungsblatt

Ausgabe am 28.10.2019, Abgabe am 04.11.2019 vor der Vorlesung

Aufgabe 1.1 (10 Punkte)
Zeigen Sie, dass für stetig differenzierbare Funktionen auf $\mathbb{R}$ die schwache und die klassische Ableitung übereinstimmen.

Aufgabe 1.2 (10 Punkte)
Seien $1 \leq p < \infty$ und $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass u fast überall mit einer $C^\alpha(\mathbb{R})$-Funktion übereinstimmt, wobei $\alpha = 1 - 1/p$. (Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung die Abschätzung $\|u\|_{C^\alpha(\mathbb{R})} \leq a\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}$ für ein $a > 0$ und $u \in C_0^1(\mathbb{R})$ und verwenden Sie die Tatsache, dass $C_0^1(\mathbb{R})$ dicht in $W^{1,p}(\mathbb{R})$ ist.)

Aufgabe 1.3 (10 Punkte)
Seien $d, m \in \mathbb{N}$ und $f \in C^m(\mathbb{R}^d : \mathbb{C})$. Für $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ seien

$$\partial^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

und

$$\begin{array}{rcl} X^\alpha f : \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{C} \\ x = (x_1, ..., x_d) & \mapsto & x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d} f(x_1, ..., x_d) \end{array}.$$

Wir definieren damit den Schwartzraum

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) := \Big\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d : \mathbb{C}) : \text{ Für alle } k, m \in \mathbb{N}_0 \text{ ist} \\ q_{k,m}(f) := \max_{|\alpha| \leq m} \Big\{ \sup \Big\{ (1 + \|x\|^2)^{\frac{k}{2}} |\partial^\alpha f(x)| : x \in \mathbb{R}^d \Big\} < \infty \Big\} \Big\}$$

Zeigen Sie:

a) Für jedes $(k, m) \in \mathbb{N}_0^2$ ist $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), q_{k,m})$ ein normierter Raum.

b) Ist $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$, dann ist auch $X^\alpha \partial^\beta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

c) Verifizieren Sie $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subseteq L^p(\mathbb{R}^d)$ für $p \in [1, \infty]$, $C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\mathrm{e}^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und $\mathrm{e}^{-x^2} \sin(\mathrm{e}^{x^2}) \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Aufgabe 1.4 (10 Punkte)
Sei $u \in L^1(\mathbb{R})$ sowie $\hat{u}(\xi) := \mathcal{F}(u)(\xi) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi i x \xi} u(x)\, dx$ die Fouriertransformierte. Zeigen Sie:

a) Es gilt $\|\hat{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R})}$ und $\hat{u}(\xi) \to 0$ für $|\xi| \to \infty$. (Die zweite Aussage ist der Satz von Riemann–Lebesgue.)

b) Ist zudem $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, dann ist auch $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.