Spurideale und Matrixungleichungen

October 11, 2019

Geplanter Termin: Donnerstags um 9 Uhr, ab dem 24.10. oder 31.10..

Die “abstrakten” Kapitel in Simons Buch zu Umordnungsungleichungen, antisymmetrischen Tensorprodukten und symmetrisch normierten Räumen [10, Abschnitte 1.4, 1.5, 1.7] werden bereits für die Ungleichungen für Singulär- und Eigenwerte gebraucht. Die Theorie der Calkin-Ideale [10, Anfang Kapitel 2] basiert auf den Überlegungen zu symmetrisch normierten Räumen und wird für den Rest des Kapitels (Hölderungleichung, majorisierte Konvergenz, Konvergenzsätze) gebraucht.

Die Aufteilung der Themen ist bewusst fein gehalten, sodass einzelne Punkte auch kombiniert werden können.

1. Kompakte Operatoren, Ungleichungen für Singulär- und Eigenwerte nach Simon [10] und Weidmann [11]

   (a) Wiederholung zu kompakten Operatoren [10, Abschnitte 1.1 bis 1.3] (oder [11, Kapitel 3])

   (b) Umordnungsungleichungen, antisymmetrische Tensorprodukte und die Ungleichungen von Horn und Weyl für Eigenwerte [10, Abschnitte 1.4 bis 1.6]

   (c) Symmetrisch normierte Räume [10, Abschnitt 1.7]

   (d) Weitere Ungleichungen für Singulär- und Eigenwerte sowie Clarkson–McCarthy-Ungleichungen [10, Abschnitte 1.8 und 1.9]

2. Operatorideale und Konvergenzsätze nach Simon [10]

   (a) Calkin-Theorie, Beziehung zwischen Idealen und symmetrischen Normen von Folgen [10, S. 17-21]

   (b) Hölderungleichung und Interpolationssätze (Marcinkiewicz, Riesz–Thorin und Stein) [10, S. 21-23] sowie [9, Anhang zu Kapitel IX.4]. Siehe auch Bourin, Lee, Fujii und Seo [3] für eine umgekehrte Hölderungleichung

   (c) Konvergenzsätze: nicht-kommutatives Fatou-Lemma [10, Theorem 2.7 d], majorisierte Konvergenz [10, S. 26-27] sowie Grümmsche Konvergenzsätze [10, S. 27-29, S. 130]

3. Matrixkonvexität und -monotonie, Satz von Loewner nach Bhatia [2] und Donoghue [7]

    (a) Definitionen und (Gegen)beispiele [2, S. 112-114, 116]
    (b) Charakterisierungen, z.B. [2, Theoreme V.2.3, V.2.5, V.2.9], siehe auch Davis [6]
    (c) Satz von Loewner [7, Abschnitte II.1, II.2, S. 69, Kapitel IX] oder [2, Abschnitt V.4, S.135], vor allem für Beispiele ab S. 142

4. Matrixungleichungen nach Bhatia [2], Carlen [5] und Simon [10]

    (a) Joint convexity/concavity (gemeinsame Konvexität?) einfacher Funktionen und Andos variationelle Umformulierung. Ungleichung für das arithmitrische, geometrische und harmonische Mittel [5, Kapitel 3]
    (b) Davis–Sherman-Ungleichung [6], siehe auch [5, Theorem 4.19], sowie die Umkehrung der Ungleichung för operatormonotone Funktionen von Frank [8, Formel (2.7)]. Jensensche Operatorungleichung [5, Theorem 4.20]
    (c) Ungleichungen für Produkte positiver Operatoren [2, Abschnitt IX.2]
    (d) Schwarz-Ungleichungen [2, Abschnitt IX.5]
    (e) Lieb-Ungleichungen [10, Abschnitt 8.2]
    (f) Störungen von Matrixfunktionen [2, Abschnitt X.1]

5. Spurungleichungen nach Carlen [5] und Simon [10]

    (a) Golden–Thompson-Ungleichungen [10, Abschnitt 8.1], siehe auch Bourin und Seo [4] für eine umgekehrte Ungleichung
    (b) Ungleichungen von Peierls, Peierls–Bogoliubov, Berezin und Klein, siehe [5, Abschnitte 2.2, 2.3] und [10, Abschnitt 8.3]. Insbesondere Konvexität und Monotonie von $A \mapsto \mathrm{Tr}(f(A))$ [5, Theorem 2.10]
    (c) Lieb–Thirring-Spurungleichung [5, Theorem 7.4] sowie die Verallgemeinerung von Araki [1]
    (d) Liebs Beweis der Wigner–Yanase-Vermutung und starke Subadditivität der Entropie [10, Abschnitt 8.3] (oder [5, Kapitel 6])

References

[1] Huzihiro Araki. On an inequality of Lieb and Thirring. *Lett. Math. Phys.*, 19(2):167–170, 1990.

[2] Rajendra Bhatia. *Matrix Analysis*, volume 169 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997.

[3] Jean-Christophe Bourin, Eun-Young Lee, Masatoshi Fujii, and Yuki Seo. A matrix reverse Hölder inequality. *Linear Algebra Appl.*, 431(11):2154–2159, 2009.

[4] Jean-Christophe Bourin and Yuki Seo. Reverse inequality to Golden-Thompson type inequalities: comparison of e^{A+B} and $\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B}$. *Linear Algebra Appl.*, 426(2-3):312–316, 2007.

[5] Eric Carlen. Trace inequalities and quantum entropy: an introductory course. In *Entropy and the Quantum*, volume 529 of *Contemp. Math.*, pages 73–140. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.

[6] Chandler Davis. A Schwarz inequality for convex operator functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8:42–44, 1957.

[7] William F. Donoghue, Jr. *Monotone matrix functions and analytic continuation.* Springer-Verlag, New York, 1974. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 207.

[8] Rupert L. Frank. Eigenvalue bounds for the fractional Laplacian: a review. In *Recent developments in nonlocal theory*, pages 210–235. De Gruyter, Berlin, 2018.

[9] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics. II. Fourier Analysis, Self-Adjointness.* Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975.

[10] Barry Simon. *Trace Ideals and Their Applications*, volume 120 of *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2005.

[11] Joachim Weidmann. *Lineare Operatoren in Hilberträumen.* Mathematische Leitfäden. B. G. Teubner, Stuttgart, 1 edition, 1976.