Semi-lineare Stabilität

May 26, 2025

In diesen Notizen reichen wir den Beweis von Proposition 1.41 zur semi-linearen Stabilität nach. Dabei erinnern wir uns, dass wir das Cauchyporblem

$$\partial_t u(t) - Lu(t) = N(u(t)),\ u(0) = u_0 \in \mathcal{H} \tag{1}$$

als Integralgleichung

$$u(t) = e^{tL}u_0 + \int\limits_0^t e^{(t-s)L} N(u(s))\,\mathrm{d}s \tag{2}$$

umschreiben können. Unter Einführung der 'linearen Lösung' $u_{lin}(t) = e^{tL}u_0$ und dem Duhamel-Operator

$$DF(t) \coloneqq \int\limits_0^t e^{(t-s)L} F(s)\,\mathrm{d}s \tag{3}$$

nimmt die Integral-Gleichung (2) die abstrakte Form

$$u = u_{lin} + DN(u) \tag{4}$$

an. Hierfür hatten wir bereits das abstrakte Fixpunkt-Argument diskutiert.

Proposition 1. *Seien $\mathcal{N}, \mathcal{S}$ Banachräume, $D \in \mathcal{B}(\mathcal{N}, \mathcal{S})$ mit $\|D\|_{op} \leq C_0$ für ein $C_0 > 0$ und $N : \mathcal{S} \to \mathcal{N}$ eine Abbildung mit $N(0) = 0$ und $\|N(u) - N(v)\|_{\mathcal{N}} \leq \frac{1}{2C_0}\|u - v\|_{\mathcal{S}}$ für alle $u, v \in B_\varepsilon \coloneqq \{x \in \mathcal{S} |\ \|x\|_{\mathcal{S}} \leq \varepsilon\}$ für ein $\varepsilon > 0$. Dann besitzt (4) für alle $u_{lin} \in B_{\varepsilon/2}$ eine eindeutige Lösung $u \in B_\varepsilon$, $u_{lin} \mapsto u$ definiert eine Lipschitz-stetige Abbildung mit Lipschitz-Konstante 2 und es gilt $\|u\|_{\mathcal{S}} \leq 2\|u_{lin}\|_{\mathcal{S}}$.*

Mit diesen Vorbereitungen können wir das zentrale Theorem des Vortrags (Proposition 1.41 im Tao) formulieren und beweisen.

Theorem 2. *Es seien $L \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $\langle Lu|u\rangle \leq -\sigma\|u\|_{\mathcal{H}}^2$ für ein $\sigma > 0$ und alle $u \in \mathcal{H}$ sowie $N \in C^2(\mathcal{H})$ mit $N(0) = 0$, $N'(0) = 0$ und $\sup_{\|u\|_{\mathcal{H}}\leq 1} \|N''(u)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H};\mathcal{B}(\mathcal{H}))} = C_N$. Dann gilt für $\varepsilon := \frac{\sigma}{2C_N}$: Ist $\|u_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, dann existiert eine eindeutige klassische Lösung $u : [0,\infty) \to \mathcal{H}$ von (1). Außerdem erfüllt u*

$$\|u(t)\|_{\mathcal{H}} \leq 2 \cdot e^{-\sigma t}\|u_0\|_{\mathcal{H}}. \tag{5}$$

Proof. Zunächst zeigen wir, dass $u_{lin}(t) := e^{tL}u_0$ die Abschätzung

$$\|e^{tL}u_0\|_{\mathcal{H}} \leq e^{-\sigma t}\|u_0\|_{\mathcal{H}} \tag{6}$$

erfüllt. Dafür definieren wir $f \in C^1(\mathbb{R})$ durch $f(t) = \|e^{tL}u_0\|_{\mathcal{H}}^2$. Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) = 2\langle Le^{tL}u_0|e^{tL}u_0\rangle \leq -2\sigma\|e^{tL}u_0\|_{\mathcal{H}}^2 = -2\sigma f(t) \tag{7}$$

und aus dem Lemma von Gronwall folgt

$$f(t) \leq f(0) \cdot e^{-2\sigma t} \Rightarrow \|u_{lin}\|_{\mathcal{H}} \leq \|u_0\|_{\mathcal{H}} \cdot e^{-\sigma t}. \tag{8}$$

Jetzt führen wir Banachräume $(\mathcal{S}, \|\cdot\|_{\mathcal{S}}) = (C[0,\infty), \|\cdot\|_{\mathcal{S}})$ mit

$$\|u\|_{\mathcal{S}} := \sup_{t\geq 0} e^{\sigma t}\|u(t)\|_{\mathcal{H}} \tag{9}$$

und $(\mathcal{N}, \|\cdot\|_{\mathcal{N}}) = (C[0,\infty), \|\cdot\|_{\mathcal{N}})$ mit

$$\|u\|_{\mathcal{N}} := \sup_{t\geq 0} e^{2\sigma t}\|u(t)\|_{\mathcal{H}}$$

ein. Wir erkennen sofort, dass $\|u_{lin}\|_{\mathcal{S}} \leq \|u_0\|_{\mathcal{H}}$. Die Ableitung von N, $M := N'$ ist als stetig differenzierbare Funktion mit beschränkter Ableitung Lipschitz-stetig und es gilt für alle $u, v \in \mathcal{H}$ mit $\|u\|_{\mathcal{H}}, \|v\|_{\mathcal{H}} \leq 1$

$$\|M(u) - M(v)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq \sup_{\|x\|_{\mathcal{H}}\leq 1} \|M'(x)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H};\mathcal{B}(\mathcal{H}))} \cdot \|u - v\|_{\mathcal{H}}. \tag{10}$$

Durch unsere Voraussetzungen an N gilt somit

$$\|N'(u)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \|N'(u) - N'(0)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq C_N\|u\|_{\mathcal{H}} \tag{11}$$

für alle $\|u\|_{\mathcal{H}} \leq 1$. Dadurch erhalten wir eine etwas explizitere Abschätzung für die Lipschitz-Konstante von N durch

$$\begin{aligned}
\|N(u)-N(v)\|_{\mathcal{H}} =& \left\| \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} N(u+t(v-u))\mathrm{d}t \right\|_{\mathcal{H}} \leq \int_0^1 \|N'(u+t(v-u))\cdot(v-u)\|_{\mathcal{H}}\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 \|N'(u+t(v-u))\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \cdot \|v-u\|_{\mathcal{H}}\,\mathrm{d}t \\
&\leq C_N \int_0^1 \|(1-t)u+tv\|_{\mathcal{H}} \cdot \|v-u\|\,\mathrm{d}t \\
&\leq C_N \cdot \|v-u\|_{\mathcal{H}} \cdot \int_0^1 ((1-t)\|u\|_{\mathcal{H}} + t\|v\|_{\mathcal{H}})\,\mathrm{d}t \\
&\leq C_N \cdot \|v-u\|_{\mathcal{H}} \cdot \max\{\|u\|_{\mathcal{H}}, \|v\|_{\mathcal{H}}\}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Sind $\|u\|_{\mathcal{S}}, \|v\|_{\mathcal{S}} \leq \varepsilon$, dann ist

$$\begin{aligned}
\|N(u)-N(v)\|_{\mathcal{N}} \leq& \sup_{t\geq 0} e^{2\sigma t} C_N \cdot \|v(t)-u(t)\|_{\mathcal{H}} \cdot \max\{\|u(t)\|_{\mathcal{H}}, \|v(t)\|_{\mathcal{H}}\} \\
\leq& C_N \cdot \sup_{t\geq 0} e^{\sigma t}\|v(t)-u(t)\|_{\mathcal{H}} \cdot \sup_{t\geq 0} \max\{e^{\sigma t}\|u(t)\|_{\mathcal{H}}, e^{\sigma t}\|v(t)\|_{\mathcal{H}}\} \\
\leq& C_N \cdot \varepsilon \cdot \|u-v\|_{\mathcal{S}} = \frac{\sigma}{2}\|u-v\|_{\mathcal{S}}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}
\|DF\|_{\mathcal{S}} =& \sup_{t\geq 0} e^{\sigma t}\|DF(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \sup_{t\geq 0} e^{\sigma t} \int_0^t \underbrace{\|e^{(t-s)L}F(s)\|_{\mathcal{H}}}_{\leq e^{-\sigma(t-s)}\|F(s)\|_{\mathcal{H}}}\,\mathrm{d}s \\
\leq& \sup_{t\geq 0} \int_0^t e^{2\sigma s}\|F(s)\|_{\mathcal{H}} \cdot e^{-\sigma s}\,\mathrm{d}s \leq \|F\|_{\mathcal{N}} \cdot \int_0^\infty e^{-\sigma s}\,\mathrm{d}s \\
=& \frac{\|F\|_{\mathcal{N}}}{\sigma}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Ist nun $\|u_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, dann ist $\|u_{lin}\|_{\mathcal{S}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ und Proposition 1 greift. Aus dieser folgt nun die eindeutige Existenz einer Lösung $u \in \mathcal{S}$ mit

$$\|u\|_{\mathcal{S}} \leq 2\|u_{lin}\|_{\mathcal{S}} \leq 2\|u_0\|_{\mathcal{H}}, \tag{15}$$

was

$$\|u(t)\|_{\mathcal{H}} \leq 2e^{-\sigma t}\|u_0\|_{\mathcal{H}} \tag{16}$$

impliziert. $\square$