

1 L^p & interpolation1.1 L^p & schwache L^p

(X, μ) Maßraum mit Maß μ (nicht notwendigerweise endlich)

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \quad \text{Norm, wenn } 1 \leq p < \infty$$

$$\|f\|_\infty = \text{ess-sup } |f| = \inf \{ B > 0 : \mu(\{x : |f(x)| > B\}) = 0 \}$$

$0 < p < 1$. $\|\cdot\|_p$ ist eine Quasinnorm;

$$0 < p \leq \infty \quad \|f+g\|_p \leq \max \{ 1, 2^{(1-p)/p} \} (\|f\|_p + \|g\|_p)$$

(Hausaufgabe: zeige: $0 < p < 1$: $\|f+g\|_p \geq \|f\|_p + \|g\|_p$, $f, g \geq 0$.)

$$L^p \begin{cases} \text{Banachraum} & p \in [1, \infty] \\ \text{Quasi-Banach} & 0 < p < 1 \end{cases}$$

$$p' = \frac{p}{p-1} \quad 1' = \infty, \quad \infty' = 1$$

Der duale $(L^p)^*$ ist isometrisch zu $L^{p'}$ $1 \leq p < \infty$

$$\|f\|_p = \sup_{\|g\|_{p'}=1} \left| \int_X f \cdot g d\mu(x) \right| \quad 1 \leq p < \infty$$

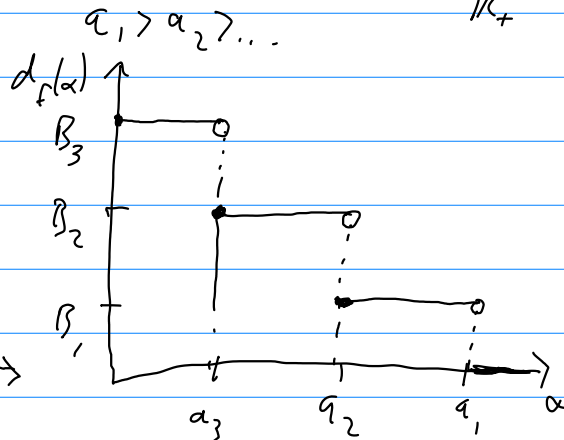
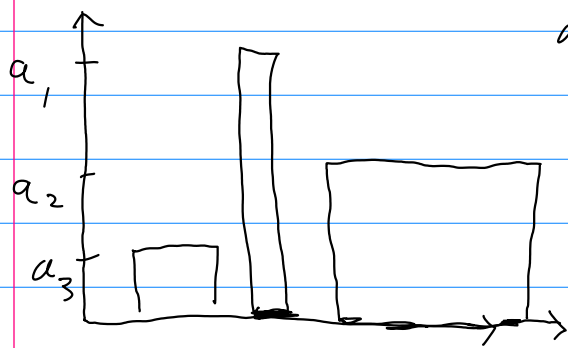
1.1.1 Verteilungsfunktion

$$f \text{ messbar; } d_f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \\ \alpha \mapsto d_f(\alpha) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\})$$

Beispiel 1.1.2

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{E_k}(x) \quad E_k \cap E_l = \emptyset, \quad k \neq l$$

$\uparrow$
 $\mathbb{R}_+$



$$d_f(\alpha) = \mu(\{x \mid |f(x)| > \alpha\})$$

$$\alpha > a_1: d_f(\alpha) = 0$$

$$a_1 > \alpha > a_2: d_f(\alpha) = |E_1| \equiv \beta_1$$

$$a_2 > \alpha > a_3: d_f(\alpha) = |E_1| + |E_2| \equiv \beta_2$$

$$a_3 > \alpha: \dots$$

Behauptung 1.1.3

f, g messbar

$$1) \quad |g| < |f| \stackrel{\mu\text{-f.a.}}{\Rightarrow} d_g \leq d_f$$

$$2) \quad d_{cf}(\alpha) = d_f\left(\frac{\alpha}{|c|}\right) \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$3) \quad d_{f+g}(\alpha + \beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta)$$

$$4) \quad d_{f \cdot g}(\alpha \cdot \beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta)$$

$$5) \quad d_f \text{ rechtsseitig stetig}$$

$$6) \quad |f_n| \nearrow |f| \Rightarrow d_{f_n} \nearrow d_f$$

Beweis Hausaufgabe

Beh 1.1.4 (layer-cake) $f \in L^p(X, \mu)$ $0 < p < \infty$

$$\int |f|^p d\mu = \|f\|_p^p = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} d_f(\alpha) d\alpha$$

$$\varphi \in C^1(0, \infty), \varphi(0) = 0 \quad \int \varphi(|f|) d\mu(x) = \int_0^\infty \varphi'(\alpha) d_f(\alpha)$$

Beweis HA.

$$|x|^{-\alpha}, \alpha$$

Definition 1.1.5 (Schwache L^p -Räume)

$$0 < p < \infty, \quad \|f\|_{p,\infty} = \inf \left\{ C : d_f(\alpha) \leq \frac{C^p}{\alpha^p}, \alpha > 0 \right\} \\ = \sup \left\{ \gamma d_f(\gamma)^{1/p} : \gamma > 0 \right\}$$

$$\| |x|^{-d/p} \|_{L^{p,\infty}(d\lambda)} < \infty.$$

$$d_{|x|^{-d/p}}(\alpha) = \mu_L(\{x : |x|^{-d/p} > \alpha\}) \\ = \int d\lambda \mathbb{1}_{|x| < \alpha^{-p/d}} = \alpha^{-p} |B_0(1)| \\ (x \mapsto x \cdot \alpha^{-p/d})$$

$\|\cdot\|$ hat folgende Eigenschaften

$$\|h \cdot f\|_{p,\infty} = |h| \|f\|_{p,\infty}, \quad h \in \mathbb{C}$$

$$\|f + g\|_{p,\infty} \leq \max\{2, 2^{1/p}\} (\|f\|_{p,\infty} + \|g\|_{p,\infty})$$

(Beh 1.1.3 (3))

$$\|f\|_{p,\infty} = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ } \mu\text{-gl} \quad \left(d_{f+g}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) \leq d_f\left(\frac{\alpha}{2}\right) + d_g\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right)$$

$\Rightarrow L^{p, \infty}$ ist quasinormiert (sogar Quasi-Banach, später)

Behauptung 1.1.6 ($L^p \subseteq L^{p, \infty}$)

$$0 < p < \infty, \quad f \in L^p(X, \mu). \quad \|f\|_{p, \infty} \leq \|f\|_p.$$

Bew

$$d_f(\alpha) = \int d\mu \cdot \mathbb{1}_{\{x: |f| > \alpha\}} \frac{|f|^p}{|f|^p}$$

$$\leq \alpha^{-p} \int_{\{x: |f| > \alpha\}} d\mu(x) |f(x)|^p \leq \alpha^{-p} \|f\|_p^p \quad (\alpha > 0) \quad \square$$

Chintchin's Ungleichung

Motivation Littlewood-Paley-Ungleichungen.

$\mathcal{L}$ linearer, s.d. Operator in $\mathcal{L}_2 = L^2(\mathbb{R}^d)$.
nicht-definiert. ($\mathcal{L} \geq 0$)

$$\|F(\mathcal{L}) f\|_p \leq \| \mathcal{L}^{s/2} f \|_p, \quad s > 0$$

$$\mathcal{L} = \int \lambda \, dE_{\mathcal{L}}(\lambda)$$

$$N \in 2^{\mathbb{Z}}$$

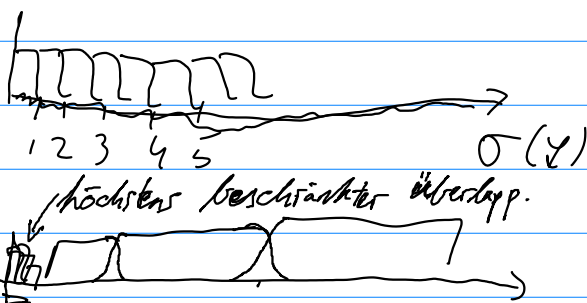
$$P_N(\mathcal{L}) = \mathcal{L} \left(\frac{\mathcal{L}}{N} \right)$$

$$\mathcal{L} = \phi \left(\frac{\mathcal{L}}{N} \right) - \phi \left(\frac{\mathcal{L}}{2N} \right), \quad \mathcal{L} \in [2^{-n}, 2^{1-n}]$$

$\phi \in C_c^\infty$ bumps

$$\| \mathcal{L}^{s/2} f \|_p \sim \left\| \left(\sum_{N \in 2^{\mathbb{Z}}} |N^{s/2} P_N(\mathcal{L}) f|^2 \right)^{1/2} \right\|_p.$$

(für $p=2$ folgt das sofort aus dem Spektralsatz; für scharfe Ent-0/1s ist das dann der Satz von Pythagoras)



Chintchin-Ungleichung

$$0 < p < \infty, \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}$$

$\epsilon_n \in \{\pm 1\}$ i.i.d. verteilt
($(\epsilon_n)_n$ ist Rademacher)

$$\left(\mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^N \epsilon_k a_k \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \underset{\uparrow p}{\sim} \left(\sum_{k=1}^N |a_k|^2 \right)^{1/2} \quad (\Rightarrow a_n = f_n(x))$$

hier nur für $p \geq 1$. $p < 1 \rightarrow$ Haagerup (1981) und a_n gleichmäßig in N !! $\mathbb{E} \left\| \sum \epsilon_n f_n \right\|_p^p \sim \mathbb{E} \left(\sum |f_n|^2 \right)^{p/2}$

Beweis $p=2$. O.B.d.A. $\sum |a_n|^2 = 1$. $\uparrow$ station $a, b > 0$.
 $a \lesssim b \Leftrightarrow \exists c > 0$ s.d. $a \leq cb$
"s" $\sim \Leftrightarrow a \leq cb \leq c'a$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \sum \epsilon_n a_n \right|^2 &= \mathbb{E} \sum_{k, k'} \epsilon_k \epsilon_{k'} a_k a_{k'} \\ \mathbb{E}(\epsilon_k \epsilon_{k'}) &= \mathbb{E}(\epsilon_k) \mathbb{E}(\epsilon_{k'}) = 0, \quad k \neq k' \\ &= \sum |a_n|^2 = 1. \end{aligned}$$

$p=2 \rightarrow$ Gleichheit!

Behaupte, es genügt " $\lesssim$ " zu zeigen. $X = \sum \epsilon_n a_n$

$$(z.z. "s") \quad \mathbb{E}(X \cdot X) \underset{"s"}{\leq} \left(\mathbb{E}(|X|^p) \right)^{1/p} \left(\mathbb{E}(|X|^{p'}) \right)^{1/p'} \underset{"s"}{\leq} 1 \quad (\text{per Voraussetzung})$$

Wir zeigen jetzt $\mathbb{E} \left| \sum \epsilon_n a_n \right|^p \leq 1$ $\stackrel{\text{denn}}{\leq} e^{-1^{2p/2}}$

Mit layer-cake, $\mathbb{E} \left| \sum \epsilon_n a_n \right|^p = \int_0^\infty dt \, P(|\sum \epsilon_n a_n|^p > t)$

$\Re$ Realteil
 $\Im$ Imaginärteil

$$\begin{aligned} &P(|\sum \epsilon_n a_n|^2 > 1) \\ &= P(|\sum \epsilon_n \Re(a_n)|^2 + |\sum \epsilon_n \Im(a_n)|^2 > 1) \\ &\leq P(|\sum \epsilon_n \Re(a_n)|^2 > \frac{1}{2}) + P(|\sum \epsilon_n \Im(a_n)|^2 > \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

Behauptung (hier $a_n \in \mathbb{R}$)

$$P(|\sum \epsilon_n a_n| > 1) \leq e^{-1^2/2} \quad (*)$$

$$\Rightarrow P(|\sum \epsilon_n a_n|^p > 1) \leq e^{-1^{2/p}/2}$$

$$\leq P(\sum \epsilon_n a_n > 1) + P(\sum \epsilon_n a_n < -1)$$

$$(*) \Leftrightarrow P(e^{\lambda \sum \epsilon_n a_n} > e^{\lambda^2}) \stackrel{(*)}{\leq} e^{-\lambda^2/2}$$

$$\Uparrow \alpha = e^{\lambda^2}$$

$$P(e^{\lambda \sum \epsilon_n a_n} > \alpha) \leq \frac{1}{\alpha} e^{\lambda^2/2}$$

$\Uparrow$ Chebyshev

$$\mathbb{E}(e^{\lambda \sum \epsilon_n a_n}) \leq e^{\lambda^2/2}$$

$$\mathbb{E}\left(\prod_{n=1}^N e^{\lambda \epsilon_n a_n}\right) \stackrel{\text{unabhängigkeit}}{=} \prod \mathbb{E}(e^{\lambda \epsilon_n a_n})$$

$$e^x = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} x^l$$

$$\mathbb{E}(\epsilon_n^l) = 0 \text{ wenn } l \text{ ungerade}$$

$$\cosh x \leq e^{x^2/2}$$

$$= \prod \cosh(\lambda \cdot a_n)$$

$$\leq \prod_{n=1}^N \exp((\lambda \cdot a_n)^2/2)$$

$$\sum a_n^2 = 1 \Rightarrow e^{\lambda^2/2}$$

□

Hausaufgabe: Formuliere einen lesbaren Beweis.

Grafakos - Classical Fourier analysis Kap. 1
(online verfügbar)

T. Tao - Notes on Fourier analysis (lecture 1)

1.1.3 Verallgemeinerte Hölderungleichung

23.4.2020

$$L^r \subseteq L^p \cap L^q \quad p < r < q$$

Thm 1.1.14 Sei $0 < p < r < q \leq \infty$, f μ -messbar
 $\Rightarrow f \in L^r$ wenn $f \in L^{p,\infty} \cap L^{q,\infty}$

$$\|f\|_r \leq \left(\frac{r}{r-p} + \frac{r}{q-r} \right)^{1/r} \|f\|_{p,\infty}^{(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})/(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|f\|_{q,\infty}^{(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})/(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}$$

$$d_f(\alpha) = \mu\{x: |f| > \alpha\}$$

Bew $\|f\|_r^r = r \int_0^\infty d\alpha \alpha^{r-1} d_f(\alpha)$
 $\leq r \int_0^\infty d\alpha \alpha^{r-1} \min \left\{ \frac{\|f\|_{p,\infty}^p}{\alpha^p}, \frac{\|f\|_{q,\infty}^q}{\alpha^q} \right\}$
 $= \dots$

$$(q = \infty \quad d_f(\alpha) \leq \alpha^{-p} \|f\|_{p,\infty}^p) \quad \square$$

Wir schließen mit Faltungsungleichungen

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad \frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad 1 \leq p, q, r \leq \infty$$

$$\|f * g\|_r \lesssim_{p,q} \|f\|_p \|g\|_{q,\infty} \quad (\text{verallgemeinerte Young-Ugl.})$$

$p, \dots$ Ladungsverteilung $1 < p, q, r < \infty$

$$\|p * \frac{1}{i \cdot x}\|_r \quad (\text{Hardy-Littlewood-Sobolev})$$

$$\|f * g\|_{r,\infty} \lesssim_{p,q} \|f\|_{p,\infty} \|g\|_{q,\infty} \quad 1 < p, q, r < \infty$$

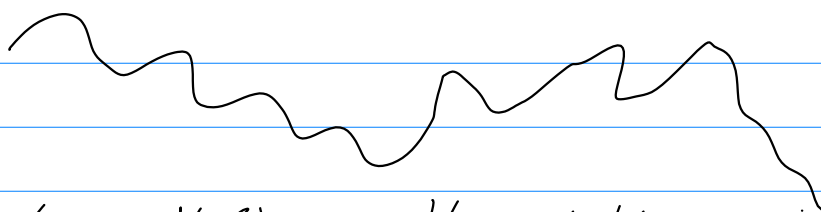
(Schwache Young-Ungleichung)

1.2. Lorentz-Räume

sh auch Benguria
Isoperimetric inequalities for
eigenvalues of the Laplacian

f messbar auf (X, μ) ; Wir betrachten "Umordnungen"

Sphärisch symmetrisch abfallende Umordnung



$$\langle f, Hf \rangle \quad H = -\Delta - V.$$

sowohl für sph sym
abfallende Umordnung
als auch nicht-sym.
abfallende Umordnung

$$\langle f, -\Delta f \rangle \geq \langle f^*, -\Delta f^* \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle f, Vf \rangle &= \int V(x) |f|^2 \\ &\leq \int V^*(x) (|f|^2)^* \\ &= \int V^*(f^*)^2 \end{aligned}$$

$$A \subseteq \mathbb{R}^d, \quad |A| < \infty \quad A^* = \{x: |x| < r\}$$

und $|A^*| = |A|$

$$\mathbb{1}_A^* := \mathbb{1}_{A^*} \quad \frac{f^*(x)}{\mathbb{R}^d} = \int_0^\infty dt \, \mathbb{1}_{|f|>t}$$

(in gleicher spirit wie $|f| = \int_0^\infty dt \, \mathbb{1}_{|f|>t}$)

1.2.1 Nicht-steigende / abfallende Umordnung

Definition 1.2.1 f messbar (komplexwertig)

$$f^*: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$$

$$f^*(t) = \inf \{s > 0: d_f(s) \leq t\}$$

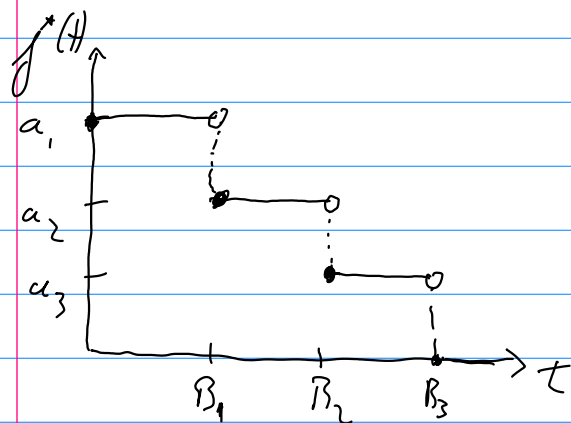
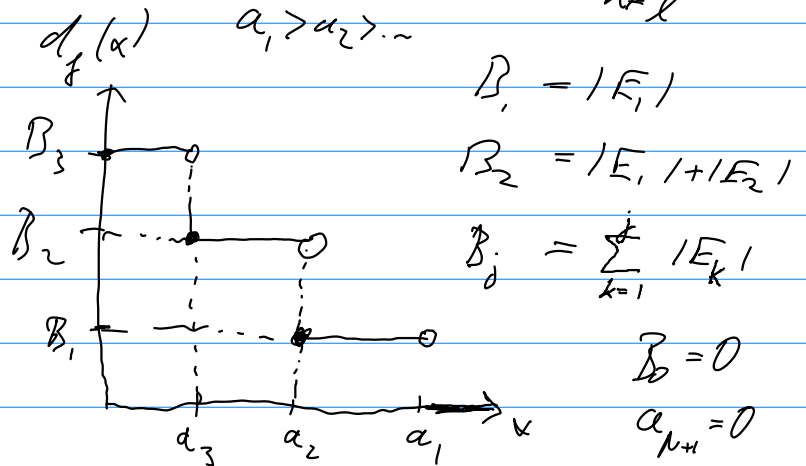
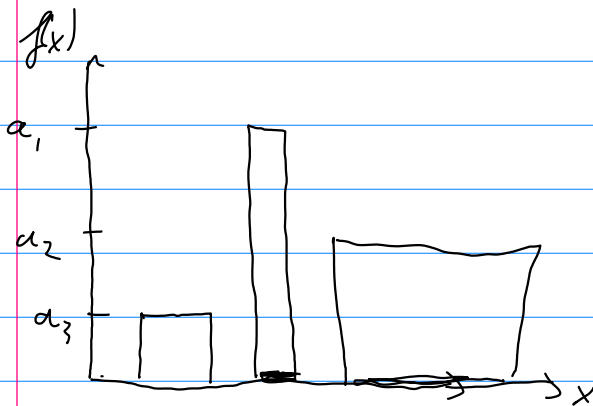
$$d_f(s) = \mu(\{ |f| > s \}) \quad \text{nicht-steigend}$$

Klar: $f^*(t)$ nicht-steigend

$$\bullet \text{supp } f^* \in [0, \mu(X)]$$

Bsp 1.2.2

$$f(x) = \sum_{k=1}^N a_k \mathbb{1}_{E_k} \quad \begin{matrix} \hookrightarrow \mathbb{R}_+ \\ E_k \cap E_l = \emptyset \\ k \neq l \end{matrix}$$



$B_0 \leq t \leq B_1$: das kleinste $s > 0$
 $d_f(s) \leq t$ ist a_1

$B_1 \leq t \leq B_2$: ... a_2

$$d_f(x) = \sum_{j=0}^N B_j \mathbb{1}_{[a_{j+1}, a_j)}(x)$$

$$\Rightarrow f^*(t) = \sum_{j=1}^N a_j \mathbb{1}_{[B_{j-1}, B_j]}(t)$$

Bsp 1.2.3

$$f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto f(x) = \frac{1}{1 + |x|^p} \quad 0 < p < \infty$$

$$B_x(r) := \{y \in \mathbb{R}^d : |x-y| < r\} \quad d_f(x) = \begin{cases} |B_0(1)| \left(\frac{1}{x} - 1\right)^{d/p} & x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$f^*(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{|B_0(1)|}\right)^{p/d}} \quad (\text{Hausdorffgabe})$$

Bsp 1.2.4

$$g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto g(x) = 1 - e^{-|x|^2}$$

$$f^*(t) = \inf \{ s > 0 : d_f(s) \leq t \} \quad d_f(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq 1 \\ \infty & |x| < 1 \end{cases} \Rightarrow f^*(t) = 1 \quad t \geq 0$$

Interpretation

f^* konserviert zwar quantitative Information aber qualitative Information ist verloren.

Beh 1.2.5 $f, g, (f_n)$ μ -messbar, $h \in \mathbb{C}$
 $0 < t, s, t_1, t_2 < \infty$.

(0) f^* ist rechtsseitig stetig & abfallend

$$(1) f^*(d_f(x)) \leq x, \quad x > 0$$

$$(2) d_f(f^*(t)) \leq t$$

$$(3) f^*(t) > s \Leftrightarrow t < d_f(s) \Leftrightarrow \{ t > 0 : f^*(t) > s \} = [0, d_f(s)]$$

$$(4) |g| \leq |f| \quad \mu\text{-a.e.} \Rightarrow g^* \leq f^* \quad \text{und} \quad |f|^* = f^*$$

$$(5) (hf)^* = |h| f^*$$

$$(6) (f+g)^*(t_1+t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2)$$

$$(7) (fg)^*(t_1+t_2) \leq f^*(t_1) \cdot g^*(t_2)$$

$$(8) |f| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n| \quad \mu\text{-a.e.} \Rightarrow f^* \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^*$$

$$\| (9) \quad |f_n| \nearrow |f| \quad \mu\text{-a.e.} \Rightarrow f_n^* \nearrow f^*$$

$$(10) \quad t \leq \mu(\{x \in X, |f(x)| > f^*(t)\}), \text{ falls}$$

$$\mu(\{|f| > f^*(t) - \epsilon\}) < \infty \text{ for an } \epsilon$$

$$\| (11) \quad d_f = d_{f^*}$$

$$(12) \quad (|f|^p)^* = (f^*)^p \quad (0 < p < \infty)$$

$$(13) \quad \int |f|^p d\mu = \int_0^\infty (f^*)^p dt$$

$$(14) \quad \|f\|_{L^\infty} = f^*(0)$$

$$\| (15) \quad \sup_{t>0} t^q f^*(t) = \sup_{\alpha>0} \alpha d_f(\alpha)^{1/q} \quad 0 < q < \infty$$

Bew HA (fett angestrichene Eigenschaften)

$$\|f\|_{p,\infty} = \sup_{\alpha>0} \alpha d_f(\alpha)^{1/p}$$

1.2.2 Loretzräume

$|x|^{-\alpha} \notin L^p$ (aber beinahe
(is art log)

Def 1.2.6 f messbar, $0 < p, q \leq \infty$

$$\|f\|_{L^{p,q}(X)} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^*(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} = \|t^{1/p} f^*\|_{L^q(\mathbb{R}, \frac{dt}{t})} & \text{für } q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) & \text{für } q = \infty \end{cases}$$

(mit Beh 1.2.5 (15) liefert dies das ursprüngliche $\|f\|_{p,\infty}$)

Einfache Eigenschaften

$$\|f(\lambda \cdot)\|_{p,q} = \lambda^{-d/p} \|f\|_{p,q}$$

$$\| |g|^r \|_{p,q} = \|g\|_{p \cdot r, q \cdot r}^r$$

$$L^{p,p} = L^p \text{ (isometrisch) (Beh 1.2.5 (13))}$$

$$[L^p \not\subset L^q \quad \underline{L^p \subset L^q} \quad q < p]$$

Beh 1.2.7 (Alternative Charakterisierung von $L^{p,q}$ I)

$$0 < p < \infty \quad 0 < q \leq \infty \quad \|f\|_{p,q}^q = p \cdot \int_0^\infty [s d_f(s)^{1/p}]^{q/p} \frac{ds}{s}$$

Beweis $q = \infty$ (Beh 1.2.5 (15))

$$q < \infty. \quad \text{zunächst } f(x) = \sum_{j=1}^N a_j \chi_{E_j}(x)$$

$$d_f(s) = \sum_{j=1}^N \beta_j \chi_{[a_{j+1}, a_j)}(s) \quad \beta_0 = a_{N+1} = 0$$

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^N a_j \chi_{[\beta_{j-1}, \beta_j)}(t)$$

$$\begin{aligned} \|f\|_{p,q} &= \left(\frac{q}{p}\right)^{1/q} [a_1^q \beta_1^{q/p} + a_2^q (\beta_2^{q/p} - \beta_1^{q/p}) \\ &\quad + \dots + a_N^q (\beta_N^{q/p} - \beta_{N-1}^{q/p})]^{1/q} \\ &= \dots \text{ stimmt mit Behauptung überein.} \end{aligned}$$

Für allgemeine f finde wir eine Folge nicht-negativer einfacher Funktionen, sodass

$$f_n \nearrow |f| \quad ; \quad \text{wg Beh 1.2.5 (9) 1.1.3 (6)}$$

$$\text{gilt auch } d_{f_n} \nearrow d_f \quad f_n^* \nearrow f^* \quad \square$$

Beh 1.2.8 $0 < p \leq \infty, \quad 0 < q < r \leq \infty \quad L^{p,q} \subseteq L^{p,r}$
 ($L^p \subseteq L^{p,\infty}$)

und insb. $\|f\|_{p,r} \lesssim_{p,q,r} \|f\|_{p,q} \quad \sqrt[p]{\|f\|_{p,r}} = \|t^{1/p} f^*\|_{L^r(\mathbb{R}_+, t^{-1/p})}$

Bew $p = \infty$ trivial
 $p < \infty$.

$$t^{1/p} f^*(t) = \left(\frac{q}{p} \int_0^t (s^{1/p} \widetilde{f^*(s)})^q \frac{ds}{s} \right)^{1/q} \leq f^{*(1/r)}$$

$$\leq \dots = \left(\frac{q}{p} \right)^{1/q} \|f\|_{p,q}$$

$\Rightarrow$ Beh. wenn $r = \infty$ durch $\lim_{r \rightarrow \infty} \|f\|_{p,r} = \|f\|_{p,\infty}$

$$r < \infty: \|f\|_{p,r} = \left\{ \int_0^\infty (t^{1/p} f^*(t))^{r-q+q} \frac{dt}{t} \right\}^{1/r}$$

$$\leq \underbrace{\|f\|_{p,\infty}^{(r-q)/r}}_{\lesssim_{p,q,r} \|f\|_{p,q}^{(r-q)/r}} \|f\|_{p,q}^{q/r}$$

Referenzen fuer Lorentzraum: Bennett-Sharpely (1988) (S. 216),
 Triebel (2001) (Abschnitt 11.6)

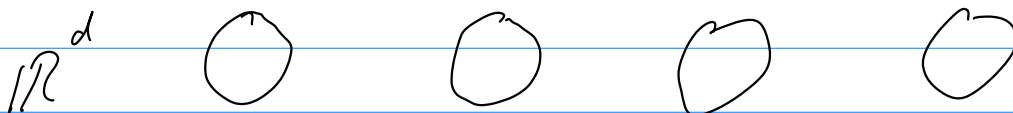
Referenzen fuer Interpolation: Ebenfalls Bennett-Sharpely (Kapitel 4),
 Bergh-Loftstrom (1976)

$$\| \sum e_n f_n \|_p^p \sim \| (\sum |f_n|^2) \|_p^p$$

29.04.2020

$$\| \widehat{f} \|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \| f \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad p \in [1, 2]$$

$$\| \widehat{f} \|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{p,q,d} \| f \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \Rightarrow p \leq 2$$



$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{2\pi i x_j} \hat{f}_k(3)$$

$$\underline{L^{p,q}} \quad \|f\|_{p,q} = \|t^{1/p} f^*(t)\|_{L^q(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t})}$$

Frage: $L^{p,q}$ Banach? (für welche p, q ?)

Im Allgemeinen nicht! Bsp $f(t) = t$ auf $[0, 1]$
 $g(t) = 1-t$

Ausrechnen von $\|f+g\|_{p,q}$ & $\|f\|_{p,q} + \|g\|_{p,q}$ und Annahmen

der Dreiecksungleichung in $L^{p,q}$ würde auf die Ungleichung

$$\frac{2}{q} \leq 2^q \frac{\Gamma(q+1) \Gamma(q/p)}{\Gamma(q+1+q/p)} \text{ führen, die i.A. nicht wahr ist.}$$

Dennoch bekommen wir eine quasi- Δ -Ugl, denn

$$(f+g)^*(t) \leq f^*\left(\frac{t}{2}\right) + g^*\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \|t^{\frac{1}{p}}(f+g)^*\|_{L^q(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t})} &\leq 2^{\frac{1}{p}} \|t^{1/p} f^*\|_{L^q(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t})} + \|t^{1/p} g^*\|_{L^q(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t})} \\ &\stackrel{t \mapsto 2t}{\leq} 2^{\frac{1}{p}} \|t^{1/p} f^*\|_{L^q(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t})} + \|t^{1/p} g^*\|_{L^q(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t})} \quad \text{--- (quasi)-}\Delta\text{-Ugl in } L^q \\ &\Rightarrow \|f+g\|_{p,q} \leq 2^{1/p} \cdot \max\{1, 2^{\frac{1-q}{q}}\} (\|f\|_{p,q} + \|g\|_{p,q}) \\ &\quad \leftarrow \text{von quasi-}\Delta\text{-Ugl. in } L^q \text{ for } 0 < q < 1 \\ &\Rightarrow \text{Quasi-Dreiecksungleichung} \end{aligned}$$

$$\|f\|_{p,q} = 0 \Rightarrow f = 0 \quad \mu\text{-f.ü. } 0 \Rightarrow L^{p,q} \text{ quasi-normiert}$$

Thm 1.2.9 Seien $0 < p, q \leq \infty$. Dann sind $L^{p,q}$ Quasi-Banach.

Falls $p, q > 1$, dann sind $L^{p,q}$ normierbar, also insbesondere Banach.

Theorem 1.2.10 Eicht einfache Funktionen $(\sum_{k=1}^N a_k \mathbb{1}_{E_k})$

$f^{-\frac{1}{p}} \mathbb{1}_E \in L^{p,\infty}$ sind dicht in $L^{p,q}$ für $0 < p, q < \infty$

Einfache Funktionen sind dicht in $L^{p,\infty}$
 $(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbb{1}_{E_k})$

↗ lässt sich nicht
 durch eicht einfache
 Fkte approximiere

Theorem 1.2.11 $0 < p, q < \infty$ Monotone Konvergenz: $|f_n| \uparrow f$ μ -f.o.

Fatou:

$$\Rightarrow \|f\|_{p,q} = \lim \|f_n\|_{p,q}$$

$$\text{und } \|\lim f_n\|_{p,q} \leq \liminf \|f_n\|_{p,q}$$

Motivation:
 Marcinkiewitz
 Interpolation

$$T: L^{p,q} \rightarrow L^{q,\infty}$$

$$\text{linear } L^{p_1,q_1} \rightarrow L^{q_1,\infty}$$

$$\Rightarrow T: L^{p,s} \rightarrow L^{q,s}$$

$$s \in (0, \infty), \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$

Definition 1.2.12



- (1) Eine sub-Treppenfunktion der Höhe H und der Breite W ist eine Funktion die auf E getragen ist, wobei $\mu(E) \leq W$ und $|f| \leq H$ erfüllt.

Zusammengefasst: $|f| \leq H \cdot \mathbb{1}_E$

- (2) Eine Quasi-Treppenfkt der Höhe H und Breite W ist eine Fkt f , die auf $E \subseteq X$ getragen ist und $|f(x)| \sim H$ & $\mu(E) \sim W$ erfüllt.

Zusammengefasst: $|f| \sim H \mathbb{1}_E$

Bemerkungen 1.2.13

(1) Aus der Binärdarstellung von $[0, 1]$ sehen wir, dass jede nicht-negative sub-Treppenfkt der Höhe H und Breite W immer durch $\sum_{k \geq 2} 2^{-k} f_k$ dargestellt werden kann, wobei die f_k Indikator-fkte der Höhe 1 und Breite höchstens W .

$$(f^*(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}(t)) \quad \| \mathbb{1}_E \|_{p,q} = \text{const} \quad |E|^{1/p}$$

$$\| \text{sub-Treppenfkt} \|_{p,q} = O(H \cdot W^{1/p})$$

$$\| \text{quasi-Treppenfkt} \|_{p,q} \sim H \cdot W^{1/p}$$

Der Rcht ist Folgender: Jede $L^{p,q}$ -Fkt kann durch eine q -Summe von sub- bzw. quasi-Treppenfken dargestellt werden.

Thm 1.2.14 (Charakterisierung von $L^{p,q}$ II;
Tao (Lectures on Fourier Analysis I)
Thm 6.6)

Sei $0 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < A < \infty$, f messbar.

Dann sind die folgenden Aussagen (bis auf die involvierten impliziten Konstanten) zueinander äquivalent

(i) $\|f\|_{p,q} \lesssim_{p,q} A$

(ii) Es gibt eine Zerlegung $f = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m$, wobei f_m quasi-Treppenfkte der Höhe 2^m und

vertikale dyadische Zerlegung $\left\{ \begin{array}{l} \text{Breite } w_m \in (0, \infty) \text{ sind. Die } f_m \text{ haben disjunkte} \\ \text{Träger und } \|2^m w_m\|_{\ell_m^q} \leq_{p,q} A. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(paarweise)} \\ \\ \text{(Summation bzgl } m) \end{array}$

(iii) Es gibt eine punktweise Schranke $|f| \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} 2^m \chi_{E_m}$
mit $\|2^m \mu(E_m)\|_{\ell^q} \leq A$.

horizontale dyadische Zerlegung $\left\{ \begin{array}{l} \text{(iv) Es gibt eine Zerlegung } f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n, \text{ wobei} \\ f_n \text{ sub-Treppenfunktion der Höhe } H_n \text{ und Breite } 2^n \\ \text{auf disjunkten Trägern haben. Darüberhinaus} \\ \text{sind die } H_n \text{ abfallend angeordnet, sodass} \\ |f_{n+1}| \leq |f_n| \leq H_n \text{ auf } \text{supp } f_n \text{ und} \\ \|H_n 2^{n/p}\|_{\ell_n^q} \leq A. (*) \end{array} \right.$

(v) Es gibt eine punktweise Schranke $|f| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_n \chi_{E_n}$
mit $\mu(E_n) \leq_{p,q} 2^n$ und es gilt (*)

Bew Sh. Thm 6.6 in Tao 1

(Nachtrag 30.4.20) Bemerkung: 1) Die Zahlen 2^m bzw. 2^n können durch beliebige γ_m mit $\inf \frac{\gamma_{m+1}}{\gamma_m} > 1$ und $\sup \frac{\gamma_{m+1}}{\gamma_m} < \infty$ ersetzt werden ("exp. Wachstum")
2) Für "(ii), (iii) $\Rightarrow$ (i)" genügt $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{m+1}}{\gamma_m} > 1$, d.h. $(\gamma_m)_m$ ist lückenbildend ("Lücken bildend")

Bemerkung 1.2.15 (i) Für einzelne quasi-Treppenfunkte f

der Höhe H , Breite w gilt $\|f\|_{p,q} \sim H w^{1/p}$
für eine Folge solcher f_n mit hinreichend versch. Hn oder Breiten (z.B. $H_n \sim 2^n$) sehen wir

$$\|\sum f_n\|_{p,q} \sim \|H_n w_n^{1/p}\|_{\ell_n^q}$$

$|x|^{-x}$
 $\mathbb{R}$
 L^p

$$(2) \quad 0 < p < 1 \quad \| \Sigma f_n \|_p \leq N^{\frac{1}{p}-1} \Sigma \|f_n\|_p$$

$\rightarrow$ Ändern in p gibt polynomische Änderungen der $L^{p,q}$ -Norm.

Angenommen $A \leq |f(x)| \leq A \cdot N$ für ein A und N ist der Quotient zwischen der größten und kleinsten Höhe von f

$\Rightarrow$ wir sehen, dass die $\| \cdot \|_{p,q_1}$, $\| \cdot \|_{p,q_2}$ sich nur durch multiplikative Potenzen von $\log N$ voneinander unterscheiden.

$$\text{Verallg. von } \left\{ \begin{array}{l} \|f \cdot g\|_p \leq \|f\|_{p_1} \|g\|_{p_2} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \\ \|f\|_p = \sup_{\|g\|_{p'}=1} \left| \int fg \, d\mu \right| \end{array} \right\} \text{ auf } L^{p,q}$$

Thm 1.2.17 (Hölder für $L^{p,q}$) (von O'Neil)

Seien $0 < p_1, p_2 < \infty$, $0 < q_1, q_2 \leq \infty$ mit

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$$

$$\Rightarrow \|f \cdot g\|_{p,q} \leq_{p,q,p_1,q_1,p_2,q_2} \|f\|_{p_1,q_1} \|g\|_{p_2,q_2}$$

$$\|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

Bemerkung

Analog für Young (O'Neil)

$$1 < p, q, r < \infty \\ 0 < s_1, s_2 < \infty$$

$$\|f \cdot g\|_{r,s} \leq \|f\|_{p,s_1} \|g\|_{q,s_2} \quad \frac{1}{s} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2}$$

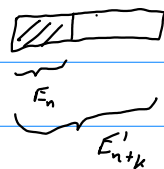
Beweis (Thm 1.2.17) OBdA $\|f\|_{p_1, q_1} = \|g\|_{p_2, q_2} = 1$.

Wg Th 1.2.14 ^(v) ist $|f| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_n \mathbb{1}_{E_n}$ $\mu(E_n) \leq 2^n$
 $|g| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} H'_n \mathbb{1}_{E'_n}$ $\mu(E'_n) \leq 2^n$
 und $\|H_n 2^{n/q_1}\|_{\ell_{q_1}^{\mathbb{Z}}} , \|H'_n 2^{n/p_2}\|_{\ell_{q_2}^{\mathbb{Z}}} \leq 1$

$$\Rightarrow |f \cdot g| \leq \sum_{n, k} H_n H'_{k+n} \mathbb{1}_{E_n \cap E'_{n+k}}$$

Wg der quasi- Δ -Ugl und Monotonie genügt es zu zeigen, dass $\left\| \sum_{k \geq 0} \sum_n H_n H'_{n+k} \mathbb{1}_{E_n \cap E'_{n+k}} \right\|_{p, q}$
 $+ \left\| \sum_{k < 0} \dots \right\|_{p, q} \leq 1$

Überlapp hat
 154te, 14p
 2^n



Im Folgenden betrachten wir nur noch $k \geq 0$
 (was wg Symmetrie genügt.) und fixieren k .

Angenommen, wir könnten zeigen, dass f"ur festen $k!$

$$(*) \left\| \sum_n H_n H'_{n+k} \mathbb{1}_{E_n \cap E'_{n+k}} \right\|_{p, q} \leq 2^{-k/p_2}. \text{ Dann w"are}$$

Wir-mit Hilfe des folgenden Lemmas - fertig.

Lemma Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein quasinormierter Raum mit
 $\|f+g\| \leq c_1 (\|f\| + \|g\|)$ mit $c_1 \geq 1$. Anger.
 wir haben $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \in X$, $\|f_k\| \leq A \cdot c_2^{-k}$ mit
 $c_2 > 1$.

Dann $\|\sum_{k=1}^N f_k\| \leq c_3 \cdot A$, wobei c_3 lediglich von c_1 und c_2 abhängt (und weder von N , noch A !)

Bew HA

→ Wir zeigen jetzt den obigen claim (*)

Beobachte, $\mu(E_n \cap E'_{n+h}) \leq 2^n$. Wir verwenden jetzt nochmals Thm 1.2.14 (v) $\Leftrightarrow$ (i)

Hölder in L^p
mit $2^{n/p} = 2^{n/p_1} \cdot 2^{n/p_2}$

$$\begin{aligned} \left\| \sum H_n H'_{n+h} \chi_{E_n \cap E'_{n+h}} \right\|_{p,q} &\lesssim \left\| H_n 2^{n/p_1} \right\|_{L^{q_1}_n} \cdot \left\| H'_{n+h} 2^{n/p_2} \right\|_{L^{q_2}_n} \\ &\stackrel{\text{Annahme}}{\lesssim} 1 \cdot \underbrace{\left\| H'_{n+h} 2^{n/p_2} \right\|_{L^{q_2}_n}}_{\substack{= 2^{-h/p_2} \|H' 2^{n/p_2}\|_{L^{q_2}_n} \\ \stackrel{n \mapsto n-h}{\lesssim} 1}} \end{aligned}$$

direkter Beweis in Thm 4.7 in
Bennett-Sharpley

Thm 1.2.18 (Duale Charakterisierung von $L^{p,q}$) 30.4.2020

Sei $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. Dann gilt für $f \in L^{p,q}$

$$\|f\|_{p,q} \sim_{p,q} \sup \left\{ \left| \int f g \, d\mu \right| : \|g\|_{p',q'} \leq 1 \right\}$$

Bemerkung für $q = \infty$: $\|f\|_{p,\infty} \sim \sup_{0 < \lambda < \infty} \left\{ \left| \int f \chi_E \, d\mu \right| \cdot \frac{1}{\mu(E)^{1/p'}} \right\}$

Beweis " $\sup_{p,q}$ ": $\left| \int f g \right| \leq \|f \cdot g\|_{L^1} \stackrel{\text{Hölder}}{\lesssim} \|f\|_{p,q} \|g\|_{p',q'}$

" $\lesssim$ ": O.B.d.A. $\|f\|_{p,q} = 1$, wir finden jetzt g mit $\|g\|_{p',q'} \leq 1$ mit $\left| \int f g \, d\mu \right| \gtrsim 1$

$$\|f\|_{p,\infty} = \sup_{t>0} t d_f(t)^{\frac{1}{p}} \quad q = \infty, \quad f \geq 0$$

$$d_f(t) = \mu(\{x: f(x) > t\}) \quad \text{Sei } E_\lambda = \{x: f > \lambda\} \quad \text{mit } \mu(E_\lambda) < \infty$$

$$\frac{1}{\mu(E_\lambda)^{\frac{1}{p}}} = \frac{1}{\mu(E_\lambda)^{\frac{1}{p'}}} \cdot \lambda \mu(E_\lambda)$$

$$\leq \frac{1}{\mu(E_\lambda)^{\frac{1}{p'}}} \int_X f \mathbb{1}_{E_\lambda} d\mu$$

$$\leq \sup_{0 < \mu(E) < \infty} \frac{1}{\mu(E)^{\frac{1}{p'}}} \int f \mathbb{1}_E d\mu$$

Falls f ^{unbedingt} nicht $\vee$ nicht-negativ ist, zerlegen wir
 $f = u_0^+ - u_0^- + i(u_1^+ - u_1^-)$
 wobei $u_i^\pm \geq 0$

$$\text{z.z.} \quad \|u_i^\pm\|_{L_{p,\infty}} \leq \sup_{0 < \mu(E) < \infty} \frac{1}{\mu(E)^{\frac{1}{p'}}} \left| \int_X f \mathbb{1}_E d\mu \right|$$

$$u_i^\pm = e^{i\theta} \cdot f \mathbb{1}_F \quad \text{für ein } F \subseteq X$$

Fallunterscheidung: $\mu(E \cap F) = 0$ oder nicht.

$$\text{falls } \mu(E \cap F) = 0: \frac{1}{\mu(E)^{\frac{1}{p'}}} \int u_i^\pm \mathbb{1}_E d\mu = 0 \leq \sup_{0 < \mu(E) < \infty} \frac{1}{\mu(E)^{\frac{1}{p'}}} \left| \int f \mathbb{1}_E \right|$$

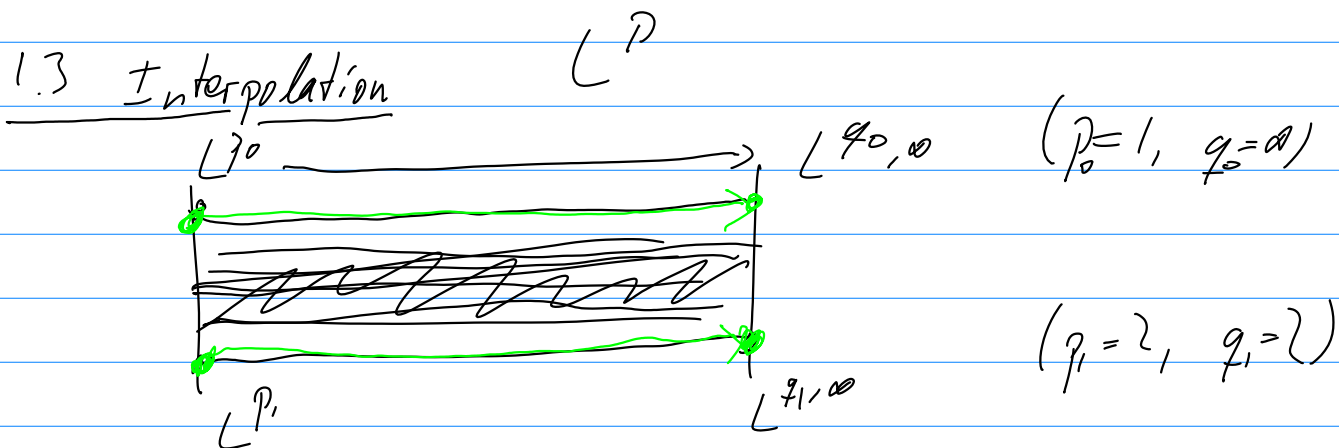
$$\text{falls } \mu(E \cap F) \neq 0: \frac{1}{\mu(E)^{\frac{1}{p'}}} \left| \int u_i^\pm \mathbb{1}_{E \cap F} d\mu \right|$$

$$= \frac{1}{\mu(E)^{\frac{1}{p'}}} \left| \int f e^{i\theta} \mathbb{1}_{E \cap F} d\mu \right|$$

$$\leq \frac{1}{\mu(E \cap F)^{\frac{1}{p'}}} \left| \int f \mathbb{1}_{E \cap F} d\mu \right|$$

$$\leq \sup_{0 < \mu(E') < \infty} \frac{1}{\mu(E')^{1/p'}} \left| \int f \mathbb{1}_{E'} d\mu \right|$$

Für $q < \infty \rightarrow \text{HA.}$



$(X, \mu), (Y, \nu)$ Maßräume

T : messbare Fkte aus $(X, \mu) \rightarrow$ messbare Fkte aus (Y, ν)

Definitionen T heißt linear, wenn $T(f+g) = Tf + Tg$
 $T(\lambda f) = \lambda Tf, \lambda \in \mathbb{C}$
 $f, g \in \text{Fkte aus } (X, \mu)$

sublinear $|T(f+g)| \leq |Tf| + |Tg|$
 $|T(\lambda f)| = |\lambda| |Tf|$

(quasilinear $|T(f+g)| \leq K(|Tf| + |Tg|)$
 $|T(\lambda f)| = |\lambda| |Tf|$)

$0 < p, q \leq \infty$

Ein sublinearer Operator T ist vom starken (p, q) -Typ
 Wenn für alle $f \in L^p$ (oder aus einer dichten Teilmenge)
 $\|Tf\|_{L^q(Y, \nu)} \lesssim_{p, q, T} \|f\|_{L^p(X, \mu)}$
 (in diesem Fall gibt es eine eindeutige Fortsetzung)

Ein sublinearer Operator T ist vom schwachen (p, q) -Typ wenn $\|Tf\|_{L^{q, \infty}(Y, \nu)} \lesssim_{p, q, T} \|f\|_{L^p(X, \mu)}^p$.

Ein sublinearer Operator T ist vom restringierten, schwachen (p, q) -Typ, falls

$$\|Tf\|_{L^{q, \infty}} \lesssim_{p, q, T} H \cdot W^{1/p} \quad \text{für alle Sub-Treppenfkt. der Höhe } H \text{ \& Breite } W$$

Bemerkungen restringierter - schwacher (p, q) -Typ ist äquivalent zu 1) $\|T \mathbb{1}_E\|_{L^{q, \infty}} \lesssim |E|^{1/p}$
(2) $\|Tf\|_{L^{q, \infty}} \lesssim \|f\|_{L^{p, 1}}.$

Im Folgenden nehmen wir an, dass die Form

$$\langle |g|, |Tf| \rangle := \int_Y d\nu(y) |g(y)| |(Tf)(y)|$$

wohldefiniert ist für alle echt einfache Fkt.en f, g mit Trägern endlichen Maßes. (Dies ist bspw. der Fall, wenn T vom restringiert schwache (p, q) -Typ ist)

Hausaufgabe $\|T \mathbb{1}_E\|_{L^{q, \infty}} \lesssim |E|^{1/p} \quad \forall E \subseteq X$

$$\Leftrightarrow |\langle \mathbb{1}_F, T \mathbb{1}_E \rangle| \lesssim |E|^{1/p} |F|^{1/q'} \quad E \subseteq X, F \subseteq Y$$

$$\|f\|_1 \sim \sup_K |\langle f, g \rangle|$$

$$\|Tf\|_{L^q} \leq \|f\|_p$$

$$T: L^p \rightarrow L^q$$

$$\Leftrightarrow |\langle g, Tf \rangle| \lesssim \|g\|_{q'} \|f\|_p$$

1.3.1 Reelle Interpolation (Marcinkiewicz)

$$T: L^{p_i} \rightarrow L^{p_i, \infty} \quad i=0,1$$

$$\Rightarrow T: L^p \rightarrow L^p \quad \forall p \in (p_0, p_1)$$

2 T ist von restringiert schwach
 $p_0 \neq p_1, q_0 \neq q_1$ Typ (p_i, q_i) , wobei $0 < p_i, q_i < \infty$
 $\Rightarrow T: L^{p_0, r} \rightarrow L^{q_0, r} \quad 1 \leq r \leq \infty$

$$L^{p, q} \supseteq L^p$$

$$\frac{1}{p_0} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q_0} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \quad q_0 > 0$$

$$3 \quad T: L^{p_i} \rightarrow L^{q_i, \infty} \quad 1 \leq p_i \leq q_i \leq \infty$$

$$T: L^{p_0} \rightarrow L^{q_0} \quad (r=q_0)$$

Motivation • Bsp für sublineare Operatoren sind

$$\text{Maximaloperatoren, } (T^* f)(x) = \sup_n |T_n f(x)|$$

$$\text{z.B. } \sup_{R>0} \frac{1}{|B_R(x)|} \int_{B_R(x)} |f| \equiv (Mf)(x) \quad \text{oder } \sup_{t>0} |e^{it\Delta} f|$$

$$\text{Littlewood-Paley } \left(\sum_n |T_n f|^2 \right)^{1/2}$$

• Oft ist es nicht möglich stark (p, q) -Beschr. an den "Rändern" (z.B. $p, q=1$) zu zeigen, wie etwa bei Maximalfkt.; die schwache L^p -Beschränktheit ist möglich zu zeigen;

• Anwendung von Marcinkiewicz 2
 $\rightarrow$ s. Bah-Seegeer (2011)

(Erweitertes
Tomas-Stein $\| \hat{f} \|_S \|_{L^2(S, d\sigma)} \lesssim \| f \|_{\underline{L}^{p,2}(\mathbb{R}^d, dx)} \quad 1 \leq p \leq \frac{2(d+1)}{d+3} < 2$

Thm 1.3.1 Sei (X, μ) ein Maßraum, $0 < p < \infty$,

$f \in L^{p,\infty}(X)$. Dann sind äquivalent

(1) $\| f \|_{p,\infty} \lesssim A$

(2) Für jede $E \subset X$ mit $\mu(E) < \infty$ gibt es eine Teilmenge $E' \subseteq E$ sodass $\mu(E) \leq 2\mu(E')$.



$$\left| \int f(x) \mathbb{1}_{E'}(x) d\mu(x) \right| \lesssim A \mu(E')^{1/p'}$$

Beweis OBMA $\| f \|_{p,\infty} = 1, f \geq 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1) ist fast identisch zum Beweis von Thm. 1.2.18

(1) $\Rightarrow$ (2) Sei $E \subset X$ mit $0 < \mu(E) < \infty$ und definieren $\alpha = \left(\frac{2}{\mu(E)} \right)^{1/p}$ sowie

$$E' = E \setminus \{x : f > \alpha\}.$$

$$\| f \|_{p,\infty} = \sup_{\alpha > 0} \alpha \int f(x) d\mu(x)^{1/p} \quad \text{zunächst} \quad \mu(\{x : f > \alpha\}) \leq \frac{\| f \|_{p,\infty}^p}{\alpha^p} \leq \frac{\mu(E)}{2}$$

$$\Rightarrow \mu(E') = \mu(E) - \mu(\{f > \alpha\}) > \frac{\mu(E)}{2}$$

Verbleibt zu bestimmen $\int f \mathbb{1}_{E'}$.

$$\int f \mathbb{1}_{E'} \leq \alpha \mu(E') = \left(\frac{2}{\mu(E)} \right)^{1/p} \mu(E) \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{Setze } \alpha \text{ ein} \end{matrix}$$

$$\mu(E) > \mu(E') \leq 2^{1/p} \mu(E')^{1/p'} \quad \square$$

Abkürzung: $\Sigma_c \dots$ Menge aller einfachen Funktionen mit Trägern endlichen Maßes.

$T: \mathcal{H}_1 \text{ auf } X \rightarrow \mathcal{H}_2 \text{ auf } Y$

Behauptung 1.3.2 Seien $0 < p, q \leq \infty$, $A > 0$, T sublinear.
Dann sind äquivalent:

(1) $\|Tf\|_{L^{q,\infty}} \lesssim_{\mu} A \cdot H \cdot W^{1/p}$ für alle

Sub-Treppenfunkten f mit Höhe H & Breite W in Σ_c

$$\|T\mathbb{1}_E\|_{L^{q,\infty}} \lesssim |E|^{1/p}$$

$$|\langle \mathbb{1}_F, T\mathbb{1}_E \rangle| \leq |E|^{1/p} |F|^{1/q'}$$

$$\leq |E|^{1/p} |F|^{1/q'}$$

$q > 1$

(2) Für jedes $F \subseteq Y$ endlichen Maßes gibt es eine Teilmenge $F' \subseteq F$ mit $\nu(F') \geq \nu(F)/2$

so dass für alle $E \subseteq X$ endlichen Maßes gilt

$$\langle \mathbb{1}_F, |T\mathbb{1}_E| \rangle = \int_Y |(T\mathbb{1}_E)(y)| \mathbb{1}_F(y) d\nu(y) \lesssim A \mu(E)^{1/p} \nu(F')^{1/q'}$$

Bemerkung Für $q > 1$ kann (2) ersetzt werden durch $|\langle \mathbb{1}_F, T\mathbb{1}_E \rangle| \lesssim |E|^{1/p} |F|^{1/q'}$ (vgl. Hausaufgabe Aufgabe 2.4)

Beweis (1) $\Rightarrow$ (2) folgt aus Prop. 1.3.1

(2) $\Rightarrow$ (1). Wir nehmen zunächst an, dass f die Form $f_N = \sum_{j=0}^N 2^{-j} \mathbb{1}_{E_j}$ mit $\mu(E_j) < W$.

Wir zeigen jetzt $\|Tf_N\|_{L^{q,\infty}} \lesssim A \cdot W^{1/p}$ gleichmäßig in N

Lemma $\|g_j\| \leq 2^{-j} \Rightarrow \|\sum_{j=1}^N g_j\| \leq 1$ glm in N

$\rightarrow$ es genügt zu zeigen, dass $\|T \mathbb{1}_{E_j}\|_{q,\infty} \lesssim A W^{\frac{1}{p}}$.

Dazu: Sei $F \in Y$ (mit $v(F) < \infty$). Per Voraussetzung gibt es $F' \subseteq F$ mit $v(F') \geq v(F)/2$, sodass

Thm 3.1
 $\|f\|_{1,\infty} \lesssim A$
 $\Downarrow$
 $\int f \mathbb{1}_E$
 $\lesssim A \mu(E)^{1/p}$

$$\int \mathbb{1}_{F'}(y) |(T \mathbb{1}_E)(y)| d\nu(y) \lesssim A \mu(E)^{1/p} v(F')^{\frac{1}{q'}}.$$

Wg Thm 1.3.1 sind wir für solche Funktionen f_n fertig. ($\Rightarrow \|T \mathbb{1}_{E_j}\|_{q,\infty} \lesssim A \mu(E_j)^{1/p} = A W^{1/p}$)

Jetzt einfache Subtreppenfunkten f der Höhe H und Breite W :

$$f = \sum_{j=1}^M a_j \mathbb{1}_{E_j} \quad \text{mit paarweise disjunkten } E_j \quad (\text{mit } \mu(E_j) < W \text{ natürlich})$$

Wg Homogenität & Sublinearität können wir annehmen, dass $0 \leq f \leq 1$. Wg der Binärdarstellung von Zahlen in $[0,1]$ zerlegen wir

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \cdot d_j(x), \quad d_j \in \{0,1\} \quad \text{und}$$

$$\text{approximieren } f \text{ durch } f_N(x) = \sum_{j=0}^N 2^{-j} d_j(x) = \sum_{j=0}^N 2^{-j} \mathbb{1}_{F_j}(x)$$

bis auf "Genauigkeit" 2^{-N} , d.h.

$$f(x) - f_N(x) = \sum_{j=0}^M b_{j,N} \mathbb{1}_{E_j}(x) \quad \text{mit } b_{j,N} \leq 2^{-N}$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0: \|Tf\|_{q,\infty} \lesssim \underbrace{\|Tf_N\|_{q,\infty}}_{\lesssim A W^{1/p}} + \underbrace{\|T(f-f_N)\|_{q,\infty}}_{\lesssim \left\| \sum_{j=1}^M b_{j,N} T \mathbb{1}_{E_j} \right\|_{q,\infty}} \lesssim A W^{\frac{1}{p}} + \epsilon$$

$$\leq 2^{-N} \left\| \sum_{j=1}^N |T A_{E_j}| \right\|_{q_0, \infty} < \epsilon$$

für hinreichend großes N .

□

Proposition 1.3.3 (Baby-Interpolation)

Seien $0 < p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$, T sublinear und vom restringiert schwachen Typ (p_i, q_i) mit Konstanten A_i

$\Rightarrow T$ ist vom restringiert schwachen Typ (p_θ, q_θ)
für alle $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$ ($0 < \theta < 1$)
mit Konstante $A_\theta = A_0^{1-\theta} A_1^\theta$, d.h.

$$\|T f\|_{q_\theta, \infty} \lesssim A_\theta \cdot H \cdot W^{1/p_\theta} \text{ für alle einfachen Subtreppenfunkten } f \text{ der Höhe } H, \text{ Breite } W.$$

Beweis Mit Prop. 1.3.2 genügt es zu zeigen, dass es für alle $F \in \mathcal{Y}$ (endlichen Maßes) ein $F' \subseteq F$ gibt

mit $v(F') \gg v(F)/2$ und

$$(*) \int_{F'} |A_F(y)| |T A_E(y)| dv(y) \lesssim A_\theta \mu(E)^{1/p_\theta} v(F')^{1/q_\theta}$$

für alle $E \subseteq X$ (endliche Maßes)

Wg Annahme + Prop 1.3.2 gilt

$$LHS (*) \lesssim A_i \mu(E)^{1/p_i} v(F')^{1/q_i}$$

$\Rightarrow$ aus skalarer Interpolation folgt die Behauptung. □

$$\left[\begin{array}{l} X \leq Y_0, X \leq Y_1 \\ \Rightarrow X \leq Y_0^{1-\theta} Y_1^\theta \\ \text{für alle } 0 < \theta < 1 \end{array} \right]$$

$$p_0 \neq p_1, q_0 \neq q_1$$

Thm 1.3.4 Seien $0 < p_i, q_i \leq \infty$, T sublinear
(Mazurkiewicz)

und vom restringiert schwachen Typ (p_i, q_i)
($\|Tf\|_{q_i, \infty} \lesssim A_i \|f\|_{p_i}$, f einfache Subtrungfkt.)

Dann gilt für alle $1 \leq r \leq \infty$ und $0 < \theta < 1$
mit $q_\theta > 1$ die Abschätzung

$p_\theta, q_\theta, A_\theta$ wie oben

$$\|Tf\|_{q_\theta, r} \lesssim_{p_\theta, q_\theta, A_\theta} A_\theta \|f\|_{p_\theta, r}, \quad f \text{ einfach}$$

$$L^{q_1, q_2} = L^q$$

$$L^{p_1, q_1} \subseteq L^{p_2, q_2}$$

$$q_1 < q_2$$

Wenn zusätzlich $q_\theta \geq p_\theta$ und $r = q_\theta$

$$\Rightarrow \|Tf\|_{q_\theta} \lesssim_{p_\theta, q_\theta, A_\theta} A_\theta \|f\|_{p_\theta}$$

$$\|T\|_{E, q_i, \infty} \lesssim \|E\|_{p_i}^{1/p_i}$$

Bemerkung Restringiert schwacher Typ kann ersetzt werden
durch $\|T\|_{E, q_i, \infty} \lesssim \|E\|_{p_i, 1}^{1/p_i} \sim \|E\|_{p_i}^{1/p_i}$
mit Hilfe von Prop. 1.3.2.

Beweis Sei zunächst $q_i \geq 1$. O.B.d.A. $0 \leq f, \|f\|_{p_\theta, r} = 1$.

O.B.d.A. $A_\theta = A_i = 1$ und damit $A_\theta = 1$. Dazu multipliziere T mit C_1 , p mit C_2 , r mit C_3
und A_θ mit $C_1 C_2^{-1/q_\theta} C_3^{1/q_\theta}$. Dann bleibt behauptete Ungleichung unberührt, aber mit der
Freiheit von C_1, C_2, C_3 können A_θ und A_i auf 1 normiert werden.

Wg Dualität der Lorentzräume (Thm 1.2.18,
mit $q_\theta > 1$!) genügt es zu zeigen

$$\left| \int_Y (Tf)(y) g(y) d\nu(y) \right| \leq A_\theta \quad \text{mit} \quad \|g\|_{p'_i, q'_\theta} \leq 1$$

Nebenrechnung: Für Subtreppenfkt. u auf X mit Höhe H , Breite W

$$\|Tu\|_{q_i, \omega} \leq H \cdot W^{1/p_i}$$

$$\|v\|_{q_i', 1} \leq H' (W')^{1/q_i'}$$

Höller nicht
anwenden für $q_i < 1$

rechnen wir

Bemerkung nach Beh. 1.3.2 (q, > 1) + Voraussetzung

$$\int |Tu| \cdot |v| \leq \underbrace{A_i}_{=1} H \cdot H' \cdot W^{1/p_i} \cdot (W')^{1/q_i'}$$

skalare Interpolation $\Rightarrow$

$$\int |Tu| |v| \leq H \cdot H' \cdot \min_{i=0,1} \left\{ W^{1/p_i} \cdot (W')^{1/q_i'} \cdot \underbrace{A_i}_{=1} \right\}$$

(Verwende Thm 1.2.14 (i) $\Leftrightarrow$ (iv))

$$L^{p_0, r} \ni f = \sum_m f_m \quad f_m \text{ Subtreppenfkt. d. Höhe } H_m, \text{ Breite } 2^m$$

$$L^{q_0, r'} \ni g = \sum_n g_n \quad g_n \quad \quad \quad H'_n, \text{ Breite } 2^n$$

mit $\|H_m \cdot 2^{m/p_0}\|_{\ell_m^r} \sim 1, \|H'_n \cdot 2^{n/q_0'}\|_{\ell_n^{r'}} \sim 1$.

$$\rightarrow \text{Einsetzen: } \int_Y |Tf| g \, d\nu \leq \sum_{m,n} H_m H'_n \cdot \min \{ 2^{m/p_i}, 2^{n/q_i'} \}$$

Notation: $a_m := H_m 2^{m/p_0}, b_n := H'_n \cdot 2^{n/q_0'}$

$\Rightarrow$ Es verbleibt zu zeigen

$$\sum_{m,n} a_m b_n \min_{i=0,1} \{ 2^{m(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_0})}, 2^{n(\frac{1}{q_0'} - \frac{1}{q_i'})} \} \leq 1 \quad \text{mit } \|a_m\|_{\ell_m^r} = \|b_n\|_{\ell_n^{r'}} = 1$$

$\hookrightarrow$ Einsetzen von p_0, q_0 zeigt, dass die linke Seite gleich ist zu

$$\sum_{m,n} a_m b_n \min \left\{ 2^{\alpha(m - \frac{\beta}{\alpha} n)}, 2^{-\alpha(1-\theta)(m - \frac{\beta}{\alpha} n)} \right\},$$

wobei $\alpha := \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}$ und $\beta := \frac{1}{q_0'} - \frac{1}{q_1'}$. Definiert man noch $\gamma := \beta/\alpha$ und verschiebt $m \mapsto m + \lfloor \gamma n \rfloor$ ($\lfloor x \rfloor = \max \{ k \in \mathbb{Z} : k \leq x \}$),

erhält man $\sum_{m \in \mathbb{Z}} \min \{ 2^{\alpha m}, 2^{-\alpha(1-\theta)m} \} \sum_n a_{m+\lfloor \gamma n \rfloor} \cdot b_n$

$$\leq \underbrace{\left(\sum_m \min\{2^{\alpha \theta m}, 2^{-\alpha(1-\theta)m}\} \right)}_{\lesssim_{\alpha, \theta} 1} \sup_n \underbrace{\sum_n a_{m+L} y_n \cdot b_n}_{\leq \|b_n\|_{\ell_n^r} \|a_{m+L} y_n\|_{\ell_n^r}} \\ \leq 1 \quad \underbrace{\|a_{m+L} y_n\|_{\ell_n^r}}_{\lesssim_\gamma \|a_{m+n}\|_{\ell_n^r} \lesssim 1}$$

Das zeigt Marcinkiewicz für $q_i > 1$

Hausaufgabe: Verwende Prop. 1.3.3, um $q_i \leq 1$ zu behandeln.



(z.B. Stern-Werth Kapitel IV)

7.5.2020

1.3.2 Komplexe Interpolation

Lemma 1.3.5 Sei f holomorph auf $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$

und stetig auf dem Rand ($\operatorname{Re} z = 0, 1$)

Angenommen, $|f(z)| \lesssim_\delta \exp(U_\delta(\exp((\pi-\delta)|z|)))$

für ein $\delta > 0$ in S und

$|f(z)| \leq A$ für $\operatorname{Re} z = 0$

$|f(z)| \leq B$ für $\operatorname{Re} z = 1$.

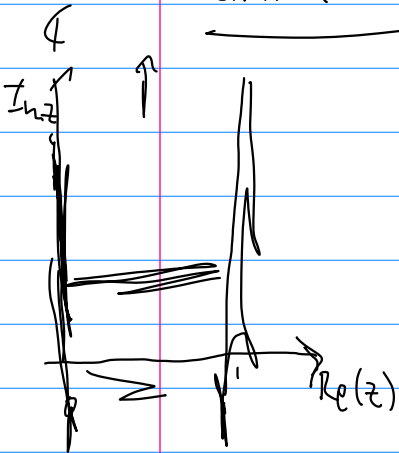
$\Rightarrow |f(z)| \leq A^{1-\operatorname{Re} z} \cdot B^{\operatorname{Re} z}, \quad z \in S.$

Bemerkungen 1) Mittels affiner Transformation, können wir auch den Fall wo $\operatorname{Re} z = 0, 1$ durch $\operatorname{Re} z = a, b$ für $a, b \in \mathbb{R}$ ersetzt wird, behandeln

$|f(z)| \leq A^{1-t} \cdot B^t$, wobei t durch

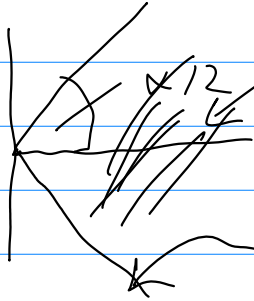
$\operatorname{Re} z = (1-t)a + t \cdot b$

$\uparrow$
[a, b]



2) Hausaufgabe: der doppel-exponentielle Wachstum
 $(|f| \leq \exp(c \exp((\pi - \delta)|z|)))$ ist scharf!
 mit $\delta = 0$

(sk. z.B. Bah-Newman Section 15.2) 3) Verallgemeinerte Situation $\rightarrow$ Phragmén-Lindelöf Theorem



$$|f| \leq e^{e|z|^{\pi/\alpha}}$$

$|f| \leq 1$ auf Rändern des Sektors

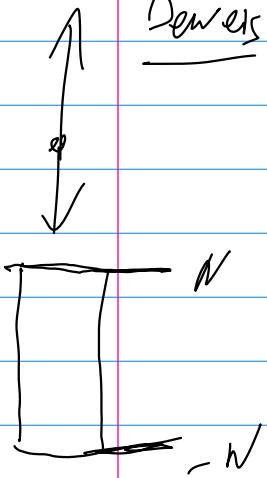


$\Rightarrow |f| \leq 1$ auf ganzem Sektor.

4) Hausaufgabe: Anwendung für 3-Kreise-Theorem

Beweis

Durch Ersetzen von $f \mapsto f \cdot A^{z-1} \cdot B^{-z}$
 könne wir o.B.d.A. annehmen, dass $A = B = 1$.



1. Schritt: Angenommen, $|f| \rightarrow 0$ für $|z| \rightarrow \infty$.

$\Rightarrow$ die holomorphe Fkt ist auf einem hinreichend großen Rechteck $\{0 < \operatorname{Re} z < 1, -N < \operatorname{Im} z < N\}$ durch 1 beschränkt, d.h. insbesondere auf den Rändern des Rechtecks

$\Rightarrow$ fertig mit Maximumprinzip. (Woo)

2. Schritt. Allgemeine f : Definiere

$$f_\epsilon(z) = f(z) \cdot g_\epsilon(z) g_\epsilon(1-z) \text{ mit}$$

$$g_\epsilon(z) = \exp\left(z e^{i[(\pi - \frac{\delta}{2})z + \delta/4]}\right)$$

$g_\epsilon(z)$ macht $f_\epsilon(z)$ dann fällt $f_\epsilon(z)$ im Unendlichen ab (wenn f bei $i\infty$ klein
 $g_\epsilon(1-z)$ bei $-i\infty$ die doppel-exponentielle Schranke erfüllt)
 und $f_\epsilon(z)$ ist auf Rändern durch 1 beschränkt.

$\Rightarrow$ mit Schritt 1 ist $|f_\epsilon(z)| \leq 1$ in ganz S
 $\Rightarrow \epsilon \rightarrow 0$ □

Theorem 1.3.6 (Riesz-Thorin) Sei T linear, sodass $\langle g, Tf \rangle$ für einfache f, g wohldefiniert ist und
 $0 < p_0, p_1 \leq \infty, 1 \leq q_0, q_1 \leq \infty, A_0, A_1 > 0$
 und $\|Tf\|_{L^{q_1}(Y)} \leq A_1 \|f\|_{L^{p_1}(X)}, f \in L^p$
 (oder dichte Teilmenge)

$$\Rightarrow \|Tf\|_{L^{q_0}(Y)} \leq \underline{A_0} \|f\|_{L^{p_0}(X)} \quad \theta \in (0, 1)$$

$$\frac{1}{p_0} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_0}, \dots$$

Bemerkungen · Vorteile von R.-T. ggü. M.

- Kein Verlust von implizite Konstante
- keine Einschränkung, dass $q_0 \geq p_0$
- Nachteil: wir brauchen strong-type Schranken

Beweis $\alpha_i = \frac{1}{p_i}, \beta_i = \frac{1}{q_i}, \alpha = \frac{1}{p_0}, \beta = \frac{1}{q_0}$

$$\alpha(z) = (1-z)\alpha_0 + z \cdot \alpha, \quad \beta(z) = \dots \quad z \in \mathbb{C}$$

(insb. $\alpha(i) = \alpha_i, \alpha(0) = \alpha, \beta(i) = \beta_i, \beta(0) = \beta_0$)

1. Schritt: f einfach $f = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$
2. Schritt: Dualität $\|Tf\|_q \Leftrightarrow |\langle g, Tf \rangle|$
3. Schritt: "Komplexifiziere f, g "

4. Schritt Einsetzen in $\langle g_z, T f_z \rangle$ und 3-Linien-Theorem anwenden.

5) Approximationsargumente, um $f \in L^p$ zu bekommen.

$$|\langle g, T f \rangle| = \left| \int_Y \bar{g} \cdot T f \, d\nu(y) \right| = |I| \stackrel{!}{\leq} A_0^{1-\theta} A_1^\theta \|f\|_{p_0}$$

$F_i = |g|^{p_0/p_i}$ $\forall g$ Homogenität sei o.B.d.A. $\|f\|_{p_0} = 1$; zunächst $\alpha > 0, \beta < 1$

$$f = \sum_{j=1}^m a_j \mathbb{1}_{E_j} \quad g = \sum_{h=1}^n b_h \mathbb{1}_{F_h}, \quad \|g\|_{q'} \leq 1$$

$$f = \frac{1}{F_0} \stackrel{1-\theta}{\cdot} F_1^\theta \cdot \alpha$$

nicht-neg., einfache Fkten

$$f_z = \sum_{j=1}^m |a_j|^{\alpha(z)/\alpha} \cdot e^{i\theta_j} \mathbb{1}_{E_j}$$

$$g_z = \sum_{h=1}^n |b_h|^{(1-\beta(z))/(1-\beta)} e^{i\varphi_h} \mathbb{1}_{F_h}$$

$$|\alpha| \leq 1$$

$$\alpha(z) = (1-z)\alpha_0$$

$$\rightarrow z \alpha_1$$

Definiere $F(z) = \langle g_z, T f_z \rangle, \quad F(0) = I$

$$= \sum_{j,h}^{m,n} |a_j|^{\alpha(z)/\alpha} |b_h|^{(1-\beta(z))/(1-\beta)} \gamma_{jh}$$

mit $\gamma_{jh} = e^{i(\theta_j + \varphi_h)} \langle \mathbb{1}_{F_h}, T \mathbb{1}_{E_j} \rangle$

$\Rightarrow$ Da jeder der Summanden in S beschränkt, ist die holomorphe Fkt $F(z)$, wenn sie auf S restringiert wird, beschränkt

$\rightarrow$ verbleibt z.z. $|F(iy)| \leq A_0, \quad |F(1+iy)| \leq A_1$
 hatten wir das, so folgte die Aussage (für einfache Fkten) aus 3-Linien-Theorem.

$$\alpha(z) = (1-z)\alpha_0 + z\alpha_1$$

$$\alpha(i) = \frac{1}{p_0}$$

$$\alpha = \frac{1}{p_0}$$

Erinnerung $\alpha(iy) = \alpha_0 + iy(\alpha_1 - \alpha_0) \quad 1-\beta(iy) = (1-\beta_0) - iy(\beta_1 - \beta_0)$

$$|f(iy)|^{p_0} = \dots = |f|^p, \quad |g(iy)|^{q_0} = \dots = |g|^q$$

$\Rightarrow$ Einsetzen + Holder + Annahme $T: L^{p_0} \rightarrow L^{q_0}$

$$|F_{iy}| \leq \|T f_{iy}\|_{q_0} \|g_{iy}\|_{q'_0} \leq A_0 \|f_{iy}\|_{p_0} \|g_{iy}\|_{q'_0} \\ = A_0 \|f\|_p \|g\|_{q'}.$$

Analogue für F_{i+iy} $\rightarrow$ Fertig für einfache Fkten.

Approximationsargument: Finde Folge f_n einfacher Fkten

sodass $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$, $T f_n(x) \rightarrow T f(x)$ f.ü.

$$\Rightarrow \text{Fatou gibt } \|T f\|_q \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T f_n\|_q \\ \leq \lim_{n \rightarrow \infty} A_0 \|f_n\|_p = A_0 \|f\|_p.$$

Verbleibt: Restriktion $\alpha > 0$, $\beta < 1$ entfernen.

($\alpha = 0$, $\beta = 1$ ($\Rightarrow$) entweder (p_0, q_0) oder
nichts zu zeigen... $\Leftarrow (p_1, q_1)$ ist $(1, \infty)$
 $\alpha > 0$, $\beta = 1 \rightarrow$ obiger Beweis geht durch, wenn
 $f_z \equiv f$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
 $\beta < 1$, $\alpha = 0 \rightarrow$ ebenfalls, wenn $f_z \equiv f$ $\square$

Fundamentale Beobachtung von E. M. Stein!

Theorem 1.3.7 Sei T_z eine holomorphe Familie
linearer Operatoren auf $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$,

sodass für $f \in D_x$, $g \in D_y$ die Form

$$\int g(y) (T_z f)(y) dv(y) \text{ absolut konvergiert,}$$

holomorph in S , stetig auf den Rändern, und
höchstens doppel exponentiell schnell wächst.

$$\left. \begin{array}{l} \|Tf\| = \langle g, Tf \rangle \\ \text{Dualität in } L^q \\ q \geq 1 \end{array} \right\}$$

Seien $0 < p_0, p_1 \leq \infty$, $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$, A_0, A_1 ,
 sodass $\|T_z f\|_{L^{q_j}(Y)} \leq A_j \|f\|_{L^{p_j}(X)}$ $j=0,1$
 der $\operatorname{Re}(z) = j$ ($j=0,1$)

$$\Rightarrow \|T_z f\|_{q_0} \leq A_0 \|f\|_{p_0}$$

Beweis Wiederhole obiges Argument mit Beobachtung, dass
 $\tilde{F}(z) = \langle g_z, T_z f \rangle$ immer noch holomorph ist $\Rightarrow$

Bemerkung Genügt zu verlangen, dass $\sup_{-\infty < y < \infty} e^{-by} \log R_i < \infty$
 mit $b < \pi$. (sh. Stein Weiss, V. 4)

Westeros Interpolationsthm von Bourgain (1985)
 (auch aufgeschrieben in Bah-Seeger (2001)
 Carbery-Seeger-Wainger-Wright)

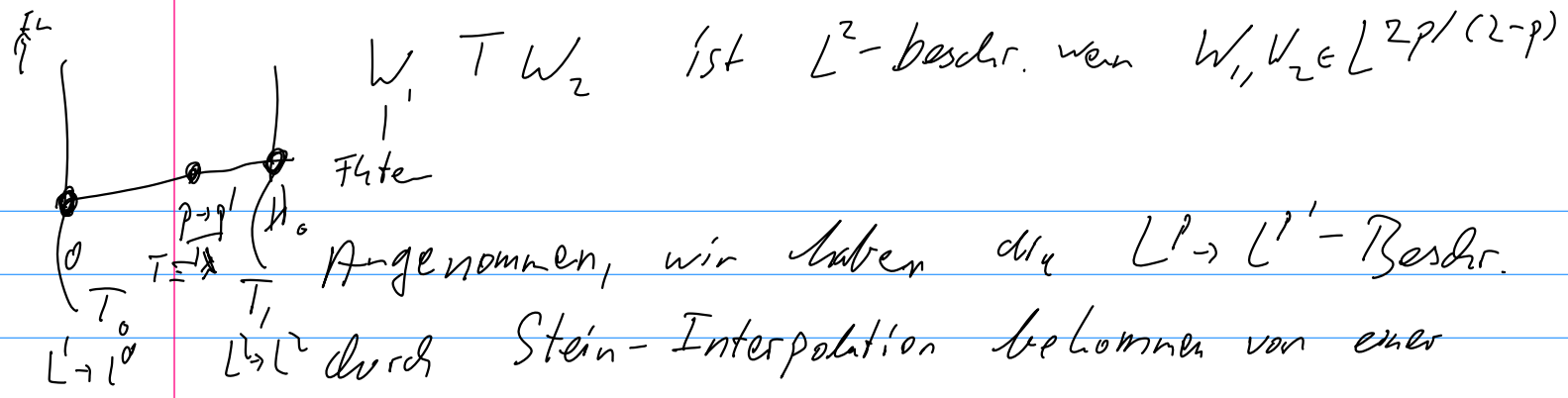
$$\text{Angenommen } T = \sum_{j \in \mathbb{Z}} T_j \quad 1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$$

$$\text{Angenommen } \exists \beta_0, \beta_1 > 0 \text{ so dass } \|T_j\|_{p_0 \rightarrow q_0} \leq A_0 2^{-\beta_0 j}, \quad \|T_j\|_{p_1 \rightarrow q_1} \leq A_1 2^{+\beta_1 j}$$

$$\Rightarrow \|T f\|_{L^{q_0, \infty}} \leq C(\beta_0, \beta_1) M_0 \|f\|_{L^{p_0, 1}}, \quad \theta = \frac{\beta_0}{\beta_0 + \beta_1}$$

Wertvolle Beobachtung von R.L. Frank & J. Seiringer.

Angenommen, T linearer operator in $\mathbb{R}^d$, der zuerst
 auf $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ definiert, dessen eindeutige Fortsetzung
 $L_{(1, \infty)}^p \rightarrow L_{(2, \infty)}^{p'}$ -Beschr. für $1 < p < 2 < p' < \infty$.



Angenommen, wir haben die $L^p \rightarrow L^{p'}$ -Beschr. $L^2 \rightarrow L^2$ durch Stein-Interpolation bekommen von einer Familie holomorpher Operatoren T_z wo $T_{iy} : L^2 \rightarrow L^2$

$$T_{-\lambda_0 + iy} : L^1 \rightarrow L^\infty \quad \text{für ein } \lambda_0 > 1. \quad \text{dann wüssten}$$

wir (wg Stein interpolation), dass $T \equiv T_{-}$ ist $L^p \rightarrow L^{p'}$ -beschränkt. In diesem Fall ist sogar

$$W_1, T_{-}, W_2 \in \mathcal{Y}^{2\lambda_0}(L^2(\mathbb{R}^d)) \quad W_1, W_2 \in L^{2\lambda_0}$$

(statt nur L^2 -beschränkt)

Proposition Sei T_z eine analytische Familie von Operatoren in $\mathbb{R}^d$ im Sinne von Stein (Thm 1.3.7), definiert auf dem Streifen $\{z \in \mathbb{C} \mid -\lambda_0 < \operatorname{Re} z < 0\}$ für ein $\lambda_0 > 1$.

$$\text{Angenommen, } \|T_{iy}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq A_0 e^{a|y|}$$

(hier nicht doppel-exponentiell)

$$\|T_{-\lambda_0 + iy}\|_{L^1 \rightarrow L^\infty} \leq A_1 e^{b|y|} \quad a, b > 0$$

$\rightarrow$ Für alle $W_1, W_2 \in L^{2\lambda_0}(\mathbb{R}^d)$ ist

$$W_1, T_{-}, W_2 \in \mathcal{Y}^{2\lambda_0}(L^2(\mathbb{R}^d)) \text{ mit}$$

$$\|W_1, T_{-}, W_2\|_{\mathcal{Y}^{2\lambda_0}(L^2(\mathbb{R}^d))} \leq A_0^{1-\frac{1}{\lambda_0}} A_1^{\frac{1}{\lambda_0}} \|W_1\|_{L^{2\lambda_0}} \|W_2\|_{L^{2\lambda_0}}$$

Ein auf einem Hilbertraum H definierter beschränkter Operator S liegt in $\mathcal{Y}^p$ ($1 \leq p < \infty$), wenn $\operatorname{tr}(S^* S)^{p/2} < \infty$, d.h. $\sum_{n=1}^{\infty} |s_n(S)|^p < \infty$

s_n singuläre Werte von S

$$T = A^* A \rightarrow \text{Dualitätsprinzip}$$

$\Rightarrow L^p$ - Schranken für Dichtematrix, z.B. Strichartz

$$\{f_j\} \text{ ONS} \quad \left\| \sum v_j |e^{it\Delta} f_j|^2 \right\|_{L^{1+\frac{2+d}{1+d}}_{x,t}}^{\frac{2+d}{1+d}} \lesssim \sum |v_j|^{\frac{d+2}{d+1}}$$

$\Updownarrow$

$$\left\| \rho e^{it\Delta} \gamma e^{-it\Delta} \right\|_{L^{1+\frac{2+d}{1+d}}_{t,x}} \lesssim \|\gamma\|_{\gamma^{(d+2)/(d+1)}(L^2_{x,t})}$$

(aus klassischem Strichartz für einzelne Fkt.en
welchen aus Stein-Interpolation gewonnen wurde
+ Prop von Frank-Sabin + Dualitätsprinzip)