

SEMINAR ZU DISPERSIVEN PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

KONSTANTIN MERZ

Geplanter Termin: Werden wir in einer Vorbesprechung abhängig von den Teilnehmenden ausmachen.

Bei Interesse, schreiben Sie bitte eine e-Mail an k.merz@tu-bs.de.

Voraussetzungen: Analysis 1–3. Kenntnisse in Differentialgleichungen sind hilfreich, aber nicht notwendig.

Zusammenfassung: Differentialgleichungen kommen in natürlicher Weise in den Natur- und Ingenieurwissenschaften vor. Sie beschreiben die Bewegung klassischer Teilchen, die Ausbreitung von elektromagnetischer Strahlung, Wärme, Gravitation oder sog. Materiewellen in der Quantenmechanik, die die Aufenthaltswahrscheinlichkeit von Teilchen auf atomaren Längenskalen bestimmen.

Bei der Untersuchung solcher Systeme beginnt man typischerweise mit einfachsten Beispielen, die durch *lineare Differentialgleichungen* beschrieben werden. Oftmals sind dies „Einteilchen-Systeme“ wie die Newton-Gleichung $x''(t) = f(x, t)$ oder die Schrödinger-Gleichung $i\partial_t\psi(t, x) = (-\Delta + V(x))\psi(t, x)$. Die Untersuchung von wechselwirkenden Vielteilchen-Systemen gestaltet sich oftmals als schwierig aufgrund der großen Zahl der Wechselwirkungen und der dadurch entstehenden Verkopplungen der Gleichungen. Man sucht daher nach „effektiven Gleichungen“, die nur von einer Teilchen-Koordinate abhängen, also einfacher zu studieren zu sind, aber das gegebene System dennoch hinreichend akkurat beschreiben. Die Herleitung solcher effektiver Gleichungen ist ein wichtiges Thema für sich genommen, aber nicht Gegenstand dieses Seminars.

Das Ziel dieses Seminars ist die *Untersuchung von effektiven DGLs*, die oftmals *nichtlinear* sind. In der Gegenwart von *repulsiven Nichtlinearitäten* ist die Untersuchung typischerweise einfacher als bei *attraktiven Nichtlinearitäten*. Die ersteren versuchen die Teilchen voneinander zu trennen, d.h. die Teilchen werden *streuen*. Bei attraktiven Nichtlinearitäten hingegen können die Teilchen „verklumpen“ und es kommt zu *blow-ups* und u.U. der gleichzeitigen Entstehung sog. *Solitonen*, also stationärer Zustände.

Im Rahmen dieses Seminars werden wir hauptsächlich die *nichtlineare Schrödinger-Gleichung (NLS)* mit repulsiven Nichtlinearitäten untersuchen. Einen Großteil der Zeit werden wir in das *Erlernen grundlegender Techniken*, die zur Untersuchung von NLS notwendig sind, investieren. Viele dieser Techniken kann man bereits auf dem Level der gewöhnlichen Differentialgleichungen erarbeiten, weshalb wir damit beginnen.

Themenaufteilung: Als wesentliche Referenz verwenden wir das Buch von Tao [1].

- (1) Studium von gewöhnlichen Differentialgleichungen (ODEs), insbesondere Existenz und Eindeutigkeit lokaler und globaler Lösungen und Erlernen dazu notwendiger Techniken.
 - (a) Klassische Methoden: Picard–Lindelöf (Existenz lokaler Lösungen) und Gronwall (Eindeutigkeit) [1, Abschnitte 1.1–1.2].
 - (b) Bootstrap-Verfahren und continuity method, Erhaltungsgrößen und Satz von Noether, Monotonie (Virialsatz, Morawetz-Identität) und Ljapunow-Funktionen (Untersuchung von Lösungen für längere Zeiten) [1, Abschnitte 1.3–1.5].
 - (c) Untersuchung von linearen und nichtlinearen ODEs [1, Abschnitte 1.6].
- (2) Untersuchung linearer partieller Differentialgleichungen (PDEs), insbesondere Schrödinger- und Wellengleichung (jeweils ohne externe Potentiale).
 - (a) Fourier-Transformation und Fundamentallösungen [1, Abschnitte 2.1–2.2].
 - (b) Dispersive Abschätzungen, Strichartz-Abschätzungen [1, Abschnitt 2.3].
 - (c) Erhaltungsgrößen [1, Abschnitt 2.4].
- (3) Untersuchung nichtlinearer (genauer semilinearer) PDEs
 - (a) Skalierungsverhalten nichtlinearer PDEs (NLPDEs) und Klassifikation [1, Abschnitt 3.1].
 - (b) Definition der Begriffe *klassische Lösung*, *wohlgestellte Lösung*, *starke Lösung*, *schwache Lösung* und *distributionelle Lösung* [1, Abschnitt 3.2].
 - (c) Lokale Existenz von Lösungen (Duhamel, Picard–Lindelöf; Anwenden von Strichartz) [1, Abschnitt 3.3].
 - (d) Globale Existenz von Lösungen mittels Erhaltungsgrößen [1, Abschnitt 3.4].
 - (e) Asymptotisches Verhalten von Lösungen für $t \pm \infty$ mittels Abfall-Abschätzungen (decay estimates) wie Morawetz-Abschätzung und Kombination dieser mit Strichartz [1, Abschnitt 3.5].
 - (f) Streutheorie, Existenz und Vollständigkeit von Wellenoperatoren, asymptotische Vollständigkeit [1, Abschnitt 3.6].
 - (g) Stabilitätstheorie [1, Abschnitt 3.7].

LITERATUR

- [1] Terence Tao. *Nonlinear Dispersive Equations*, volume 106 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 2006. Local and Global Analysis.

(Konstantin Merz) INSTITUT FÜR ANALYSIS UND ALGEBRA, TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG, UNIVERSITÄTSPLATZ 2, 38106 BRAUNSCHWEIG, GERMANY
Email address: k.merz@tu-bs.de