

## Lineare Algebra 2

### 12. Übungsblatt

Ausgabe am 18.07.2022, Abgabe bis zum 25.07.2022 um 09.00 Uhr,  
Besprechung in den kleinen Übungen vom 25.07.-29.07.2022

#### Aufgabe 12.1 (4 Punkte)

Sei  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein komplexer Hilbertraum und  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Zeigen Sie folgende Aussagen.

- (a) Seien  $z \in \rho(T)$  und  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \rho(T)$  eine Folge mit  $z_n \rightarrow z$ . Dann gilt  $\|(T - z_n)^{-1} - (T - z)^{-1}\| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . (Das heißt die Abbildung  $\rho(T) \ni z \mapsto (T - z)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  ist normstetig.)
- (b) Es gilt  $\sigma(T) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|T\|\}$ .

#### Aufgabe 12.2 (4 Punkte)

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und angenommen  $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  sei bijektiv. Zeigen Sie folgende Aussagen.

- (a) Es gilt  $\sigma(A^{-1}) \setminus \{0\} = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}\}$ .
- (b) Es gilt  $A\psi = z\psi$  für  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $\psi \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  genau dann, wenn  $A^{-1}\psi = z^{-1}\psi$ .

Hinweis: Erinnern Sie sich an  $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$  und bestimmen Sie einen Kandidaten für  $(A^{-1} - z^{-1})^{-1}$ , indem Sie zunächst den Fall  $n = 1$  betrachten, in dem  $A$  eine komplexe Zahl ist.

#### Aufgabe 12.3 (4 Punkte)

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und angenommen  $U : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  sei unitär, sprich, es gelte  $UU^* = U^*U = \mathbf{1}_{\mathbb{C}^n}$ . Zeigen Sie folgende Aussagen.

- (a) Es gilt  $\|U\|_{\text{op}} = 1$ .
- (b) Es gilt  $\sigma(U) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . (Das heißt, alle Eigenwerte von  $U$  haben Betrag gleich Eins.)