

Lineare Algebra 2

12. Übungsblatt

Ausgabe am 18.07.2022, Abgabe bis zum 25.07.2022 um 09.00 Uhr,
Besprechung in den kleinen Übungen vom 25.07.-29.07.2022

Aufgabe 12.1 (4 Punkte)

Sei $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein komplexer Hilbertraum und $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Zeigen Sie folgende Aussagen.

- (a) Seien $z \in \rho(T)$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \rho(T)$ eine Folge mit $z_n \rightarrow z$. Dann gilt $\|(T - z_n)^{-1} - (T - z)^{-1}\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. (Das heißt die Abbildung $\rho(T) \ni z \mapsto (T - z)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist normstetig.)
- (b) Es gilt $\sigma(T) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|T\|\}$.

Aufgabe 12.2 (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und angenommen $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ sei bijektiv. Zeigen Sie folgende Aussagen.

- (a) Es gilt $\sigma(A^{-1}) \setminus \{0\} = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}\}$.
- (b) Es gilt $A\psi = z\psi$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\psi \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ genau dann, wenn $A^{-1}\psi = z^{-1}\psi$.

Hinweis: Erinnern Sie sich an $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ und bestimmen Sie einen Kandidaten für $(A^{-1} - z^{-1})^{-1}$, indem Sie zunächst den Fall $n = 1$ betrachten, in dem A eine komplexe Zahl ist.

Aufgabe 12.3 (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und angenommen $U : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ sei unitär, sprich, es gelte $UU^* = U^*U = \mathbf{1}_{\mathbb{C}^n}$. Zeigen Sie folgende Aussagen.

- (a) Es gilt $\|U\|_{\text{op}} = 1$.
- (b) Es gilt $\sigma(U) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. (Das heißt, alle Eigenwerte von U haben Betrag gleich Eins.)