Institut für Analysis und Algebra
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Sommersemester 2022

Lineare Algebra 2
11. Übungsblatt

Ausgabe am 11.07.2022, Abgabe bis zum 18.07.2022 um 09.00 Uhr,
Besprechung in den kleinen Übungen vom 18.07.-22.07.2022

Aufgabe 11.1 (6 Punkte)
Seien $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein komplexer Hilbertraum und $S, T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) Angenommen $0 \in \rho(S) \cap \rho(T)$, wobei $\rho(T) = \{z \in \mathbb{C} : T - z\mathbf{1}_{\mathcal{H}} \text{ ist beschränkt invertierbar}\}$ die Resolventenmenge von T bezeichnet. Dann gilt $T^{-1} - S^{-1} = T^{-1}(S - T)S^{-1}$.

(b) Sei $z \in \rho(S) \cap \rho(T)$. Dann gilt $(T - z)^{-1} - (S - z)^{-1} = (T - z)^{-1}(S - T)(S - z)^{-1}$.

(c) Seien $w, z \in \rho(T)$. Dann gilt $(T - z)^{-1} - (T - w)^{-1} = (z - w)(T - w)^{-1}(T - z)^{-1}$.

Aufgabe 11.2 (6 Punkte)
Sei $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein komplexer Hilbertraum und $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) Die Resolventenmenge $\rho(T) \subseteq \mathbb{C}$ ist offen, sprich für alle $w \in \rho(T)$ gibt es $r_w > 0$, sodass auch $\{z \in \mathbb{C} : |z - w| < r_w\} \subseteq \rho(T)$ gilt. (Dementsprechend ist $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ abgeschlossen.)

(b) Für $z \in \rho(T)$ gilt $\|(T - z)^{-1}\| \geq [\operatorname{dist}(z, \sigma(T))]^{-1}$.

(c) Sei $w \in \rho(T)$ und $r_w := \|(T - w)^{-1}\|^{-1}$. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n \geq 0} (z - w)^n [(T - w)^{-1}]^{n+1} = (T - z)^{-1}$$

in Operatornorm für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - w| < r_w$.

<u>Hinweis:</u> Für zwei Operatoren $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $0 \in \rho(B)$ und $\|AB^{-1}\| < 1$ ist auch $0 \in \rho(A+B)$ und die Reihen

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n B^{-1}(AB^{-1})^n = \sum_{n \geq 0} (-1)^n (B^{-1}A)^n B^{-1} = (A + B)^{-1}$$

konvergieren in Operatornorm. (Dies folgt unmittelbar aus Satz XV.12.)