

Lineare Algebra 2

10. Übungsblatt

Ausgabe am 04.07.2022, Abgabe bis zum 11.07.2022 um 09.00 Uhr,
Besprechung in den kleinen Übungen vom 11.07.-15.07.2022

Aufgabe 10.1 (6 Punkte)

Sei $(\mathcal{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ ein \mathbb{K} -Hilbertraum. Wir führen folgende Notation ein.

Definition 0.1. Seien $U, V, W \subseteq \mathcal{H}$ Unterräume von \mathcal{H} . Dann schreiben wir $W = U \oplus V$ (gesprochen “orthogonale Summe”) genau dann, wenn $U + V = W$ und $U \perp V$.

Für $U \perp V$ ist $U \cap V = \{0\}$, sprich $U \oplus V$ ist insbesondere eine direkte Summe, vgl. Aufgabe K 6.3 des letzten Semesters.

Zeigen Sie folgende Aussagen.

- Sind M_1 und M_2 orthogonale Teilräume von \mathcal{H} , so ist $M_1 \oplus M_2$ genau dann abgeschlossen, wenn M_1 und M_2 abgeschlossen sind.
- Sind M_1 und M abgeschlossene Teilräume mit $M_1 \subseteq M$, so gibt es genau einen abgeschlossenen Teilraum $M_2 \subseteq M$ mit $M_1 \oplus M_2 = M$.
- Jedes Orthonormalsystem $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ von \mathcal{H} ist linear unabhängig.

Aufgabe 10.2 (6 Punkte)

Seien $(\mathcal{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle) = (\mathbb{C}^n, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ ausgestattet mit dem üblichen unitären Skalarprodukt und der dazugehörigen Norm $\|x\|^2 = \langle x | x \rangle$ sowie $A = (A_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{C}^{n \times n} \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$.

- Finden Sie eine obere Schranke an die Operatornorm $\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ und drücken Sie sie durch die Komponenten A_{ij} aus.
- Angenommen A sei invertierbar, d.h. es existiere die Inverse A^{-1} . Finden Sie eine obere Schranke an $\|A^{-1}\|$ und drücken Sie sie durch die Komponenten A_{ij} aus. (*Hinweis:* Satz VII.8 des Skripts des letzten Semesters.)
- Erinnern Sie sich an den Begriff des Spektrums $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda \cdot \mathbf{1}_n \text{ nicht bijektiv}\}$. Zeigen Sie, dass $\sigma(A)$ genau aus den Eigenwerten von A besteht.

Hinweis: Das Skript zur Linearen Algebra 1 vom WS 21/22 finden Sie bspw. bei den Dateien in studip in der Veranstaltung “Übung: Lineare Algebra 2”.