Institut für Analysis und Algebra
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Sommersemester 2022

Lineare Algebra 2
9. Übungsblatt

Ausgabe am 27.06.2022, Abgabe bis zum 04.07.2022 um 09.00 Uhr,
Besprechung in den kleinen Übungen vom 04.07.-08.07.2022

Aufgabe 9.1 (6 Punkte)
Gegeben sei der Vektorraum $X = \mathbb{C}^{2\times 2}$ der komplexwertigen 2×2-Matrizen, versehen mit der Operatornorm $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$, d.h. für alle $A \in X$ sei $\|A\| = \|A\|_{\mathrm{op}}$, wobei $\|A\|_{\mathrm{op}} := \sup_{x\in\mathbb{C}^2\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$ mit der euklidschen Norm $\|\cdot\|_2$ in $\mathbb{C}^2$.
Sei $\Phi \in \mathcal{B}(X)$ gegeben durch $X \ni A \mapsto \Phi(A) := \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$.

(a) Bestimmen Sie $\|\Phi\|_{\mathrm{op}}$.

(b) Zeigen Sie (z.B. mit Hilfe der Neumannschen Reihe), dass $(\mathbf{1}_X - \alpha\Phi)$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| < 1$ auf X invertierbar ist und berechnen Sie $(\mathbf{1}_X - \alpha\Phi)^{-1}$ damit explizit.

(c) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| = 1$ für die der Operator $(\mathbf{1}_X - \alpha\Phi)$ invertierbar ist. (Darüber trifft die Neumannsche Reihenentwicklung in diesem Fall *keine* Aussage.)

Aufgabe 9.2 (6 Punkte)
Sei $(X, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ein (nicht notwendig endlichdimensionaler) komplexer Hilbertraum. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) Ist $A \in \mathcal{B}(X)$ selbstadjungiert, so gilt

$$\|A\|_{\mathrm{op}} = \sup_{\|x\|=1} |\langle x|Ax\rangle|.$$

(*Hinweis:* Erinnern Sie sich an die Parallelogramgleichung ($\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$) sowie $\|A\|_{\mathrm{op}} = \sup_{\|x\|,\|y\|=1} |\langle x|Ay\rangle|$.)

(b) Ein linearer Operator A auf X ist genau dann beschränkt, wenn $\sup_{\|x\|=1} |\langle x|Ax\rangle| < \infty$. (*Hinweis:* Erinnern Sie sich an die Polarisationsidentität

$$Q(x,y) = \frac{1}{4}\left[Q(x+y,x+y) - \mathrm{i}Q(x+\mathrm{i}y,x+\mathrm{i}y) - Q(x-y,x-y) + \mathrm{i}Q(x-\mathrm{i}y,x-\mathrm{i}y)\right]$$

für alle (nicht notwendigerweise hermiteschen) Sesquilinearformen $Q : X \times X \to \mathbb{C}$.)