Institut für Analysis und Algebra
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Sommersemester 2022

Lineare Algebra 2
8. Übungsblatt

Ausgabe am 20.06.2022, Abgabe bis zum 27.06.2022 um 09.00 Uhr,
Besprechung in den kleinen Übungen vom 27.06.-01.07.2022

Aufgabe 8.1 (4 Punkte)
Sei $\mathcal{P}$ der Vektorraum aller reellen Polynome $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Für $p \in \mathcal{P}$, $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ setze $\|p\| := \sum_{k=0}^n |a_k|$.

(a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|$ eine Norm ist.

(b) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$ vollständig ist oder widerlegen Sie diese Aussage (etwa mit einem Gegenbeispiel).

(c) Untersuchen Sie, ob die Operatoren $T_1, T_2 : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ beschränkt sind und berechnen Sie ggf. $\|T\|_{\mathrm{op}}$, wobei

$$\begin{aligned} (T_1 p)(x) &= p(x+1), && x \in \mathbb{R} \quad \text{(Translation)} \\ (T_2 p)(x) &= \int_0^x p(t)\, dt, && x \in \mathbb{R} \quad \text{(Integration).} \end{aligned}$$

Aufgabe 8.2 (4 Punkte)
Sei $A : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ aufgefasst als $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times m}$. Zeigen Sie:

(a) Tragen $\mathbb{C}^n$ und $\mathbb{C}^m$ die Summennorm $\|x\|_1 = \sum |x_i|$, dann gilt:

$$\|A\| = \max_{1 \le j \le m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

(b) Tragen $\mathbb{C}^n$ und $\mathbb{C}^m$ die Maximumsnorm $\|x\|_\infty = \max |x_i|$, dann gilt:

$$\|A\| = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|.$$

Aufgabe 8.3 (4 Punkte)
Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und sei A invertierbar. Angenommen es gibt $\gamma > 0$, sodass $\|A^{-1}\|_{\mathrm{op}} < \gamma$ und $\|A - B\|_{\mathrm{op}} < 1/\gamma$. Zeigen Sie, dass

(a) B invertierbar ist und

(b) $\|B^{-1}\|_{\mathrm{op}} \le \frac{\gamma}{1 - \gamma \|A-B\|_{\mathrm{op}}}$.

Hinweis: Ohne Beweis dürfen Sie verwenden, dass $1 - X$ für $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $\|X\|_{\mathrm{op}} < 1$ invertierbar ist mit $\|(\mathbf{1}_n - X)^{-1}\|_{\mathrm{op}} \le \frac{1}{1 - \|X\|_{\mathrm{op}}}$.