Institut für Analysis und Algebra
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Sommersemester 2022

Lineare Algebra 2
7. Übungsblatt

Ausgabe am 13.06.2022, Abgabe bis zum 20.06.2022 um 09.00 Uhr,
Besprechung in den kleinen Übungen vom 20.06.-24.06.2022

Aufgabe 7.1 (4 Punkte)
Sei X ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$. Sei für alle $\Phi \in \mathcal{L}(X)$ die *Adjungierte* $\Phi^* \in \mathcal{L}(X)$ von Φ definiert durch

$$\forall x, y \in X : \quad \langle \Phi^* x | y \rangle = \langle x | \Phi y \rangle.$$

Seien $\Phi, \Psi \in \mathcal{L}(X)$, zeigen Sie:

(a) $(\Phi\Psi)^* = \Psi^*\Phi^*$

(b) $(\Phi^*)^* = \Phi$

(c) Mit Φ ist auch Φ^* invertierbar, und in diesem Fall gilt $(\Phi^*)^{-1} = (\Phi^{-1})^*$.

Aufgabe 7.2 (4 Punkte)
Sei X ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Ein $\Phi \in \mathcal{L}(X)$ heißt *selbstadjungiert*, wenn $\Phi^* = \Phi$.
Seien $\Phi, \Psi \in \mathcal{L}(X)$, zeigen Sie:

(a) Ist Φ selbstadjungiert und nilpotent, so ist $\Phi = 0$.

(b) Seien Φ, Ψ selbstadjungiert, dann ist $\Phi \circ \Psi$ genau dann selbstadjungiert, wenn $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi$.

Aufgabe 7.3 (4 Punkte)
Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung des Endomorphismus $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$, der durch die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

dargestellt wird.