Institut für Analysis und Algebra
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Sommersemester 2022

Lineare Algebra 2
6. Übungsblatt

Ausgabe am 30.05.2022, Abgabe bis zum 13.06.2022 um 09.00 Uhr,
Besprechung in den kleinen Übungen vom 13.06.-17.06.2022

Aufgabe 6.1 (6 Punkte)
Seien K ein Körper, $A, B \in K^{n\times n}$ und $H \in GL(n, K)$. Zeigen Sie:

(a) $\forall\, m \in \mathbb{N}: \quad (H^{-1}AH)^m = H^{-1}A^mH.$

(b) Sind $AB = BA$ und $m \in \mathbb{N}$, dann

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}.$$

Nun sei für $A \in K^{n\times n}$ die sog. *Matrixexponentialfunktion*

$$\exp(A) := \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!}$$

definiert (Sie können die Konvergenz der Reihe (in geeignetem Sinne) voraussetzen).

(c) Berechnen Sie $\exp(D)$ für eine Diagonalmatrix $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

(d) Zeigen Sie: $\exp(H^{-1}AH) = H^{-1}\exp(A)H$.

(e) Zeigen Sie: Ist $AB = BA$, so gilt $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

Aufgabe 6.2 (6 Punkte)
Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Bestimmen Sie $H \in GL(3, \mathbb{R})$ und $J \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass $A = H^{-1}JH$ und J in Jordanscher Normalform ist.

(b) Finden Sie $N, D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass D diagonal, N nilpotent, $J = D + N$ und $ND = DN$. Nutzen Sie Aufgabe 6.1 um damit $\exp(tA)$ für alle $t \geq 0$ zu berechnen.