

Lineare Algebra 2

4. Übungsblatt

Ausgabe am 16.05.2022, Abgabe bis zum 23.05.2022 um 09.00 Uhr,
Besprechung in den kleinen Übungen vom 23.05.-27.05.2022

Aufgabe 4.1 (4 Punkte)

Sei \mathbb{F} ein Körper und $A \in \text{GL}(n, \mathbb{F}) \subset \mathbb{F}^{n \times n}$ invertierbar.

(a) Zeigen Sie, dass es ein Polynom $f(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_mX^m \in \mathbb{F}[X]$ vom Grad $m \leq n$ gibt, sodass $A^{-1} = f(A) = a_0\mathbf{1} + a_1A + \dots + a_mA^m$.

(b) Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie A^{-1} mit Hilfe von Teil (a).

Aufgabe 4.2 (4 Punkte)

Sei $P_3 := \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \text{grad}(p) \leq 3\}$ und $\varphi : P_3 \rightarrow P_3$ gegeben durch $\varphi(p)(x) = p''(x) + 2p(x)$.

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von φ .

(b) Bestimmen Sie, ob φ diagonalisierbar ist.

Aufgabe 4.3 (4 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$.

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom $\mu_A(x)$ in faktorisierte Form.

(b) Bestimmen Sie damit die Zerlegung von \mathbb{R}^4 gemäß Satz XII.9 der Vorlesung.