

## Lineare Algebra 2

### 4. Übungsblatt

Ausgabe am 16.05.2022, Abgabe bis zum 23.05.2022 um 09.00 Uhr,  
Besprechung in den kleinen Übungen vom 23.05.-27.05.2022

#### Aufgabe 4.1 (4 Punkte)

Sei  $\mathbb{F}$  ein Körper und  $A \in \text{GL}(n, \mathbb{F}) \subset \mathbb{F}^{n \times n}$  invertierbar.

- (a) Zeigen Sie, dass es ein Polynom  $f(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_mX^m \in \mathbb{F}[X]$  vom Grad  $m \leq n$  gibt, sodass  $A^{-1} = f(A) = a_0\mathbf{1} + a_1A + \dots + a_mA^m$ .

- (b) Sei  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ . Bestimmen Sie  $A^{-1}$  mit Hilfe von Teil (a).

#### Aufgabe 4.2 (4 Punkte)

Sei  $P_3 := \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \text{grad}(p) \leq 3\}$  und  $\varphi : P_3 \rightarrow P_3$  gegeben durch  $\varphi(p)(x) = p''(x) + 2p(x)$ .

- (a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von  $\varphi$ .
- (b) Bestimmen Sie, ob  $\varphi$  diagonalisierbar ist.

#### Aufgabe 4.3 (4 Punkte)

Sei  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ .

- (a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom  $\mu_A(x)$  in faktorisierte Form.
- (b) Bestimmen Sie damit die Zerlegung von  $\mathbb{R}^4$  gemäß Satz XII.9 der Vorlesung.