

## Lineare Algebra 2

### 3. Übungsblatt

Ausgabe am 09.05.2022, Abgabe bis zum 16.05.2022 um 09.00 Uhr,  
Besprechung in den kleinen Übungen vom 16.05.-20.05.2022

#### Aufgabe 3.1 (4 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils das Minimalpolynom der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

#### Aufgabe 3.2 (4 Punkte)

Sei  $\mathbb{F}$  ein Körper. Beweisen Sie den Satz von Cayley-Hamilton für allgemeine Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2 \times 2}$$

durch explizites Nachrechnen.

#### Aufgabe 3.3 (4 Punkte)

Seien  $V = \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A \in V$  und ein  $\varphi : V \rightarrow V$ ,  $X \mapsto A \cdot X$ . Zeigen Sie:

- $\mu_\varphi(x) = \mu_A(x)$ . (Hierbei sind  $\mu_\varphi$  und  $\mu_A$  die Minimalpolynome von  $\varphi$  bzw.  $A$ .)
- $\varphi$  und  $A$  besitzen dieselben Eigenwerte.