

Lineare Algebra 2

2. Übungsblatt

Ausgabe am 02.05.2022, Abgabe bis zum 09.05.2022 um 09.00 Uhr,
Besprechung in den kleinen Übungen vom 09.05.-13.05.2022

Aufgabe 2.1 (4 Punkte)

Sei R ein euklidischer Ring.

Ein Element $k \in R$ heißt *kleinstes gemeinsames Vielfaches* (kurz kgV) von $a, b \in R$ genau dann, wenn:

- (1) $a \mid k$ und $b \mid k$
- (2) Für alle $\tilde{k} \in R$ gilt: $(a \mid \tilde{k} \wedge b \mid \tilde{k}) \Rightarrow k \mid \tilde{k}$.

Zeigen Sie:

- (a) Ist $g \in R$ ein ggT von $a, b \in R$, dann ist $k := \frac{ab}{g} \in R$ ein kgV von a und b .
- (b) Ist $k \in R$ ein kgV von $a, b \in R$, dann ist $g := \frac{ab}{k} \in R$ ein ggT von a und b .

Aufgabe 2.2 (4 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils ein ggT(p, q) und ein kgV(p, q) von:

- (a) $p(X) := 4X^3 + 3X^2 + X - 2$, $q(X) := 2X^2 + X + 2 \in \mathbb{Z}_5[X]$
- (b) $p(X) := 3X^2 + 1$, $q(X) := X^4 + 5X^3 + 2 \in \mathbb{Z}_7[X]$.

Aufgabe 2.3 (4 Punkte)

Seien $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ durch

$$f(X) = 4X^3 + 8X^2 + X - 2, \quad g(X) = 2X^2 + X + 2$$

gegeben. Wenden Sie die Polynomdivision auf $f(X)/g(X)$ an, sprich finden Sie Polynome $q, r \in \mathbb{Q}[X]$ so, dass $f = qg + r$. Verifizieren Sie, dass $\deg[r(X)] < \deg[g(X)]$ wahr ist.