Institut für Analysis und Algebra
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Volker Bach, Dr. Konstantin Merz

Sommersemester 2022

Lineare Algebra 2
1. Übungsblatt

Ausgabe am 21.04.2022, Abgabe bis zum 02.05.2022 um 09.00 Uhr,
Besprechung in den kleinen Übungen vom 02.05.-06.05.2022

Aufgabe 1.1 (4 Punkte)
Bestimmen Sie jeweils die (möglicherweise einelementige) Menge der größten gemeinsamen Teiler der nachfolgenden Elemente durch Anwendung des Euklidischen Algorithmus.

(a) 42 und 93 in $\mathbb{N}$.

(b) 34 und 7 in $\mathbb{N}$.

(c) 85 und -153 in $\mathbb{Z}$.

(d) 6 und 4 in $\mathbb{Z}_9$. (Erinnerung: für $m \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{Z}_m = \{[a]_m : a \in \mathbb{Z}\}$ der Restklassenring, wobei $[a]_m := a + m\mathbb{Z} = \{a + mx : x \in \mathbb{Z}\}$. Die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ sind durch $[a] + [b] = [a + b]$ und $[a] \cdot [b] = [a \cdot b]$ definiert.)

Aufgabe 1.2 (4 Punkte)
Ein Element $n \in \mathbb{N}$ heißt **prim** $:\Leftrightarrow$

$$n \neq 1 \ \wedge \ \forall a, b \in \mathbb{N} : n \mid ab \Rightarrow (n \mid a \ \vee \ n \mid b)\,.$$

Andererseits heißt ein $n \in \mathbb{N}$ **unzerlegbar** genau dann, wenn

$$n \neq 1 \ \wedge \ \forall x, y \in \mathbb{N} : n = xy \Rightarrow (x = 1 \ \vee \ y = 1)\,.$$

Zeigen Sie: $n \in \mathbb{N}$ ist genau dann prim, wenn es unzerlegbar ist.

Aufgabe 1.3 (4 Punkte)
Seien $\mathbb{F}$ ein Körper, $\mathbb{F}[X]$ der Polynomring über $\mathbb{F}$ und die Polynome $p(X), q(X) \in \mathbb{F}[X]$ mit $p(X) := X^3 + X^2 + X - 3$ und $q(X) := X^4 - X^3 + 3X^2 - X + 4$.
Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von $p(X)$ und $q(X)$ für den Fall

(a) $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$,

(b) $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_3$ und

(c) $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_{11}$.

Hinweis: Polynomringe über Körpern sind stets sog. *euklidische* Ringe, in denen insbesondere der euklidische Algorithmus angewandt werden kann, in diesem Fall durch Polynomdivision.