

I. Zweite Quantisierung

15.10.1

\mathcal{H} Hilbertraum: Strahlen in diesem Raum sind die Zustände
 eines Teilchens

Literatur
 Bernd Thaller
 The Dirac eq.

$\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_N$ Hilberträume von N Systemen (Teilchen)

Hilbertraum des Gesamtsystems: $\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$; eventuell unter
 Einschränkung bei identischen Teilchen, z.B. für Fermionen $\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N = \mathcal{H}^{(N)}$
 Bosonen $\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$

Beispiel: $\forall_n \mathcal{H}_n = L^2(\mathbb{R}^3)$, $\Psi \in \prod_{n=1}^N \mathcal{H}_n$ und $\forall \Psi(x_{1(n)}, \dots, x_{n(n)}) = \text{sgn}(\pi) \Psi(x_{n_1}, \dots, x_{n_N})$

Fockraum für Fermionen:
 $\mathcal{H}^{(0)} = \mathbb{C}$
 $\mathcal{F} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{(n)}$ $\ni \Psi = (\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \dots)$
 $(\Psi, \Psi') = \sum_{n=0}^{\infty} (\Psi_n, \Psi'_n)_{\mathcal{H}^{(n)}}$

algebraische direkte Summe
 → endlich viele Folgenglieder
 ungleich 0

$\Psi_n, \Psi'_n \in \mathcal{H}^{(n)}$ im Spezialfall $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ $(\Psi_n, \Psi'_n) = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\Psi_n(x)} \Psi'_n(x) dx$

ONB von \mathcal{H} (separabel) e_1, e_2, \dots
 $\Psi_n = \sum_{i_1, \dots, i_n} x_{i_1, \dots, i_n} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}$

d.h. $e_1 \otimes \dots \otimes e_n$ ist ONB von $\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$
 $\prod_{n=1}^{\infty} e_n \otimes \dots \otimes e_n = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$

Erzeugungs- & Vernichtungsoperatoren (an Hand von L^2)

$f \in L^2(\mathbb{R}^3)$
 $a(f)(0, 0, \dots, \Psi_{n(n)}, 0, \dots) = \sqrt{n} \int dx f(x) \Psi_{n(n)}(x, x_1, \dots, x_n)$
 $a(f)(0, 0, \dots) = \vec{0}$ $a(f)(1, 0, \dots) \neq \vec{0}$

~~$a^*(f) \equiv (a(f))^*$ $a^*(f)(0, 0, \dots, \Psi_{n(n)}, 0, \dots) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \overline{f(x_j)} \Psi_{n(n)}$~~

$$a^*(f) \equiv (a(f))^*$$

$$(a^*(f))(0, \dots, 0, \psi_{n-1}, 0, \dots) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} f(x_j) \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

HAUPTAUFGABE: 1) Zeige $a^*(f) = (a(f))^*$

2) Zeige $\{a(g), a^*(f)\} = (g, f) \cdot \mathbb{1}_f$

$$\langle \psi, (a(g)a^*(f) + a^*(f)a(g))\psi \rangle = \langle \psi, \psi \rangle (g, f) \Rightarrow \{a(f), a^*(f)\} \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$$

$$\|a(g)a^*(f) + a^*(f)a(g)\| = \|g\|^2$$

$$= (a^*(f)\psi, a^*(f)\psi) + (a(f)\psi, a(f)\psi) \geq (a^*(f)\psi, a^*(f)\psi) = \|a^*(f)\psi\|^2$$

$$\Rightarrow a(f), a^*(f) \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$$

(Mit Hilfe dieser Operatoren können Ein- und Zwei-Teilchen-Operatoren auf dem Fockraum hochgezogen werden.)

Bemerkung: $f = \delta_y$, $\delta(x-y) = \sum_{\nu} e_{\nu}(x) \overline{e_{\nu}(y)}$

$$a_y \equiv a(\delta_y) = \sum_{\nu} a\left(\sum_{\nu} e_{\nu} \overline{e_{\nu}(y)}\right) \stackrel{a \text{ antilinear}}{=} \sum_{\nu} e_{\nu}(y) a(e_{\nu})$$

Entsprechendes gilt für a_k (im Impulsraum $\delta_f \rightarrow e^{ik}$)

Analog alles für $a^*(\cdot)$

Mit Hilfe dieser Operatoren können Ein- und Zwei-Teilchen-Operatoren auf dem Fockraum hochgezogen werden.

Beispiel $H_{Nz} = \underbrace{\sum_{\nu=1}^N \left(-\Delta_{\nu} - \frac{z}{|x_{\nu}|}\right)}_{H_{Nz}^{(0)}} + \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq N} \frac{1}{|x_{\mu} - x_{\nu}|}$ atomarer Hamiltonoperator

s.a. definiert art $\mathcal{H}^{(0)} = \prod_{\nu=1}^N L^2(\mathbb{R}^3)$

Wähle ONB des $L^2(\mathbb{R}^3)$: $e_1, e_2, e_3, \dots \in H^1(\mathbb{R}^3)$

$$a_{\nu} := a(e_{\nu})$$

$$h_{\mu\nu} = (a_{\mu}, a_{\nu}) = \int \frac{z}{|x|} \overline{e_{\mu}(x)} e_{\nu}(x) dx = \left(e_{\mu}, \underbrace{\left(-\Delta - \frac{z}{|x|}\right)}_{\text{Einf.}} e_{\nu} \right)$$

Matrixelemente des Ein-Teilchenoperators

$$h := \sum_{\mu, \nu} h_{\mu\nu} a_{\mu}^* a_{\nu}$$

KLAUS AUFGABE 3a) Verifiziere auf geeigneter dichter Teilmenge, dass $(\Psi, h \Psi) = (\Psi_n, H_{n,z}^{(0)} \Psi_n)$ wobei $\Psi = (0, \dots, 0, \Psi_n, 0, \dots)$

Bemerkung: $\inf \sigma(H_{n,z}^{(0)}) = -c z^2 N^{1/3} + o(N^{1/3})$
 \Rightarrow h ist nicht nach unten beschränkt

$$W = \sum_{\mu, \nu, k, l} W_{\mu\nu,kl} a_{\mu}^* a_{\nu}^* a_k a_l$$

3a) Indexes korrekt? Zeige, dass $(\Psi, h + W \Psi) = (\Psi_n, H_{n,z} \Psi_n)$

$$H_{n,z} \approx -\text{const} \cdot (N+k) \quad (W = \sum_{\nu} a_{\nu}^* a_{\nu})$$

$\Rightarrow \exists c$, sodass $h + cN \geq 0$ d.h. Friedrichs liefert direkt eine selbstadjungierte Erweiterung

(h hat keine Nicht-Diagonalelemente)

$$H = \sum_{\mu, \nu} h_{\mu\nu} a_{\mu}^* a_{\nu} + \sum_{\mu, \nu, k, l} W_{\mu\nu,kl} a_{\mu}^* a_{\nu}^* a_k a_l$$

16.10.15

II Dirac Operator

$$\Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in M_{4 \times 4} \quad \text{spurlos, hermitesch, unitär}$$

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

unitär \rightarrow alle EW liegen auf Einheitskreis
 s.a. \rightarrow alle EW reell

$$\alpha_{\nu} \alpha_{\nu} = \mathbb{1}_4$$

spurlos \rightarrow $+1, -1$ müssen gleich oft vorkommen

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 4} \quad \text{s.a., spurlos, unitär}$$

\Rightarrow solche Matrizen haben EW ± 1 mit

$$\{\alpha_{\mu}, \alpha_{\nu}\} = 2\delta_{\mu\nu}$$

doppelter Vielfachheit

$$\{\alpha_{\mu}, \beta\} = 0$$

$$m \geq 0, \quad c \geq 0 \quad \text{freier Dirac-Operator: } D_0 = c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + m c^2 \beta$$

\downarrow
Masse des Elektrons

\downarrow
Lichtgeschwindigkeit

$$D_0 \psi(x) = \begin{pmatrix} mc^2 & \sum_j \frac{1}{i} \sigma_j \partial_j \\ \sum_j \frac{1}{i} \sigma_j \partial_j & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}(x)$$

$$= \begin{pmatrix} mc^2 & 0 & \frac{1}{i} \partial_3 & -\partial_2 + \frac{1}{i} \partial_1 \\ 0 & mc^2 & \partial_2 + \frac{1}{i} \partial_1 & -\frac{1}{i} \partial_3 \\ \frac{1}{i} \partial_3 & -\partial_2 + \frac{1}{i} \partial_1 & mc^2 & 0 \\ \partial_2 + \frac{1}{i} \partial_1 & -\frac{1}{i} \partial_3 & 0 & mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}(x)$$

Foldy Wouthyson $F^* D_0 F = c \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + mc^2 \beta$

Matrixmultiplikationsoperator (reell. Fkt)

Wouthyson $(FW)^* F^* D_0 F (FW) = \begin{pmatrix} e(\vec{p}) & 0 \\ 0 & -e(\vec{p}) \end{pmatrix} \quad e(\vec{p}) = \sqrt{c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4}$

\times ist sa
auf $L^2(\mathbb{R}^3, dx)$
 (ψ, χ)

Foldy Wouthyson operator defined as $U_{FW} = \frac{H_0 - \beta \cdot x \cdot p + E(p)}{\sqrt{2E(p)(E(p)+1)}} \quad \sqrt{p^2+1} = \langle p \rangle$

$= \int \psi(x) \chi(x) dx$
 $= \int \psi(x) \chi(x) dx$

Reel Realisere des Multiplikationsoperator $e(\vec{p})$ selbstadjungiert auf dem Definitionsbereich $L^2(\mathbb{R}^3, \sqrt{1+|\vec{p}|^2} d\vec{p}) \rightarrow FW$ zurück $\rightarrow F$ zurück
 $\Rightarrow D_0$ ebenfalls selbstadjungiert und Def.-bereich ist $F(FW(L^2(\mathbb{R}^3, \sqrt{1+|\vec{p}|^2})))$
also Diagonale $H^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$
 \times unitäre Operatoren \rightarrow keine L^2 -

$$(c \cdot \vec{p} + \beta mc^2)^2 = \sum_{\mu} (c \alpha_{\mu} \vec{p}_{\mu} + \beta mc^2) \sum_{\nu} (c \alpha_{\nu} \vec{p}_{\nu} + \beta mc^2)$$

$$= c^2 |\vec{p}|^2 + m^2 c^4 + 0$$

$$\Rightarrow D_0^2 = \sqrt{c^2 (-\Delta) + m^2 c^4}^2$$

$$D(\alpha, e\varphi) = c \vec{\alpha} \cdot \left(\frac{1}{i} \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + mc\beta + e\varphi \quad \varphi = \frac{q_{\text{extern}}}{|\mathbf{r}|} \quad \text{rot } \mathbf{A} = \vec{\mathcal{E}}$$

$$\stackrel{A}{=} H(e) \quad \text{grad } \varphi = \vec{\mathcal{E}}$$

Selbstadjungiertheit \rightarrow Oberseminar 30. Oktober 2015

macht Selbstadjungiertheit für bestimmte α und β . \rightarrow siehe auch Josef Mehringer

Dissertationsverteilung Mo 18.11.14
Sitzungsraum 3. Stock

Definiere Ladungskonjugation (unitärer Operator?)

$$C\psi = U_c \bar{\psi} = i\beta\alpha_2 \bar{\psi}$$

Behauptung $C H(e) C^{-1} = -H(-e)$

$$C^{-1} = -\alpha_2 \beta, \text{ denn } \overline{-i\alpha_2 \beta \bar{\psi}} = -i\alpha_2 \beta i\beta\alpha_2 \bar{\psi} = \psi$$

$$C^{-1} = \overline{-i\alpha_2 \beta \psi}$$

$$\begin{aligned} C H(e) C^{-1} \psi &= i\beta\alpha_2 \overline{\left(c \vec{\alpha} \cdot \left(\frac{1}{i} \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + mc\beta + e\varphi \right) \alpha_2 \beta (-\psi)} \\ &= \beta\alpha_2 \overline{\left(-\alpha_1 \left(\frac{1}{i} \partial_1 - \frac{e}{c} A_1 \right) - \alpha_2 \left(\frac{1}{i} \partial_2 - \frac{e}{c} A_2 \right) - \alpha_3 \left(\frac{1}{i} \partial_3 - \frac{e}{c} A_3 \right) - mc\beta + e\varphi \right) \beta \psi} \\ &= \beta \overline{\left[\alpha_1 \left(\frac{1}{i} \partial_1 + \frac{e}{c} A_1 \right) - \alpha_2 \left(\frac{1}{i} \partial_2 + \frac{e}{c} A_2 \right) + \alpha_3 \left(\frac{1}{i} \partial_3 + \frac{e}{c} A_3 \right) - mc\beta + e\varphi \right] \psi} \\ &= -H(-e) \psi \end{aligned}$$

Negatives Energiespektrum = Zustandsraum eines Teilchens mit umgekehrter Ladung aber positiver Energie.

$$\mathcal{H}_+ = \chi_{(0, \infty)}(H(e)) L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4) \quad \text{Ein-Teilchen-Elektronenraum}$$

$$\begin{aligned} C \mathcal{H}_+ &= \mathcal{H}_- = C \chi_{(0, \infty)}(H(e)) L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4) \quad \text{Ein-Teilchen-Positonenraum} \\ &\stackrel{D}{=} \chi_{(-\infty, 0]}(C H(e) C^{-1}) L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4) \\ &\hookrightarrow \chi_{(0, \infty)} \text{ oder?!} \end{aligned}$$

Das äußere Feld gibt eine Vakuumpolarisation vor.

Damit können wir den zugehörigen Fockraum definieren:

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{N, M=0}^{\infty} \mathcal{h}^{(N, M)}$$

$$\mathcal{h}^{(N, M)} = \left(\bigwedge_{i=1}^N \mathcal{h}_+ \right) \otimes \left(\bigwedge_{i=1}^M \mathcal{h}_- \right)$$

N Elektronen, M Positronen

Elektronen-Positronen-Fockraum

→ Erzeuger und Vernichter

$$x = (y, s) \in \mathbb{R}^3 \times \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} dx$$

Elektronenvernichter $\{a(f) \psi\}^{(n, m)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = \sqrt{n!} \int dx f(x) \psi_{(n, m)}^{(n+1, m)}(x, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$

Elektronenerzeuger $\{a^*(f) \psi\}^{(n, m)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f(x_i) \psi_{(n, m)}^{(n-1, m)}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$

22.10.15

$\{a(f), a(g)\} = \{a^*(f), a^*(g)\} = 0$ Pauli-Prinzip im Ein-Teilchenraum

$\{a^*(f), a(g)\} = (g, f)$

kanonische Antivertauschungsrelationen (Jordan, Wigner)

Positronenvernichter

$g \in \mathcal{h}_+^+$ (kein Positronenzustand) ($g \in \mathcal{h}_-$ Positronenzustand)

$\{b(g) \psi\}^{(n, m)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = (-1)^n (M+1)^{m/2} \int dx g(x) \psi_{(n, m)}^{(n, M+1)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, x)$

$\{b^*(g) \psi\}^{(n, m)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{M!}} \sum_{i=1}^M (-1)^{i+1} (g)(y_i) \psi_{(n, m)}^{(n, M-1)}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_m)$

Ebenso ist $\{b(g), b(g')\} = \{b^*(g), b^*(g')\} = 0$

$(g, g' \in \mathcal{h}_+^+)$ $\{b^*(g), b(g')\} = (g, g')$ (Beachte Reihenfolge von g, g')

Definiere $\Lambda_+ = \mathbb{1} - \Lambda$ Λ_+ : Projektor auf \mathcal{h}_+

$f, g \in \mathcal{h}$ $a^*(f) = a^*(\Lambda_+ f)$ $b^*(g) = b^*(\Lambda_- g)$

$\{a^*(f), b^*(g)\} = 0$

Feldoperator $\psi(f) = a^*(\Lambda_+ f) + b(\Lambda_- f)$

$\psi^*(f) = a^*(\Lambda_+ f) + i b(\Lambda_- f)$ des Elektronen-Positronen-Feldes

Man rechnet nach $\{ \Psi^*(f), \Psi^*(g) \} = \{ \Psi(f), \Psi(g) \} = 0$

$\{ \underset{\text{linear}}{\Psi^*(f)}, \underset{\text{antilinear}}{\Psi(g)} \} = (g, f)$, d.h. Ψ erfüllt ebenfalls die kanonischen Antivertauschungsrelationen $\{a, b\} = 0$

$$\begin{aligned} \|\Psi(f)\Psi\|^2 + \|\Psi^*(f)\Psi\|^2 &= (\Psi, \Psi^*(f)\Psi(f)\Psi) + (\Psi, \Psi(f)\Psi^*(f)\Psi) \\ &= (\Psi, \Psi) = \|\Psi\|^2 = \|f, f\| \|\Psi\|^2 \end{aligned}$$

\Rightarrow B. 1.1.4

$$\Rightarrow \|\Psi(f)\Psi\| \leq \|f\| \cdot \|\Psi\| \quad \Rightarrow \|\Psi(f)\| \leq \|f\|$$

$$\|\Psi^*(f)\Psi\| \leq \|f\| \cdot \|\Psi\| \quad \|\Psi^*(f)\| \leq \|f\|$$

Gilt Gleichheit? ($\|\Psi^*(f)\| = \|\Psi(f)\|$)

Sei $\Psi = \omega$ (Vakuum) $f \in \mathfrak{h}_+$

$$\|\Psi^*(f)\omega\| = \|(0, f, 0, \dots)\| = \|f\|$$

Zur Quantisation ist a functor $f \mapsto \mathcal{F}(f)$

Weitere Notation: ONB von \mathfrak{h} $(\dots, e_{-2}, e_{-1}, e_0, e_1, e_2, \dots)$
 $\underbrace{\quad}_{\mathfrak{h}_-} \quad \underbrace{\quad}_{\mathfrak{h}_+}$

\rightarrow definiere $a(e_\nu) =: a_\nu$

$b(e_\nu) =: b_\nu$

Frage: Start mit (AR \rightarrow Aussagen über \mathcal{F} möglich?)

Irreduzibilität der Fock-Darstellung

Wir stellen uns auf einem C^* -algebraischen Standpunkt vor,
 $f \in \mathfrak{f} = \mathfrak{f}_+ \oplus \mathfrak{f}_-$. Wir schauen also auf die Algebra, die von gegebenen $\psi(f), \psi^*(f)$
 erzeugt wird und die CAR erfüllt.

Gegeben so eine Darstellung. Definiere $c(f) := \psi(f)$ $d(g) := \psi^*(g)$
 $f \in \mathfrak{f}_+$ $g \in \mathfrak{f}_-$

Ferner existiere $\Omega \in \mathfrak{H}$. $c(f)\Omega = 0$ $d(g)\Omega = 0 \Rightarrow \Omega$ heißt
 Vakuum der Darstellung

Einrich

direktes "G"

Darstellungstheorie $\mathfrak{f}, \mathfrak{H}$ Hilberträume. $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ beschränkte, lineare Abbildungen auf \mathfrak{H}

$\mathfrak{f} \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ heißt eine Darstellung der CAR, wenn ψ antilinear ist
 $g \mapsto \psi(g)$ und die CAR selbst erfüllt.

Bemerkung: Daraus können wir einen Fockraum konstruieren.

$$F_{\text{Fock}}^{(M)} := \left\{ \underbrace{c^*(e_{\nu_1}) \cdots c^*(e_{\nu_n})}_{\nu_1, \dots, \nu_n \in M_+} \underbrace{d^*(e_{\mu_1}) \cdots d^*(e_{\mu_m})}_{\mu_1, \dots, \mu_m \in M_-} \Omega \right\}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ lineares Erzeugnis

$$\Rightarrow F := \bigoplus_{n, m} F_{\text{Fock}}^{(n, m)}$$

Satz: Seien ψ und ϕ zwei Darstellungen der CAR. Dann hat man

$$\begin{matrix} a, a^* & c, c^* \\ b, b^* & d, d^* \end{matrix}$$

ϕ hätte den Vakuumvektor Ω' ($c_i \Omega' = d_i \Omega' = 0$) genau

dann, wenn es eine unitäre Transformation U gibt

$$U: F \rightarrow \mathfrak{H} \text{ (Fockraum)}$$

$$\text{und es gilt } \phi(f) = U \psi(f) U^* \quad \forall f \in \mathfrak{f}$$

Beweis: Beh. U ist gegeben durch

" \Leftarrow "

$$F \text{ von } \Rightarrow a^*(e_{1n}), \dots, a^*(e_{rn}), b^*(e_{r+1n}), \dots, b^*(e_{nm}) \Omega$$

e_i Basis von Y
 f_j Basis von Y'

$$Y' \text{ von } \Rightarrow c^*(f_{1r}), \dots, c^*(f_{rn}), d^*(f_{r+1r}), \dots, d^*(f_{rm}) \Omega'$$

Beide respective des
 splitting

und gegeben und erfüllt (absolut) die geforderte Bedingung

" \Rightarrow "

Umgekehrt, gibt es einen Vektor Ω' zu Φ , den lässt sich U konstruieren

Implementierung unitärer Operatoren in F

23.10.15

$$Y = Y_+ \oplus (Y_+)^{\perp}$$

$U: Y \rightarrow Y$ unitär, soll das Splitting respektieren, also
 $U Y_+ \subset Y_+, U (Y_+)^{\perp} \subset (Y_+)^{\perp}$

Seien Ψ eine Darstellung der CAR, also für alle $f \in Y$ ist $\Psi(f) \in \mathcal{L}(F)$

$$\Psi(f) \in \mathcal{L}(F) \text{ mit } \{ \Psi^*(f), \Psi(f') \} = (f', f)$$

Definiere $\Phi(f) := \Psi(Uf)$

$$\{ \Phi^*(f), \Phi(g) \} = \{ \Psi^*(Uf), \Psi(Ug) \} = 0$$

$$\{ \Phi^*(f), \Phi(g) \} = \{ \Psi^*(Uf), \Psi(Ug) \} = (Ug, Uf) = (g, f)$$

$\Rightarrow \Phi$ ist ebenfalls eine Darstellung der CAR

$\rightarrow \Phi$ auch unitär eq zu Ψ auf Fockraum level ??

Frage: Gibt es ein U mit $U \Psi(f) U^* = \Psi(Uf)$ mit U unitär?

$$U: F \rightarrow F$$

(Standardwahl $\Omega = 0$)

Verwende dazu den letzten Satz. Definiere $\Omega' := e^{i\theta} \Omega$ ($\theta \in (0, 2\pi)$)

Dieses Ω' erfüllt die Voraussetzungen des letzten Satzes (ist also ein Vektor)

\Rightarrow Ja, dann gibt es so ein U

\blacksquare

Anwendungen

$$U_t = e^{-iHt}$$

H: Hamilton operator

(Zeitentwicklung)

Es muss weiter gelten $U_t \psi_0 \in \mathcal{H}_+$, $U_t (\mathcal{H}_+)^{\perp} \subset (\mathcal{H}_+)^{\perp}$

Beispiel: Wähle H als den Dirac-Operator, der den Splitting erzeugt

Wähle weiterhin $U_0 \alpha = \alpha$

$$U_0 = 1, \text{ denn } U_0 = 1_{\mathcal{H}}, \text{ d.h. } \psi_0 = \psi$$

$$U_{s+t} = U_s \cdot U_t, \text{ denn } \psi(U_{s+t} f) = \psi(U_t (U_s f)) \\ = U_t \psi(U_s f) U_t^*$$

$$\begin{aligned} \psi U_t^* &= U_s U_t \psi(f) U_t^* U_s^* \\ &= U_s U_t \psi(f) (U_s U_t)^* = U_s \psi_t(f) U_s^* \\ &= \psi_{s+t}(f) \end{aligned}$$

Für die Ableitung gilt:

$$\left\| \frac{1}{h} (\psi_{t+h}(f) - \psi_t(f)) \right\| = \left\| \psi_t(-iHf) \right\|$$

$$= \left\| \psi \left(\frac{e^{-i(t+h)H} - e^{-iHt}}{h} f \right) \right\|$$

$$= \left\| \psi \left(\frac{e^{-i(t+h)H} - e^{-iHt}}{h} (f + ie^{-iHt} Hf) \right) \right\|$$

$$= \left\| \psi \left(e^{-iHt} \left(\frac{e^{-iHh} - 1}{h} + iH \right) f \right) \right\|$$

Limex vom Zähler da ψ stetig und ψ beschränkte Op.

$\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ für alle f, da e^{-iHt} stark stetige Halbgruppe

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \text{ in Operatornorm}$$

\Rightarrow h. wir können U sogar in Norm differenzieren

D.h. in Operatornorm gilt $\frac{d}{dt} U_t = i U_t (Hf)$

Zur Erinnerung $\psi(f) = a(N_+ f) \oplus b^*(N_- f)$

$$\text{Damit kann man zeigen: } a_t^*(f) = a^*(e^{-iHt} f) \quad f \in \mathcal{H}_+$$

$$b_t^*(g) = b^*(e^{-iHt} g) \quad g \in (\mathcal{H}_+)^{\perp}, N_- g = g$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} a_t^*(f) = -i a_t^*(Hf) \quad \text{Nachrechnung}$$

$$\frac{d}{dt} b_t^*(g) = i b_t^*(Hg) \quad (\text{Hausaufgabe 1})$$

Sei $\Psi = \underbrace{a^*(f_{v_1}) \dots a^*(f_{v_n}) b^*(g_{\mu_1}) \dots b^*(g_{\mu_m})}_{\text{States}} \Omega$

f, g, g, ... ONB von \mathcal{F}
 g_1, g_2, \dots ONB von $(\mathcal{F})^\perp$

$$i \frac{d}{dt} U_t \Psi \Big|_{t=0} = i \frac{d}{dt} \left(a_t^*(f_{v_1}) \dots a_t^*(f_{v_n}) b_t^*(g_{\mu_1}) \dots b_t^*(g_{\mu_m}) \Omega \right) \Big|_{t=0}$$

N+M Summanden

$$= a_t^*(Hf_{v_1}) a_t^*(f_{v_2}) \dots a_t^*(f_{v_n}) b_t^*(g_{\mu_1}) \dots b_t^*(g_{\mu_m}) \Omega \Big|_{t=0} +$$

$$- a_t^*(f_{v_1}) \dots a_t^*(f_{v_n}) b_t^*(g_{\mu_1}) \dots b_t^*(Hg_{\mu_1}) \Omega \Big|_{t=0}$$

$$= \sum_{j=1}^n a_t^*(f_{v_1}) \dots a_t^*(f_{v_{j-1}}) a_t^*(Hf_{v_j}) a_t^*(f_{v_{j+1}}) \dots a_t^*(f_{v_n}) b_t^*(g_{\mu_1}) \dots b_t^*(g_{\mu_m}) \Omega +$$

$$- \sum_{j=1}^m a_t^*(f_{v_1}) \dots a_t^*(f_{v_n}) b_t^*(g_{\mu_1}) \dots b_t^*(g_{\mu_{j-1}}) b_t^*(Hg_{\mu_j}) b_t^*(g_{\mu_{j+1}}) \dots b_t^*(g_{\mu_m}) \Omega$$

Nach Bildung v. Linearkombos solcher Ψ kann man die Operator stetig linear fortsetzen

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} U_t = i \frac{d}{dt} U_t \Big|_{t=0} \text{ ist auf } \mathcal{D}(H) := \left\{ \Psi \in \mathcal{F} : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (U_t - 1) \Psi \text{ existiert} \right\}$$

dicht definiert, denn die Linearkombos ~~von~~ der Form der Ψ 's ~~darüber~~ U-Vektorraum

der Form sind in $\mathcal{D}(H)$ enthalten und bilden einen dichten U-Vektorraum (lineare Hülle dichtet)

\Rightarrow D. h. U_t ist stark differenzierbar und unitär, d. h. U_t ist eine unitäre Gruppe mit Erzeuger H

Linearkombos der Form

20 (g. g. Eigenwert von H)

Hausaufgabe 2: Zeige, dass $H\Psi = \sum_{i,j} (f_i, Hf_j) a_i^* a_j - \sum_{\mu,\nu} (g_\mu, Hg_\nu) b_\mu^* b_\nu$

Operator zur Vertauschung von einem Feld

Beachte: Das Vorzeichen der Energie der Positronen wird umgedreht. Insbesondere falls die Splitting durch H induziert wird, ist H positiv.

Hausaufgabe 3: $\psi \in F^{(0, \infty)}$. Untersuche $(\psi, H\psi) = ?$ (sollte Negativteil von Diracoperator sein)

Korollar: Falls das Splitting durch H erzeugt wird:

e^{-iHt} kann als unitäre Gruppe $U_t = e^{-iHt}$ mit positivem H implementiert werden.

Teilchenzahl- und Ladungsoperator

$N = \sum_i a^*(f_i) a(f_i) + \sum_j b^*(g_j) b(g_j)$ Teilchenzahloperator bei gegebener ONB f_1, f_2, \dots von \mathcal{H}_+ und g_1, g_2, \dots von \mathcal{H}_-
 unabhängig von Basis, denn sei

$$U \quad f'_i = \sum_j U_{ij} f_j \quad g'_i = \sum_j V_{ij} g_j$$

$$\begin{aligned} \sum_i a^*(f'_i) a(f'_i) &= \sum_{i,j} a^*(U_{ij} f_j) a(U_{ij} f_j) \\ &= \sum_{i,j} U_{ij}^* \underbrace{U_{ij}}_{\delta_{ij}} a^*(f_j) a(f_j) = \sum_j a^*(f_j) a(f_j) \quad (\text{unabhängig von } b) \\ &= \sum_j a^*(f_j) a(f_j) \end{aligned}$$

Ladungsoperator $Q = \sum_i a^*(f_i) a(f_i) - \sum_j b^*(g_j) b(g_j)$ ebenfalls unabhängig von gewählter Basis

Man sollte haben: für $\psi \in F^{(0, \infty)}$

$$N\psi = (N+M)\psi \quad Q\psi = (N-M)\psi$$

Zweite Quantisierung von Einteilchenoperatoren

Näme $A \in \mathcal{S}^2(\mathcal{H})$ (Spurklasse) e_j ONB von \mathcal{H}

$$\begin{aligned} A\psi &= A\psi\psi = \sum_{i,j} (e_i, Ae_j) \psi^*(e_i) \psi(e_j) \\ &= \sum_{i,j} (e_i, Ae_j) (a^*(e_i) + \#b^*(e_i)) (a(e_j) + \#b^*(e_j)) \end{aligned}$$

$$H = (\lambda_+ + 1)H(\lambda_+ + \lambda_-) = H_{++} + H_{+-} + H_{-+} + H_{--}$$

$$U = \begin{matrix} H_{++} + H_{--} \\ \downarrow \\ H_{+-}^* \end{matrix} \quad G = H_{-+} + H_{--} \quad \text{sind beide symmetrisch}$$

$$\begin{aligned} [\varepsilon, H_{++} + H_{--}] &= (\lambda_+ + 1)(\lambda_+ H_{++} + \lambda_- H_{--}) - (\lambda_+ H_{++} + \lambda_- H_{--})(\lambda_+ + 1) \\ &= \lambda_+ H_{++} + \lambda_- \lambda_+ H_{--} + \lambda_- \lambda_+ H_{--} + \lambda_- H_{--} \\ &\quad - \lambda_+ H_{++} - \lambda_+ H_{++} \lambda_- - \lambda_- H_{--} \lambda_+ - \lambda_- H_{--} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{andog } [\varepsilon, U] &= 0 = (\lambda_+ \mp \lambda_-)(\lambda_+ H_{++} + \lambda_- H_{--}) + (\lambda_+ H_{++} + \lambda_- H_{--})(\lambda_+ \mp \lambda_-) \\ &= \lambda_+ H_{++} \mp \lambda_- \lambda_+ H_{++} \mp \lambda_- \lambda_+ H_{--} \mp \lambda_- H_{--} + \\ &\quad + \lambda_+ H_{++} \lambda_+ + \lambda_- \lambda_+ H_{++} \mp \lambda_- H_{--} \mp \lambda_- H_{--} \lambda_- \\ &= 0 \end{aligned}$$

Eindeutigkeit: Angenommen, es gäbe eine weitere mögliche Zerlegung
 $H = G' + U'$ (z.B., da $G = G'$, $U = U'$)

$$0 = H - H = U - U' + G - G' \quad \text{kommutiert mit } \lambda_+, \lambda_-, \varepsilon$$

$$[\varepsilon, 0] = \underbrace{[\varepsilon, U]}_0 - \underbrace{[\varepsilon, U']}_0 + [\varepsilon, G] - [\varepsilon, G'] \Rightarrow G = G' \quad \text{a}$$

Nach Annahme $0 = [G - G', \varepsilon] = 0 \Rightarrow T = U - U'$ ebenfalls mit ε kommutiert

$$[\varepsilon, 0] = [\varepsilon, U] - [\varepsilon, U'] + \underbrace{[\varepsilon, G]}_0 - \underbrace{[\varepsilon, G']}_0$$

$$\Rightarrow [\varepsilon, U - U'] = 0 \equiv [\varepsilon, T]$$

$$\text{Wichtig: } \{U', \varepsilon\} = \{U, \varepsilon\} = 0 \Rightarrow \varepsilon T = T \varepsilon \text{ mit } \varepsilon^2 = -1 \Rightarrow \varepsilon T = -T \varepsilon \Rightarrow T = 0$$

$$\Rightarrow T = 0, \text{ da } \varepsilon \neq 0, \text{ da } \varepsilon \text{ unitär} \Rightarrow U = U' \Rightarrow G = G'$$

$A: \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ beschränkter linearer Operator

\mathfrak{H} Hilbertraum T unitäre Involution

Sei $f_v = 1, f_v$ ONB von \mathfrak{H}_+ \mathfrak{H}_+ $\rightarrow g_1, g_2, \dots$

$g_v = 1, g_v$ ONB von \mathfrak{H}_- $(\mathfrak{H}_-)^+$ $\rightarrow e_1, e_2, e_3, \dots$

(Nähe) zweite Quantisierung

$$A := A \Psi^* \Psi := \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} (e_j, A e_j) \Psi^*(e_j) \Psi(e_j) \quad \Psi^*(f) = a(N, f) + b^*(N, g)$$

Zusätzliche Annahme: $A \in \mathcal{K}^*(\mathfrak{H})$ $\sqrt{\text{tr } A^* A} < \infty$

$\mathcal{K}^*(\mathfrak{H}) =$ kompakte Operatoren

Normalform: $A = \sum_j \lambda_j |\varphi_j\rangle \langle \psi_j|$ mit $\lambda_j \geq 0$ $\{\varphi_j\}$ ONB von \mathfrak{H}

$\{\psi_j\}$ " "

$|\lambda_j|$ EV von $\sqrt{A^* A}$ (Singularwerte)

Wähle nun $e_j := \varphi_j$ $\langle \Psi^*(e_v), \Psi(e_\mu) \rangle$

$$\Rightarrow A = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j \sum_{\mu, \nu} \underbrace{\langle \Psi^*(e_\nu), \Psi(e_\mu) \rangle}_{\delta_{\nu\mu}} (e_\nu, A e_\mu) \Psi(e_\mu) \quad \sum_\nu |e_\nu\rangle \langle e_\nu| A e_\mu = A e_\mu$$

$$\stackrel{\text{Parseval}}{=} \sum_\mu \Psi^*(A e_\mu) \Psi(e_\mu)$$

Erinnerung $\|\Psi(f)\| = \|f\| = \|\Psi^*(f)\|$

λ_μ für e_μ EV von A

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|A\| &\leq \sum_\mu \underbrace{\|\Psi^*(A e_\mu)\|}_{\|A e_\mu\|} \cdot \underbrace{\|\Psi(e_\mu)\|}_1 = \sum_\mu \underbrace{\|A e_\mu\|}_{\sqrt{\lambda_\mu^2} \|e_\mu\|} = \sum_\mu \underbrace{(e_\mu, A^* A e_\mu)}_{\lambda_\mu} = \sqrt{\text{tr}(A^* A)} \\ &= \sum_\mu \lambda_\mu < \infty = \|A\|_S < \infty \end{aligned}$$

D.h. D.h. dieses ist definiert

Folgendes gilt: $A^* = A^* \Psi^* \Psi = (A \Psi^* \Psi)^* = (\Psi^* A)^*$ (10.57)

$$[A \Psi^* \Psi, B \Psi^* \Psi] = [A, B] \Psi^* \Psi$$

$$[A \Psi^* \Psi, \Psi^*(f)] = \Psi^*(A f) \quad ; \quad [A \Psi^* \Psi, \Psi(f)] = -\Psi(A f)$$

~~$A \Psi^* \Psi = A$~~

e^{itAV^*V} definiert über die Potenzreihe (alle Op. beschr. \Rightarrow Reihe konvergiert)

$$e^{itAV^*V} \Psi(y) e^{-itAV^*V} = \Psi(e^{-itA})$$

Hausaufgabe 7 Beweise zwei dieser drei Identitäten

Merke $A\Psi^*V = Aa^*a + Aa^*b^* + Aba + Abb^*$

$$Abb^* = \sum_{j,k} (g_j, Ag_k) b(g_j) b^*(g_k)$$

$$\begin{aligned} (\Omega, Abb^* \Omega) &= \sum_{k,l} (g_k, Ag_l) (\Omega, b_l b_k^* \Omega) \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_k (\Omega, b_k^* b_k \Omega) = \sum_k \langle \Omega, b_k^* b_k \Omega \rangle = \sum_k \langle \Omega, A g_k \rangle = \text{tr} A \end{aligned}$$

D.h. falls $A \notin \mathcal{A}^*(\mathcal{G}_+)$, dann ist $(\Omega, Abb^* \Omega)$ nicht einmal der Erwartungswert im Vakuum ~~definiert~~.

Zur Erinnerung: In den Fällen, in denen die Grattierung von A respektiert wurde, definierten wir $A = Aa^*a - Ab^*b$

Dieser hatte verschwindenden Vakuumserwartungswert.

Ebenso $N = a^*a + b^*b$

$Q = a^*a - b^*b$

30.10.15

$A = AV^*V = \sum_{k,l} (e_k, A e_l) V^*(e_k) V(e_l)$ (unabhängig von der gewählten Orthonormalform ONB $\{e_k\}$)

$(\Omega, AV^*V \Omega) = \text{tr}(A)$

Vorher: $H = H(a^*a - b^*b)$, $N = a^*a + b^*b$, $Q = a^*a - b^*b$

alle diese Operatoren haben Vakuumserwartungswert 0

Normalordnung Definition $\mathcal{C} \in \{a, b\}$ oder Polynome in $\mathcal{C}^{\#}$ $\# \in \{*, \dagger$

linear fortgesetzt von Monomen der Form $\mathcal{C}^{\#}$

$\mathcal{C}^{\#}$: antikommutiere alle gestrichelten Faktoren ^{minimal} nach links

$$: a_i a_j^* := -a_j^* a_i \quad : a_i^* a_j^* := a_j^* a_i^*$$

$$* : a_i a_j b_k^* b_l^* := b_k^* b_l^* a_i a_j$$

nzt Monom $(a_i \prod_{j=1}^n g_j^{*k_j} \omega) = 0$ falls ω mindestens eines ungeraden Op. verhält, ist $\int = 0$
 0 da Orthogonal

Mit dieser Notation: H sym auf \mathfrak{g} , Gradierung respektierend

$$\langle H | = H : \Psi^* \Psi := \sum_{i,j=1}^{\infty} ((f_i, H f_j) a_i^* a_j + (g_i, H g_j) b_i^* b_j)$$

$$: A \Psi^* \Psi := : \sum_{i,j=1}^{\infty} (e_i, A e_j) [a_i^* a_j + (e_i, A e_j) a_i^* b_j^* + b_i a_j + b_i^* k_j^*] :$$

$$= \sum_{i,j} (e_i, A e_j) [a_i^* a_j + a_i^* b_j^* + b_i a_j + b_i^* k_j^*]$$

$$= \sum_{i,j} (e_i, A e_j) [a_i^* a_j + a_i^* b_j^* + b_i a_j + b_i^* k_j^* - \delta_{ij}] \Rightarrow$$

$$= A \Psi^* \Psi - \text{tr } A = A \Psi^* \Psi - (\omega, A \Psi^* \Psi \omega)$$

Worin ist A definiert?

Annahme: A sei beschränkt

$$\psi = b^*(g_{k_1}) \dots b^*(g_{k_m}) \omega \quad \text{Basisvektor in } F^{(m)}$$

$$\psi = a^*(f_{j_1}) \dots a^*(f_{j_n}) \omega \quad \text{in } F^{(n)}$$

$\hookrightarrow \text{span}(\psi)$ bildet dichten Untervektorraum von F

\rightarrow Abschluss ist F

$\left. \begin{array}{l} \text{span } F \text{ auf} \\ \text{ist algebraische Basis} \\ \text{von } F \end{array} \right\} \text{ONB von strikten UVR von } F$

$$A a^* a \psi = \sum_{j,k} (f_j, A f_k) a^*(f_j) a(f_k) \psi$$

$$= \sum_k a^* \left(\sum_j f_j \times f_j, A f_k \right) a(f_k) \psi$$

$$= \sum_k a^*(A f_k) a(f_k) a^*(f_{j_1}) \dots a^*(f_{j_n}) b^*(g_{k_1}) \dots b^*(g_{k_m}) \omega$$

$$= a^*(A f_{j_1}) a^*(f_{j_2}) \dots a^*(f_{j_n}) \omega \dots a^*(f_{j_1}) a^*(f_{j_2}) \dots a^*(f_{j_n}) \omega$$

ist also auf Basisvektoren wohldefiniert

Analog $A b^* b \psi$ wohldefiniert und damit ist $A b^* b$ ebenfalls auf den Linearkombinationen der Basisvektoren definiert, also insbesondere dicht definiert

Für die zweite Quantisierung des ungeraden Teils nehmen wir an,
 dass $A_- \in \mathcal{Y}^2(\underbrace{1, \frac{1}{2}}_{(g_+)^+}; \underbrace{1, \frac{1}{2}}_{g_+})$ $A_- = \Lambda_- A \Lambda_-$

Sei Da A_- kompakt ist, gilt

$$A_- = \sum_j |u_j \rangle \langle v_j| |u_j \rangle \langle v_j| \quad |u_j \rangle \text{ ONB von } g_+ \\ |v_j \rangle \text{ ONB von } (g_+)^+ \\ |k_j \rangle^2 \text{ sind EW von } A_- \quad A_- \\ (A_-)^+$$

$$A_- a^+ b^+ = \sum_{j,k} (u_j, A_- v_k) a^+(u_j) b^+(v_k) \\ = \sum_n \lambda_n a^+(u_n) b^+(v_n)$$

$$\|A_- a^+ b^+ \omega\|^2 = \sum_{n,m} \lambda_n \lambda_m (a^+(u_n) b^+(v_n) \omega, a^+(u_m) b^+(v_m) \omega) \\ = \sum_n \lambda_n^2 < \infty \Rightarrow A_- \text{ muss HS sein}$$

$$\Rightarrow A_- \in \mathcal{Y}^2(1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow \text{Analog } A_+ \in \mathcal{Y}^2(1, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2})$$

Falls $A_- \in \mathcal{Y}^2$, dann ist das Bild Ψ von ω ein Vektor in \mathcal{F} .

Da $A_- a^+ b^+$ mit allen Erzeugern kommutiert, können wir damit $A_- a^+ b^+$ auf einer dichten Teilmenge von \mathcal{F} definieren.

$\Rightarrow : A \Psi^+ \Psi :$ ist definiert

Operatoren, die die Gradierung nicht respektieren: $\Lambda_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \epsilon)$

$$g_\pm = L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4) \quad \epsilon = \text{sgn } D_0 = \frac{D_0}{|D_0|}$$

$$D_\pm = D_0 - \frac{\alpha \mathbb{Z}}{|\mathbf{x}|} \text{ selbstadjungiert für } \alpha \mathbb{Z} < 1 \text{ auf } \mathcal{D}(D_\pm) = H^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$$

da D_0 von Splitting respektiert $D_\pm = \begin{pmatrix} D_{\pm+} & D_{\pm-} \\ D_{\pm+} & D_{\pm-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4} - \alpha \mathbb{Z} \left(\frac{\mathbb{Z}}{|\mathbf{x}|}\right)_+ & -\alpha \mathbb{Z} \left(\frac{\mathbb{Z}}{|\mathbf{x}|}\right)_- \\ -\alpha \mathbb{Z} \left(\frac{\mathbb{Z}}{|\mathbf{x}|}\right)_+ & \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4} - \alpha \mathbb{Z} \left(\frac{\mathbb{Z}}{|\mathbf{x}|}\right)_- \end{pmatrix}$

Es müssten $\Lambda_\pm \frac{1}{|\mathbf{x}|} \Lambda_\pm$ und $\Lambda_\pm \frac{1}{|\mathbf{x}|} \Lambda_\pm \in \mathcal{Y}^2$ sein.

HA a) Checke ob $\Lambda_\pm \frac{1}{|\mathbf{x}|} \Lambda_\pm \in \mathcal{Y}^2$ ist und bewerte die Antwort

b) Nöhmne als Gradierung $\epsilon_\pm = \frac{D_\pm}{|D_\pm|}$ (Verwende das für a)) ??

Zu b): $D_{HF} = D_2 + \underbrace{\alpha \varphi^{(r)} - \alpha X^{(r)}}_{\alpha M^{(r)}}$

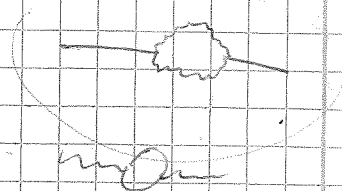
$$D_{HF} = \begin{pmatrix} D_{++} + \alpha M_{++}^{(r)} & + \alpha M_{+-}^{(r)} \\ -\alpha M_{-+}^{(r)} & D_{--} + \alpha M_{--}^{(r)} \end{pmatrix}$$

$M_{+-}, M_{-+} \in \mathcal{F}^{(r)} ??$

Schwef and Martin Klaus: QED

Helvetica
Physica

Matthias Huber



Bogeljubov Transformationen

Unitäre Transformationen (ohne erhaltene Gradierung)

$U: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ respektiert nicht notwendigerweise eine gegebene Gradierung

$f \mapsto \Psi'(f) := \Psi(Uf)$ Ψ Darstellung der CAR

Behauptung: Auch Ψ' erfüllt die CAR

Frage: Gibt es eine unitäre Implementierung U in \mathcal{F} , sodaß

$$U \Psi(f) U^* = \Psi(Uf) \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

\Downarrow
 $\Psi'(f)$

5.11.15

Zu Ψ' gehören neue Erzeuger und Vernichter

$$a'(f) = a(Uf)$$

$$\text{Mit } a'(f) = a(U_+ f) + b^*(U_- f) \quad \forall f = 1_f$$

$$b'(g) = a^*(U_+ g) + b(U_- g) \quad \forall g = 1_g$$

ist die Frage der Existenz äquivalent zur Frage, ob der ursprüngliche

Satz 10.3

Satz 10.3

in Thaller

Vakuumzustand Ω wieder eine solcher für die neuen Ψ Vernichter ist,

d.h. ob $a'(f)\Omega = 0$ & $b'(g)\Omega = 0 \quad \forall f = 1_f \quad g = 1_g$

Das Kriterium von Shale & Stinespring

Sei $A: (\mathfrak{H}_+) \rightarrow \mathfrak{H}_+$, $Aa^*b^* = \sum_j A_j a^*(u_j) b^*(v_j)$ A_j Singularkwerte von A
 und $A \in \mathcal{K}^2(\mathfrak{H}_+)$ u_j ONB von \mathfrak{H}_+
 v_j ONB von $(\mathfrak{H}_+)^{\perp}$

$$e^{Aa^*b^*} = 1 + Aa^*b^* + \frac{1}{2} (Aa^*b^*)^2 + \dots$$

$$\rightarrow = \prod_j e^{\lambda_j a^*(u_j) b^*(v_j)} = \prod_j (1 + \lambda_j a^*(u_j) b^*(v_j) + \dots)$$

da $a^*(u_j) a^*(u_j) = 0$

$$\| e^{Aa^*b^*} \|^2 = \left\langle \prod_j (1 + \lambda_j a^*(u_j) b^*(v_j)), \prod_k (1 + \lambda_k a^*(u_k) b^*(v_k)) \right\rangle$$

$$\log \| e^{Aa^*b^*} \| \leq x \iff \sum_k \log(1 + \lambda_k^2) \leq 2x$$

$Cx \leq \log \| e^{Aa^*b^*} \|$ konvergiert genau dann wenn $\sum_k \log(1 + \lambda_k^2) < \infty$, da $A \in \mathcal{K}^2$ ist

for " $x \leq 0$ " $\sum_k \log(1 + \lambda_k^2) \leq \sum_k \lambda_k^2 < \infty$

$$\Rightarrow \Omega \in \mathcal{D}(e^{Aa^*b^*}) \text{ falls } A \in \mathcal{K}^2(\mathfrak{H}_+) \text{ } A \in \mathcal{K}^2(\mathfrak{H}_+)^{\perp} \rightarrow \mathfrak{H}_+$$

Satz (Shale & Stinespring) (eine Richtung)

U unitär, $U_{++}, U_{--} \in \mathcal{K}^2$

\Rightarrow 1) U ist unitär implementierbar

$$2) \exists \theta \in [0, 2\pi) \text{ } U \Omega = k e^{i\theta} \prod_{l=1}^{\infty} a^*(f_l) \prod_{m=1}^{\infty} b^*(g_m) e^{Aa^*b^*} \Omega \text{ mit } \theta \in [0, 2\pi)$$

$$\text{und } A = (U_{++} U_{--}^*)_{++} = U_{--} (U_{++})^*$$

$$k = \sqrt{|\det(1 - U_{++} U_{--}^*)|}$$

$$= \sqrt{|\det(1 - U_{--} U_{++}^*)|}$$

f_1, \dots, f_n ONB von Kern U_{++}^*

g_1, \dots, g_n ONB von Kern U_{--}^*

$$A \in \mathcal{K}^1 \text{ } \det(1+A) = \prod_{\lambda} (1 + \lambda)$$

für Matrizen

Davon gibt es renormierte Versionen

(B. Simon: Trace Ideals and their applications)

6.11.15 Einige Beweisschritte:

$$\left\| \prod_{\ell=1}^L a^\ell(f_\ell) \prod_{m=1}^M b^m(g_m) e^{Aa^\dagger b^\dagger} \Omega \right\|^2 = \dots = \prod_{j=1}^n (1 + \lambda_j^2) =$$

$$= \det(1 + A^{\dagger} A) = \det(1 + A^{\dagger} A) = \det((U_+ - U_-^{\dagger})^{-1})$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & U_- \\ U_+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_+ & 0 \\ 0 & U_- \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & U_- \\ U_+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_+^{-1} & 0 \\ 0 & U_-^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & U_- U_-^{-1} \\ U_+ U_+^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{\dagger} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ U_-^{-1} U_+^{\dagger} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & U_+^{\dagger} U_-^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & U_-^{-1} U_+^{\dagger} U_+ U_-^{-1} \end{pmatrix}$$

$$1 + A^{\dagger} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + U_-^{-1} U_+^{\dagger} U_+ U_-^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + U_-^{-1} U_+^{\dagger} U_+ U_-^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_-^{-1} U_+^{\dagger} U_+ U_-^{-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{(\cdot)^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_- U_+^{\dagger} \end{pmatrix}$$

Also da auch für die σ -det. $\det A = \frac{1}{\det A}$ gilt, dann der Normierungsfaktor k richtig gewählt wurde

Was wählt man als neuen Vakuumvektor?

$$\Omega' = k \prod_{\ell=1}^L a^\ell(f_\ell) \prod_{m=1}^M b^m(g_m) e^{Aa^\dagger b^\dagger} \Omega$$

Hausaufgabe zeige $a^\ell(f) \Omega' = 0$
 $b^m(g) \Omega' = 0$

Satz Die Umkehrung gilt auch, d.h. unitäre Implementierbarkeit erzwingt U_+ , U_- als Hilbert-Schmidt-Operatoren.

Zeitentwicklung A selbstadjungiert, $U = e^{iAt}$: Wann ist dieses implementierbar durch F ?

→ Antwort: ja, falls A beschränkt und $A_+, A_- \in \mathcal{F}^2$

$$U = e^{iAt} = 1 + iAt + \frac{1}{2} (iAt)^2 \dots \text{ wenn } A \in \mathcal{F}^2 \Rightarrow A^k \in \mathcal{F}^2 \quad k > 1$$

Beachte A ist für Hamiltonoperatoren oftmals nicht beschränkt! z.B. $H =$

Klaus & Scharf: Diskussion f. $D_0 + V$

6.11.15 Einige Beweisschritte:

$$\| \prod_{l=1}^L a^*(f_l) \prod_{m=1}^M b^*(g_m) e^{Aa^*b^*} \Omega \|^2 = \dots = \prod_{j=1}^n (1 + \lambda_j^2) =$$

$$= \det(1 + A^*A) = \det(1 + A^*A) = \det((U_+ - U_-^*)^{-1})$$

$$A = \left(\begin{pmatrix} 0 & U_- \\ U_+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_+ & 0 \\ 0 & U_- \end{pmatrix} \right)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 0 & U_- \\ U_+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_+^{-1} & 0 \\ 0 & U_-^{-1} \end{pmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & U_+ U_-^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^*A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ U_-^{-1*} U_+^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & U_+^* U_-^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & U_-^{-1*} U_+^* U_+ U_-^{-1} \end{pmatrix}$$

$$1 + A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + U_-^{-1*} U_+^* U_+ U_-^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + U_-^{-1*} U_+^* U_+ U_-^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_-^{-1*} U_+^* U_+ U_-^{-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{(\cdot)^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_+ U_-^* \end{pmatrix}$$

Also da auch für die σ -det. $\det A = \frac{1}{\det A}$ gilt, dann der Normierungsfaktor k richtig gewählt wurde

Was wählt man als neuen Vakuumvektor?

$$\Omega' = k \prod_{l=1}^L a^*(f_l) \prod_{m=1}^M b^*(g_m) e^{Aa^*b^*} \Omega$$

Hausaufgabe zeige $a'(f)\Omega' = 0$
 $b'(g)\Omega' = 0$

Satz Die Umkehrung gilt auch, d.h. unitäre Implementierbarkeit erzwingt U_+ , U_- als Hilbert-Schmidt-Operatoren.

Zeitentwicklung A selbstadjungiert, $U = e^{iAt}$: Wann ist dieses implementierbar durch F

→ Antwort: ja, falls A beschränkt und $A_+, A_- \in \mathcal{H}^2$

$$U = e^{iAt} = 1 + iAt + \frac{1}{2}(iAt)^2 \dots \text{ wenn } A \in \mathcal{H}^2 \Rightarrow A^k \in \mathcal{H}^2 \quad k > 1$$

Beachte A ist für Hamiltonoperatoren oftmals nicht beschränkt! z.B. H

Klaus & Scharf Diskussion f. $D_0 + V$

Schwinger-Term $A, B \in \mathcal{F}^*(\mathcal{H})$ $C := [A, B]$

$\rightarrow [A, B] = C + S(A, B)$ $S(A, B) = \epsilon_0(A_+ B_- - B_- A_+)$

3. Hausaufgabe: Zeige dies!

Mit Wechselwirkung

\mathcal{H} : $\mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_e$ (elektro-) $\mathcal{H}_- \rightarrow \mathcal{H}_p$ (magn.)

Gradierung: \mathbb{Z}

ONB e_n

$\sum_n \psi(e_n) e_n \psi^* = \psi(x)$
 $= \psi(x)$
 $= \psi(x)$

$\mathbb{Z} e_n = \begin{cases} e_n & n \geq 0 \\ -e_n & n < 0 \end{cases}$

H. Ein-Teilchenoperator

$\psi^*(x) \psi(x)$

$H_{\text{kin}} = H \psi^* \psi = \int dx \psi^*(x) H_x \psi(x) = \int dx \sum_{n,m} \psi^*(e_n) e_n(x) H_{e_m}(x) \psi(e_m)$
 $= \sum_{n,m} (e_n, H e_m) \psi^*(e_n) \psi(e_m)$ für lokalen Hamiltonoperator

für nicht-lokalen Hm. (Vektoroperator)

$H \psi^* \psi = \int dx \int dy H(x,y) \psi^*(x) \psi(y) = \sum_{n,m} (e_n, H e_m) \psi^*(e_n) \psi(e_m)$ auch

D.h. im Allgemeinen für $\rho \in (\mathcal{L}(\mathcal{F}))^*$ positiv, also $\rho(A^*A) \geq 0$ mit $\rho(1) = 1$ (Normierung)

Z.B. für $\rho(A) = \frac{1}{\mathcal{H}} \text{tr}(Ay)$ $y = \sum_{\nu} |e_{\nu}\rangle \langle e_{\nu}|$ $\rho = \sum_{\nu} \frac{1}{\mathcal{H}} |e_{\nu}\rangle \langle e_{\nu}|$ $\sum_{\nu} \frac{1}{\mathcal{H}} = 1$

Quadratische Form:

$\rho(H_{\text{kin}}) = \int dx dy H(x,y) \rho[\psi^*(x) \psi(y)] = \text{tr}(H \tilde{\rho})$
 $\psi^*(x) \psi(y)$ Operator der lokalen Dichte

Wechselwirkend:
 mit Ein-Teilchenoperator H
 Wechselwirkungspotential W

$H_{\text{kin}} = H \psi^* \psi + \frac{1}{2} \int dx \int dy \psi^*(x) \psi(x) \psi^*(y) \psi(y) = W(x,y)$

Dieses ist sicher schwer definierbar

$W(x,y) = \frac{1}{2} \delta(x-y)$

12.11.15 Unnormierter Hamiltonoperator (e_1, e_2, e_3, \dots) ONB von \mathcal{L}^2

$$H_{\text{Har}} = \sum_{n,m} D_{n,m} \Psi^*(e_n) \Psi(e_m) + \sum_{h,k,m,n} W_{h,k,m,n} \Psi^*(e_h) \Psi(e_k) \Psi^*(e_m) \Psi(e_n)$$

$$D_{n,m} = \langle e_n, D e_m \rangle$$

$$W_{h,k,m,n} = \int_G dx \int_G dy \overline{e_h(x) e_k(y) e_m(x) e_n(y)} |x-y|^{-1} \quad G = \mathbb{R}^3 \times \{1, 2, 3, 4\}$$

Ein-Teilchen-Fall

$$\sum_{m,n} D_{m,n} [a_m^* a_n + a_m^* b_n^* + b_m a_n + b_m b_n^*]$$

$$= \text{tr}(A - D A^{-1}) \pm \text{tr}(D^{-1}) \quad ; \quad A; \text{ aber ist das falsch? } \quad \epsilon = \frac{D}{|D|}$$

$$= \sum_{h,n} D_{h,n} : \Psi^*(e_h) \Psi(e_n) : + \sum_{m < 0} D_{m,m}$$

0-Teilchen-operator (Positronen)

Zwei-Teilchen-Fall

$$\sum_{h,k,m,n} W_{h,k,m,n} ((a_h^* + b_h^*)(a_k + b_k^*)(a_m^* + b_m)(a_n + b_n^*))$$

$$\sum_{h,k,m,n} W_{h,k,m,n} [a_h^* a_k a_m a_n + a_h^* a_k a_m^* b_n^* + a_h^* a_k b_m a_n + a_h^* a_k b_m^* b_n^* +$$

$$+ a_h^* b_k^* a_m a_n + a_h^* b_k^* a_m^* b_n^* + a_h^* b_k^* b_m a_n + a_h^* b_k^* b_m^* b_n^* +$$

$$b_h a_k a_m a_n + b_h a_k a_m^* b_n^* + b_h a_k b_m a_n + b_h a_k b_m^* b_n^* +$$

$$b_h b_k^* a_m a_n + b_h b_k^* a_m^* b_n^* + b_h b_k^* b_m a_n + b_h b_k^* b_m^* b_n^*]$$

1-Teilchenoperator

$$= \sum_{h,k,m,n} W_{h,k,m,n} : \Psi^*(e_h) \Psi(e_k) \Psi^*(e_m) \Psi(e_n) : + \sum_{h,k,m,n} W_{h,k,m,n} a_h^* a_k a_n + \sum_{h,k,m,n} W_{h,k,m,n} a_h^* b_k^* b_n^* +$$

$$+ \sum_{h,k,m,n} (W_{h,k,m,n} a_h^* a_k + W_{h,k,m,n} a_h^* b_k^* + W_{h,k,m,n} b_h a_k + W_{h,k,m,n} b_h^* b_k^* + W_{h,k,m,n} b_h a_n)$$

$$+ \sum_{k,m,n} (W_{h,k,m,n} a_m^* a_n + W_{h,k,m,n} a_m^* b_n^* + W_{h,k,m,n} b_m a_n) + \sum_{k,m,n} W_{h,k,m,n} + \sum_{k,h} W_{h,k,k}$$

$$\square = \sum_{h,k,m,n} W_{h,k,m,n} (\delta_{h,m} b_k a_l b_n^* + \delta_{h,m} b_k b_n^*) = \sum_{h,k,m,n} a_h^* b_k^* b_m a_n - \delta_{h,m} a_m^* a_n - \delta_{h,m} b_n^* b_m + \delta_{h,m} b_n^* a_n$$

$$0 = \sum_{h,k,m,n} W_{h,k,m,n} (b_h b_n^* a_k b_m + \delta_{h,m} b_h a_k) = \sum_{h,k,m,n} W_{h,k,m,n} (-b_h^* b_k^* a_l b_m^* + \delta_{h,m} a_k b_m + \delta_{h,m} b_h a_k)$$

$$\Delta = \sum_{h,k,m,n} W_{h,k,m,n} (b_k^* a_m b_h^* b_n^* + \delta_{h,k} a_m^* b_n^*) = \sum_{h,k,m,n} W_{h,k,m,n} (-b_k^* a_m^* b_n^* b_h + \delta_{h,k} b_k^* a_m^* + \delta_{h,k} a_m^* b_n^*)$$

$$= \sum_{klmn} W_{klmn} : \psi_b^\dagger \psi_c \psi_m^\dagger \psi_n : + \sum_{kln} (W_{klln} a_k^\dagger a_n + W_{klln} a_k^\dagger b_n^\dagger +$$

$$\sum_{klm} W_{klmn} (a_k^\dagger a_l + a_k^\dagger b_l^\dagger) + \sum_{kln} W_{klln} b_k a_n a_l$$

$$- \sum_{klm} W_{klmk} a_m^\dagger a_l - \sum_{kln} W_{klln} b_n^\dagger b_l + \sum_{kln} (W_{klln} a_l b_n + W_{klln} b_l a_l)$$

$$+ \sum_{kmn} W_{klmn} a_m^\dagger a_n + \sum_{kln} W_{klln} b_l^\dagger a_m^\dagger + \sum_{kmn} W_{klmn} a_m^\dagger b_n^\dagger$$

$$+ \sum_{kmn} W_{klmn} b_m a_n + \sum_{kln} W_{klln} b_l^\dagger b_m^\dagger - \sum_{kln} W_{klln} b_l^\dagger b_n - \sum_{kln} W_{klmn} b_n^\dagger b_m^\dagger + \sum_{kmn} W_{klmn}$$

(1/2 Teilchen)

$$\stackrel{op}{=} \sum_{klnm} W_{klmn} (-b_l^\dagger b_k b_m^\dagger b_n^\dagger + \delta_{kl} b_m^\dagger b_n^\dagger) = \frac{1}{2} \sum_{klnm} (b_l^\dagger b_n^\dagger b_n b_m - \delta_{lm} b_l^\dagger b_n - \delta_{nl} b_n^\dagger b_m + \delta_{kl} \delta_{mn})$$

$$= \sum_{klnm} W_{klmn} (-b_l^\dagger b_n^\dagger b_n b_m + \delta_{kl} b_l^\dagger b_m^\dagger - \delta_{lm} b_l^\dagger b_n - \delta_{nl} b_n^\dagger b_m + \delta_{kl} \delta_{mn})$$

Idee: Fasse alle quadratischen Beiträge zu Korrektur von D zusammen und quantisiere bzgl. dieses neuen Ein-Teilchen-Operators, d.h. die Gradierung ε wird gemäß dieses neuen Ein-Teilchen-Operators gewählt.

$$\sum_{kln} W_{klmn} a_k^\dagger a_n = \sum_{kln} \int dx \int dy \overline{e_k(x)} e_l(y) \overline{e_n(x)} e_n(y) \cdot W(x,y) a_k^\dagger a_n$$

$$= \sum_{kn} \int dx \overline{e_k(x)} e_n(x) a_k^\dagger a_n W(k,x)$$

$$= \int dx W(k,x) a^\dagger(k) a(x)$$

$$\sum_{kln} W_{klmn} a_k^\dagger b_n^\dagger = \int dx W(k,x) a^\dagger(x) b^\dagger(x)$$

Wir sehen, dass diese Ausdrücke eine Regularisierung erfordern, um endlich zu sein.

Erster Schritt: Kein äußeres Potential

$$\rightarrow \text{Ist dann } \mathbb{H} = D_0 + \sum_{klmn} W_{klmn} \psi_k^\dagger \psi_l \psi_m^\dagger \psi_n$$

über seine quadratische Form definierbar, wenn für ε das mit

Dilatationen verträglich; zur Vereinfachung $m=0$

13.11.15

Zeige

Hausaufgabe $W_{ur} = W + \frac{1}{2} \int dx dy W(\vec{r}, \vec{r}') (A_+(x, y) - A_-(x, y)) : \Psi(x)^\dagger \Psi(y) :$

$x = (\vec{r}, s) \in G$

$+ \frac{1}{2} \int dx dy W(\vec{r}, \vec{r}') \sum_{\epsilon} A_-(\vec{r}, \epsilon; \vec{r}', \epsilon) : \Psi^\dagger(x) \Psi(y) :$

+ Zahl & Interpretiere!

$\rho(H) = \sum_{m,n} D_{m,n} \rho(\Psi_m^\dagger \Psi_n) + 2 \sum_{k,l,m,n} W_{klmn} \rho(\Psi^\dagger(e_m) \Psi(e_l) \Psi^\dagger(e_n) \Psi(e_m))$

Zustände bilden Operatoren in Zahlen ab

Spezieller Zustand

$\rho(A) = S_p(1/4 X \Psi | A) = \langle \Psi, A \Psi \rangle$ mit $\Psi = \sqrt{1-\epsilon^2} a + \epsilon a_k^\dagger a_l^\dagger b_m^\dagger b_n^\dagger$
 $\|\Psi\|=1$

~~$= (1-\epsilon^2) \langle a, A a \rangle$~~

$= (1-\epsilon^2) \langle a, A a \rangle + \epsilon^2 \langle a_k^\dagger a_l^\dagger b_m^\dagger b_n^\dagger a, A a_k^\dagger a_l^\dagger b_m^\dagger b_n^\dagger a \rangle$

$+ 2\epsilon \sqrt{1-\epsilon^2} \text{Re} \langle a, A a_k^\dagger a_l^\dagger b_m^\dagger b_n^\dagger a \rangle$

$\langle a, H a \rangle = 0 \neq \langle a, A a \rangle$

~~$\langle a, A a_k^\dagger a_l^\dagger b_m^\dagger b_n^\dagger a \rangle$~~

$\langle a, (a_k^\dagger a_l^\dagger + a_k^\dagger b_l^\dagger + b_l a_k^\dagger - b_l b_l^\dagger) a_k^\dagger a_l^\dagger b_m^\dagger b_n^\dagger a \rangle = 0$

$\langle a, (b_l^\dagger b_m a_l b_n a_n) a_k^\dagger a_l^\dagger b_m^\dagger b_n^\dagger a \rangle \neq 0$

$= \delta_{kl} \delta_{lm} \delta_{mn} \delta_{kn} (-1)^{\#} \delta_{nl} \delta_{ml} \delta_{mn} \delta_{kl}$

$+ \delta_{kl} \delta_{kl} \delta_{mn} \delta_{mn} + \delta_{kl} \delta_{kl} \delta_{mn} \delta_{mn} \delta_{nl} \delta_{lm} \delta_{mn} \delta_{kl}$

$\langle a_k^\dagger a_l^\dagger b_m^\dagger b_n^\dagger a, \Psi^\dagger \Psi a \rangle = \dots$

~~$\langle a_k^\dagger a_l^\dagger b_m^\dagger b_n^\dagger a, \dots \rangle$~~

$\langle a, (a_k^\dagger a_l^\dagger + b_l a_k^\dagger) (a_m^\dagger a_n^\dagger + b_n b_l^\dagger) a \rangle = \dots$

D.h. $\rho(H) = \epsilon^2 \Delta + 2\epsilon \sqrt{1-\epsilon^2} \Delta$ Verschiebung $\Delta \neq 0$

abhängig

Falls $\Delta > 0$: Wähle $\epsilon < 0$, dann

$\Delta < 0 \quad \epsilon > 0$

D.h. wir haben negative Energie

Wähle $m=0$. Dann ist das Funktional homogen vom Grade -1

↳ Coulomb \Rightarrow Infimum ist $-\infty \Rightarrow \exists$ Folge p_n sodass Energie $\rightarrow -\infty$ durch
Skalieren
 \Rightarrow keine Friedrichserweiterung

Gute Nachricht (Evangelium) p -Zustand

Quasi-freie Zustände $p(d_1, \dots, d_{2n-1}) = 0$

$$p(d_1, \dots, d_{2n}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}} \text{sgn}(\sigma) p(d_{\sigma_1}, d_{\sigma_2}) \cdots p(d_{\sigma_{2n-1}}, d_{\sigma_{2n}})$$

$$\begin{aligned} \text{symmetrisch} \quad \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_{2n-1} \quad \text{und} \\ \sigma_{2i-1} < \sigma_{2i} \quad \text{für } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

$$p(d_1, d_2, d_3, d_4) = p(d_1, d_2) p(d_3, d_4) - p(d_1, d_3) p(d_2, d_4) + p(d_1, d_4) p(d_2, d_3)$$

Hauptaufgabe Sei $p(A) = \text{sp}(S^T X S A)$ mit S Slaterdeterminante
ist ein quasi-freier Zustand

$$p(H) \stackrel{D=D_0}{=} \text{sp}(D_0 \gamma) + \frac{\alpha}{2} \int_0^b \int_0^b dy \frac{|x(x,y)|^2 |y(x,y)|^2}{|x-y|} - \frac{\alpha}{2} \int_0^b \int_0^b dy \frac{|x(x,y)|^2}{|x-y|} +$$

$$\underbrace{\frac{\alpha}{2} \int_0^b \int_0^b dy \frac{|x(x,y)|^2}{|x-y|}}_{\text{relativistische } E_{\text{eff}}(\gamma)} + \underbrace{\frac{\alpha}{2} \int_0^b \int_0^b dy \frac{|x(x,y)|^2}{|x-y|}}_{\text{Paarungsenergie}} \quad \sim \text{grobgeschätztes } \gamma\text{-potential}$$

$$\gamma: \quad \chi_{\text{min}} = p(:\Psi_n^\dagger \Psi_m^\dagger) \quad \chi_{\text{max}} = p(:\Psi_n \Psi_m:)$$

$$\Gamma_{\text{ur}} = \begin{pmatrix} \gamma + 1 & \gamma \\ \gamma & 1 - \gamma + 1 \end{pmatrix} \quad \text{Es gilt } 0 \leq \Gamma_{\text{ur}} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \gamma + 1 \leq 1 \quad \text{oder} \quad -1 \leq \gamma \leq 1, \quad \gamma \text{ Ein-Teilchen-Ladungsdichtematrix}$$

Details der Rechnung: Volker Bach et al. On the stability of the relativistic

(Commun Math Phys) 201 445-460 (1999)

Satz p quasifrei $\Rightarrow p(H) \geq 0$

Beweis Es reicht (und ist auch notwendig) zu zeigen, dass $E_{HF}(y) \geq 0$

Aufgabe Kontrolliere $-\frac{x}{2} \int \frac{|y(x,y)|^2}{|x-y|} dx dy$ durch $\int \frac{|y(x,y)|^2 |y(x,y)|^2}{|x-y|} dx dy$ (mittels CSU)

$-X[y]$ (Austauschterm) D_y

Falls $0 \leq y \leq 1$ -> s. MATH $D_y - X[y] \geq 0$

Hier kann aber $y(x,x) = \frac{1}{2} p_{\text{neg}}(x) - p_{\text{pos}}(x) = 0$ und $|y(x,y)| \neq 0$ f.ä.

Es sollte zu zeigen, dass $sp(D_y) - X[y] \geq 0$

1. und 2. Term sind nicht gleicher Homogenität (Warum)

Benutze $\frac{1}{2} \frac{1}{1+y} + y \leq 1 \Rightarrow (1+y)^2 \leq 1+y$

19.11.15

$$E_{HF} = Sp(D_y) + Sp(V_y) + X[Dp_y] - X[y]$$

$$X[Dp_y] = \frac{1}{2} \int dx \int dy \frac{p_y(x,y)}{|x-y|}$$

$y(x,x)$ nicht best. mat. da $y=0$
Nullmenge

Einfachere dichtematrix (y sollte \in Spurklasse sein) Annahme: $y \in \mathcal{H}^2 \subset \mathcal{H}^\infty$

$$y(x,y) = \sum_n \lambda_n \xi_n(x) \xi_n(y) \quad \sum_n \lambda_n = 1 \quad \lambda_n \in [-1, 1] \quad (\text{es gibt Bsp. mit } p_y \neq 0)$$

$$y(x,x) = \sum_n \lambda_n |\xi_n(x)|^2$$

$$p_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_n \lambda_n |\xi_n(x)|^2 \quad x = (z, \sigma) \in G$$

$\int f g \leq \sqrt{\int f^2} \sqrt{\int g^2}$
gleiche Homogenität
 $\subset \int dg$

$$X[y] = \frac{1}{2} \int_G dx \int_G dy \frac{|y(x,y)|^2}{|x-y|}$$

Vakuum: $V=0 \rightarrow$ Funktional nach unten beschränkt

Erste Beobachtung: p_y kann verschwinden, ohne, dass y verschwindet

\rightarrow Konsequenz: im Gegensatz zur rein elektronischen HF-Theorie ist, i.A. $D[Dp_y] - X[y] \geq 0$

nicht wahr

einige Term, die uns retten könnten

Zweite Beobachtung: Nicht die gleiche Homogenität von $Sp(D_y)$ und $X[y]$

Man weiß: $0 \leq \Lambda_- + \gamma \leq 1 \Leftrightarrow -\Lambda_- \leq \gamma \leq \Lambda_+$

\Rightarrow Multiplikation von γ mit zu großen Skalaren verboten \Rightarrow 2. Beobachtung all nicht so schlimm

$$\Lambda + \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{++} & \gamma_{+-} \\ \gamma_{-+} & \gamma_{--} + 1 \end{pmatrix} \leq 1 \Rightarrow (\Lambda + \gamma)^2 \leq 1$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{++} & \gamma_{+-} \\ \gamma_{-+} & \gamma_{--} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{++} & \gamma_{+-} \\ \gamma_{-+} & \gamma_{--} + 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_{++}^2 + \gamma_{+-}\gamma_{-+} & \gamma_{++}\gamma_{+-} + \gamma_{+-}(\gamma_{--} + 1) \\ \gamma_{-+}\gamma_{++} + (\gamma_{--} + 1)\gamma_{-+} & \gamma_{-+}\gamma_{+-} + (\gamma_{--} + 1)^2 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{++}^2 \geq \gamma_{++}^2 + \gamma_{+-}\gamma_{-+} \geq 0$$

$$\gamma_{--} + 1 \geq (\gamma_{--} + 1)^2 + \gamma_{-+}\gamma_{-+}$$

Wähle Orthonormal $\Sigma = \text{sgn } D_0$

$$\Rightarrow \text{Sp} \left(\begin{pmatrix} D_{0++} & 0 \\ 0 & D_{0--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{++} & \gamma_{+-} \\ \gamma_{-+} & \gamma_{--} \end{pmatrix} \right) = \text{Sp} \left(\begin{matrix} \geq 0 & \geq 0 \\ D_{0++} \gamma_{++} & + D_{0--} \gamma_{--} \end{matrix} \right)$$

$$A, B \geq 0 \\ \text{Sp}(AB) = \text{Sp}(B^{1/2} A B^{1/2})$$

$$\text{Sp} \gamma_{++} \geq \gamma_{++}^2 + \gamma_{+-}\gamma_{-+}$$

$$\gamma_{--} + 1 \geq \gamma_{--} + \gamma_{-+}\gamma_{-+} + \gamma_{--}^2 + 2\gamma_{--} + 1$$

$$\Rightarrow -\gamma_{--} \geq \gamma_{-+}\gamma_{-+} + \gamma_{--}^2$$

$$\geq \text{Sp} \left[\begin{matrix} D_{0++} & & \\ & \underbrace{(\gamma_{++}^2 + \gamma_{+-}\gamma_{-+})}_{\geq 0} & \\ & & (-D_{0--}) \end{matrix} \begin{matrix} (\gamma_{++}^2 + \gamma_{+-}\gamma_{-+}) \\ \gamma_{-+}\gamma_{-+} + \gamma_{--}^2 \end{matrix} \right]$$

$$= \text{Sp}(D_0 | \gamma^2)$$

$\Rightarrow \mathcal{E}_{\text{HF}}(\gamma) \geq \text{Sp}(D_0 | \gamma^2) - h \chi(\gamma)$ jetzt haben wir gleiche Homogenität

$$= \text{Sp}(\sqrt{\Delta + m^2} \gamma^2) - \frac{\alpha}{2} \int_G d^3x \int_G dy \frac{|\chi(x, y)|^2}{|x-y|} \leftarrow \text{Singulartät gefühllos} \rightarrow \text{hohe Impulse}$$

$$\geq \text{Sp}(|p| \gamma^2) - \frac{\alpha}{2} \int_G d^3x \int_G dy \frac{|\chi(x, y)|^2}{|x-y|}$$

$$\text{Def } \Psi_{\vec{p}, \vec{q}}(\vec{x}) = \chi(\vec{x} - \vec{z}, \sigma, \tau)$$

$$\int dy \int dx \overline{\chi_y(x)} (|p| \chi_x(x)) = \int d^3z \sum_{\sigma, \tau} \langle \Psi_{\vec{p}, \vec{q}} | \sqrt{\Delta} \Psi_{\vec{p}, \vec{q}} \rangle$$

$$\text{Sp}(|p| \gamma) = \frac{\alpha}{2} \int d^3z \sum_{\sigma, \tau} \int d^3x \frac{|\Psi_{\vec{p}, \vec{q}}(\vec{x})|^2}{|\vec{x}|}$$

$$\text{Wahr } |p| \geq \frac{2}{\pi} \frac{1}{|x|}$$

$$= \sum_{\vec{p}, \vec{q}} \int d^3z \left[\langle \Psi_{\vec{p}, \vec{q}} | |p| \Psi_{\vec{p}, \vec{q}} \rangle - \frac{\alpha}{2} \int d^3x \frac{|\Psi_{\vec{p}, \vec{q}}(\vec{x})|^2}{|\vec{x}|} \right]$$

⇒ Satz $E_{HF}(\gamma) \geq 0$ falls $\frac{\alpha}{2} < \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow \alpha < 4/\pi$

mit $V=0, \tau = \text{sgn } D_0$

Bemerkung Deckt leicht den physikalischen Fall $\alpha = \frac{\pi}{137}$ ab.
Minimierer ist $\gamma = 0$.

Jetzt mit $V(\vec{x}) = \frac{z}{|\vec{x}|}, z > 0$

1. Versuch: $\tau = \text{sgn } D_0$

$$E_{HF}(\gamma) \geq \epsilon \text{Sp}(D_0 \gamma) - \alpha \chi[\gamma] + (1-\epsilon) \text{Sp}(D_0 \gamma) - \int d\vec{x} \frac{z\alpha}{|\vec{x}|} \rho_\gamma(\vec{x})$$

$$\frac{\alpha}{\epsilon z} < \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow \epsilon > \frac{4\pi}{4}$$

$$(1-\epsilon) \text{Sp}(\sqrt{1-\alpha+m^2}(\gamma_{++}, \mp \gamma_{--})) - \alpha z \int d\vec{x} dy \left(\frac{z}{|\vec{x}|}\right)(x,y) \gamma_{-}(x,y) + \beta \text{ weitere}$$

$$\gamma = \frac{z}{z} \sum_{\nu} \rho_{\nu}^+ \chi_{\nu}^+ - \sum_{\nu} \rho_{\nu}^- \chi_{\nu}^-$$

ONB von ρ_{ν}
Spektralraum von γ

Annahme: γ respektiert die Gradierung. Dann ist $\gamma_{++} = \gamma_+, \gamma_{--} = \gamma_-, \gamma_{+-} = \gamma_{-+} = 0$

Dann haben wir

$$(1-\epsilon) \text{Sp } D_0 \gamma_+ - \text{sonst } z\alpha \int \frac{z\alpha(x,x)}{|\vec{x}|} d\vec{x} + (1-\epsilon) \text{Sp}(D_0 \gamma_-) - \frac{z\alpha}{z} \int \frac{z\alpha}{|\vec{x}|}$$

$$\alpha z \int \frac{\rho_{\nu}(\vec{x})}{|\vec{x}|} d\vec{x} = \alpha z \sum_{\nu} \int d\vec{x} \frac{|\rho_{\nu}(\vec{x})|^2}{|\vec{x}|}$$

≥ 0 , da $\rho_{\nu} \leq$

$$\frac{z}{z} \sum_{\nu} \int d\vec{x} \left[\langle \rho_{\nu}^+, D_0 \rho_{\nu}^+ \rangle - \alpha z \int d\vec{x} \frac{|\rho_{\nu}(\vec{x})|^2}{|\vec{x}|} \right]$$

$$\sum_{\nu} \int d\vec{x} \left[\langle \rho_{\nu}^+, D_0 \rho_{\nu}^+ \rangle - \frac{\alpha z}{1-\epsilon} \langle \rho_{\nu}^+, \frac{1}{|\vec{x}|} \rho_{\nu}^+ \rangle \right] \quad \frac{1}{2} \left(1 + \frac{D_0}{10_0} \right) \rho_{\nu}^+ = \rho_{\nu}^+$$

≥ 0 , falls $\frac{\alpha z}{1-\epsilon} < \frac{2}{\frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2}}$ (freier Brown Raumball)

(oder Kato)

Bemerkung $-\frac{1}{2} \left(1 - \frac{D_0}{10_0} \right) \leq \gamma \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{D_0}{10_0} \right)$ bedeutet nicht, dass $\gamma_{++} = 0$ ist.

Vermutung: nicht nach unten beschränkt.

$$E_{\text{eff}}(\gamma) = \text{Sp}(D_{\text{eff}} | \gamma^2) - \frac{\alpha}{2} \langle X | \gamma \rangle$$

wie letztes mal, nur jetzt mit anderer Gradierung
↳ für D_{eff}

(letztes mal mit Vekt. $\text{Sp}(D_0 | \gamma^2) - \frac{\alpha}{2} \langle X | \gamma \rangle \geq 0$)

alternativ: $\langle X | \gamma \rangle = \int dx dy \frac{|\sum_n \lambda_n \xi_n(x) \xi_n(y)|^2}{|\lambda^2 - \gamma^2|}$

~~$= \sum_n \lambda_n \lambda_n \int dx dy \frac{\xi_n(x) \xi_n(y) \xi_n(x) \xi_n(y)}{|\lambda^2 - \gamma^2|}$~~

$$\Rightarrow \text{Sp}(D_{\text{eff}} | \gamma^2) - \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{2} \text{Sp}(D_0 | \gamma^2) \geq \left(1 - 2\alpha Z - \frac{\alpha^2}{4}\right) \text{Sp}(D_0 | \gamma^2)$$

Satz $E_{\text{eff}}(\gamma) \geq 0$ für γ mit $Z = \text{Sp} D_0$ und $V = \frac{\alpha Z}{|\lambda^2|}$ für $1 - 2\alpha Z - \frac{\alpha^2}{4} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \alpha Z \leq \frac{1}{2} - \frac{\alpha^2}{8} \quad Z \leq 68$$

Offens: Was ist das kritische αZ und α ?

Energie $\approx \Theta$ (universelle Konst) \cdot Anzahl der beteiligten Teilchen

D.h. $\rho(H) \approx \Theta(\rho(N) + K)$

Gezeigt: für $K=1$ mit $\Theta=0$

Sei nun $K \in \mathbb{N}$

Diracoperator mit Magnetfeld: $D^{A,v} = \vec{\sigma} \left(\frac{1}{i} \nabla + e\vec{A} \right) + m\beta - e^2 V$ $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$

$V(\vec{x}) = \sum_{k=1}^K \frac{Z_k}{|\vec{x} - R_k|}$

\rightarrow magnet. Energie (Feldenergie)

$\frac{1}{8\pi} \int |\vec{B}|^2 dx$ $\alpha = e^2$

$U = \sum_{1 \leq k < l \leq K} \frac{Z_k Z_l}{|R_k - R_l|}$

$\epsilon_{A,v,K}(\rho) = \text{Sp} (D^{A,v} \chi_\rho) + \alpha U - \frac{\alpha}{2} \int dx dy \frac{\chi_\rho(x,y)}{|\vec{x}-\vec{y}|} - \alpha D[\rho, \chi_\rho] - \alpha X[\chi_\rho] + \frac{1}{8\pi} \int |\vec{B}|^2 dx$

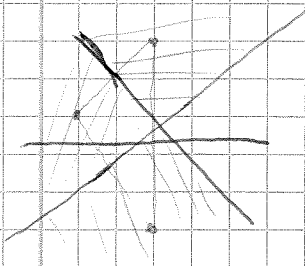
Sei ρ gaußtreuer Zustand, R_k beliebig ($R_k \neq R_l$) $\Rightarrow \epsilon_{A,v,K} \rightarrow -\infty$?
und alle A mit $\int |\vec{B}|^2 < \infty$

Achtung: es gibt \vec{A} mit $\psi(\rho + A)\psi = 0$ ($\|\psi\| \neq 0$)

Woronoi zellen

$R_1, \dots, R_K \in \mathbb{R}^3$

$J_k = \{x \in \mathbb{R}^3 : \forall l \neq k, |x - R_k| \leq |x - R_l|\}$



Annahme $Z_k = Z \forall k=1..K$

es fällt einer Zelle höchst nur von dazugehörigen Kern

Willmenge

Effektives Potential: $V_{\text{eff}}(x) = -Z \sum_{k=1}^K \frac{\chi_{J_k}(x)}{|\vec{x} - R_k|}$

(mehrfach Zählung d. Zellgrenze wirkt)

$\vec{A} = 0$ Satz: Wähle $\tau = \frac{D^{0,K}}{10^{0,K}}$, sei $L_{2,3}$ die Lieb-Thirring-Konstante

für das Moment $\gamma = \frac{1}{2}$ und $n=3$ und $\epsilon \in (0,1)$, $\alpha \in (0, \frac{4}{\pi}]$ und

$1 - \epsilon - \frac{\pi^2 \alpha^2}{16} - 4 \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right) \alpha^2 \tau^2 > 0$ und $\frac{26296 \pi L_{2,3} \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right)^2}{105 \left[1 - \epsilon - \frac{\pi^2 \alpha^2}{16} - 4 \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right) \alpha^2 \tau^2 \right]^{3/2}} \alpha^3 \tau^2 < 1$

Dann: $\epsilon_{0,v,K}(\rho) \geq 0$

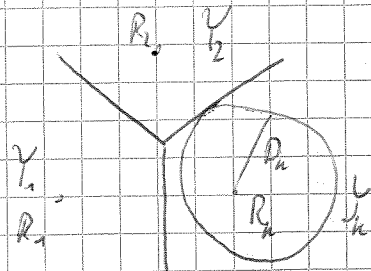
26.11.15

Stabilität der Materie (Beschränktheit der Energie pro Teilchen nach unten)

im Rahmen der Hartree-Fock-Theorie

Satz $E_c(\rho) \geq 0$ für quasi-freie Zustände endlicher kinetischer Energie mit Gradierung $z = \frac{D_{\text{rest}}}{|D_{\text{rest}}|}$

$D_{\text{rest}} = \mathbb{D} \cdot \vec{p} + \mathbb{M} + m\beta - z V_{\text{rest}}$



$V(x) = \sum_{k=1}^K \frac{1}{|x - R_k|}$

$Y_k = \{x \in \mathbb{R}^3 : \forall \text{ kein } R_k, |x - R_k| \leq \dots\}$

$S(x) = \min \{|x - R_n| : n \in \{1, 2, \dots, K\}\}$

$V_{\text{eff}}(x) = \sum_{k=1}^K \frac{z}{|x - R_k|} \chi_{Y_k}(x) \stackrel{?}{=} \frac{1}{S(x)}$

$\Phi(x) = V(x) \rightarrow \frac{1}{S(x)}$ beschränkt

B_n : größte Kugel in Y_n mit Zentrum R_n

D_n : Radius von B_n

ν : Borelmaß $\nu \ll \lambda$

signifikanter Unterschied zwei positive Maße

im Beweis: $d\nu(x) = \rho(x) dx = (\rho_+ - \rho_-) dx$

Lemma (Lieb & Yau)

$\int \frac{z^2}{|x-y|} d\nu(x) d\nu(y)$

ν : schwach wie Elektronendichte

$E_{\text{pz}}(\nu) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} d\nu(x) d\nu(y) \frac{1}{|x-y|} - z \int_{\mathbb{R}^3} d\nu(x) + \sum_{k=1}^K \frac{z^2}{|R_n - R_k|}$

1) Lemma (Lieb & H.-T. Yau) ν Borelmaß, $\nu \ll \lambda$, $z > 0$. Dann ist

$E_{\text{pz}}(\nu) \geq \frac{z^2}{8} \sum_{k=1}^K \frac{1}{D_k}$

LHS hängt von e, e^* Dichte ab, RHS nicht!

Neg. Anteil ist positiv

2) Dirman, Koptienko, Solomyah. Operatoren $C, D \geq 0$ (heißt insb. dass C, D s.a. sind), $p \geq 1$

$(C^p - D^p)^{1/p} \in \mathcal{Y}^+(L^p)$, dann gilt:

$\Rightarrow (C - D) \in \mathcal{Y}^+$ ebenfalls und $\text{tr}(C - D) \leq \text{tr}(C^p - D^p)^{1/p}$ hier für $p=2$ benötigt

3) $\int \frac{1}{|x-y|} d\nu(x) d\nu(y) \leq \text{Sp}(|D_\alpha(x-y)|) \cdot \frac{\pi}{4}$

4) $\alpha \in [0, 1]$: $\text{Sp} A \alpha \geq \sum_{e_n(A) \leq 0} e_n(A)$

$e_n(A) \leq 0$
"Eigenwerte"

5) Dyson, Lieb: $\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla f(x)|^2 \geq \sum_{k=1}^K \int_{B_k} dx |f(x)|^2 \left(\frac{1}{4|x-R_k|^2} - \frac{1}{D_k^2} \left(1 + \frac{|x-R_k|^2}{4D_k^2} \right) \right)$

Beweis des Satzes

p : quantifizierter Zustand

$$E_V(p) \approx \text{Sp}[(D_0 - \alpha Z V) \rho_p] + \sum_{k=1}^K D_k [\rho_p] - \alpha X[\rho_p] + \quad (\text{Paar-Term weggeworfen})$$

$$+ \sum_{k=1}^K \frac{\alpha Z^2}{|R_k - R_{k+1}|}$$

$$\text{Sp}(-\alpha Z V \rho_p) + \alpha D[\rho_p] + \alpha Z U = -\alpha Z \int V(x) \rho(x) dx + \alpha Z \int dx dy \frac{\rho(x) \rho(y)}{|x-y|} + \alpha Z^2 U$$

$$= \alpha Z \left[-Z \int V(x) \rho(x) dx - \int \frac{\rho(x)}{g(x)} + \frac{1}{2} \int dx dy \frac{\rho(x) \rho(y)}{|x-y|} + Z^2 U \right]$$

$$\approx -\alpha Z \int V_{eff}(x) \rho(x) dx + \frac{\alpha Z^2}{8} \left(\frac{1}{D_1} + \dots + \frac{1}{D_n} \right)$$

$$E_V(p) \approx \text{Sp}(D_0 \rho_p) - \alpha X[\rho_p] - \alpha Z \int V_{eff}(x) \rho(x) dx + \frac{\alpha Z^2}{8} \left(\frac{1}{D_1} + \dots + \frac{1}{D_n} \right)$$

$$= \text{Sp}(D_{eff} \rho_p) - \frac{\alpha Z}{4} \text{Sp}(|D_0| (r_{++} - r_{--})) + \frac{\alpha Z^2}{8} \left(\frac{1}{D_1} + \dots + \frac{1}{D_n} \right) \text{Sp}[D_{eff} \rho] = \text{Sp}(D_{eff} \rho_p)$$

$$\text{Sp}(D_{eff} - \frac{\alpha Z}{4} |D_0| (r_{++} - r_{--}))$$

$$= \text{Sp}(D_{eff} \rho_p - D_0 (r_{++} - r_{--}))$$

Minimax

Wolfsenstein, Stenger
Intermediäre
eigenvalue
problem

$$\approx -\text{Sp}(|D_{eff}| - \frac{\alpha Z}{4} |D_0|) + \frac{\alpha Z^2}{8} \sum_{k=1}^K \frac{1}{D_k} - \text{Sp}(|D_{eff}|^2 - \frac{\alpha Z^2}{16} |D_0|^2)^{1/2} \frac{1}{D_n} + \frac{\alpha Z^2}{8} \sum_{k=1}^K \frac{1}{D_k}$$

$$\langle \psi, D_{eff}^2 \psi \rangle = \langle \psi, (D_0 + V_{eff})(D_0 + V_{eff}) \psi \rangle = |D_0 \psi|^2 + 2 \text{Re} \langle \psi, V_{eff} D_0 \psi \rangle + \int V_{eff}^2 |\psi|^2$$

$$\approx -2 \langle \psi, D_0 \psi \rangle \langle \psi, V_{eff} \psi \rangle$$

$$\stackrel{CSU}{\approx} (1 - \epsilon^2) |D_0 \psi|^2 + (1 - \frac{\epsilon^2}{2}) \int V_{eff}^2 |\psi|^2$$

$$D_{eff}^2 \approx (1 - \epsilon^2) D_0^2 + (1 - \frac{\epsilon^2}{2}) V_{eff}^2$$

$$\approx -\text{Sp} \left((1 - \epsilon^2 - \frac{\alpha Z^2}{16}) D_0^2 - (1 - \frac{\epsilon^2}{2}) \alpha Z^2 \sum_{k=1}^K \frac{1}{|x - R_{k+1}|^2} \right)$$

Proj auf (...)
 sed durch $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

Verg. alle haben
disjunkten Träger

$$\left(\approx - (1 - \epsilon^2 - \frac{\alpha Z^2}{16}) \sum_{k=1}^K \int_{B_k} |g_k(x)|^2 \left[\frac{1}{4} \frac{1}{|x - R_{k+1}|^2} - \frac{1}{D_k^2} \left(1 + \frac{|x - R_{k+1}|^2}{4 D_k^2} \right) \right] \frac{1}{8} + \right.$$

$$\left. - \frac{\alpha Z^2 \epsilon^2 (1 - \frac{\epsilon^2}{2})}{1 - \epsilon^2 - \frac{\alpha Z^2}{16}} \sum_{k=1}^K \int_{B_k} \frac{1}{|x - R_{k+1}|^2} \right] \frac{1}{8} + \frac{\alpha Z^2}{8} \sum_{k=1}^K \frac{1}{D_k}$$

$$\approx - (1 - \epsilon^2 - \frac{\alpha Z^2}{16}) \sum_{k=1}^K \int_{B_k} |g_k(x)|^2 \frac{1}{8} \frac{1}{D_k^2} + \dots$$

$$\text{mit } \mathcal{L}T: -\text{Sp}(-\Delta - \alpha^2)^{1/2} \geq -\mathcal{L} \int V^4$$

$$\geq -\frac{\mathcal{L} \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right)^2 \alpha^2 z^2}{\left(1 - \epsilon \frac{\pi^2 z^2}{16} - 4 \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right) \alpha^2 z^2 \right)^{3/2}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_k} \frac{1}{|x-R_k|^{1/4}} dx + 16 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_k} \frac{1}{|x-R_k|} \left(1 + \frac{|x-R_k|^2}{4R_k^2} \right)^2 dx \right. \\ \left. + \frac{\alpha^2 z^2}{8} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R_k} \right.$$

$$\left. \geq \left(-\frac{\pi \left(3 + 64 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{16} + \frac{1}{12} \right) \right) \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right)^2 \alpha^2 z^4}{\left(1 - \epsilon \frac{\pi^2 z^2}{16} - 4 \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right) \alpha^2 z^2 \right)^{3/2}} + \frac{\alpha^2 z^2}{8} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R_k} \rightarrow \text{Stabilität bis } z=6 \\ \text{Heuristisch} \quad \alpha = \frac{1}{13.7}$$

$$\frac{1}{4} \int (\rho^2 - 4q)^{1/2}$$

27.11.15

$$D = \mathbb{R} \left(\frac{1}{\epsilon} \sigma + \epsilon A \right) + (-\alpha^2 z V) + m\beta$$

$$V(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z-R_k|}$$

$$E_{A,V,\alpha}(\rho) = \rho(D) + \int W_{k,l,m,n} \rho(\psi_k^+ \psi_l^+ \psi_m^+ \psi_n^+) \\ + \alpha^2 z^2 \sum_{1 \leq k,l \leq K} \frac{1}{|R_k - R_l|} + \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} |B(z)|^2 dx \quad B = \text{rot } A \quad A \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3) \\ \text{div } A = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} |B(z)|^2 = \sum_{\nu} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla A|^2$$

Satz Wähle $\tilde{z} = \frac{D_{A,V,\alpha}}{D_{A,V,\alpha,1}}$ mit $V_{\alpha} = \frac{1}{\min\{|z-R_k| : 1 \leq k \leq K\}}$

$$\epsilon \in (0,1), \epsilon' \in (0,1), \alpha \in \left[0, \frac{4}{\tilde{z}}\right], z \in \mathbb{R}^+$$

$$1 - \epsilon - \frac{\pi^2 z^2}{16} - 4 \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right) \alpha^2 z^2 > 0,$$

$$\frac{26926 \pi \mathcal{L}_{m,3} \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right)^2 \alpha^2 (1 + \epsilon') \alpha^3 z^2}{105 \left(1 - \epsilon - \frac{\pi^2 z^2}{16} - 4 \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right) \alpha^2 z^2 \right)^{3/2}} \leq 1$$

$$\frac{8 \pi \mathcal{L}_{\frac{1}{2},3} (1-\epsilon)^2 \left(1 + \frac{1}{\epsilon} \right)}{\left(1 - \epsilon - \frac{\pi^2 z^2}{16} - 4 \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right) \alpha^2 z^2 \right)^{3/2}} \leq 1$$

Dann ist $E_{A,V,\alpha}(\rho) \geq 0$

weitere Ungleichungen:

1) Diamagnetische Ungleichung

$$\int dx |\sigma(u)|^2 \leq \int |(\frac{1}{c} \nabla - A)u|^2 dx$$

für $A=0$: Konsequenz: $\epsilon(\psi) = \int (|\sigma\psi|^2 - q|\psi|^2) dx \geq \int (|\sigma\psi|^2 - q|\psi|^2) dx$

\Rightarrow Wenn es einen Minimalwert gibt, ist er nicht negativ!

2) $(\mu, \frac{1}{c} \nabla |u|) \leq \int \mu(x) \cdot (|p+A|u)(x) dx = (\mu, |p+A|u)$

Nicht mit Spin gültig! z.B. $-\Delta \rightarrow (\vec{\sigma} \cdot \frac{1}{c} \nabla)^2$: keine diamagnetische Ungleichung
 \Rightarrow keine diamagnet. Ungleichung für Diracoperatoren anwendbar

Beweis $\alpha X[\psi] = \frac{\alpha}{2} \int dx dy \frac{|y(x,y)|^2}{|x-y|} \stackrel{Kato}{\leq} \alpha \cdot \frac{\pi}{4} \text{Sp}(\gamma^+ |p| \gamma) = \frac{\alpha \pi}{4} \text{Sp}(\gamma^+ |\frac{1}{c} \nabla + eA|^2 \gamma)$

$\sum_{\nu} \lambda_{\nu} < \beta_{\nu} |p| \beta_{\nu} >$
 $\leq \lambda_{\nu}^2$

$$E_{A, \psi_0, \alpha}(\rho) \geq \text{Sp}(D_0 \psi) + \alpha D[\rho_1] - \alpha X[\psi] + \alpha Z^2 U + \frac{1}{8\pi} \int |B(x)|^2 dx$$

$$\geq \text{Sp}(D_0 \psi) - \alpha X[\psi] + \alpha Z^2 U + \frac{1}{8\pi} \int |B(x)|^2 dx$$

$$\stackrel{\text{system}}{\geq} \text{Sp} \left\{ \left[(1-\epsilon) |D_0|^2 + (\frac{1}{c} - 1) \alpha^2 V_{eff}^2 - \frac{\alpha^2 Z^2}{16} \left[\frac{1}{c} \nabla + \sqrt{\alpha} A \right]^2 \right]^{1/2} \right\} + \frac{1}{8\pi} \int |B(x)|^2 dx$$

$(\vec{\sigma}(\vec{p} + \sqrt{\alpha} A))^2$

$$= \sum_{i,j} (\sigma_i + \sqrt{\alpha} A_i) \sigma_j (\sigma_j + \sqrt{\alpha} A_j) = \underbrace{(\sigma_i + \sqrt{\alpha} A_i)^2}_{\substack{\uparrow \\ 1}} + \sum_{i < j} \left[\sigma_i \sigma_j (\sigma_i + \sqrt{\alpha} A_i) (\sigma_j + \sqrt{\alpha} A_j) + \sigma_j \sigma_i (\sigma_j + \sqrt{\alpha} A_j) (\sigma_i + \sqrt{\alpha} A_i) \right]$$

$$= \sum_{i,j} \sqrt{\alpha} \sigma_i \sigma_j \left[(A_i \sigma_j - \sigma_j A_i) + (A_j \sigma_i - \sigma_i A_j) \right] = \frac{\sqrt{\alpha}}{i} \sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j (-\partial_j A_i + \partial_i A_j) \quad \frac{\sigma_i \sigma_j}{i} = \epsilon_{ijk} \sigma_k$$

$$= \sqrt{\alpha} \vec{\sigma} \cdot \text{rot} A = \sqrt{\alpha} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}$$

$$\Rightarrow (\vec{\sigma}(\vec{p} + \sqrt{\alpha} A))^2 = (\vec{p} + \sqrt{\alpha} A)^2 + \sqrt{\alpha} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}$$

$$\Rightarrow \text{Sp} \left\{ \left[(1-\epsilon - \frac{\alpha^2 Z^2}{16}) \left[\frac{1}{c} \nabla + eA \right]^2 - (\frac{1}{c} + 1) \alpha^2 V_{eff}^2 - (1-\epsilon) \sqrt{\alpha} |B| \right]^{1/2} \right\} + \frac{1}{8\pi} \int |B|^2$$

Kontrolliere die Singularitäten von V_{eff} mit einem Teil von $1/\sigma + \sqrt{A}|^2$
unter Benutzung der lokalisierten Hardyungleichung

$$E(\rho) \geq -\text{Sp} \left(\left[1 - \epsilon - \frac{\rho^2 \Delta^2}{16} - \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right) \alpha^2 \rho^2 \right] \frac{1}{\sigma + \sqrt{A}|^2} + \right. \\ \left. - (1-\epsilon) \sqrt{A} |B| - \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right) \alpha^2 \rho^2 \sum_{k=1}^N \left(\frac{\chi_{y|B_k}(x)}{|x-R_k|^2} + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{4}{D_k^2} \left(1 - \frac{|x-R_k|^2}{4D_k^2} \right) \chi_{B_k}(x) \right) \right]^{1/2} + \frac{1}{96} \int |B(x)|^2$$

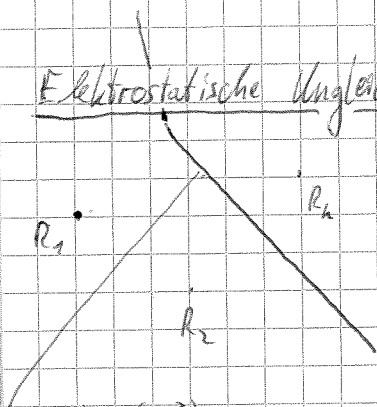
Lieb-Thirring: $\text{Sp}(-\Delta - V)^{1/2} \in L_{2,1,3} \int \psi^2$

$$\left(1 - \epsilon - \frac{\rho^2 \Delta^2}{16} - \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right) \alpha^2 \rho^2 \right)^{3/2} \left\{ \sum_{k=1}^N \int_{B_k} \frac{1}{|x-R_k|^4} dx + 16 \left(\frac{1}{D_k^4} \left(1 + \frac{|x-R_k|^2}{4D_k^2} \right) \right) \right\} + \frac{\alpha^2 \rho^2}{8} \sum_{k=1}^N \frac{1}{D_k}$$

$\geq \dots \geq 0$ nach Evaluation der Integrale unter der gegebenen Voraussetzung

3.12.15

Elektrostatische Ungleichung von Lieb & Yau



$$V_k = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x-R_k| \leq |x-R_j| \forall j \neq k\}$$

$|V|(\mathbb{R}^3) < \infty$ ein signiertes Maß (\equiv Ladungsverteilung)

$$s(x) = \min \{ |x-R_k| : k=1..N \}$$

B_k : größte Kugel in V_k mit Zentrum R_k

D_k : Radius von B_k

$$\frac{1}{s(x)} = V_{\text{eff}}(x)$$

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{|x-R_k|} - \frac{1}{s(x)}$$

$$E_{\text{Lieb}}(\rho) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d\rho(x) d\rho(y) \frac{1}{|x-y|} - \sum_{k=1}^N \int_{\mathbb{R}^3} \phi(x) d\rho(x) + \sum_{1 \leq k < l \leq N} \sum_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|R_k - R_l|}$$

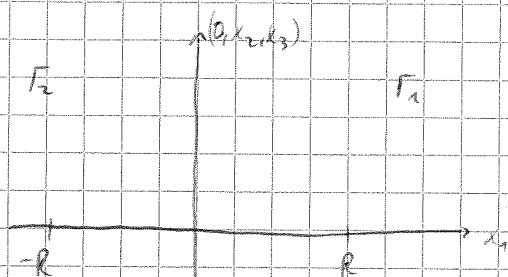
Liebs & Yaus Lemma 1. Common Math Phys 118, 117-215 (1988) $\frac{1}{8} \sum_k \frac{1}{D_k}$

Beweis Gibt es ein Maß, welches ϕ gemindert?

$$Z\phi(x) = \int \frac{d\mu(x)}{|x-y|}$$

$$-\frac{1}{R} \Delta \phi = 0 \quad \text{für } |x| < R \text{ für alle } k$$

$$\rightarrow -\frac{1}{R} \Delta \phi = \mu(x)$$



$$G = \frac{1}{2} \left(\frac{\phi(-x_1)}{\sqrt{(x_1-R)^2 + x_2^2 + x_3^2}} + \frac{\phi(x_1)}{\sqrt{(x_1+R)^2 + x_2^2 + x_3^2}} \right) = - \frac{((x_1-R), x_2, x_3)}{(\sqrt{(x_1-R)^2 + x_2^2 + x_3^2})^{3/2}} \phi(-x_1) + \frac{(-\delta(x_1), 0, 0)}{\sqrt{(x_1-R)^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$+ \frac{((x_1+R), x_2, x_3)}{(\sqrt{(x_1+R)^2 + x_2^2 + x_3^2})^{3/2}} \phi(x_1) + \frac{(\delta(x_1), 0, 0)}{\sqrt{(x_1+R)^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

$$\rightarrow \left(\frac{x_1 - R, x_2, x_3}{(\sqrt{(x_1-R)^2 + x_2^2 + x_3^2})^{3/2}} \right) = 0 \text{ keine Singularität}$$

hebe sich in Summe auf

$$\text{div } G = 0 + \frac{(x_1 - R, x_2, x_3)}{(\sqrt{(x_1-R)^2 + x_2^2 + x_3^2})^{3/2}} (\delta(x_1), 0, 0) + 0 - \frac{(x_1 + R, x_2, x_3)}{(\sqrt{(x_1+R)^2 + x_2^2 + x_3^2})^{3/2}} (\delta(x_1), 0, 0)$$

$$= \frac{(-2R, 0, 0)}{(\sqrt{(x_1-R)^2 + x_2^2 + x_3^2})^{3/2}} = - \left(\frac{R_1}{|R_1 - x_1|^3} + \frac{R_2}{|R_2 - x_1|^3} \right) (\delta(x_1), 0, 0)$$

\rightarrow In Koordinaten auf der Fläche: $d\mu(x) = -\frac{1}{2\pi} \frac{2}{(k-R_j)} \frac{1}{|k-R_j|} d^2x$ auf Grenzfläche

$$A := -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\delta(x)} d\mu(x)$$

$$DL_\mu = \frac{1}{2} \int \frac{d\mu(x) d\mu(y)}{|x-y|} \stackrel{\text{nach Vertauschen}}{=} \frac{1}{2} \int d\mu(x) \phi(x) = \frac{1}{2} \int d\mu(x) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{|x-R_k|} - \frac{1}{\delta(x)} \right) 2$$

$$= \frac{1}{2} \int \phi(R_k) + \frac{1}{2} A$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{|R_k - R_j|} - \frac{1}{\delta(R_k)} \right) + A = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{|R_j - R_k|} + 0 + A$$

$$A = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\delta(x)} d\mu(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\delta(R_j)} \int \frac{1}{|x-R_j|} (n \cdot \delta) \frac{1}{|x-R_j|}$$

$\frac{1}{2}$ da Zellwände doppelt gezählt werden $2 \int_j$

mit Gauß:
$$I_j = \int_{\partial V_j} \frac{1}{|x-R_j|} \frac{1}{|x-R_j|} dx$$

$$\square \frac{1}{|x-R_j|^2} = \left(\frac{1}{|x-R_j|} \right)' = \frac{1}{|x-R_j|} \cdot \frac{1}{|x-R_j|}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\partial V_j} (nd) \frac{1}{|x-R_j|^2}$$

$$\stackrel{\text{Gauß}}{=} \frac{1}{2} \int_{\partial V_j} \Delta \frac{1}{|x-R_j|^2}$$

$$= \int_{\partial V_j} \text{div} \left(\frac{1}{|x-R_j|^3} \frac{x-R_j}{|x-R_j|} \right) dx$$

$$= \int_{\partial V_j} \left(\frac{-3}{|x-R_j|^5} \cdot \frac{x-R_j}{|x-R_j|} (x-R_j) + \frac{3}{|x-R_j|^5} \right) dx$$

$$= - \int_{\partial V_j} \frac{1}{|x-R_j|^4} dx = - \int_{\partial V_j} \frac{1}{|x|^4} dx$$

$$\leq \int_{-R}^R \int_{-R}^R \int_{-R}^R \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{D_j (x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$= \frac{1}{D_j} \cdot 2\pi \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{p}{(p^2+x^2)^2} dx = \frac{2\pi}{D_j} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dp \frac{p}{p^2+x^2}$$

$$= \frac{2\pi}{D_j} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \pi \frac{2\pi}{D_j} = \frac{\pi}{D_j}$$

$$A = \frac{-\pi^2}{8} \sum_j \frac{1}{D_j}$$

Ansager
$$E_{0,2}(v) = \frac{1}{2} \int dx dy \frac{1}{2} \int d(x-\mu)(y) \int d(x-\mu)(y) \frac{1}{|x-y|} = -A$$

$$= \frac{1}{2} \left[D[v] + 2D(v, \mu) + D[\mu] \right] - A$$

$$\int d(x)(y) \frac{1}{|x-y|} = \int d(x)(x)$$

part. abs.

$$\Rightarrow -A \Rightarrow \frac{\pi^2}{8} \sum_j \frac{1}{D_j}$$

Birkhoff-Koppenko-Solomyak - Ungleichung

F. H. Lieb, ~~et al~~ Journal of statistical physics
 H.S. f.p. Solov'ev

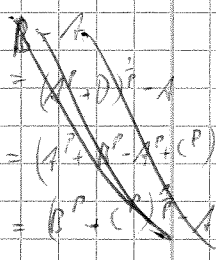
Lemma $p \geq 1$ $A, B \geq 0$ ($\Rightarrow A, B$ s.o.), $(B^p - A^p)_+^{1/p} \in \mathcal{Y}^1$ Ähnlich
Erling Störmer
 $\Rightarrow (B - A)_+ \in \mathcal{Y}^1$ und $Sp(B - A)_+ \leq Sp(B^p - A^p)_+^{1/p}$

Bemerkungen 1) $X \geq 0$ $X \rightarrow X^{-1}$ ist operatornormfallend

Für $X \leq Y$ d.h. für alle $\varphi \in D(X)$ mit $\langle \varphi, X \varphi \rangle \leq \langle \varphi, Y \varphi \rangle$
 folgt, dass $Y^{-1} \leq X^{-1}$

2) $X \rightarrow X^p$ $\forall p \in (0, \infty)$ ist operatornorm monoton steigend
 \rightarrow für $X \leq Y$ folgt, dass $X^p \leq Y^p$ (nicht wahr für $p > 1$!)

Beweis Zunächst soll gezeigt werden, dass wir $B \geq A$ annehmen können ohne Einschränkung der Allgemeinheit. Dazu $B^p = A^p + D$, d.h.



$B = (A^p + D)^{1/p} \Rightarrow (B^p - A^p)_+ = D_+$ und definiert man weiter
 $X = (B - A) \Rightarrow (A^p + D)^{1/p} - A$ & dieser Ausdruck kann nur größer werden aufgrund der Operatormonotonie der p -ten Wurzel.

Da die Spur ebenfalls ein monoton wachsend ist, können wir annehmen, dass $D = D_+$ ist $\Rightarrow D = B^p - A^p + C^p$ mit $A, B, C \geq 0$

Ziel: $Sp((A^p + C^p)^{1/p} - A) \leq Sp C$

$X := (A^p + C^p)^{1/p} - A$ Nehme an, dass $A^p \gg E^1$ $\epsilon \in (0, \infty)$
 $E = (A^p + C^p)^{\frac{1-p}{p}}$ für $P = A^{1-p} - E = (A^p)^{\frac{1-p}{p}} - (A^p + C^p)^{\frac{1-p}{p}} \geq 0$ für $p \geq 1$
 wg. Bem. 3.2

Beh.: $E(A^p + C^p) - A^{1-p}A^p = (A^p + C^p)^{1/p} - A = X$
 $-PA^p + EC^p = -A + (A^p + C^p)^{\frac{1-p}{p}}(A^p + C^p) = -A + (A^p + C^p)^{1/p} - X$
 $P \leq E^{1-p}$

$$Y := EC^P \quad \text{Zwischenbehauptung} \quad Y \in \mathcal{Y}^1$$

$$|Y|^2 = Y^* Y = C^P E^2 C^P = C^P C^{\frac{2-p}{p}} C^P = C^{\frac{2-p}{p}} C^2$$

$$\Rightarrow |Y| \leq C \Rightarrow \text{Sp}|Y| \leq \text{Sp} C \quad \checkmark \text{ da } C \text{ gegeben}$$

Zwischenbehauptung: P ist Spurklasse

$$\text{Betrachte dazu } \int_0^\infty dt (t+A)^{-1} t^{\frac{1-p}{p}} \stackrel{t \mapsto t \cdot A}{=} \int_0^\infty dt (t+1)^{-1} t^{\frac{1-p}{p}} A^{\frac{1-p}{p}}$$

Spektralwert

$$\alpha P_p > 0, \text{ da } A > 0 \quad \int_0^\infty dt \int \lambda P_\lambda \frac{1}{t+\lambda} t^{\frac{1-p}{p}} = \int dP_\lambda \int_0^\infty dt \frac{1}{t+\lambda} t^{\frac{1-p}{p}} = \int dP_\lambda \underbrace{A^{\frac{1-p}{p}}}_{A^{\frac{1-p}{p}}} \int_0^\infty dt \frac{1}{t+\lambda} t^{\frac{1-p}{p}}$$

$$\Rightarrow A^{\frac{1-p}{p}} = \int_0^\infty \frac{dt}{t+A} t^{\frac{1-p}{p}} \quad \forall \text{ pol. konstant}$$

$$P = A^{\frac{1-p}{p}} P (A^p + C^p)^{\frac{1-p}{p}} = C \int_0^\infty \frac{dt}{A+t} t^{\frac{1-p}{p}}$$

$$= C \int_0^\infty \frac{dt}{A^p+t} t^{\frac{1-p}{p}} - C \int_0^\infty \frac{dt}{A^p+C^p+t} t^{\frac{1-p}{p}} = C \int_0^\infty dt t^{\frac{1-p}{p}} \left(\frac{1}{A^p+t} - \frac{1}{A^p+C^p+t} \right)$$

$$= C \int_0^\infty \frac{1}{A^p+t} C^p (A^p+C^p+t)^{-1} t^{\frac{1-p}{p}} dt \quad (C \in \mathcal{Y}^1 \Rightarrow C^p \in \mathcal{Y}^1)$$

$$\Rightarrow P \in \mathcal{Y}^1, \text{ da Spurklasseoperatoren ein Ideal sind} \quad \Rightarrow (P^p)_{non} \in \mathcal{L}$$

$$\text{Sp } X < \infty$$

$X \geq 0$: $\text{Sp}(X)$ wohldefiniert (existiert heißt oder ist ∞)

$$\text{aber } \text{Sp}(X) = \infty$$

$$\Rightarrow \text{Sp } X \text{ nicht}$$

wohldefiniert

$$Y \in EC^p = (A^p + C^p)^{\frac{1-p}{p}} C^p \text{ ist Spurklasse} \rightarrow \text{Sp } EC^p \text{ wohldefiniert}$$

Um Ziel zu zeigen, genügt es daher zu zeigen, dass

$$(v_j, P A^p v_j) \geq 0 \text{ für alle } j \text{ wobei } v_j \text{ eine ONB von}$$

$$\text{Eigenfunktionen von } P = \sum_j \lambda_j (v_j \otimes v_j)$$

$$P A^p = (A^{\frac{1-p}{p}} - (A^p + C^p)^{\frac{1-p}{p}}) A^p = A - (A^p + C^p)^{\frac{1-p}{p}} A^p$$

$$\langle \psi_j, P A^p \psi_j \rangle = \lambda_j \langle \underbrace{\psi_j, A^p \psi_j}_{\geq 0} \rangle \geq 0$$

$$\int \chi \frac{1}{\lambda} (-P A^p + E C^p) \leq \text{Sp}(E C^p) \leq \text{Sp}(C) \quad \square$$

Jetzt noch für $A^p < \epsilon^p$

Der allgemeine Fall $A \mapsto A + \epsilon$

$$\Rightarrow \text{Sp}((A + \epsilon)^p + C^p)^{1/p} - A + \epsilon \leq \text{Sp}(C) \quad \text{Nehme O.N.B. } \varphi_1, \varphi_2, \dots \text{ von Eigen-}$$

$\text{funktionen von } A^p = \sum \lambda_j |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|$

Nehme O.N.B. von $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ in der Formdomain von A^p , dann -

ist sie auch in $\mathcal{D}(A^p)$

$$\text{und } ((A + \epsilon)^p + C^p)^{1/p} \geq 0 \quad \text{und } \varphi_1, \varphi_2, \dots \in \mathcal{D}(((A + \epsilon)^p + C^p)^{1/p})$$

$$\text{Sp} \sum_j \langle \varphi_j, X \varphi_j \rangle$$

$$\langle \varphi_j, ((A + \epsilon)^p + C^p)^{1/p} \varphi_j \rangle - (A + \epsilon) \varphi_j \geq \langle \varphi_j, (X - \epsilon) \varphi_j \rangle \quad (\text{Monotonie d. Wurzel})$$

$$\text{Sp}(C) \geq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_j \langle \varphi_j, \dots \varphi_j \rangle \geq \sum_j \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \langle \varphi_j, \dots \varphi_j \rangle \geq \text{tr} X$$

Referenzen

1) Lieb-Thirring-Ungleichungen:

a) Elliott H. Lieb & Walter Thirring: Inequalities for the moments of eigenvalues of Schrödinger Hamiltonians and their relation to Sobolev Inequalities. Erschienen in E.H. Lieb, B. Simon and A. Wightman (Herausgeber) Studies in mathematical Physics: essays in honor of Valentine Bergmann. Princeton University Press 1976

b) E.H. Lieb & R. Seiringer: Stability of matter

Mikhael Shtamo

2) BKS-Ungleichung: a) M. Sh. Birman, L.S. Koplienko, M.Z. Solomyak:

Estimates for the spectrum of the difference between fractional powers of two selfadjoint operators. Soviet Mathematics 19 (3) p. 1-6 (1975)

~~10.12.2015~~

10.12.2015

b) E.H. Lieb, H.S. Jan Philip Solovej: Stability and Instability of relativistic electrons in classical ~~near~~ magnetic fields. Journal of statistical physics 89 (1/2), p. 37-59 (1997)

3) Diamagnetische Ungleichung.

a) Tosio Kato: Perturbation of linear operators (\rightarrow Kato's Ungleichung)

b) Joseph Avron, Ira Herbst, B. Simon: Schrödinger operators with magnetic fields I

General Interactions, Duke Math Journal 45 ^{Hoff} (4) p. 847-833 (1978)

Stabilität (zweiter Art) relativistischer Elektronen (Positronen) mit elektromagnetischer Wechselwirkung

$$c = \gamma = \hbar$$

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = e^2$$

$$E[\Psi] = \langle \Psi, \left(\sum_{i=1}^N D(A)_i + \alpha V_c \right) \Psi \rangle + \frac{1}{8\pi} \int \frac{|B|^2}{R^3}$$

$$D(A) = \vec{\alpha} \cdot \left(\frac{c}{\hbar} \nabla + \frac{e}{\hbar c} A \right) + mc^2 \beta$$

$$V_c(x_1, \dots, x_N; R_1, \dots, R_N) = - \sum_{\substack{i=1, \dots, N \\ j=1, \dots, N \\ i \neq j}} \frac{z_i z_j}{|x_i - x_j - R_{ij}|} +$$

$$+ \sum_{i=1, \dots, N} \frac{1}{|x_i - R_i|} +$$

$$+ \sum_{i=1, \dots, N} \frac{z_i z_i}{|R_i - R_i|}$$

E können wir als Restriktion der ursprünglichen Energieform ansehen, für die nur Zustände mit genau N Elektronen (und keinen Positronen) eingesetzt werden.

$$B = \text{rot} A \quad \text{div} A = 0 \Rightarrow \int |B|^2 = \int |A|^2 = 0$$

Gradierung $z = ?$ Für $z = \frac{D_0}{|D_0|} \rightarrow E$ nach unten unbeschränkt $\forall \alpha, z$

$$j(x) = N \int \Psi^*(x_1, \dots, x_N) \vec{\alpha} \Psi(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N$$

$$e \int \langle \Psi, \alpha \vec{v} \cdot A(x) \Psi \rangle = \int j(x) \cdot A(x)$$

$$\rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} \left(e \int j_v(x) A_v(x) + \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} |A_v|^2 dx \right) - A_v \Delta A_v$$

$$\text{Euler: } e j_v(x) - \frac{1}{4\pi} \Delta A_v = 0$$

$$A_v(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e j_v(y)}{|x-y|}$$

Coulomb-Str.

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \left(- \int dx dy \frac{e^2 j_v(x) j_v(y)}{|x-y|} + \frac{e^2}{2} \int dx dy \frac{j_v(x) j_v(y)}{|x-y|} \right) = - \frac{e^2}{2} \int dx dy \frac{j_v(x) j_v(y)}{|x-y|}$$

< 0 immer

Für diesen Term fällt quadratisch in der Elektronenzahl N
 Die kinetische Energie $\langle \Psi | \sum_j D(\mathbf{r}_j) | \Psi \rangle$ wächst jedoch nur linear
 (sh. Lieb, Solovay, KS: Verbesserung des Beweises bei M. Griesmer,
 Christian Tix Journal of Math. Phys)

Stabilität: $z = \frac{D(A)}{|D(A)|}$ Beachte $(D(A))^2 = \underbrace{(p-A)^2 + 0 \cdot \beta + m^2}_{> 0} > 0 \Rightarrow$ wieder
 Spektretheorie
 $(p-A) \cdot 0$

~~$D(A)^2 =$~~

Satz $z_1, \dots, z_n \leq \frac{2}{\pi \alpha}$, $\alpha \leq \alpha_c$ mit α_c eindeutige Lösung
 von $(16\pi L_{2,3} \alpha_c)^{2/3} = 1 - \frac{\alpha_c^2}{\alpha_c}$ mit $\alpha_c = \frac{1}{2} z - 2,2459 \sqrt{z} z^{2/3} + 1,0307 \sqrt{z}$

\Rightarrow Stabilität zweiter Art

Bemerkung Für $\alpha = \frac{1}{73}$ ist $z \leq 56$ garantiert

Stabilität ohne Magnetfeld (mit Beweis der diamagnetischen Ungleichung ersetzt) für Chandrasekhar-Operator

E.H. Lieb & H.-T. Yau

(einfacher Beweis)

$\sum_{n=1}^N |p - A|_{\nu} + \sqrt{2} \nu_c > 0$ mit $\frac{1}{\nu} \geq \frac{1}{\nu_c}$
 optimal aber möglich für Beweis Stabilität gegen diamagn. Ugl.

Bew. Lieb-Yau ursprünglich ohne A , aber der Beweis mit A kann leicht auf den Fall ohne A unter Anwendung der diamagn. Ugl. zurückgeführt werden kann.

$\Rightarrow E[\Psi] \geq \langle \Psi, \left(\sum_{n=1}^N D(A) + \left(\frac{\nu}{\nu_c} \right) |p - A|_{\nu} \right) \Psi \rangle + \frac{1}{8\nu} \int |\mathbf{B}|^2$

~~$\text{tr } h$~~ $\text{tr } h$

$\Lambda_+ D(A) \Lambda_+ = \Lambda_+ |D(A)| \Lambda_+$

$\text{tr } h = \frac{1}{8\nu} \int |\mathbf{B}|^2$

Wähle nun $-eA = A \cdot e$

$h = \Lambda_+ (D(A) - \kappa | \cdot | \cdot + eA) \Lambda_+$

11.12.15 $E[V] = \langle \Psi \left(\sum_{n=1}^N D(A)_n + \alpha V_c \right) \Psi \rangle + \frac{1}{8\pi} \int |B|^2$ mit Gradientierung $\varepsilon = \frac{D(A)}{|D(A)|}$

$D(A)$ immer noch mit Lücke $|D(A)|^2 = (\alpha(p-A) + m\beta)^2 = (\alpha(p-A))^2 + m^2$

$\sum_n |p-A|_n^2 + \alpha V_c \geq 0$

$\rightarrow E[V] = \langle \Psi \left(\sum_{n=1}^N (D(A)_n - \alpha(p+eA)_n) \Psi \right) \rangle + \frac{1}{8\pi} \int |B|^2$

$N \leq 0$
 $A^* A \leq 0$

$\rightarrow \text{Sp} \left(\Lambda_+ \left(|D(A)| - \alpha(p+eA) \right) \Lambda_+ \right) + \frac{1}{8\pi} \int |B|^2$
 $\geq \text{Sp} \left(\Lambda_+ \left(|D(A)| - \alpha(p+eA) \right) \Lambda_+ \right) + \frac{1}{8\pi} \int |B|^2 \geq \text{Sp}(\Lambda_+ S \Lambda_+) + \frac{1}{8\pi} \int |B|^2$
 $\equiv S \geq S_-$

$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ unitär

$U^{-1} D(A) U = U^T D(A) U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sigma(p+eA) \\ \sigma(p+eA) & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sigma(p+eA) & 1 \\ 1 & \sigma(p+eA) \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} -1 & -\sigma(p+eA) \\ -\sigma(p+eA) & 1 \end{pmatrix} = -D(A)$ neg. Spektralraum wird in pos. und umgekehrt abgebildet

$U^{-1} \Lambda_+ U = \Lambda_- \quad U^{-1} \Lambda_- U = \Lambda_+$

Sei X selbstadjungiert und F eine Funktion auf \mathbb{R}

$F(U^{-1} X U) = U^{-1} F(X) U$. Wähle $F(t) = |t|$
Spektralwert

$\Rightarrow U^{-1} |D(A)| U = |U^{-1} D(A) U| = | -D(A) | = |D(A)|$

Zeige $U^{-1} S U = S_-$

$U^{-1} (|D(A)| - \alpha(p+eA)) U = (U^{-1} (|D(A)| - \alpha(p+eA)) U)$
 $= (|D(A)| - \alpha U^{-1} (p+eA) U) = (|D(A)| - \alpha |U(p+eA) U|)$
 $= (|D(A)| - \alpha(p+eA)) = S_- \checkmark$

negativität
 mit $F = \frac{1}{2}(|t|)$

$\Rightarrow \text{Sp } h$

$$\Rightarrow \text{Sp } h \rightarrow \text{Sp}(U^{-1} h U) = \text{Sp}(U^{-1} U^{-1} U^{-1} S U U^{-1} U) \\ = \text{Sp}(S) = \frac{1}{2} \text{Sp}(S) \quad \text{Sp}(S) = \frac{1}{2} \text{Sp}(S)$$

$$\Rightarrow \text{Sp}(U^{-1} h U) = \frac{1}{2} \text{Sp}(S) = \frac{1}{2} \text{Sp}(|D(A)| - u(p+eA))$$

Faktor $\frac{1}{2}$ raus-
geholt

$$D(A)^2 = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \quad ; \quad y = \left(\sigma \left(\frac{1}{i} \nabla + eA \right) \right)^2 = \underbrace{\left(\frac{1}{i} \nabla + eA \right)^2}_{\text{rot } A} + \underbrace{e \sigma \cdot B}_{\text{rot } A} + m^2$$

$\neq P(A)$ Pauli-Operator
nichtrelativistische limit $\hbar \rightarrow 0$
im B-Feld mit Spinbahnhkopplung

Wurzelzeichen ist Operatormonoton

$$\sqrt{(P(A)^2 + m^2 - u(p+eA)^2)} \geq \sqrt{(P(A)^2 - u(p+eA)^2)}$$

$$\pi \geq \chi \sqrt{(P(A)^2 - u(p+eA)^2)}$$

$$-(P(A)^2 + m^2 - u(p+eA)^2) \pi_m \leq -(P(A)^2 - u(p+eA)^2) \pi_0$$

$$\Rightarrow \sqrt{-(P(A)^2 + m^2 - u(p+eA)^2)} \pi_m \geq \sqrt{-(P(A)^2 - u(p+eA)^2)} \pi_0$$

$$|\sigma \cdot B| \geq |B|$$

$$\stackrel{\text{BWS}}{\geq} -\text{Sp} \sqrt{-(P(A)^2 - u^2 \left(\frac{1}{i} \nabla + eA \right)^2)} + \frac{1}{8\pi} \int |B|^2$$

$$\geq -2 \int \sqrt{(1-u^2) \left(\frac{1}{i} \nabla + eA \right)^2 - e|B|}$$

$$\geq -2 \text{Sp} \sqrt{-(1-u^2) \left(\frac{1}{i} \nabla + eA \right)^2 - e|B|} + \frac{1}{8\pi} \int |B|^2$$

jetzt diamagn. Vgl.
(gilt nur für magn. Schröd.op
nicht f. Pauli-op.)

$$\geq -2 \text{Sp} \sqrt{-(1-u^2) (-\Delta) - e|B|} + \frac{1}{8\pi} \int |B|^2$$

$$\stackrel{\text{L.T.}}{\geq} -2 \int_{\mathbb{R}^3} \left(1 - \left(\frac{u}{u_c} \right)^2 \right)^{-3/2} \int |B|^2 + \frac{1}{8\pi} \int |B|^2 \geq 0 \rightarrow \text{Rech. in Vbr}$$

Stabilität für N relativistische Elektronen im quantisierten Magnetfeld

aber: M. Grossmann & Christa Thiel \rightarrow Instabilität mit $z = \frac{B_0}{10 \text{ T}}$

\hookrightarrow Kohärente Zustände / Photonen liefert klassisches Feld

$\Delta \gg p^{rel} = v$
 $p^{cl} = v$

Elliott h. Lieb & Michael Loss

$$\mathcal{H}_N = \prod_{\nu=1}^N L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4) \otimes \mathcal{F}_{\text{Photonen}}$$

Operator des magn. Pots

$$\alpha \left(\frac{1}{i} \nabla + eA \right) + \beta = D(A) : L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4) \otimes \mathcal{F}_{\text{Photonen}} \quad \text{ist s.a.}$$

$$A_+ = \chi_{\{0, \infty\}}(D(A)) \quad \mathcal{H}_{\text{el. magnet.}} = A_+ (L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4) \otimes \mathcal{F}_{\text{Photonen}})$$

$$\mathcal{H}_N^{\text{phys}} = P^{N+} \mathcal{H}_N \quad P^{N+} : \text{Spektralprojektion wo alle } D(A) \text{ positiv}$$

Dazu werden wir zeigen daß die $D(A)$ paarweise kommutieren

$$\text{oder } \mathcal{H}_N = \bigotimes_{\nu=1}^N L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4) \rightarrow \mathcal{H}_N^{\text{phys}} = P^{N+} \mathcal{H}_N$$

17.12.15

$$D(A) = \alpha \left(\frac{1}{i} \nabla + e \underset{\text{magnet.}}{A} + e \underset{\text{Coulomb}}{A} \right)$$

$$\text{in } L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4) \otimes \mathcal{F}_b$$

$$\mathcal{F}_b = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \bigotimes_{\lambda=1}^3 \mathcal{H}_\lambda \quad \text{bosonisch}$$

Klassische Energie des Photonensfeldes (el. magnet.)

$$H^{\text{klassisch}} = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} E^2(x) dx + \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} B^2(x) dx$$

$B = \text{rot } A$, div $A = 0$ (Coulomb)

Fourierzerlegung des A -Feldes:

$$A(x) = \sum_{\lambda=1}^3 \int dk \frac{\epsilon_\lambda(k)}{|k|^{3/2}} \left(a_\lambda(k) e^{ikx} + a_\lambda^*(k) e^{-ikx} \right) \frac{\sqrt{\hbar c}}{2\pi}$$

$$B(x) = \sum_{\lambda=1}^3 \int dk \frac{1}{|k|^{3/2}} \underbrace{\text{rot } \epsilon_\lambda(k)}_{\text{rot } \epsilon_\lambda(k)} \left(a_\lambda(k) e^{ikx} - a_\lambda^*(k) e^{-ikx} \right) \frac{\sqrt{\hbar c}}{2\pi}$$

$$E(x) = \frac{i\sqrt{\hbar c}}{2\pi} \sum_{\lambda=1}^3 \int dk \frac{dk}{|k|^{3/2}} |k| \epsilon_\lambda(k) \left(a_\lambda(k) e^{ikx} - a_\lambda^*(k) e^{-ikx} \right) \frac{\sqrt{\hbar c}}{2\pi} ?$$

Damit ergibt sich für $H^{\text{klassisch}} = \frac{\hbar c}{2} \sum_{\lambda=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} dk |k| \left\{ a_\lambda^*(k) a_\lambda(k) + a_\lambda(k) a_\lambda^*(k) \right\}$

Quantisierung $[a_\lambda(k), a_{\lambda'}(k')] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(k-k')$

Kann in analoger Weise für Fermionen realisiert werden und zwar auf dem bosonischen Fockraum

$$H_f := H_{\text{quantum}} = \hbar c \sum_{k=1}^{\infty} \int d^3k \underbrace{|k|}_{w(k)} a_k^*(k) a_k(k) \chi(|k| < \Lambda)$$

Bemerkung Für fixe Photonenzahl N ist dieser Operator nichts weiter als $(\vec{1} - \Delta)^{-1} \Psi(y_1, \dots, y_N)$

Prä-Hamiltonoperator des Systems von N Elektronen im Photonenfeld

$$H'_N = \sum_{n=1}^N D_n(\Delta) + \alpha V_e + H_f$$

~~$$\Psi = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \psi_N(x_1, \dots, x_N; \epsilon_1, \dots, \epsilon_N)$$~~

$$\tilde{\Psi} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \tilde{\psi}_n \left(\underbrace{x_1, \dots, x_N}_{\text{elektrone}}, \underbrace{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N}_{\text{photonen}}, \underbrace{y_1, \dots, y_n}_{\text{photonen}}, \Lambda, \mu, \hbar \right)$$

jetzt Photonen im Impulsraum, Elektronen im Ortsraum

$$\Psi = (\dots, \psi_n(x_1, \dots, x_N; \epsilon_1, \dots, \epsilon_N; k_1, k_2, \dots, k_n), \dots)$$

$$a_k(k) \Psi = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} \psi_{n+1}(x_1, \dots, x_N; k_1, k_2, \dots, k; k_{n+1}, \dots, k_n)$$

$H_{\text{phys}}^N = P' H'_N P'$ genauer: Nehme die quadratische Form aber nur für
Proj. auf pos. Spektrum bei $\Psi = P' \tilde{\Psi}$

Definiere H_{phys} als durch die Form definierte Friedrichserweiterung

Satz Nehme an, dass ϵ und α für geg κ und $\epsilon \geq 0$

$$\bullet \kappa \geq \max \{ 64, 5, \pi \epsilon \}$$

$$\bullet (\kappa \epsilon)^2 \leq 1 - \epsilon \leq 1$$

$$\bullet \frac{(1-\epsilon)^2 \alpha}{(1-\epsilon - \kappa \epsilon^2)^{3/2}} \leq \frac{1}{8\pi \cdot 0.06}$$

erfüllen. Dann gilt $H_{\text{phys}}^N \geq \frac{1}{\pi} \epsilon m N - \frac{18\kappa}{\pi} \kappa C_2^3$
 mit $C_2^4 = \frac{N}{\kappa} \frac{6\sqrt{1-\epsilon} + \frac{\alpha}{\kappa} (\sqrt{2\epsilon} + 2, 3)^2}{\frac{27}{25}}$

~~jetzt~~ Bemerkung Für $\alpha = \frac{1}{137}$ liefert das Beschränktheit für $\epsilon \leq 42$.

Beweis Morozov-Zellen $\mathbb{R}^n, L > 0$

$$B_k = \{x: |x - R_k| < 3L\} \quad B = \bigcup_k B_k$$

$$S_k = \{x: |x - R_k| < 2L\} \quad S = \bigcup_k S_k$$

$\int_{\mathbb{R}^n} g = 1$
 $g \in W^{1,1}$, $\text{supp } g \subset \{ |x| \leq 1 \}$ $g_L = \frac{1}{L^3} g(\frac{x}{L})$ $\text{supp } g_L \subset \{ |x| \leq L \}$
 (siehe Abb. Integral)

$$\phi_1 = g_L * \chi_S \in [0,1] \quad \phi_2 = 1 - \phi_1 \approx 0$$

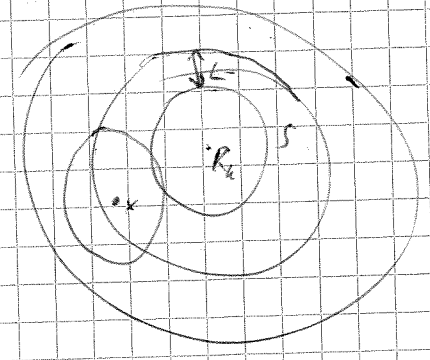
da $\int g_L = 1$

$$F = \frac{\phi_1}{\phi_1^2 + \phi_2^2} \quad G = \frac{\phi_2}{\phi_1^2 + \phi_2^2} \quad F^2 + G^2 = 1$$

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = \phi_1^2 + (1 - \phi_1)^2 = 1 - 2\phi_1 + 2\phi_1^2 = (2\phi_1 - 1)^2 + \frac{1}{2} - 2 \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 \sqrt{2}) + \frac{1}{2}$$

$$= (\sqrt{2}\phi_1 - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} > 0$$

$$\rightarrow \phi_1^2 + \phi_2^2 \geq \frac{1}{2}$$



$$F(x) = 1 \quad |x - R_k| < L$$

$$|\nabla F|^2 + |\nabla G|^2 = \frac{|\nabla \phi_1|^2 - \frac{\phi_1^2 \phi_2^2}{F^2}}{(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2} + \frac{|\nabla \phi_2|^2 - \frac{\phi_1^2 \phi_2^2}{G^2}}{(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2}$$

$$= \frac{|\nabla \phi_1|^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2 - \phi_2^2)^2 + |\nabla \phi_2|^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2 - \phi_1^2)^2}{|\phi_1^2 + \phi_2^2|^{2+2}}$$

$$1 \geq \frac{\phi_1^4 + \phi_2^4}{(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2} \left(\geq \frac{1}{2} \right)$$

$$\leq \frac{|\nabla \phi_1|^2 (\phi_1^4 + \phi_2^4)}{(\phi_1^2 + \phi_2^2)^{2+1}} \leq \frac{2 |\nabla \phi_1|^2}{\phi_1^2 + \phi_2^2}$$

$$\leq \frac{|\nabla \phi_1|^2}{\phi_1^2 + \phi_2^2} \leq 2 |\nabla \phi_1|^2 \quad \text{etwa } 4 |\nabla \phi_1|^2 \quad (\text{best } P_0)$$

$$|\nabla \phi_1|^2 = \left| \int_S g_L(x-y) dy \right|^2 \stackrel{\text{majorierte Konvergenz}}{=} \left| \int_S (\nabla g_L)(x-y) dy \right|^2$$

$$\leq \frac{1}{L^2} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{L^3} (\nabla g)\left(\frac{x-y}{L}\right) dy \right|^2 \leq \frac{1}{L^2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} dy \frac{1}{L^3} |\nabla g\left(\frac{y}{L}\right)| \right)^2 = \frac{1}{L^2} (\int |\nabla g|)$$

wird minimiert durch $g = \frac{1}{4\pi R} \chi_{B(0)}$ $\rightarrow \nabla g = \frac{3}{4\pi} (-1) \frac{x}{|x|^3} \delta(|x|=1)$
 $\rightarrow \int |\nabla g| dx = 3$

$$\Rightarrow |\sigma F|^2 + |\sigma G|^2 \leq \frac{36}{L^2}$$

~~328~~

min {a, b} > a
min {-a, -b} > -a

Hamiltonoperator mit lokaler kinetischer Energie:

$$Q(A) = F |p + \sqrt{\alpha} A(x)| F = F \sqrt{(p + \sqrt{\alpha} A)^2} F$$

$$H_N^{loc} := \kappa \sum_{n=1}^N Q_n(A) + V_c \rightarrow \text{untere Schranke}$$

Satz Sei $A(x)$ ein Vektorfeld und gegeben seien N Fermionen mit g je

g Spinzuständen. Dann ist und $\kappa \geq \max \left\{ \frac{g}{20\pi}, \pi Z \right\}$ Dann ist

$$H_N^{loc} \geq -\frac{N}{2L} \max \left\{ (\sqrt{Z^2+1})^2, Z^2 + \frac{100}{2L} \right\} \stackrel{Z \geq 3}{\geq} -\frac{N}{2L} (\sqrt{Z^2+1})^2 \text{ für } Z \geq 3$$

~~falls $\kappa \geq \max \left\{ \frac{g}{20\pi}, \pi Z \right\}$~~

$$Z^2 + \frac{100}{2L} \leq Z^2 + \sqrt{Z^2+1} \Leftrightarrow \frac{100}{2L} \leq \sqrt{Z^2+1} \Rightarrow$$

Hilfsmittel Definiere W Zellweise in der Voronoi-Zelle J_k ($k=1, \dots, K$)

$$W(x) = \begin{cases} \frac{(\sqrt{Z^2+1})^2}{|x-R_k|} & \text{für } |x-R_k| \geq \frac{10}{11} D_k, x \in J_k \text{ monoton fallend für } |x| \text{ groß} \\ \frac{Z}{|x-D_k|} + \frac{121}{42} \frac{1}{D_k} & |x-R_k| < \frac{10}{11} D_k \end{cases}$$

Lieb & Kaw: 1) $V_c \geq \sum_{k=1}^N W(x_k) + \frac{Z^2}{8} \sum_{k=1}^K \frac{1}{D_k}$

aus Beweis zu Satz extrahiert

2) $\text{tr} \left((p + \sqrt{\alpha} A) - W(x) \right) \geq -\frac{Z^2}{8} \sum_{k=1}^K \frac{1}{D_k}$

geht mit demagnet Ungleichung rüchschmagen

für $\kappa \geq \max \left\{ \frac{g}{20\pi}, \pi Z \right\}$

Beweis

$$H_N^{loc} \geq \kappa \sum_{n=1}^N Q_n(A) - \sum_{k=1}^N F(x_k)^2 W(x_k) + \sum_{k=1}^N (1-F(x_k))^2 W(x_k) + \frac{Z^2}{8} \sum_{k=1}^K \frac{1}{D_k}$$

Wir beachten $F(x) = 1$ falls $|x-R_j| \leq L$, d.h. $(1-F(x_k))^2 W(x_k)$

$$(1-F(x_k))^2 W(x_k) \leq \max \left\{ \frac{(\sqrt{Z^2+1})^2}{L}, \frac{Z}{L} + \frac{121}{42} \frac{1}{D_k} \right\}$$

$$\geq -\frac{N}{L} \max \left\{ \frac{(\sqrt{Z^2+1})^2}{L}, \frac{Z}{L} + \frac{121}{42} \frac{1}{\min D_k} \right\}$$

$$g \text{tr} \left(F \left(\kappa (p + \sqrt{\alpha} A) - W \right) F \right) \geq g \text{tr} \left(\kappa (p + \sqrt{\alpha} A) - W \right) \cdot g$$

$$\geq -\frac{Z^2}{8} \sum_{k=1}^K \frac{1}{D_k} \cdot g$$

d.h. $L = \frac{Z^2}{42} \geq \frac{Z}{10} \min D_k$

$$L = \frac{Z^2}{721} \min D_k \cdot \frac{1}{2}$$

7.1.16

$$E[YS] = \langle \Psi, \left(\sum_{n=1}^N D(A)_n + \alpha V_c + W_y \right) \Psi \rangle \quad \text{auf dem Teilraum } \chi_{(0,m)}(D(A)_n)$$

$$\underbrace{\chi_{(0,m)}(D(A)_n)}_{P^+}$$

$$D(A)_n \text{ in } L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4) \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{F}_n$$

$$\text{Lokalisierte Diracoperator: } Q(A) = F(x) |p + V(x) A(x)| F(x)$$

Strategie 1) Benutze den lokalisierten Dirac-Operator (und die Anzahl der letzten States), um das N -Teilchen-Problem auf ein Ein-Teilchen-Problem zu reduzieren. (\rightarrow starke untere Schranke an Summe der ersten N EW)

2) Reduktion von 4 Spins auf zwei Spins

$$3) \text{ BKS-Ungleichung } Sp(A-B) \leq Sp(\sqrt{(A^2-B^2)})$$

$$4) \text{ Wende Lieb-Thirring auf } \inf \sigma \left(\sum_{n=1}^N (-\Delta_n - V(x_n)) \right) \leq \text{const} \int V$$

$$g^{\alpha,0}(\vec{x}, \vec{x}') = \sum_{\sigma=1}^4 \Gamma(\vec{x}, \sigma, \vec{x}', \sigma') \Big|_{\sigma=\sigma'} \leq 4 \text{ Spin-summierte, reduzierte Ein-Teilchen-Dichtematrix}$$

Tatsächlich können wir $\gamma(\vec{x}, \vec{x}') \leq 2$ fordern

$$P^+ \left(\sum_{n=1}^N D(A)_n + \alpha V_c \right) P^+ \geq P^+ \left(\sum_{n=1}^N \sqrt{T_n^{\text{rad}}(A) + m^2} - \alpha \kappa Q_n(A) \right) P^+ - \frac{\alpha N}{2L} (\sqrt{2B} + 2, B)^2 P^+$$

$$1 \geq \frac{\phi}{(\phi^2)} \text{ Wähle } L = \frac{\epsilon_2}{\lambda}$$

$$0 \leq \delta \leq 1 \\ \epsilon_2 > 0$$

$$H_2 = P^+ \left(\sum_{n=1}^N \left(\sqrt{T_n^{\text{rad}}(A) + m^2} - \delta m - \alpha \kappa Q_n(A) + \epsilon_2 \right) \right) P^+$$

$$\tilde{E}^+ := \chi_{(0,m)}(D(A)) \quad Sp \left(\tilde{E}^+ S \tilde{E}^+ \right) \text{ ist nach unten abgeschätzt für } S = \sqrt{T_n^{\text{rad}}(A) + m^2} - \delta m - \alpha \kappa Q_n(A) + \epsilon_2$$

$$E_n(H_2) \leq 0 \quad E_n(H_2) = P^+ S P^+ E_n(P^+ S P^+)$$

$$\text{Beachte: } S = \begin{pmatrix} \epsilon_2 & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix} \text{ (blockdiagonal)}$$

$$U := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ unitär } \tilde{E}^- = U^{-1} \tilde{E}^+ U$$

$$\text{Sp}^4 \begin{pmatrix} \delta^2 & \delta \\ \delta & \delta^2 \end{pmatrix} \leq \text{Sp}^2 y_- = \frac{1}{2} \text{Sp}^2 S \quad (\text{Analog zum Fall des skalaren Feldes})$$

$$\text{Daher } \sum_n E_n(k_2) \quad \approx -\text{Sp} \left(\sqrt{T_n^p(A) + m^2} - \delta m - \kappa \alpha Q_n(A) + c_3 \Lambda \right)$$

$A = \sqrt{T_n(A) + m^2} - \delta m + c_3 \Lambda$
 $B = \kappa \alpha Q_n(A)$

$$\text{Jetzt } B(x) \quad \approx -\text{Sp} \left[\sqrt{T_n^p(A) + m^2} - \delta m + c_3 \Lambda \right]^2 - \kappa^2 \alpha^2 Q_n^2(A)$$

$$(a+b)^2 \approx a^2 + b^2$$

$$\approx -\text{Sp} \left[(T_n^p(A) + m^2) - \delta m + c_3 \Lambda - \kappa^2 \alpha^2 Q_n^2(A) \right]$$

$$\approx -\text{Sp} \left[(T_n^p(A) + m^2)(1-\epsilon) + (1-\frac{1}{\epsilon})m^2 \delta^2 + c_3^2 \Lambda^2 - \kappa^2 \alpha^2 Q_n^2(A) \right]$$

$$= -\text{Sp} \left[T_n^p(A)(1-\epsilon) + c_3^2 \Lambda^2 - \kappa^2 \alpha^2 Q_n^2(A) \right]$$

$\delta^2 \in \epsilon \rightarrow$ Mitternesterterm weg

Erinnerung

$$\text{IMS: } \sum_{n=1}^4 \chi_n^2 = 1 \quad 0 \leq \chi_n \leq 1$$

in diesen T_n drin ($F+G=1$)

~~$$\langle \psi, \Delta \psi \rangle = \sum_n \langle \psi, \chi_n \Delta \chi_n \psi \rangle - \sum_n \int |\alpha \chi_n|^2 |\psi|^2$$~~

$$\langle \psi, -\Delta \psi \rangle = \sum_n \langle \psi, \chi_n (-\Delta) \chi_n \psi \rangle - \sum_n \int |\alpha \chi_n|^2 |\psi|^2$$

$\langle \psi, \int |\alpha \chi_n|^2 \psi \rangle$ (Lokalisationsfehler)

$$T^p(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{i} \partial + \alpha A \\ \alpha A \end{pmatrix}^2 + \alpha \partial \cdot B$$

$$= -\Delta + \frac{1}{i} \alpha \partial A + \alpha A \frac{1}{i} \partial + \alpha A^2 + \alpha \partial \cdot B$$

Mult. Operatoren
 ∂ in Leibniz

$$= -\Delta + 2\alpha \frac{1}{i} A \partial + \alpha A^2 + \alpha \partial \cdot B$$

$$\langle \psi, A \partial \psi \rangle = \sum_n \langle \psi, \chi_n A \partial \chi_n \psi \rangle + \text{Lok} \quad \text{10}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_n \langle \psi, A \partial (\chi_n^2) \psi \rangle + \sum_n \langle \psi, \chi_n^2 A \partial \psi \rangle$$

$$\Rightarrow T^p(A) = \sum_n \chi_n T^p(A) \chi_n - \sum_n |\alpha \chi_n|^2$$

Hier: $\chi_1 = F, \chi_2 = G$

≥ 0 (F wurde so gewählt)

$$\langle \psi, \int |\alpha \chi_n|^2 \psi \rangle \leq \frac{36}{L^2}$$

$$T^p(A) = F T^p(A) F + G T^p(A) G - \alpha^2 (|F|^2 + |G|^2) \quad \left(\frac{23}{L^2} \right)$$

$$\approx F T^p(A) F - \alpha^2 (|F|^2 + |G|^2)$$

8.1.16

Wähle $\epsilon_3 = \frac{2\sqrt{1-\epsilon}}{c_2} \int |\log| = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{1-\epsilon}}{c_2} = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{1-\epsilon}}{2 \cdot 1}$

$\rightarrow H_2 \geq -Sp \left((1-\epsilon) F T^p(A) F - \kappa^2 \alpha^2 Q_n(A) \right)^{1/2}$

$Q(x)^+ = \underbrace{F |p + \sqrt{\kappa} A(x)| F}_{\text{adjungierte von}} \underbrace{F |p + \sqrt{\kappa} A(x)| F}_{\text{adjungierte von}} \quad (AF \leq 1)$
 $\leq F |p + \sqrt{\kappa} A(x)|^2 F$

$\rightarrow H_2 \geq -Sp \left[F \left((1-\epsilon) T^p(A) - \kappa^2 \alpha^2 |p + \sqrt{\kappa} A(x)|^2 \right) F \right]^{1/2}$ $\chi_B F = F, \text{supp } F \subset B$
 $= -Sp \left[F \left((1-\epsilon) \kappa^2 \alpha^2 |p + \sqrt{\kappa} A(x)|^2 + \chi_B \kappa^2 \sigma^2 \vec{B}(x) \right) F \right]^{1/2}$

Verwende ~~$F \times F \rightarrow (F \times F)$~~ $F \times F = F (\chi_B \kappa^2 \sigma^2 \vec{B}(x)) F \geq -F X F$
 allgemein $\rightarrow Sp(F \times F) \leq Sp(F X F) \rightsquigarrow Sp(\overline{F \times F}) \leq Sp$

$\rightarrow H_2 \geq -Sp \left[F \left((1-\epsilon - \kappa^2 \alpha^2) |p + \sqrt{\kappa} A(x)|^2 + (1-\epsilon) \kappa^2 \chi_B \sigma^2 \vec{B}(x) \right) F \right]^{1/2}$

Da $A^* A$ die selbe EV (angenommen) wie $A A^*$ hat

$Sp \sqrt{F y F} = Sp \sqrt{\underbrace{F y}_{A^*} \underbrace{y F}_{A}} = Sp \sqrt{y^{1/2} F F y^{1/2}} \leq Sp y^{1/2}$

$4 A^* (A y) = \dots$
 $A^* A y = \dots$
 $A A^* y = \dots$

$H_2 \geq -Sp \left[\left((1-\epsilon - \kappa^2 \alpha^2) |p + \sqrt{\kappa} A(x)|^2 + (1-\epsilon) \kappa^2 \chi_B \sigma^2 \vec{B}(x) \right) F \right]^{1/2}$
 $= \sqrt{Sp} - Sp h^{1/2}$

Bemerkung Man kann zeigen dass bei μ nur ein Splazzustand beiträgt (nicht wenn $\sigma \cdot B \geq -|B|$ abschätzt)

Michael Loss: Stability of matter in magnetic fields

1997 Proceedings der IAMP congresses

+ diamagnet. Kgl. $\lambda = 0.06$

Lieb-Thirring angewendet:

$H_2 \geq \frac{(1-\epsilon)^2 \kappa^2}{(1-\epsilon - \kappa^2 \alpha^2)^2} \int_B |\vec{B}(x)|^2 dx$

Wir haben noch $\int_B |\vec{B}(x)|^2 dx$ von der Feldenergie dazu zu addieren

\rightarrow Wähle $-c \leq \frac{1}{8\lambda} \rightarrow 0$

Stabilität relativistischer Modelle f. große Z
 Offene Fragen: BKS Limit $Z \rightarrow$ ohne BKS möglich?

• relativistische no-pair-Operatoren: geht Dichte gegen TF?

□ Korrekter in Kernnähe?

□ Zahl der gebundenen Zustände (N)

□ maximales N ?
 Elektronenzahl

• Detailliertes Verhalten des Spektrums

• Dynamisches Verhalten der Dichte?

Reduzierte Dichte-Matrix-Funktionaltheorie

$$TF: E_{TF}(p) = \int \left[\frac{3}{5} \gamma p(x)^{5/3} - V(x)p(x) \right] dx + \frac{1}{2} \int \frac{\rho(x)\rho(y)}{|x-y|} dx dy$$

$\rho \geq 0$
 $\int \rho = N$

Im Allgemeinen wird ein Funktional der Dichtematrix benötigt
 für allgemeine externe Potentiale

$$HF: E_{HF}(\gamma) = \text{Sp}((-\Delta - V)\gamma) + \frac{1}{2} \int \frac{\gamma(x,x)\gamma(y,y) - |\gamma(x,y)|^2}{|x-y|} dx dy$$

$\gamma = \gamma^* \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$

NB: $0 \leq \gamma \leq 1$ $\int \gamma = N$ $\gamma \in \mathcal{Y}^+(L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$

(glatte Dichte widerspricht Pauliprinzip? ba
 $\hookrightarrow \rho$ geht hoch/locates \rightarrow Schalenprinzip)

Problem: N -Darstellbarkeit von p und γ und...

d.h. existiert ein Zustand $\Psi \in \mathcal{N}^N(L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$, sodaß für

gegebenes $p \in L^1$, $\int p = N$, $p(x) = N^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\Psi(x, x_2, \dots, x_N)|^2 dx_2 \dots dx_N = p_\Psi(x)$

14. 1. 16

N-Darstellbarkeitsproblem

1. Motivation Hier nur für Fermionen

$$H_N = \sum_{n=1}^N h_n + \sum_{1 \leq n < m \leq N} W_{nm} \quad \mathcal{H}^N = \prod_{n=1}^N \mathcal{H}_n$$

Erster Fall: $W_{nm} = 0 \quad \forall n, m$

γ sei die Einteilchendichtematrix eines N -Teilchen-Zustands

$$H = \sum_{n,m} h_{nm} a_n^\dagger a_m \quad a_n^\dagger \text{ am Erzeuger, Vernichter zu}$$

gegebener ONB e_1, e_2, \dots $h_{nm} = \langle e_n, h e_m \rangle$

Zustand ρ :

$$\rho(H_N) = \sum_{n,m} h_{nm} \underbrace{\rho(a_n^\dagger a_m)}_{=: \gamma_{nm} \gamma_{mn}} = \sum_{n,m} h_{nm} \gamma_{mn} =$$

$$= \sum_{n,m} \langle e_n, h e_m \rangle \langle e_m, \gamma e_n \rangle = \text{Sp}(h \gamma)$$

da H Teilchenzahl-erhaltend

$$\inf_{\rho \in \mathcal{S}(H_N)} \rho(H) = \inf_{\rho \text{ N-Teilchen Zustand}} \rho(H) = \inf_{\gamma} \text{Sp}(h \gamma) \quad \begin{matrix} \text{kommt von} \\ \text{N-Teilchen } \rho \end{matrix}$$

Da
sel
wie

Erinnerung Zustand $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{F})'$ mit $\rho(A^*A) \geq 0$ $\rho(1) = 1$

Der Raum der
beschr. lin. Op über
dem Fockraum

$$\tilde{\rho} = \sum_{\nu} \lambda_{\nu} |\psi_{\nu}\rangle \langle \psi_{\nu}| \quad \psi_{\nu} \text{ ONB von } \mathcal{H}^N \text{ und } \lambda_{\nu} \in [0,1]$$

$$\rho(A) = \text{Sp}(A \tilde{\rho}) \quad \sum_{\nu} \lambda_{\nu} = 1$$

Upshot: Wenn die Menge der Einteilchendichtematrizes, also die Menge der Spurklassenoperatoren γ , die durch die Formel $\gamma_{mn} = \langle e_m, \gamma e_n \rangle = \rho(a_n^\dagger a_m)$ definiert werden, einfach charakterisiert werden kann, dann ist die Vielteilchenminimierung reduziert auf eine Einteilchenminimierung.

Zweitteilchendichtematrix analog; jetzt aber mit $W \neq 0$

$$H = \sum_{n,m} h_{nm} a_n^\dagger a_m + \sum_{n,m,k,l} W_{nmkl} a_n^\dagger a_m^\dagger a_k a_l$$

$$\psi \in \bigwedge_{n=1}^N L^2(\mathbb{R}^3)$$

und noch spezieller $\psi_j = L^2(\mathbb{R}^3)$ $\rho = \sum \lambda_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$

$$\psi_j \in \bigwedge_{n=1}^N L^2(\mathbb{R}^3)$$

$$\text{Sp}(\rho \sum_{n,m} W_{nm}) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \sum_{k_1, \dots, k_N \in \mathbb{N}} \langle \psi_j, W(x_1 - x_m) \psi_j \rangle$$

$$\psi_j \in \bigwedge_{n=1}^N L^2(\mathbb{R}^3)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} W(x-y) \rho_j^{(N)}(x,y) dx dy = \int W(x-y) \rho^{(N)}(x,y) dx dy$$

mit $\rho_j^{(N)}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^{3(N-2)}} |\psi_j(x, y, x_3, \dots, x_N)|^2 dx_3 \dots dx_N$

$$\sum_j \lambda_j \rho_j^{(N)}(x,y) =: \rho^{(N)}(x,y)$$

D.h. wenn zusätzlich die Zweitteilchendichten $\rho^{(N)}$ die von einem N -Teilchenzustand herrühren, dann können wir durch die Grundzustandsenergie aus einem Zweitteilchenproblem gewinnen

$$\inf_{\substack{\rho: \text{Sp} \rho = 1 \\ \text{Sp} \rho = 1}} \text{Sp}(H_N \rho) = \inf_{\substack{\rho: \text{Sp} \rho = 1 \\ \text{Sp} \rho = 1}} \left(\text{Sp}(h_N) + \int \rho^{(N)}(x,y) W(x-y) dx dy \right)$$

$\rho^{(N)}$ röhren von N -Teilchen- ρ her

2. Modifikation

$$E_T(\rho) = \int \left(\frac{1}{2} \text{Sp} \rho^{(2)} - \frac{1}{2} \rho \right) \frac{1}{2} \int dx dy \frac{\rho(x,y)}{|x-y|} \quad \text{liefert zu tiefe Energien bei Minimierung über } \rho \in L^{5/3}, \text{DE}[\rho] < \infty, \rho \geq 0, \text{Sp} \rho = 1$$

→ weil da zu Dichte eingesetzt werden, die nicht von einem N -Teilchenzustand kommen

Satz Sei $f \in \mathcal{N}$, $p > 0$. Dann existiert sogar eine Slater-determinante, deren Einteilchendichte $p(x)$ ist.

→ Slater schon sehr einfach → Restriktion von TF nicht weiter möglich, um höhere Energien zu bekommen

Beweis $L^2((0,1)^d)$ m_1, m_2, \dots, m_n ONB davon $\exists \in \mathbb{Z}^d$ (2)

hier $m_j(\vec{z}) = e^{2\pi i \vec{z} \cdot \vec{z}_j}$

Transformation: $J: \mathbb{R}^d \rightarrow (0,1)^d$, $\frac{\partial(x_1, \dots, x_d)}{\partial(y_1, \dots, y_d)} = \frac{p(x)}{N}$
 ↳ bijektiv

Wahl einer Slaterdet. $\frac{1}{N!} s_1 \wedge \dots \wedge s_n$

mit $s_j(x) = \sqrt{f_j(x)} m_j(\vec{z}_j(x))$

$$\langle s_j, s_k \rangle = \int dx f(x) m_j(x) m_k(x)$$

$$= \int_{(0,1)^d} dy m_j(y) m_k(y) = \delta_{j,k}$$

$$p(x) = \sum_j |s_j(x)|^2 = \sum_j \frac{f_j(x)}{N} = p(x)$$

$$s_1(x) = \frac{\int_{-p}^{x_1} dy_1 p(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1)}{\int_{-p}^p dy_1 p(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1)}$$

$$s_2(x) = \frac{\int_{-p}^{x_1} \int_{-p}^{x_2} dy_1 dy_2 p(x_1, \dots, x_n, y_1, y_2)}{\int_{-p}^p \int_{-p}^p dy_1 dy_2 p(x_1, \dots, x_n, y_1, y_2)}$$

⋮

$$s_n(x) = \frac{\int_{-p}^{x_1} \int_{-p}^{x_2} \dots \int_{-p}^{x_{n-1}} dy_1 \dots dy_{n-1} p(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})}{N}$$

$$\frac{\partial \rho_{x_1, x_2}}{\partial x_1, x_2} =$$



$$\int_{-a}^a dy_1 \int_{-a}^a dy_2 \text{ (plus } x_1, x_2)$$

$$\frac{1}{N}$$

$$\int_{-a}^a dy_1 \int_{-a}^a dy_2 \text{ (plus } x_1, x_2)$$

$$\int_{-a}^a dy_1 \int_{-a}^a dy_2 \text{ (plus } x_1, x_2)$$

$$0$$

$$\frac{\text{plus } x_2}{\int dy_1 \text{ plus } x_2}$$

$$= \frac{\rho(x_1, x_2)}{N}$$

(Müller, unveröffentlicht)

Satz Sei $\gamma \in \mathcal{Y}^{-1}(L^2(\mathbb{R}^3))$ $\gamma \in \mathcal{Y}^{-1}(L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^q))$

Sp $\gamma = N \times W$. Dann existiert eine ^{symmetrische} N -Teilchendichtematrix Γ , sodaß γ die zugehörige Einteilchendichtematrix von Γ ist, genau dann wenn $0 \leq \gamma \leq 1$

Weiter ist es im Allgemeinen nicht wahr, dass Γ ein reiner Zustand ($\Gamma^2 = \Gamma$) gewählt werden kann. Tatsächlich existiert im Fall, dass γ $N-1$ Eigenwerte gleich 1 hat und mindestens $N+1$ positive Eigenwerte hat, kein reiner Zustand Γ .

\Rightarrow kann im wesentlichen Spektrum zeigen, da $N \geq 1$ Min

Beweis \Rightarrow Sei $\gamma \in \mathcal{Y}^{-1}(L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^q))$, $0 \leq \gamma \leq 1$, $\text{tr } \gamma = N$

15.1.16

Seien $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ die Eigenwerte von γ $\lambda_1, \lambda_2, \dots \geq 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = N$ Falls $\lambda_{N+1} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_N = 1 \Rightarrow \gamma$ ist Projektion, $\gamma^2 = \gamma$

$\Rightarrow \gamma$ kann als Skalar determinante geschrieben werden.

$\psi = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e_n \wedge e_n \wedge \dots \wedge e_n$ ist ein Zustand, dessen Dichtematrix γ ist

Sei nun $\lambda_{N+1} > 0$. $N \geq \sum_{n=1}^{N+1} \lambda_n \geq (N+1) \lambda_{N+1} \Rightarrow \lambda_{N+1} \leq \frac{N}{N+1} < 1$

$\chi_{N+1, \dots, N+1}(j) = \begin{cases} 1 & j=1, \dots, N \\ 0 & j > N \end{cases}$ $0 < \epsilon := \min\{\lambda_{N+1}, 1 - \lambda_{N+1}\} < 1 \in (0, 1)$

$\lambda_j = \epsilon \chi_{N+1, \dots, N+1}(j) + (1-\epsilon) f_j$ mit $f_j = \frac{\lambda_j - \epsilon \chi_{N+1, \dots, N+1}}{1-\epsilon} \leftarrow \forall \epsilon \in (0, 1)$

$j > N$: $\frac{f_j}{1-\epsilon} = \frac{\lambda_j}{1-\epsilon - \lambda_{N+1}} < \frac{\lambda_j}{\lambda_{N+1}} \leq 1$; $\frac{f_1}{1-\epsilon} > 0$ klar

$$j \in N \quad \frac{\lambda_j - \epsilon}{1 - \epsilon} \leq 1 \quad ; \quad \lambda_j - \epsilon \sum_{k=1}^M c_k \chi_k(j) = \lambda_j - \epsilon = \lambda_j - \min\{d_{jk}, 1 - \lambda_j\} \\ \geq \lambda_j - \lambda_j \geq 0$$

Ordne f_j abfallend an $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq 0$ (kann NP bei 1 möglich)

Herzere das Argument

$$\sum_{j=1}^N f_j = \frac{N}{1-\epsilon} - \frac{\epsilon}{1-\epsilon} N = \frac{N(1-\epsilon)}{1-\epsilon} = N$$

Jetzt iteriere das Argument, da die Voraussetzungen erfüllt sind und zweimal:

$$\lambda_j = \sum_{k=1}^M c_k \chi_k(j) + R_j^M \quad \text{Dabei ist } \chi_k \text{ eine charakteristische}$$

Funktion von M natürlichen Zahlen $\chi_k := \chi_{M_k} \quad M_k \in N \quad \text{card } M_k = N$

$$0 < c_k = \epsilon_k \prod_{j=1}^{k-1} (1 - \epsilon_j) < 1; \quad \sum_{k=1}^M c_k = \epsilon_1 + \epsilon_2(1 - \epsilon_1) + \epsilon_3(1 - \epsilon_2)(1 - \epsilon_1) + \dots + \epsilon_M(1 - \epsilon_{M-1}) \dots (1 - \epsilon_1) \leq 1$$

~~$$(1 - \epsilon_1)(1 - \epsilon_2) + 2\epsilon_1$$~~

$$\epsilon_1(1 - \epsilon_2) + \epsilon_2 \quad \text{z. Falle: a) } \sum_{k=1}^M c_k = 1 \Rightarrow R_j^M \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0, \quad \lambda_j = \sum_{k=1}^M c_k \chi_k(j),$$

d.h. jedes wähle nun Slaterdeterminanten χ_k^m , die genau aus den Basiselementen $e_{k_1} \dots e_{k_m}$ bestehen, für die $\chi_k(k_{k_1}) = 1$.

Dann erfüllt $V := \sum c_k |Y_k \times Y_k|$ die Anforderung

$$y(x, y) := \int V(x, x_2, \dots, x_n, y_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n = \sum c_k \int Y_k(x, x_2, \dots, x_n) \overline{Y_k}(y, x_2, \dots, x_n) \\ = \sum_k c_k \gamma^{(k)}(x, y) = \sum_k c_k \overline{\text{lineare Linearkombination}} (e_{k_{m_1}}(x) e_{k_{m_2}}(y) + \dots + e_{k_{m_n}}(x) e_{k_{m_n}}(y))$$

b) d. $\sum_{k=1}^M c_k < 1$... dieses geht nicht, führt zum Widerspruch (nächstes Mal!)

Umgekehrt: Γ Zustand $\Rightarrow 0 \leq \gamma_r \leq 1$

$$\Gamma \text{ ist Spurelement} \Rightarrow \int \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_a \alpha_n \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \overline{\psi_n(y_1, y_2, \dots, y_n)}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \int dx dy \overline{f(x)} \int dx_2 \dots dx_n \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n) f(y) &= \\ &= \sum_n \alpha_n \int f(x) \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \overline{\psi_n(y_1, y_2, \dots, y_n)} f(y) dx_2 \dots dx_n \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

$\gamma \leq 1$. Benutze 2. Quantisierung

Verdichtet $(C_\phi \psi)(z_1, \dots, z_n) = N \int \psi(z_1, \dots, z_n) \overline{\phi(z_n)} dz_n$

$$(C_\phi^\dagger \chi)(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{N} \chi \wedge \phi \quad \{C_\phi, C_\phi^\dagger\} = \langle \phi, \phi \rangle$$

$$\langle C_\phi \psi, C_\phi \psi \rangle = N \langle \phi, \phi \rangle \langle \psi, \psi \rangle$$

$$= N \int dz_1 \dots dz_n \int \psi(z_1, \dots, z_n) \overline{\phi(z_n)} dz_n \int \psi(z_1, \dots, z_n) \overline{\phi(z_n)} dz_n$$

$$\stackrel{FWD}{=} \int dz_n' dz_n'' \overline{\phi(z_n')} \chi(z_n', z_n'') \phi(z_n'') = \langle \phi, \chi \phi \rangle$$

$$\langle \chi, C_\phi^\dagger \phi \rangle_{N=1} = \langle C_\phi^\dagger \chi, \phi \rangle_N$$

$$\langle \phi, \chi \phi \rangle = \langle \chi, C_\phi^\dagger C_\phi \phi \rangle = \frac{1}{2} \langle \chi, \phi \rangle \langle \phi, \phi \rangle - \langle \chi, C_\phi C_\phi^\dagger \phi \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \chi, \phi \rangle \langle \phi, \phi \rangle - \langle C_\phi^\dagger \chi, C_\phi^\dagger \phi \rangle \leq 1$$

$$\vec{B}_M = \sum_{i=1}^M c_i$$

$$B_1 = \epsilon_M$$

$$B_2 = \epsilon_M (1 - \epsilon_{M-1}) + \epsilon_{M-1}$$

$$B_3 = \epsilon_M (1 - \epsilon_{M-1})(1 - \epsilon_{M-2}) + \epsilon_{M-1}(1 - \epsilon_{M-2}) + \epsilon_{M-2}$$

$$B_{i+1} = B_i (1 - \epsilon_{M-i}) + \epsilon_{M-i}$$

$$B_i \leq 1 \Rightarrow B_{i+1} \leq 1$$

$$\hookrightarrow \leq 1 - \epsilon_{M-i} + \epsilon_{M-i} = 1$$

22.1.16 $0 \leq \gamma \leq 1$ und $f = \gamma = N \Leftrightarrow \gamma = f_p$, d.h. γ ist die Einheitsbedichtematrix eines N -Teilchenzustands p

$$\gamma = \sum_j \lambda_j |j\rangle\langle j| \quad \lambda_j \in [0, 1], \quad \sum \lambda_j = N$$

$$\lambda_j = \sum_{k=1}^M c_k \chi_k(j) + R_j^M$$

1. Fall $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = 1 \checkmark \quad c_k = \epsilon_k + \frac{k-1}{\pi} (1-\epsilon_k) \quad \epsilon = \min\{\lambda_{11}, 1-\lambda_{11}\}$ im ersten Schritt

$$\lambda_j = \epsilon \chi_{21 \dots 11}(j) + (1-\epsilon) f_j$$

$$f_j \in [0, 1], \quad \sum_{j=1}^N f_j = N$$

2. Fall $d := \sum_{k=1}^{\infty} c_k < 1$

starke Konvergenz in ℓ^2

$(R_k^M)_{k \in \mathbb{N}}$ Behauptung: $\{R_k^M\} \rightarrow \{R_k\}$ mit der Eigenschaft $R_k < 1-d$

$$\sum_j R_j^M = \sum_j \left(\lambda_j - \sum_{k=1}^M c_k \chi_k(j) \right) = N - \sum_k c_k \sum_j \chi_k(j) = N - \sum_k c_k \cdot N = N(1-d)$$

$$R_j^M = \lambda_j - \sum_{k=1}^M c_k \chi_k(j) \leq 1$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} R_j^M = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\lambda_j - \sum_{k=1}^M c_k \chi_k(j) \right) = \lambda_j - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_k(j) < 1-d \quad \forall j \in \mathbb{J}$$

Da $\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_j |R_j^M - R_j| = 0$ mit Weierstraß kann das in Summe gezogen werden

λ_j ist gleichmäßige, summable Majorante

$$\leq |R_j^M| + |R_j| \leq \lambda_j + \lambda_j \rightarrow \sum_j \lambda_j < \infty$$

Definiere $r_j^M = \left(\frac{R_j^M}{1 - \sum_{k=1}^M c_k} \right)_{j=1}^{\infty}$ Wir ordnen uns, um eine monoton fallende Folge r_j^M (R_j^M) zu erhalten. Diese sei r_j^M

R_j^M hat Minimum, da durch λ_j beschr. und summabel (kann sich also nur bei 0 lösen)

ϵ_k

Behauptung $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k > 0$

$$r_j^M = \frac{R_{L_j}^M}{1 - \sum_{k=1}^M \epsilon_k} = \frac{d_j - \sum_{k=1}^M \epsilon_k R_k(L_j)}{1 - \sum_{k=1}^M \epsilon_k} \leq \frac{1-d}{1 - \sum_{k=1}^M \epsilon_k} = 1 \quad \forall j \in J$$

$$N = \sum_{j=1}^{\infty} r_j^M > \sum_{j=1}^{N+1} r_j^M > r_{N+1}^M \cdot (N+1) \Rightarrow \frac{N}{N+1} > r_{N+1}^M \Rightarrow 1 - r_{N+1}^M = \frac{1}{N+1}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} r_j^M = \frac{\sum_j d_j - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^M \epsilon_k R_k(L_j)}{1 - \sum_{k=1}^M \epsilon_k} = \frac{N - N \sum_{k=1}^M \epsilon_k}{1 - \sum_{k=1}^M \epsilon_k} = N \right)$$

$\epsilon_k \rightarrow 0$ impliziert nun

angenommen $\epsilon_k \rightarrow 0$, dann $r_N^M \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0$ (WARUM??)

Aber $r_j^M \rightarrow r_j \neq 0$ f. $M \rightarrow \infty$ $r_j = \frac{R_j}{1-d}$ ist absteigend ungerichtet

$$0 \leq r_j \leq 1 \text{ und } \sum r_j = N \stackrel{?}{\Rightarrow} r_0 > 0$$

Für $0 < \epsilon_j < 1$ gilt (allgemein)

$$\sum_{k=1}^M \epsilon_k \prod_{j=1}^{k-1} (1 - \epsilon_j) = 1 - \prod_{j=1}^M (1 - \epsilon_j), \text{ denn}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M (\alpha_{k-1} - \alpha_k) &= \alpha_0 - \alpha_M \\ &= 1 - \prod_{j=1}^M (1 - \epsilon_j) \end{aligned}$$

$$\alpha_k = \prod_{j=1}^k (1 - \epsilon_j)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{k-1} - \alpha_k &= \prod_{j=1}^{k-1} (1 - \epsilon_j) - \prod_{j=1}^k (1 - \epsilon_j) \\ &= \left(\prod_{j=1}^{k-1} (1 - \epsilon_j) \right) (1 - 1 + \epsilon_k) \\ &= \epsilon_k \prod_{j=1}^{k-1} (1 - \epsilon_j) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Anwendung auf unsere Fall:

$$1) \quad d = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k = 1 - \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \epsilon_k) = 1 \quad \checkmark$$

Weiter wurde behauptet, dass im Falle $\gamma = \sum_{n=2}^{N-1} |n\rangle\langle n| + \mu |N\rangle\langle N| + (1-\mu) |N+1\rangle\langle N+1|$,

dann γ nicht durch einen reinen Zustand darstellbar

Hier Beweis für $N=2$

$$\gamma = |f\rangle\langle f| + \mu |g\rangle\langle g| + (1-\mu) |h\rangle\langle h| \quad f, g, h \text{ orthonormal}$$

$$(C_\phi^\dagger \psi)(z_1, z_2) = \sqrt{N} \int \psi(z_1, z_2) \overline{\phi(z_2)} dz_2$$

$$\langle \phi, \gamma \phi \rangle = \langle \psi, C_\phi^\dagger C_\phi \psi \rangle \quad (C_\phi^\dagger \psi)(z_1, z_2) = \frac{1}{\sqrt{N}} \psi_1 \phi$$

Wähle $\phi = f$ $\langle f, \gamma f \rangle = \langle f, f \rangle$; Weiter nehme an, dass γ die reduzierte Einteilchendichtematrix von $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ ist (ψ 2-Teilchenzustand)

$$C_f^\dagger \psi = 0$$

$$\langle \phi, \gamma \phi \rangle = \langle \psi, C_\phi^\dagger C_\phi \psi \rangle = \langle \phi, \phi \rangle - \langle \psi, C_\phi^\dagger C_\phi \psi \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \psi, C_\phi^\dagger C_\phi \psi \rangle = \langle \psi, \psi \rangle \Rightarrow C_\phi \psi = 0$$

Behauptung: $C_f C_f^\dagger \psi = \psi = \mu \langle f, f \rangle \psi - C_f C_f^\dagger \psi = \mu \psi$

folgt die linke Seite $\int \psi(z_1, z_2) \overline{\phi(z_2)} dz_2$

$$\mu \int \frac{1}{\sqrt{2}} \psi(z_1, z_2) \overline{\phi(z_2)} dz_2 = \psi(z_1, z_2)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{2}} dz_2 \left| \phi(z_2) \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 &= \int dz_2 \left| \int dz_2 \psi(z_1, z_2) \overline{\phi(z_2)} \right|^2 \\ &= \int dz_1 \int dz_2 \int dz_1 \overline{\phi(z_2)} \phi(z_2) \psi(z_1, z_2) \overline{\psi(z_1, z_2)} \\ &= \int dz_2 \int dz_1 \overline{\phi(z_2)} \phi(z_2) \int dz_1 \psi(z_1, z_2) \overline{\psi(z_1, z_2)} \\ &= \int dz_2 \int dz_1 \overline{\phi(z_2)} \phi(z_2) \psi(z_1, z_2) \overline{\psi(z_1, z_2)} \end{aligned}$$

$\int \psi(z_1, z_2) \overline{\psi(z_1, z_2)} dz_1 = 1$

$$\Rightarrow \int \psi(z_1, z_2) \overline{\psi(z_1, z_2)} dz_1 = 1$$

$\Rightarrow \psi(z_1, z_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \det(\psi(z_{ij}))_{i,j=1,2} \Rightarrow \psi$ Slater ψ da γ EW echt zw. 0, 1 hat

Für diesen Term fällt quadratisch in der Elektronenzahl N
 Die kinetische Energie $\langle \Psi | \sum_j D(\mathbf{r}_j) | \Psi \rangle$ wächst jedoch nur linear
 (sh. Lieb, Solovay, KS: Verbesserung des Beweises bei M. Griesmer,
 Christian Tix Journal of Math. Phys)

Stabilität: $z = \frac{D(A)}{|D(A)|}$ Beachte $(D(A))^2 = \underbrace{(p-A)^2 + 0 \cdot \beta + m^2}_{> 0} > 0 \Rightarrow$ wieder
 Spektroskopie
 $(p-A) \cdot 0$

~~$D(A)^2 =$~~

Satz $z_1, \dots, z_n \leq \frac{2}{\pi \alpha}$, $\alpha \leq \alpha_c$ mit α_c eindeutige Lösung
 von $(16\pi L_{2,3} \alpha_c)^{2/3} = 1 - \frac{\alpha_c^2}{\alpha_c}$ mit $\alpha_c = \frac{1}{2} z - 2,2459 \sqrt{z} z^{2/3} + 1,0307 \sqrt{z}$

\Rightarrow Stabilität zweiter Art

Bemerkung Für $\alpha = \frac{1}{737}$ ist $z \leq 56$ garantiert

Stabilität ohne Magnetfeld (mit Beweis der diamagnetischen Ungleichung ersetzt) für Chandrasekhar-Operator

E.H. Lieb & H.-T. Yau

(einfacher Beweis)

$\sum_{n=1}^N |p - A|_{\nu} + \sqrt{2} \nu_c > 0$ mit $\frac{1}{\nu} \geq \frac{1}{\nu_c}$
 optimal aber möglich für Beweis Stabilität gegen diamagn. Ugl.

Bewe Lieb-Yau ursprünglich ohne A , aber der Beweis mit A kann leicht auf den Fall ohne A unter Anwendung der diamagn. Ugl. zurückgeführt werden kann.

$\Rightarrow E[\Psi] \geq \langle \Psi, \left(\sum_{n=1}^N D(A) + \frac{1}{\nu} |p - A|_{\nu} \right) \Psi \rangle + \frac{1}{8\nu} \int |\mathbf{B}|^2$

~~$\text{tr } h$~~ $\text{tr } h$

$\Lambda_+ D(A) \Lambda_+ = \Lambda_+ |D(A)| \Lambda_+$

$\text{tr } h = \frac{1}{8\nu} \int |\mathbf{B}|^2$

Wähle nun $-eA = A \cdot e$

$h = \Lambda_+ (D(A) - \kappa | \cdot | \cdot + eA) \Lambda_+$

11.12.15 $E[V] = \langle \Psi | \left(\sum_{n=1}^{\infty} D(A)_n + \alpha V_c \right) | \Psi \rangle$ mit Gradierung $\varepsilon = \frac{D(A)}{|D(A)|}$
 $+\frac{1}{8\pi} \int |B|^2$

$D(A)$ immer noch mit Lücke $|D(A)|^2 = (\alpha(p-A) + m\beta)^2$
 $= (\alpha(p-A))^2 + m^2$

$\sum_n |p-A|_n^2 + \alpha V_c \geq 0$

$\rightarrow E[V] = \langle \Psi | \sum_{n=1}^{\infty} (D(A)_n - \alpha(p+A)_n) | \Psi \rangle + \frac{1}{8\pi} \int |B|^2$

$N \leq 0$
 $A^* A \leq 0$

$\rightarrow \text{Sp} \left(\Lambda_+ (|D(A)| - \alpha(p+A)_n) \Lambda_+ + \frac{1}{8\pi} \int |B|^2 \right)$
 $\rightarrow \text{Sp} \left(\Lambda_+ (|D(A)| - \alpha(p+A)) \Lambda_+ \right) + \frac{1}{8\pi} \int |B|^2 \geq \text{Sp}(\Lambda_+ S \Lambda_+) + \frac{1}{8\pi} \int |B|^2$
 $\equiv S \geq S_+$

$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ unitär

$U^{-1} D(A) U = U^T D(A) U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sigma(p+A) \\ \sigma(p+A) & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sigma(p+A) & 1 \\ 1 & \sigma(p+A) \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} -1 & -\sigma(p+A) \\ -\sigma(p+A) & 1 \end{pmatrix} = -D(A)$ neg. Spektralraum wird in pos. und umgekehrt abgebildet

$U^{-1} \Lambda_+ U = \Lambda_- \quad U^{-1} \Lambda_- U = \Lambda_+$

Sei X selbstadjungiert und F eine Funktion auf \mathbb{R}

$F(U^{-1} X U) = U^{-1} F(X) U$. Wähle $F(t) = |t|$
Spektralwert

$\Rightarrow U^{-1} |D(A)| U = |U^{-1} D(A) U| = | -D(A) | = |D(A)|$

Zeige $U^{-1} S U = S$

$U^{-1} (|D(A)| - \alpha(p+A)) U = (U^{-1} (|D(A)| - \alpha(p+A)) U)$
 $= (|D(A)| - \alpha U^{-1} (p+A) U) = (|D(A)| - \alpha |U(p+A) U|)$
 $= (|D(A)| - \alpha(p+A)) = S \quad \checkmark$

negativ
 u
 (mit $F = \frac{1}{2}(|\cdot|)$)

$$\Rightarrow \text{Sp } h$$

$$\Rightarrow \text{Sp } h \Rightarrow \text{Sp}(U^{-1} S U) = \text{Sp}(U^{-1} U^{-1} U^{-1} S U U^{-1} U) \\ = \text{Sp}(S) = \frac{1}{2} \text{Sp}(S) \quad \Rightarrow \text{Sp}(S)$$

$$\Rightarrow \text{Sp}(U S U) = \frac{1}{2} \text{Sp}(S) = \frac{1}{2} \text{Sp}(|D(A)| - u(p+eA))$$

Faktor $\frac{1}{2}$ raus-
geholt

$$D(A)^2 = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} ; y = \left(\sigma \left(\frac{1}{i} \nabla + eA \right) \right)^2 = \underbrace{\left(\frac{1}{i} \nabla + eA \right)^2}_{\text{rot } A} + \underbrace{e \sigma \cdot B}_{\text{rot } A} + m^2$$

$\neq P(A)$ Pauli-Operator
nichtrelativistische limit \Rightarrow
im B-Feld mit Spinbahnkopplung

Wurzelzeichen ist Operator monoton

$$\sqrt{(P(A)^2 + m^2 - u(p+eA)^2)} \geq \sqrt{(P(A)^2 - u(p+eA)^2)}$$

$$\pi \geq \chi \left(\frac{P(A)^2}{+m^2 - u(p+eA)^2} \right)$$

$$-(P(A)^2 + m^2 - u(p+eA)^2) \pi_m \leq -(P(A)^2 - u(p+eA)^2) \pi_0$$

$$\Rightarrow \sqrt{-(P(A)^2 + m^2 - u(p+eA)^2)} \pi_m \geq \sqrt{-(P(A)^2 - u(p+eA)^2)} \pi_0$$

$$|\sigma \cdot B| \geq |B|$$

$$\stackrel{\text{BWS}}{\geq} -\text{Sp} \sqrt{-(P(A)^2 - u^2 \left(\frac{1}{i} \nabla + eA \right)^2)} + \frac{1}{8\pi} \int |B|^2$$

$$\geq -2 \sqrt{(1-u^2) \left(\frac{1}{i} \nabla + eA \right)^2 - e|B|}$$

$$\geq -2 \text{Sp} \sqrt{-(1-u^2) \left(\frac{1}{i} \nabla + eA \right)^2 - e|B|} + \frac{1}{8\pi} \int |B|^2$$

jetzt diamagn. Vgl.
(gilt nur für magn. Schröd.op
nicht f. Pauli-op.)

$$\geq -2 \text{Sp} \sqrt{-(1-u^2) (-\Delta) - e|B|} + \frac{1}{8\pi} \int |B|^2$$

$$\stackrel{\text{L.T.}}{\geq} -2 \mathcal{L}_{\frac{1}{2},3} \propto \left(1 - \left(\frac{u}{u_c} \right)^2 \right)^{-3/2} \int |B|^2 + \frac{1}{8\pi} \int |B|^2 \geq 0 \rightarrow \text{Rech. in Vbr}$$

Stabilität für N relativistische Elektronen im quantisierten Magnetfeld

aber: M. Grossmann & Christa Tix \rightarrow Instabilität mit $z = \frac{B_0}{10 \text{ T}}$

\hookrightarrow Kohärente Zustände / Photonen liefert klassisches Feld

$$\Delta \gg p^{rel} = v$$

$$p^{cl} = v$$

Elliott h. Lieb & Michael Loss

$$\mathcal{H}_N = \prod_{\nu=1}^N L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4) \otimes \mathcal{F}_{\text{Photonen}}$$

Operator des magn. Pots

$$\alpha \left(\frac{1}{i} \nabla + eA \right) + \beta = D(A) : L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4) \otimes \mathcal{F}_{\text{Photonen}} \quad \text{ist s.a.}$$

$$A_+ = \chi_{(0, \infty)}(D(A)) \quad \mathcal{H}_{\text{el. magnet.}} = A_+ (L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4) \otimes \mathcal{F}_{\text{Photonen}})$$

$$\mathcal{H}_N^{\text{phys}} = P^{N+} \mathcal{H}_N \quad P^{N+} : \text{Spektralprojektion wo alle } D(A) \text{ positiv}$$

Dazu werden wir zeigen daß die $D(A)$ paarweise kommutieren

$$\text{oder } \mathcal{H}_N = \bigotimes_{\nu=1}^N L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4) \rightarrow \mathcal{H}_N^{\text{phys}} = P^{N+} \mathcal{H}_N$$

17.12.15

$$D(A) = \alpha \left(\frac{1}{i} \nabla + e \text{id}_{\mathbb{R}^3} + e \text{id}_{\mathbb{R}^3} \otimes A \right)$$

$$\text{in } L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4) \otimes \mathcal{F}_0$$

$$\mathcal{F}_0 = \bigotimes_{n=0}^{\infty} \bigotimes_{\lambda=1}^3 \mathcal{H}_\lambda \quad \text{bosonisch}$$

Klassische Energie des Photonensfeldes (el. magnet.)

$$H^{\text{klassisch}} = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} E^2(x) dx + \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} B^2(x) dx$$

$B = \text{rot } A$, div $A = 0$ (Coulomb)

Fourierzerlegung des A -Feldes:

$$A(x) = \sum_{\lambda=1}^3 \int dk \frac{\epsilon_\lambda(k)}{|k|^{3/2}} \left(a_\lambda(k) e^{ikx} + a_\lambda^*(k) e^{-ikx} \right) \frac{\sqrt{\hbar c}}{2\pi}$$

$$B(x) = \sum_{\lambda=1}^3 \int dk \frac{1}{|k|^{3/2}} \text{rot } \epsilon_\lambda(k) \left(a_\lambda(k) e^{ikx} - a_\lambda^*(k) e^{-ikx} \right) \frac{\sqrt{\hbar c}}{2\pi}$$

$$E(x) = \frac{i\sqrt{\hbar c}}{2\pi} \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{dk}{|k|^{3/2}} |k| \epsilon_\lambda(k) \left(a_\lambda(k) e^{ikx} - a_\lambda^*(k) e^{-ikx} \right) \frac{\sqrt{\hbar c}}{2\pi} ?$$

Damit ergibt sich für $H^{\text{klassisch}} = \frac{\hbar c}{2} \sum_{\lambda=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} dk |k| \left\{ a_\lambda^*(k) a_\lambda(k) + a_\lambda(k) a_\lambda^*(k) \right\}$

Quantisierung $[a_\lambda(k), a_{\lambda'}(k')] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(k-k')$

Kann in analoger Weise für Fermionen realisiert werden und zwar auf dem bosonischen Fockraum

$$H_f := H_{\text{quantum}} = \hbar c \sum_{k=1}^{\infty} \int d^3k \underbrace{|k|}_{w(k)} a_k^*(k) a_k(k) \chi(|k| < \Lambda)$$

Bemerkung Für fixe Photonenzahl N ist dieser Operator nichts weiter als $(\vec{1} - \Delta)^{-1} \Psi(y_1, \dots, y_N)$

Prä-Hamiltonoperator des Systems von N Elektronen im Photonfeld

$$H'_N = \sum_{n=1}^N D_n(\Delta) + \alpha V_e + H_f$$

~~$$\Psi = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \psi_j(x_1, \dots, x_N; \epsilon_1, \dots, \epsilon_N)$$~~

$$\tilde{\Psi} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \tilde{\psi}_j \left(\underbrace{x_1, \dots, x_N}_{\text{elektrone}}, \underbrace{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N}_{\text{photonen}}, \underbrace{y_1, \dots, y_n}_{\text{photonen}}, \Lambda, \mu, \hbar \right)$$

jetzt Photonen im Impulsraum, Elektronen im Ortsraum

$$\Psi = (\dots, \psi_n(x_1, \dots, x_N; \epsilon_1, \dots, \epsilon_N; k_1, k_2, \dots, k_n), \dots)$$

$$a_k(k) \Psi = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} \psi_{n+1}(x_1, \dots, x_N; k_1, k_2, \dots, k; k_1, k_2, \dots)$$

$H_{\text{phys}}^N = P' H'_N P'$ genauer: Nehme die quadratische Form aber nur für
Proj. auf pos. Spektrum bei $\Psi = P' \tilde{\Psi}$

Definiere H_{phys} als durch die Form definierte Friedrichserweiterung

Satz Nehme an, dass ϵ und α für geg κ und $\epsilon \geq 0$

$$\bullet \kappa \geq \max \{ 64, 5, \pi \epsilon \}$$

$$\bullet (\kappa \epsilon)^2 \leq 1 - \epsilon \leq 1$$

$$\bullet \frac{(1-\epsilon)^2 \alpha}{(1-\epsilon - \kappa \epsilon^2)^2} \leq \frac{1}{8\pi \cdot 0.06}$$

erfüllen. Dann gilt $H_{\text{phys}}^N \geq \frac{18\hbar}{\pi} \frac{1}{N} - \frac{18\hbar}{\pi} \kappa C_2^3$

$$\text{mit } C_2^4 = \frac{N}{\kappa} \frac{6\sqrt{1-\epsilon} + \frac{\alpha}{2}(\sqrt{2\epsilon} + 2,3)^2}{\frac{27}{25}}$$

~~jetzt~~ Bemerkung Für $\alpha = \frac{1}{137}$ liefert das Beschränktheit für $\epsilon \leq 42$.

Beweis Morozov-Zellen \mathbb{R}^n , $L > 0$

$$B_k = \{x: |x - R_k| < 3L\} \quad B = \bigcup_k B_k$$

$$S_k = \{x: |x - R_k| < 2L\} \quad S = \bigcup_k S_k$$

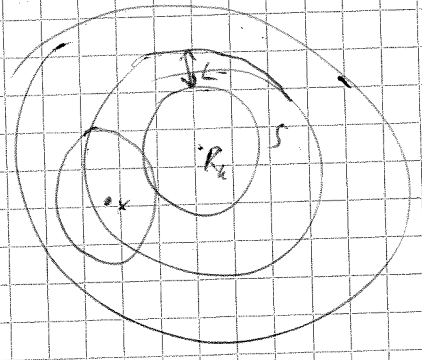
$\int_{\mathbb{R}^n} g = 1$
 $g \in W^{1,1}$, $\text{supp } g \subset \{ |x| \leq 1 \}$ $g_L = \frac{1}{L^3} g(\frac{x}{L})$ $\text{supp } g_L \subset \{ |x| \leq L \}$
 (siehe Abb. Integral)

$$\phi_1 = g_L * \chi_S \quad \phi_2 = 1 - \phi_1 \quad \int \phi_i = 1$$

$$F = \frac{\phi_1}{\phi_1^2 + \phi_2^2} \quad G = \frac{\phi_2}{\phi_1^2 + \phi_2^2} \quad F^2 + G^2 = 1$$

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = \phi_1^2 + (1 - \phi_1)^2 = 1 - 2\phi_1 + 2\phi_1^2 = (2\phi_1 - 1)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} > 0$$

$$\rightarrow \phi_1^2 + \phi_2^2 \geq \frac{1}{2}$$



$$F(x) = 1 \quad |x - R_k| < L$$

$$|\nabla F|^2 + |\nabla G|^2 = \frac{|\nabla \phi_1|^2 - \frac{\phi_1^2 \phi_2^2}{F^2}}{(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2} + \frac{|\nabla \phi_2|^2 - \frac{\phi_1^2 \phi_2^2}{G^2}}{(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2}$$

$$= \frac{|\nabla \phi_1|^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2 - \phi_1^2) + |\nabla \phi_2|^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2 - \phi_2^2)}{(\phi_1^2 + \phi_2^2)^{2+2}}$$

$$1 \geq \frac{\phi_1^4 + \phi_2^4}{(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2} \geq \frac{1}{2}$$

$$\leq \frac{|\nabla \phi_1|^2 (\phi_1^4 + \phi_2^4)}{(\phi_1^2 + \phi_2^2)^{2+1}} \leq \frac{2|\nabla \phi_1|^2}{\phi_1^2 + \phi_2^2}$$

$$\leq \frac{|\nabla \phi_1|^2}{\phi_1^2 + \phi_2^2} \leq 2|\nabla \phi_1|^2 \quad \text{etc.} \quad 4|\nabla \phi_1|^2 \quad (\text{last } P_0)$$

$$|\nabla \phi_1|^2 = \left| \int_S g_L(x-y) dy \right|^2 \stackrel{\text{majorierte Konvergenz}}{=} \left| \int_S (\nabla g_L)(x-y) dy \right|^2$$

$$\leq \frac{1}{L^2} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{L^3} (\nabla g)\left(\frac{x-y}{L}\right) dy \right|^2 \leq \frac{1}{L^2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} dy \frac{1}{L^3} |\nabla g\left(\frac{y}{L}\right)| \right)^2 = \frac{1}{L^2} (\int |\nabla g|)$$

wird minimiert durch $g = \frac{1}{4\pi R} \chi_{B(0)}$ $\rightarrow \nabla g = \frac{3}{4\pi} (-1) \frac{x}{|x|^3} \delta(|x|=1)$
 $\rightarrow \int |\nabla g| dx = 3$

$$\Rightarrow |\sigma F|^2 + |\sigma G|^2 \leq \frac{36}{L^2}$$

~~328~~

min {a, b} > a
min {-a, -b} > -a

Hamiltonoperator mit lokaler kinetischer Energie:

$$Q(A) = F |p + \sqrt{\alpha} A(x)| F = F \sqrt{(p + \sqrt{\alpha} A)^2} F$$

$$H_N^{loc} := \kappa \sum_{n=1}^N Q_n(A) + V_c \rightarrow \text{untere Schranke}$$

Satz Sei $A(x)$ ein Vektorfeld und gegeben seien N Fermionen mit g je

g Spinzuständen. Dann ist und $\kappa \geq \max \left\{ \frac{g}{20\pi}, \pi Z \right\}$ Dann ist

$$H_N^{loc} \geq -\frac{N}{2L} \max \left\{ (\sqrt{Z^2+1})^2, Z^2 + \frac{100}{2L} \right\} \stackrel{Z \geq 3}{\geq} -\frac{N}{2L} (\sqrt{Z^2+1})^2 \text{ für } Z \geq 3$$

~~falls $\kappa \geq \max \left\{ \frac{g}{20\pi}, \pi Z \right\}$~~

$$Z^2 + \frac{100}{2L} \leq Z^2 + \sqrt{Z^2+1} \Leftrightarrow \frac{100}{2L} \leq \sqrt{Z^2+1} \Rightarrow$$

Hilfsmittel Definiere W Zellweise in der Voronoi zelle J_k ($k=1, \dots, K$)

$$W(x) = \begin{cases} \frac{(\sqrt{Z^2+1})^2}{|x-R_k|} & \text{für } |x-R_k| \geq \frac{10}{11} D_k \quad x \in J_k \quad \text{monoton fallend für } |x| \text{ groß} \\ \frac{Z}{|x-D_k|} + \frac{121}{42} \frac{1}{D_k} & |x-R_k| < \frac{10}{11} D_k \end{cases}$$

Lieb & Kaw: 1) $V_c \geq \sum_{k=1}^N W(x_k) + \frac{Z^2}{8} \sum_{k=1}^K \frac{1}{D_k}$

aus Beweis zu Satz extrahiert

2) $\text{tr} \left((p + \sqrt{\alpha} A) - W(x) \right) \geq -\frac{Z^2}{8} \sum_{k=1}^K \frac{1}{D_k}$

geht mit demagnet Ungleichung rüberschmeißen

für $\kappa \geq \max \left\{ \frac{g}{20\pi}, \pi Z \right\}$

Beweis

$$H_N^{loc} \geq \kappa \sum_{n=1}^N Q_n(A) - \sum_{k=1}^N F(x_k)^2 W(x_k) + \sum_{k=1}^N (1-F(x_k))^2 W(x_k) + \frac{Z^2}{8} \sum_{k=1}^K \frac{1}{D_k}$$

Wir beachten $F(x) = 1$ falls $|x-R_j| \leq L$, d.h. $(1-F(x_k))^2 W(x_k)$

$$(1-F(x_k))^2 W(x_k) \leq \max \left\{ \frac{(\sqrt{Z^2+1})^2}{L}, \frac{Z}{L} + \frac{121}{42} \frac{1}{D_k} \right\}$$

$$\geq -\frac{N}{L} \max \left\{ \frac{(\sqrt{Z^2+1})^2}{L}, \frac{Z}{L} + \frac{121}{42} \frac{1}{\min D_k} \right\}$$

$$g \text{tr} \left(F \left(\kappa (p + \sqrt{\alpha} A) - W \right) F \right) \geq g \text{tr} \left(\kappa (p + \sqrt{\alpha} A) - W \right) \cdot g$$

$$\geq -\frac{Z^2}{8} \sum_{k=1}^K \frac{1}{D_k} \cdot g$$

d.h. $L = \frac{Z^2}{42} \geq \frac{Z}{100} \min D_k$

$$L = \frac{Z^2}{721} \min D_k \cdot \frac{1}{2}$$

7.1.16

$$E[4] = \langle 4, \left(\sum_{n=1}^N D(A)_n + \alpha V_c + W_g \right) 4 \rangle \quad \text{auf dem Teilraum } \chi_{(0, \infty)}(D(A)_n)$$

$$\underbrace{\chi_{(0, \infty)}(D(A)_n)}_{P^+}$$

$$D(A)_n \text{ in } L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4) \otimes \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{F}_8$$

lokalisierter Diracoperator: $Q(A) = F(x) |p + \text{Dir} A(x)| F(x)$

Strategie: 1) Benutze den lokalisierten Dirac-Operator (und die Anzahl der letzten Stellen), um das N -Teilchen-Problem auf ein Ein-Teilchen-Problem zu reduzieren. (\rightarrow starke untere Schranke an Summe der ersten N EW)

2) Reduktion von 4 Spins auf zwei Spins

3) BKS-Ungleichung $Sp(A-B) \leq Sp(\sqrt{(A^2-B^2)})$

4) Wende Lieb-Thirring auf $\inf \sigma \left(\sum_{n=1}^N (-\Delta_n - V_{c,n}) \right) \leq \text{const} \int V_c$

$$g^T \alpha_0 g = \gamma(\vec{x}, \vec{x}') = \sum_{\sigma=1}^4 \Gamma(\vec{x}, \sigma, \vec{x}', \sigma') \Big|_{\sigma=\sigma'} \leq 4 \text{ Spin-summierte, reduzierte Ein-Teilchen-Dichtematrix}$$

Tatsächlich können wir $\gamma(\vec{x}, \vec{x}') \leq 2$ fordern

$$P^+ \left(\sum_{n=1}^N D(A)_n + \alpha V_{c,n} \right) P^+ \geq P^+ \left(\sum_{n=1}^N \sqrt{T_n^{\text{rad}}(A) + m^2} - \alpha \kappa Q_n(A) \right) P^+ - \frac{\alpha N}{2L} (\sqrt{2B} + 2, B)^2 P^+$$

1 $\frac{\phi}{(i^2)}$ Wähle $L = \frac{\epsilon_2}{\lambda}$

$0 \leq \delta \leq 1$
 $\epsilon_3 > 0$

$$H_2 = P^+ \left(\sum_{n=1}^N \left(\sqrt{T_n^{\text{rad}}(A) + m^2} - \delta m - \alpha \kappa Q_n(A) + \epsilon_3 \right) \right) P^+$$

$E^- := \chi_{(0, \infty)}(D(A)) \quad Sp \left(\begin{pmatrix} E^- & S \\ S & E^- \end{pmatrix} \right)$ ist nach unten abzuschätzen für $S = \sqrt{T_n^{\text{rad}}(A) + m^2} - \delta m - \alpha \kappa Q_n(A) + \epsilon_3$

$E_n(H_2) \leq 0 \quad E_n(H_2) = P^+ S P^+ E_n(P^+ S P^+)$

Beachte: $S = \begin{pmatrix} \chi_1 & 0 \\ 0 & \chi \end{pmatrix}$ (blockdiagonal)

$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ unitär $E^- = U^{-1} \begin{pmatrix} E^- & 0 \\ 0 & E^- \end{pmatrix} U$

$$\text{Sp}^4 \begin{pmatrix} \delta^2 & S \\ S & \delta^2 \end{pmatrix} \leq \text{Sp}^2 y_- = \frac{1}{2} \text{Sp}^2 S \quad (\text{Analog zum Fall des skalaren Feldes})$$

Daher $\sum_n E_n(k_2) \approx -\text{Sp} \left(\sqrt{T_n^p(A) + m^2} - \delta m - \kappa \alpha Q_n(A) + c_3 \Lambda \right)$
 $E_n(k_2) \leq 0$

$A = \sqrt{T_n(A) + m^2} - \delta m + c_3 \Lambda$
 $B = \kappa \alpha Q_n(A)$

Jetzt $B(x) \approx -\text{Sp} \left[\sqrt{T_n^p(A) + m^2} - \delta m + c_3 \Lambda - \kappa^2 \alpha^2 Q_n^2(A) \right]^{1/2}$

$(a+b)^2 \approx a^2 + b^2$

$$\approx -\text{Sp} \left[(T_n^p(A) + m^2 - \delta m)^2 + c_3^2 \Lambda^2 - \kappa^2 \alpha^2 Q_n^2(A) \right]^{1/2}$$

$$\approx -\text{Sp} \left[(T^p(A) + m^2)(1-\epsilon) + (1-\frac{\epsilon}{2})m^2 \delta^2 + c_3^2 \Lambda^2 - \kappa^2 \alpha^2 Q_n^2(A) \right]^{1/2}$$

$$= -\text{Sp} \left[T^p(A)(1-\epsilon) + c_3^2 \Lambda^2 - \kappa^2 \alpha^2 Q_n^2(A) \right]^{1/2}$$

$\delta^2 \in \epsilon \rightarrow$ Mitternesterterm weg

Erinnerung IMS: $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_n^2 = 1$ $0 \leq \chi_n \leq 1$ $\int \chi_n^2 = 1$ $\int \chi_n = 1$ $\int \chi_n^3 = \frac{1}{2}$ $\int \chi_n^4 = \frac{1}{3}$

~~$$\langle \psi, \Delta \psi \rangle = \sum_n \langle \psi, \chi_n \Delta \chi_n \psi \rangle - \sum_n \int |\chi_n|^2 |\psi|^2$$~~

$$\langle \psi, -\Delta \psi \rangle = \sum_n \langle \psi, \chi_n (-\Delta) \chi_n \psi \rangle - \sum_n \int |\chi_n|^2 |\psi|^2$$

$\langle \psi, \int \chi_n^2 \psi \rangle$ (Lokalisationsfehler)

$$T^p(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{i} \partial + \alpha A \\ \end{pmatrix}^2 + \alpha \partial \cdot B$$

$$= -\Delta + \frac{1}{i} \alpha \partial A + \alpha A \partial + \alpha A^2 + \alpha \partial \cdot B$$

Mult. Operatoren
 ∂ in Leibniz

$$= -\Delta + 2\alpha \frac{1}{i} A \partial + \alpha A^2 + \alpha \partial \cdot B$$

$$\langle \psi, A \partial \psi \rangle = \sum_n \langle \psi, \chi_n A \partial \chi_n \psi \rangle + \text{Lok} \approx 0$$

$$= \frac{1}{2} \sum_n \langle \psi, A \partial (\chi_n^2) \psi \rangle + \sum_n \langle \psi, \chi_n^2 A \partial \psi \rangle$$

$$\Rightarrow T^p(A) = \sum_n \chi_n T^p(A) \chi_n - \sum_n |\chi_n|^2$$

Hier: $\chi_1 = F$, $\chi_2 = G$

≥ 0 (F wurde so gewählt)

$$\langle \psi, \int \chi_n^2 \psi \rangle \leq \frac{36}{L^2}$$

$$T^p(A) = F T^p(A) F + G T^p(A) G - \int (|F|^2 + |G|^2) \quad \left(\frac{23}{L^2} \right)$$

$$\approx F T^p(A) F - \int |F|^2 - \int |G|^2$$

8.1.16

Wähle $\epsilon_3 = \frac{2\sqrt{1-\epsilon}}{\epsilon_2} \int |\log| = \frac{2\sqrt{1-\epsilon}}{\epsilon_2} = \frac{2\sqrt{1-\epsilon}}{2 \cdot 1}$

$\rightarrow H_2 \geq -Sp \left((1-\epsilon) F T^p(A) F - \kappa^2 \alpha^2 Q_n(A) \right)^{1/2}$

$Q(x)^+ = \underbrace{F |p + \sqrt{\kappa} A(x)| F}_{\text{adjungierte von}} \underbrace{F |p + \sqrt{\kappa} A(x)| F}_{\text{adjungierte von}} \quad (AF \leq 1)$
 $\leq F |p + \sqrt{\kappa} A(x)|^2 F$

$\rightarrow H_2 \geq -Sp \left[F \left((1-\epsilon) T^p(A) - \kappa^2 \alpha^2 |p + \sqrt{\kappa} A(x)|^2 \right) F \right]^{1/2}$ $\chi_B F = F, \text{ supp } F \subset B$
 $= -Sp \left[F \left((1-\epsilon) \kappa^2 \alpha^2 |p + \sqrt{\kappa} A(x)|^2 + \chi_B \kappa^2 \sigma^2 \vec{B}(x) \right) F \right]^{1/2}$

Verwende ~~$F \times F \rightarrow (F \times F)$~~ $F \times F = F (\chi_B \kappa^2 \sigma^2) F \geq -F \chi_B F$
 allgemein $\rightarrow Sp(F \times F) \leq Sp(F \chi_B F) \rightsquigarrow Sp(\overline{F \times F}) \leq Sp$

$\rightarrow H_2 \geq -Sp \left[F \left((1-\epsilon) \kappa^2 \alpha^2 |p + \sqrt{\kappa} A(x)|^2 + (1-\epsilon) \kappa^2 \chi_B \sigma^2 \vec{B}(x) \right) F \right]^{1/2}$

Da $A^* A$ die selbe EV (angenommen) wie $A A^*$ hat

$Sp \sqrt{F y F} = Sp \sqrt{\underbrace{F y}_{A^*} \underbrace{y F}_{A}} = Sp \sqrt{y^{1/2} F F y^{1/2}} \leq Sp y^{1/2}$

$A A^* (A y) = \dots$
 $A^* A y = \dots$
 $A A^* y = \dots$

$H_2 \geq -Sp \left[\left((1-\epsilon) \kappa^2 \alpha^2 |p + \sqrt{\kappa} A(x)|^2 + (1-\epsilon) \kappa^2 \chi_B \sigma^2 \vec{B}(x) \right) F \right]^{1/2}$
 $= \sqrt{Sp} - Sp h^{1/2}$

Bemerkung Man kann zeigen dass bei μ nur ein Splazenzustand beiträgt (nicht wenn $\sigma \cdot B \geq -|B|$ abschätzt)

Michael Loss: Stability of matter in magnetic fields

1997 Proceedings der IAMP congresses

+ diamagnet. Kgl. $\kappa = 0.06$

Lieb-Thirring angewendet:

$H_2 \geq \frac{(1-\epsilon)^2 \kappa}{(1-\epsilon) \kappa^2 \alpha^2} \int_B |\vec{B}(x)|^2 dx$

Wir haben noch $\int_B |\vec{B}(x)|^2 dx$ von der Feldenergie dazu zu addieren

\rightarrow Wähle $-c \leq \frac{1}{8\kappa} \rightarrow 0$

Stabilität relativistischer Modelle f. große Z
 Offene Fragen: BKS Limit $Z \rightarrow$ ohne BKS möglich?

• relativistische no-pair-Operatoren: geht Dichte gegen TF?

□ Korrekturen in Kernnähe?

□ Zahl der gebundenen Zustände (N)

□ maximales N ?
 Elektronenzahl

• Detailliertes Verhalten des Spektrums

• Dynamisches Verhalten der Dichte?

Reduzierte Dichte-Matrix-Funktionaltheorie

$$TF: E_{TF}(p) = \int \left[\frac{3}{5} \gamma p(x)^{5/3} - V(x)p(x) \right] dx + \frac{1}{2} \int \frac{\rho(x)\rho(y)}{|x-y|} dx dy$$

$p \geq 0$
 $\int p = N$

Im Allgemeinen wird ein Funktional der Dichtematrix benötigt
 für allgemeine externe Potentiale

$$HF: E_{HF}(\gamma) = \text{Sp}((-\Delta - V)\gamma) + \frac{1}{2} \int \frac{\gamma(x,x)\gamma(y,y) - |\gamma(x,y)|^2}{|x-y|} dx dy$$

$\gamma = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

NB: $0 \leq \gamma \leq 1$ $\int \gamma = N$ $\gamma \in \mathcal{Y}^+(L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2))$

(glatte Dichte widerspricht Pauliprinzip? ba
 $\hookrightarrow p$ geht hoch/locates \rightarrow Schalenprinzip)

Problem: N -Darstellbarkeit von p und γ und...

d.h. existiert ein Zustand $\Psi \in \mathcal{N}^N(L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2))$, sodaß für

gegebenes $p \in L^1$, $\int p = N$, $p(x) = N^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\Psi(x_1, x_2, \dots, x_N)|^2 dx_2 \dots dx_N = p_N(x)$

14. 1. 16

N-Darstellbarkeitsproblem

1. Motivation Hier nur für Fermionen

$$H_N = \sum_{n=1}^N h_n + \sum_{1 \leq n < m \leq N} W_{nm} \quad \mathcal{H}^N = \prod_{n=1}^N \mathcal{H}_n$$

Erster Fall: $W_{nm} = 0 \quad \forall n, m$

γ sei die Einteilchendichtematrix eines N -Teilchen-Zustands

$$H = \sum_{n,m} h_{nm} a_n^\dagger a_m \quad a_n^\dagger \text{ am Erzeuger, Vernichter zu}$$

gegebener ONB e_1, e_2, \dots $h_{nm} = \langle e_n, h e_m \rangle$

Zustand ρ :

$$\rho(H_N) = \sum_{n,m} h_{nm} \underbrace{\rho(a_n^\dagger a_m)}_{=: \gamma_{nm} \gamma_{mn}} = \sum_{n,m} h_{nm} \gamma_{mn} =$$

$$= \sum_{n,m} \langle e_n, h e_m \rangle \langle e_m, \gamma e_n \rangle = \text{Sp}(h \gamma)$$

da H Teilchenzahl-erhaltend

$$\inf_{\rho \in \mathcal{L}(H_N)} \rho(H) = \inf_{\rho \text{ N-Teilchen Zustand}} \rho(H) = \inf_{\gamma} \text{Sp}(h \gamma) \quad \begin{matrix} \text{kommt von} \\ \text{N-Teilchen } \rho \end{matrix}$$

Das
sel
wie

Erinnerung Zustand $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{F})'$ mit $\rho(A^*A) \geq 0$ $\rho(1) = 1$

Der Raum der
beschr. lin. Op über
dem Fockraum

$$\tilde{\rho} = \sum_{\nu} \lambda_{\nu} |\varphi_{\nu}\rangle \langle \varphi_{\nu}| \quad \varphi_{\nu} \text{ ONB von } \mathcal{H}^N \text{ und } \lambda_{\nu} \in [0,1]$$

$$\rho(A) = \text{Sp}(A \tilde{\rho})$$

$$\sum_{\nu} \lambda_{\nu} = 1$$

Upshot: Wenn die Menge der Einteilchendichtematrixes, also die Menge der Spurklassenoperatoren γ , die durch die Formel $\gamma_{mn} = \langle e_m, \gamma e_n \rangle = \rho(a_n^\dagger a_m)$ definiert werden, einfach charakterisiert werden kann, dann ist die Vielteilchenminimierung reduziert auf eine Einteilchenminimierung.

Zweitteilchendichtematrix analog; jetzt aber mit $W \neq 0$

$$H = \sum_{n,m} h_{nm} a_n^\dagger a_m + \sum_{n,m,k,l} W_{nmkl} a_n^\dagger a_m^\dagger a_k a_l$$

$$\psi \in \bigwedge_{n=1}^N L^2(\mathbb{R}^3)$$

und noch spezieller $\psi_j = L^2(\mathbb{R}^3)$ $\rho = \sum \lambda_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$

$$\psi_j \in \bigwedge_{n=1}^N L^2(\mathbb{R}^3)$$

$$\text{Sp}(\rho \sum_{n,m} W_{nm}) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \sum_{k_1, \dots, k_N \in \mathbb{N}} \langle \psi_j, W(x_1 - x_m) \psi_j \rangle$$

$$\psi_j \in \bigwedge_{n=1}^N L^2(\mathbb{R}^3)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} W(x-y) \rho_j^{(N)}(x,y) dx dy = \int W(x-y) \rho^{(N)}(x,y) dx dy$$

mit $\rho_j^{(N)}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^{3(N-2)}} |\psi_j(x, y, x_3, \dots, x_N)|^2 dx_3 \dots dx_N$

$$\sum_j \lambda_j \rho_j^{(N)}(x,y) =: \rho^{(N)}(x,y)$$

D.h. wenn zusätzlich die Zweitteilchendichten $\rho^{(N)}$ die von einem N -Teilchenzustand herrühren, dann können wir durch die Grundzustandsenergie aus einem Zweitteilchenproblem gewinnen

$$\inf_{\substack{\rho: \text{Sp} \rho = 1 \\ \text{Sp} \rho = 1}} \text{Sp}(H_N \rho) = \inf_{\text{Sp} \rho = 1} \left(\text{Sp}(h_N) + \int \rho^{(N)}(x,y) W(x-y) dx dy \right)$$

$\rho^{(N)}$ röhren von N -Teilchen- ρ her

2. Modifikation

$$E_T(\rho) = \int \left(\frac{1}{2} \text{Sp} \rho \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{1}{|x|} \rho \right) + \frac{1}{2} \int dx dy \frac{\rho(x)\rho(y)}{|x-y|}$$

$\mathcal{D}(\rho)$

liefert zu tiefe Energien bei Minimierung über $\rho \in L^{5/3}$, $\mathcal{D}(\rho) < \infty$, $\rho \geq 0$, $\text{Sp} \rho = 1$

→ weil da zu Dichte eingesetzt werden, die nicht von einem N -Teilchenzustand kommen

Satz Sei $\int p \in \mathbb{N}$, $p \geq 0$. Dann existiert sogar eine Slater-determinante, deren Einteilchendichte $p(x)$ ist.

→ Slater schon sehr einfach → Restriktion von TF nicht weiter möglich, um höhere Energien zu bekommen

Beweis $L^2((0,1)^d)$ m_1, m_2, \dots, m_n ONB davon $\exists \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$

hier $m_{\vec{z}}(\vec{y}) = e^{2\pi i \vec{z} \cdot \vec{y}}$

Transformation: $J: \mathbb{R}^d \rightarrow (0,1)^d$, $\frac{\partial(x_1, \dots, x_d)}{\partial(y_1, \dots, y_d)} = \frac{p(x)}{N}$
 ↳ bijektiv

Wahl einer Slaterdet. $\frac{1}{N!} s_1 \wedge \dots \wedge s_N$

mit $s_{\vec{z}}(x) = \sqrt{f(x)} m_{\vec{z}}(x)$

$$\langle s_{\vec{z}}, s_{\vec{z}'} \rangle = \int dx f(x) m_{\vec{z}}(x) m_{\vec{z}'}(x)$$

$$= \int_{(0,1)^d} dy m_{\vec{z}}(y) m_{\vec{z}'}(y) = \delta_{\vec{z}, \vec{z}'}$$

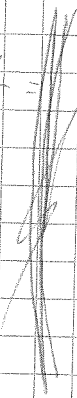
$$p(x) = \sum_{\vec{z}} |s_{\vec{z}}(x)|^2 = \sum_{\vec{z}} \frac{p(x)}{N} = p(x)$$

$$s_1(x) = \frac{\int_{-p}^{x_1} dy_1 p(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1)}{\int_{-p}^p dy_1 p(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1)}$$

$$s_2(x) = \frac{\int_{-p}^{x_1} dy_1 \int_{-p}^{x_2} dy_2 p(x_1, x_2, \dots, y_1, y_2)}{\int_{-p}^p dy_1 \int_{-p}^p dy_2 p(x_1, \dots, y_1, y_2)}$$

$$s_n(x) = \frac{\int_{-p}^{x_1} dy_1 \int_{-p}^{x_2} dy_2 \dots \int_{-p}^{x_n} dy_n p(y_1, y_2, \dots, y_n)}{N}$$

$$\frac{\partial \rho_{x_1, x_2}}{\partial x_1, x_2} =$$



$$\int_{-a}^a dy_1 \int_{-a}^a dy_2 \text{ (plus } x_1, x_2)$$

$$\begin{matrix} N \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}$$

$$\int_{-a}^a dy_1 \int_{-a}^a dy_2 \text{ (plus } x_1, x_2, y_1)$$

$$\int_{-a}^a dy_1 \int_{-a}^a dy_2 \text{ (plus } x_1, y_2)$$

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}$$

$$\frac{\text{plus } x_1}{\int dy_1 \text{ plus } y_1}$$

$$= \frac{\rho(x_1, x_2)}{N}$$

(Müller, unveröffentlicht)

Satz Sei $\gamma \in \mathcal{Y}^{-1}(L^2(\mathbb{R}^3))$ $\gamma \in \mathcal{Y}^{-1}(L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^q))$

Sp $\gamma = N \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine ^{semiblanche} N -Teilchendichtematrix Γ , sodaß γ die zugehörige Einteilchendichtematrix von Γ ist, genau dann wenn $0 \leq \gamma \leq 1$

Weiter ist es im Allgemeinen nicht wahr, dass Γ ein reiner Zustand ($\Gamma^2 = \Gamma$) gewählt werden kann. Tatsächlich existiert im Fall, dass γ $N-1$ Eigenwerte gleich 1 hat und mindestens $N+1$ positive Eigenwerte, kein reiner Zustand Γ .

\Rightarrow kann im wesentlichen Spektrum zeigen, da $N \geq 1$ Min

Beweis \Rightarrow Sei $\gamma \in \mathcal{Y}^{-1}(L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^q))$, $0 \leq \gamma \leq 1$, $\text{tr } \gamma = N$

15.1.16

Seien $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ die Eigenwerte von γ $\lambda_1, \lambda_2, \dots \geq 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = N$ Falls $\lambda_{N+1} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_N = 1 \Rightarrow \gamma$ ist Projektion, $\gamma^2 = \gamma$

$\Rightarrow \gamma$ kann als Skalar determinante geschrieben werden.

$\psi = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e_n \wedge e_n \wedge \dots \wedge e_n$ ist ein Zustand, dessen Dichtematrix γ ist

Sei nun $\lambda_{N+1} > 0$. $N \geq \sum_{n=1}^{N+1} \lambda_n \geq (N+1) \lambda_{N+1} \Rightarrow \lambda_{N+1} \leq \frac{N}{N+1} < 1$

$\chi_{N+1, \dots, N+1}(j) = \begin{cases} 1 & j=1, \dots, N \\ 0 & j > N \end{cases}$ $0 < \epsilon := \min\{\lambda_{N+1}, 1 - \lambda_{N+1}\} < 1 \in (0, 1)$

$\lambda_j = \epsilon \chi_{N+1, \dots, N+1}(j) + (1-\epsilon) f_j$ mit $f_j = \frac{\lambda_j - \epsilon \chi_{N+1, \dots, N+1}}{1-\epsilon} \leftarrow \forall \epsilon \in (0, 1)$

$j > N$: $\frac{f_j}{1-\epsilon} = \frac{\lambda_j}{1-\epsilon - \lambda_{N+1}} < \frac{\lambda_j}{\lambda_{N+1}} \leq 1$; $\frac{f_j}{1-\epsilon} > 0$ klar

$$j \in N \quad \frac{\lambda_j - \epsilon}{1 - \epsilon} \leq 1 \quad ; \quad \lambda_j - \epsilon \sum_{k=1}^M c_k \chi_k(j) = \lambda_j - \epsilon = \lambda_j - \min\{d_{jk}, 1 - \lambda_j\} \\ \geq \lambda_j - \lambda_k \geq 0$$

Ordne f_j abfallend an $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq 0$ (kann NP bei 1 möglich)

Herzere das Argument

$$\sum_{j=1}^N f_j = \frac{N}{1-\epsilon} - \frac{\epsilon}{1-\epsilon} N = \frac{N(1-\epsilon)}{1-\epsilon} = N$$

Jetzt iteriere das Argument, da die Voraussetzungen erfüllt sind und zweimal:

$$\lambda_j = \sum_{k=1}^M c_k \chi_k(j) + R_j^M \quad \text{Dabei ist } \chi_k \text{ eine charakteristische}$$

Funktion von M natürlichen Zahlen $\chi_k := \chi_{M_k} \quad M_k \in N \quad \text{card } M_k = N$

$$0 < c_k = \epsilon_k \prod_{j=1}^{k-1} (1 - \epsilon_j) < 1; \quad \sum_{k=1}^M c_k = \epsilon_1 + \epsilon_2(1 - \epsilon_1) + \epsilon_3(1 - \epsilon_2)(1 - \epsilon_1) + \dots + \epsilon_M(1 - \epsilon_{M-1}) \dots (1 - \epsilon_1) \leq 1$$

~~$$(1 - \epsilon_1)(1 - \epsilon_2) + 2\epsilon_2$$~~

$$\epsilon_1(1 - \epsilon_2) + \epsilon_2 \quad \text{z. Falle: a) } \sum_{k=1}^M c_k = 1 \Rightarrow R_j^M \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0, \quad \lambda_j = \sum_{k=1}^M c_k \chi_k(j),$$

d.h. jedes wähle nun Slaterdeterminanten χ_k^m , die genau aus den Basiselementen $e_{k_1} \dots e_{k_m}$ bestehen, für die $\chi_k(k_{k_1}) = 1$.

Dann erfüllt $V := \sum c_k |Y_k \times Y_k|$ die Anforderung

$$y(x, y) := \int V(x, x_2, \dots, x_n, y_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n = \sum c_k \int Y_k(x, x_2, \dots, x_n) \overline{Y_k}(y, x_2, \dots, x_n) \\ = \sum_k c_k \gamma^{(k)}(x, y) = \sum_k c_k \overline{\text{lineare Linearkombination}} (e_{k_{m_1}}(x) e_{k_{m_2}}(y) + \dots + e_{k_{m_n}}(x) e_{k_{m_n}}(y))$$

b) d. $\sum_{k=1}^M c_k < 1$... dieses geht nicht, führt zum Widerspruch
(nächstes Mal!)

Umgekehrt: Γ Zustand $\Rightarrow 0 \leq \gamma_r \leq 1$

$$\Gamma \text{ ist Spurelement} \Rightarrow \int_{\Gamma} \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_{\Gamma} \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}(x_1, x_2, \dots, x_n) \overline{\psi_{\alpha}(y_1, y_2, \dots, y_n)}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \int dx dy \overline{f(x)} \int dx_2 \dots dx_n \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n) f(y) &= \\ &= \sum_{\alpha} \int f(x) \int \psi_{\alpha}(x_1, x_2, \dots, x_n) \overline{\psi_{\alpha}(y_1, y_2, \dots, y_n)} f(y) dx_2 \dots dx_n \\ &\quad \neq 0 \end{aligned}$$

$\gamma \leq 1$. Benutze 2. Quantisierung

Verdichtet $(C_+ \psi)(z_1, \dots, z_n) = N \int \psi(z_1, \dots, z_n) \overline{\phi(z_n)} dz_n$

$$(C_+^* \chi)(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{N} \chi \wedge \phi \quad \{C_+, C_+^*\} = \langle \phi, \phi \rangle$$

$$\langle C_+ \psi, C_+ \psi \rangle = N \langle \phi, \phi \rangle \langle \psi, \psi \rangle$$

$$= N \int dz_1 \dots dz_n \int \psi(z_1, \dots, z_n) \overline{\phi(z_n)} dz_n \int \psi(z_1, \dots, z_n) \overline{\phi(z_n)} dz_n$$

$$\stackrel{N \neq 0}{=} \int dz_n' dz_n'' \overline{\phi(z_n')} \chi(z_n', z_n'') \phi(z_n'') = \langle \phi, \chi \phi \rangle$$

$$\langle \chi, C_+^* \phi \rangle_{N=1} = \langle C_+^* \chi, \phi \rangle_N$$

$$\langle \phi, \chi \phi \rangle = \langle \chi, C_+^* C_+ \psi \rangle = \frac{1}{2} \langle \chi, \psi \rangle \langle \phi, \phi \rangle - \langle \chi, C_+ C_+^* \psi \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \chi, \psi \rangle \langle \phi, \phi \rangle - \langle C_+^* \chi, C_+^* \psi \rangle \leq 1$$

$$\vec{B}_M = \sum_{i=1}^M c_i$$

$$B_1 = \epsilon_M$$

$$B_2 = \epsilon_M (1 - \epsilon_{M-1}) + \epsilon_{M-1}$$

$$B_3 = \epsilon_M (1 - \epsilon_{M-1})(1 - \epsilon_{M-2}) + \epsilon_{M-1}(1 - \epsilon_{M-2}) + \epsilon_{M-2}$$

$$B_{i+1} = B_i (1 - \epsilon_{M-i}) + \epsilon_{M-i}$$

$$B_i \leq 1 \Rightarrow B_{i+1} \leq 1$$

$$\hookrightarrow \leq 1 - \epsilon_{M-i} + \epsilon_{M-i} = 1$$

22.1.16 $0 \leq \gamma \leq 1$ und $f = \gamma = N \Leftrightarrow \gamma = f_p$, d.h. γ ist die Einheitsbedichtematrix eines N -Teilchenzustands p

$$\gamma = \sum_j \lambda_j |j\rangle\langle j| \quad \lambda_j \in [0, 1], \quad \sum \lambda_j = N$$

$$\lambda_j = \sum_{k=1}^M c_k \chi_k(j) + R_j^M$$

1. Fall $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = 1 \checkmark \quad c_k = \epsilon_k + \frac{k-1}{\pi} (1-\epsilon_k) \quad \epsilon = \min\{\lambda_{11}, 1-\lambda_{11}\}$ im ersten Schritt

$$\lambda_j = \epsilon \chi_{21 \dots 11}(j) + (1-\epsilon) f_j$$

$$f_j \in [0, 1], \quad \sum_{j=1}^N f_j = N$$

2. Fall $d := \sum_{k=1}^{\infty} c_k < 1$

starke Konvergenz in ℓ^2

$(R_k^M)_{k \in \mathbb{N}}$ Behauptung: $\{R_k^M\} \rightarrow \{R_k\}$ mit der Eigenschaft $R_k < 1-d$

$$\sum_j R_j^M = \sum_j \left(\lambda_j - \sum_{k=1}^M c_k \chi_k(j) \right) = N - \sum_k c_k \sum_j \chi_k(j) = N - \sum_k c_k \cdot N = N(1-d)$$

$$R_j^M = \lambda_j - \sum_{k=1}^M c_k \chi_k(j) \leq 1$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} R_j^M = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\lambda_j - \sum_{k=1}^M c_k \chi_k(j) \right) = \lambda_j - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_k(j) < 1-d \quad \forall j \in \mathbb{J}$$

Da $\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_j |R_j^M - R_j| = 0$ mit Weierstraß kann das in Summe gezogen werden

λ_j ist gleichmäßige, summable Majorante

$$\leq |R_j^M| + |R_j| \leq \lambda_j + \lambda_j \rightarrow \sum_j \lambda_j < \infty$$

Definiere

$$r_j^M = \left(\frac{R_j^M}{1 - \sum_{k=1}^M c_k} \right)_{j=1}^{\infty}$$

Wir ordnen uns, um eine monoton fallende Folge r_j^M (R_j^M) zu erhalten. Diese sei r_j^M

R_j^M hat Minimum, da durch λ_j beschr. und summabel (kann sich also nur bei 0 lösen)

ϵ_k

Behauptung $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k > 0$

$$r_j^M = \frac{R_{L_j}^M}{1 - \sum_{k=1}^M \epsilon_k} = \frac{d_j - \sum_{k=1}^M \epsilon_k R_k(L_j)}{1 - \sum_{k=1}^M \epsilon_k} \leq \frac{1-d}{1 - \sum_{k=1}^M \epsilon_k} = 1 \quad \forall j \in J$$

$$N = \sum_{j=1}^{\infty} r_j^M > \sum_{j=1}^{N+1} r_j^M > r_{N+1}^M \cdot (N+1) \Rightarrow \frac{N}{N+1} > r_{N+1}^M \Rightarrow 1 - r_{N+1}^M = \frac{1}{N+1}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} r_j^M = \frac{\sum_j d_j - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^M \epsilon_k R_k(L_j)}{1 - \sum_{k=1}^M \epsilon_k} = \frac{N - N \sum_{k=1}^M \epsilon_k}{1 - \sum_{k=1}^M \epsilon_k} = N \right)$$

$\epsilon_k \rightarrow 0$ impliziert nun

angenommen $\epsilon_k \rightarrow 0$, dann $r_N^M \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0$ (WARUM??)

Aber $r_j^M \rightarrow r_j \neq 0$ f. $M \rightarrow \infty$ $r_j = \frac{R_j}{1-d}$ ist absteigend ungerichtet

$$0 \leq r_j \leq 1 \text{ und } \sum r_j = N \stackrel{?}{\Rightarrow} r_0 > 0$$

Für $0 < \epsilon_j < 1$ gilt (allgemein)

$$\sum_{k=1}^M \epsilon_k \prod_{j=1}^{k-1} (1 - \epsilon_j) = 1 - \prod_{j=1}^M (1 - \epsilon_j), \text{ denn}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M (\alpha_{k-1} - \alpha_k) &= \alpha_0 - \alpha_M \\ &= 1 - \prod_{j=1}^M (1 - \epsilon_j) \end{aligned}$$

$$\alpha_k = \prod_{j=1}^k (1 - \epsilon_j)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{k-1} - \alpha_k &= \prod_{j=1}^{k-1} (1 - \epsilon_j) - \prod_{j=1}^k (1 - \epsilon_j) \\ &= \left(\prod_{j=1}^{k-1} (1 - \epsilon_j) \right) (1 - 1 + \epsilon_k) \\ &= \epsilon_k \prod_{j=1}^{k-1} (1 - \epsilon_j) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Anwendung auf unsere Fall:

$$1) d = \sum_{k=1}^{\infty} c_k = 1 - \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \epsilon_k) = 1 \quad \checkmark$$

Weiter wurde behauptet, dass im Falle $\gamma = \sum_{n=2}^{N-1} |n\rangle\langle n| + \mu |N\rangle\langle N| + (1-\mu) |N+1\rangle\langle N+1|$,

dann γ nicht durch einen reinen Zustand darstellbar

Hier Beweis für $N=2$

$$\gamma = |f\rangle\langle f| + \mu |g\rangle\langle g| + (1-\mu) |h\rangle\langle h| \quad f, g, h \text{ orthogonal}$$

$$(C_\phi^\dagger \psi)(z_1, z_2) = \sqrt{N} \int \psi(z_1, z_2) \overline{\phi(z_2)} dz_2$$

$$\langle \phi, \gamma \phi \rangle = \langle \psi, C_\phi^\dagger C_\phi \psi \rangle \quad (C_\phi^\dagger \psi)(z_1, z_2) = \frac{1}{\sqrt{N}} \psi_1 \phi$$

Wähle $\phi = f$ $\langle f, \gamma f \rangle = \langle f, f \rangle$; Weiter nehme an, dass γ die reduzierte Einteilchendichtematrix von $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ ist (ψ 2-Teilchenzustand)

$$C_f^\dagger \psi = 0 \quad \langle \phi, \gamma \phi \rangle = \langle \psi, C_\phi^\dagger C_\phi \psi \rangle = \langle \phi, \phi \rangle - \langle \psi, C_\phi^\dagger C_\phi \psi \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \psi, \psi \rangle = \langle C_f^\dagger \psi, C_f \psi \rangle \stackrel{F \text{ EW}}{\leq} \langle C_f^\dagger \psi, C_f^\dagger \psi \rangle \Rightarrow C_f \psi = 0$$

Behauptung: $C_f C_f^\dagger \psi = \psi = \mu \langle f, f \rangle \psi - C_f C_f^\dagger \psi = \mu \psi$

folgt die linke Seite $\int \psi(z_1, z_2) \overline{\phi(z_2)} dz_2$

$$\mu \int \frac{1}{\sqrt{N}} \psi(z_1, z_2) \overline{\phi(z_2)} dz_2 = \psi(z_1, z_2)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{N}} dz_2 \left| \phi(z_2) \frac{1}{\sqrt{N}} \right|^2 &= \int dz_2 \left\| \int dz_2 \psi(z_1, z_2) \overline{\phi(z_2)} \right\|^2 \\ &= \int dz_1 \int dz_2 \int dz_1 \overline{\phi(z_2)} \phi(z_2) \psi(z_1, z_2) \overline{\psi(z_1, z_2)} \\ &= \int dz_2 \int dz_1 \overline{\phi(z_2)} \phi(z_2) \int dz_1 \psi(z_1, z_2) \overline{\psi(z_1, z_2)} \\ &= \int dz_2 \int dz_1 \overline{\phi(z_2)} \phi(z_2) \psi(z_1, z_2) \overline{\psi(z_1, z_2)} = \int dz_2 \int dz_1 \overline{\phi(z_2)} \phi(z_2) \psi(z_1, z_2) \overline{\psi(z_1, z_2)} \end{aligned}$$

$\int \psi(z_1, z_2) \overline{\psi(z_1, z_2)} dz_1 dz_2 = 1$

$$\Rightarrow \psi(z_1, z_2) = \frac{1}{\sqrt{N}} \det(\phi(z_{ij}))_{i,j=1,2} \Rightarrow \psi \text{ Slater } \gamma \text{ da } \gamma \text{ EW echt zw. } 0, 1 \text{ hat}$$

Hausaufgabe 1

⊙

$$f \in L^2(\mathbb{R}^3) \quad a(f)(0,0,\dots,\psi_{n+1},0,\dots) = \sqrt{n+1} \int dx \overline{f(x)} \psi_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$a^*(f)(0,0,\dots,\psi_{n-1},0,\dots) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} f(x_j) \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

$a(f), a^*(f) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{F})$. Um $a^*(f) = (a(f))^*$ zu zeigen, genügt es daher zu

zeigen, dass $(\psi, a(f)[\varphi]) = (a^*(f)[\psi], \varphi) \quad \forall \psi, \varphi \in \mathcal{F} \quad \mathcal{F} = (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

~~$\varphi = (0, \dots, \varphi_{n+1}, 0, \dots)$~~ ~~$\psi = (0, \dots, \psi_{n+1}, 0, \dots)$~~ und dann mit Linearkombinationen auf ganz \mathcal{F} fortsetzen. $\varphi, \psi \in \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{F}^{(n)} \quad \mathcal{F}^{(n)} = \bigwedge_{n=1}^n \mathcal{F}_n \quad \text{alle } \mathcal{F}_n = L^2(\mathbb{R}^3)$

Wegen ~~Identitätsformel~~ ~~formel~~ (mit dem Skalarprodukt als ~~Sesquilinearform~~), genügt es

$$(\psi, a(f)[\varphi]) = \int dx \sqrt{n+1} \int dx_1 \dots dx_n \overline{\psi_n(x_1, \dots, x_n)} \int dx^3 f(x) \varphi_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$a(f)[\psi, \varphi] = \int_{n=0}^N \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \int dx_1 \dots dx_n dx_{n+1} \overline{\psi_n(x_1, \dots, x_n)}$$

$$= \sum_{n=0}^N \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \int dx_1 \dots dx_n dx_{n+1} \overline{\psi_n(x_1, \dots, x_n)} \int dx^3 f(x) \varphi_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} \overline{f(x_j)} \psi_n(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

$$a^*(f)(0,0,\dots,\psi_n,0,\dots)$$

$$= (a^*(f)[\psi], \varphi)$$

dann, da $\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{F}^{(n)} \subset \mathcal{F}$ dicht, kann man durch Abschließen die Behauptung zeigen

$$(\Psi, \{a(g), a^*(f)\} \Psi) = (\Psi, a(g) a^*(f) \Psi) + (\Psi, a^*(f) a(g) \Psi) = (a^*(g) \Psi, a^*(f) \Psi) + (a(f) \Psi, a(g) \Psi)$$

~~$$(\Psi, a(g) a^*(f) \Psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \int d^3x_1 \dots d^3x_n \overline{\Psi_n(x_1, \dots, x_n)} \cdot \frac{1}{n!} \cdot n! \int d^3x \overline{g(x)} \int d^3y f(y) \Psi_n(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$$~~

Betrachte $\Psi = (\underbrace{0, 0, \dots}_{n \text{ mal}}, \underbrace{A_n [\Psi_n \otimes \dots \otimes \Psi_n]}_{n+1 \text{ mal}}, 0, \dots)$ ~~$(\Psi, \{a(g), a^*(f)\} \Psi)$~~ Hausaufgabe 2

$$\{a^*(g), a^*(f)\} \Psi = a(g) \left[\underbrace{(0, \dots, \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} f(x_j) \Psi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}))}_{n+1 \text{ mal}} \right] +$$

$$a^*(f) \left[\underbrace{(0, \dots, \int d^3x \overline{g(x)} \Psi_n(x, x_1, \dots, x_n))}_{n-1 \text{ mal}} \right]$$

~~$$= (0, \dots, \int d^3x \overline{g(x)} f(x_j) \Psi(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) +$$~~

~~$$+ \int d^3x \overline{g(x)} f(x_j) \Psi(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n), 0)$$~~

$$= (0, 0, \dots, \int d^3x \overline{g(x)} f(x) \Psi_n(x, x_1, \dots, x_n), 0, \dots) + (0, \dots, \int d^3x \overline{g(x)} \sum_{j=2}^{n+1} f(x_j) \Psi_n(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) (-1)^{j+1})$$

$$+ (0, 0, \dots, \int d^3x \overline{g(x)} \sum_{j=1}^n f(x_j) \Psi_n(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) (-1)^{j+1})$$

~~$$= (0, 0, \dots, (g, f) (0, \dots, \Psi_n, 0, \dots))$$~~

Nach Bilden von Linear kombinationen folgt das Ergebnis

$$h_{\mu\nu} = \sum_{\alpha} -\Delta_{\alpha} - \frac{z}{|x_{\alpha}|}$$

$$a_{\mu} = a(e_{\mu})$$

Hausaufgabe 3 a (2)
1, wale

$$h_{\mu\nu} = (e_{\mu}, (-\Delta - \frac{z}{|x|}) e_{\nu})$$

$$\psi = (0, 0, \dots, \psi_n, 0, \dots)$$

$$\psi_n = \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_n} X^{\sigma_1, \dots, \sigma_n} e_{\sigma_1} \wedge \dots \wedge e_{\sigma_n}$$

$$h = \sum_{\mu, \nu} h_{\mu\nu} a_{\mu}^* a_{\nu}$$

$$h \psi_n = \sum_{\mu, \nu} h_{\mu\nu} a_{\mu}^* a_{\nu} \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_n} X^{\sigma_1, \dots, \sigma_n} e_{\sigma_1} \wedge \dots \wedge e_{\sigma_n}$$

$$= \sum_{\mu, \nu} h_{\mu\nu} a_{\mu}^* \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_n} X^{\sigma_1, \dots, \sigma_n} \sum_j (-1)^{j+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \underbrace{(e_{\nu}, e_{\sigma_j})}_{\delta_{\nu, \sigma_j}} e_{\sigma_1} \wedge \dots \wedge e_{\sigma_{j-1}} \wedge e_{\sigma_{j+1}} \wedge \dots \wedge e_{\sigma_n}$$

$$= \sum_{\mu, \sigma_j} h_{\mu\sigma_j} \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_n} X^{\sigma_1, \dots, \sigma_n} \sum_j (-1)^{j+1} \frac{1}{\sqrt{n}} \cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}} \left(e_{\mu} \otimes e_{\sigma_1} \otimes \dots \otimes e_{\sigma_{j-1}} \otimes e_{\sigma_{j+1}} \otimes \dots \otimes e_{\sigma_n} \right)$$

1) $U: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ mit $U\mathcal{F}_+ \subseteq \mathcal{F}_+$, $U(\mathcal{F}_+)^{\perp} \subseteq (\mathcal{F}_+)^{\perp}$ $f \in \mathcal{F}$

$\Psi^*(f) = a^*(\mathcal{L}_+ f) + ib(\mathcal{L}_- f)$ $\Psi(f) = a(\mathcal{L}_+ f) - ib^*(\mathcal{L}_- f)$

$\Phi(f) = \Psi(Uf)$

$U: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ $U\Psi(f) U^* = \Psi(Uf) = \Phi(f)$

$U_t := e^{-iHt}$ $a_t^*(f) = a^*(e^{-iHt} f)$

$\frac{d}{dt} a_t^*(f) = -ia^*(e^{-iHt} Hf) = -ia_t^*(Hf)$

a_t^* linear, $a_t^* \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ und $\frac{d}{dt} e^{-iHt} = -iH$ in Operatornorm

sh. auch VL

da $\|e^{-iHt}\| \leq 1$

e^{-iHt} stark stetige Halbgruppe

$b_t^*(f) = b^*(e^{-iHt} f)$

$\frac{d}{dt} b_t^*(f) = i b^*(e^{-iHt} Hf) = i b_t^*(Hf)$

b^* antilinear

genauer $\| \frac{1}{h} (a_{t+h}^*(f) - a_t^*(f)) + ia_t^*(Hf) \|$

$= \| \frac{1}{h} (a^*(e^{-i(t+h)H} f) - a^*(e^{-iHt} f)) + ia_{t+h}^*(e^{-iHt} f) \|$

~~$= \| \frac{1}{h} (a^*(e^{-i(t+h)H} f) - a^*(e^{-iHt} f)) + ia_{t+h}^*(e^{-iHt} f) \|$~~

bei b^* wird $i \leftrightarrow -i$ wegen

Antilinearität

$= \| a^* \left(\frac{e^{-iH(t+h)} - e^{-iHt}}{h} f \right) + ie^{-iHt} a^*(f) \|$

$= \| a^* \left(\left(\frac{e^{-iH(t+h)} - e^{-iHt}}{h} + iH \right) e^{-iHt} f \right) \|$

$\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \forall f$, da e^{-iHt} stark stetige Halbgruppe,

$a^* \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$, $\|\cdot\|$ stetig

$$2) \sum_i (b_1^* b_2^* b_3^* \Omega, b_1^* b_i^* b_3^* \Omega) = - \sum_i (b_1^* b_3^* \Omega, (\delta_{i2} - b_1^* b_2) b_i^* b_3^* \Omega)$$

$$= \sum_i (b_1^* b_3^* \Omega, b_1^* (\delta_{i2} - b_i^* b_2) b_3^* \Omega) = (b_1^* b_3^* \Omega, b_1^* b_3^* \Omega)$$

$$\Psi \in \mathcal{F}^{(0, N)} \quad \Psi = b_{v_1}^* \dots b_{v_N}^* \Omega$$

$$-H\Psi = \sum_{i,j} (g_i, H g_j) b_i^* b_j^* b_{v_1}^* \dots b_{v_N}^* \Omega =$$

$$(\delta_{jv_1} - b_{v_1}^* b_j) b_{v_2}^* \dots b_{v_N}^* = \delta_{jv_1} b_{v_2}^* \dots b_{v_N}^* - \delta_{jv_2} b_{v_1}^* b_{v_3}^* \dots b_{v_N}^* + b_{v_1}^* b_{v_2}^* b_j b_{v_3}^* \dots b_{v_N}^*$$

$$= \sum_{i,j} (g_i, H g_j) b_i^* \quad l=1, 2, \dots, N$$

$$= \sum_{i,l} (g_i, H g_{v_l}) b_i^* b_{v_1}^* \dots b_{v_{l-1}}^* b_{v_{l+1}}^* \dots b_{v_N}^* \Omega \quad (-1)^{l-1} = \sum_{i,l} (g_i, H g_{v_l}) b_{v_1}^* \dots b_{v_{l-1}}^* b_i^* b_{v_{l+1}}^* \dots b_{v_N}^* \Omega$$

$$-(\Psi, H\Psi) = \sum_{i,l} (b_{v_1}^* \dots b_{v_N}^* \Omega, (g_i, H g_{v_l}) b_{v_1}^* \dots b_{v_{l-1}}^* b_i^* b_{v_{l+1}}^* \dots b_{v_N}^* \Omega) \rightarrow \delta_{i,v_l}$$

$$= \sum_{l=1}^N (b_{v_1}^* \dots b_{v_{l-1}}^* b_{v_{l+1}}^* \dots b_{v_N}^* \Omega, b_{v_1}^* \dots b_{v_{l-1}}^* b_{v_{l+1}}^* \dots b_{v_N}^* \Omega) (g_{v_l}, H g_{v_l})$$

$$= \sum_{l=1}^N (g_{v_l}, H g_{v_l}) < 0, \text{ da } g_i \in (g_+)^+ \text{ dem negativen Spektralbereich des Diracoperators}$$

In diesem Falle $H(0) = H = D_0 = \sqrt{-\Delta + m^2}$, in Fourierdarstellung: $m \sqrt{\frac{\xi^2}{m^2} + 1} = m \langle \frac{\xi}{m} \rangle$

$$\Rightarrow (g_{v_l}, H g_{v_l}) = - \int |g_{v_l}(\xi)|^2 \sqrt{\xi^2 + m^2} \xi^2 d\xi$$

$$(g_{v_l}, H_- g_{v_l}) = - (g_{v_l}, H g_{v_l})$$

$$H_- = C H(0) C^{-1} = -H(0)$$

$$(b^*(f)\Omega, H b^*(f)\Omega)$$

$$\Rightarrow (\Psi, H\Psi) = \sum_j \int |g_{v_l}|^2 |\hat{D}_0|$$

$\Rightarrow A \Psi^* \Psi \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ $\Psi(B e_n) = \sum_x \Psi(e_x \langle e_x | B e_n \rangle) = \sum_x \langle e_x, B e_n \rangle \Psi(e_x)$

Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$. Zeige: $(A \Psi^* \Psi)^* = A^* \Psi^* \Psi$, $[A \Psi^* \Psi, B \Psi^* \Psi] = [A, B] \Psi^* \Psi$

$(\varphi, (A \Psi^* \Psi) \psi) = ((A \Psi^* \Psi)^* \varphi, \psi)$
 \parallel

$\sum_{j,k} \langle e_j, A e_k \rangle (\varphi, \Psi^*(e_j) \Psi(e_k) \psi) = \sum_{j,k} (\varphi, \Psi^*(A e_j) \Psi(e_j) \psi)$ da $\Psi^*(A e_j) \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$, da
 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $\Psi(e_j) \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$
 $= \sum_j (\Psi^*(e_j) \Psi(A e_j) \varphi, \psi)$

Ψ unitär
 $\Psi^*(A e_j) = \sum_k \langle e_k, A e_j \rangle \Psi^*(e_k) \Psi(e_k)$, denn
 Orthonormales Basis

$\Psi(A e_j) = \Psi(\sum_k |e_k\rangle \langle e_k | A e_j \rangle) = \sum_k \langle e_k | A e_j \rangle \Psi(e_k) = \sum_k \langle A e_j, e_k \rangle \Psi(e_k) = \sum_k \langle e_k, A^* e_j \rangle \Psi(e_k)$

$(\varphi, [A \Psi^* \Psi, B \Psi^* \Psi] \psi) = (\varphi, \sum_{i,j,k,l} \langle e_i, A e_j \rangle \langle e_k, B e_l \rangle [\Psi^*(e_i) \Psi(e_j), \Psi^*(e_k) \Psi(e_l)] \psi)$
 $= (\varphi, \sum_{i,k} [\Psi^*(A e_i) \Psi(e_i), \Psi^*(B e_k) \Psi(e_k)] \psi)$

$\{ \Psi(f_1), \Psi^*(f_2) \} = (f_1, f_2) \neq f_{1,2} \in \mathcal{H}$
 $\{ \Psi^*(f_1), \Psi^*(f_2) \} = 0$

$\Psi^*(B e_n) \Psi(e_n) \Psi^*(A e_i) \Psi(e_i) = \langle e_n, A e_i \rangle \Psi^*(B e_n) \Psi(e_i) - \Psi^*(A e_i) \Psi^*(B e_n) \Psi(e_i) \Psi(e_n)$
 $= \langle e_n, A e_i \rangle \Psi^*(B e_n) \Psi(e_i) - \langle e_i, B e_n \rangle \Psi^*(A e_i) \Psi(e_n) + \Psi^*(A e_i) \Psi(e_i) \Psi^*(B e_n) \Psi(e_n)$

$\Rightarrow \sum_{i,k} [\dots] = \sum_{i,k} -\langle e_n, A e_i \rangle \Psi^*(B e_n) \Psi(e_i) + \langle e_i, B e_n \rangle \Psi^*(A e_i) \Psi(e_n)$

$= \sum_{i,k,l} -\langle e_n, A e_i \rangle \langle e_l, B e_n \rangle \Psi^*(e_l) \Psi(e_i) + \sum_{i,k,l} \langle e_i, B e_n \rangle \langle e_l, A e_i \rangle \Psi^*(e_l) \Psi(e_n)$

$= \sum_{i,k,l} \underbrace{[\langle e_n, A e_i \rangle \langle e_l, B e_n \rangle + \langle e_n, B e_i \rangle \langle e_l, A e_n \rangle]}_{\langle e_n, [A, B] e_i \rangle} \Psi^*(e_l) \Psi(e_i) = \sum_{e_i} \langle e_n, [A, B] e_i \rangle \Psi^*(e_l) \Psi(e_i)$

$\langle e_n, [A, B] e_i \rangle = -\langle e_n | B | e_n \rangle \langle e_n | A | e_i \rangle + \langle e_n | A | e_i \rangle \langle e_n | B | e_n \rangle + \langle e_n | A | e_n \rangle \langle e_n | B | e_i \rangle - \langle e_n | B | e_n \rangle \langle e_n | A | e_i \rangle = \langle e_n | (A B - B A) | e_i \rangle$

$$(Kf)(p) = \int_{\mathbb{T}} \Lambda_+(p) \frac{1}{|p-q|^2} \Lambda_-(q) f(q) dq$$

$$\Rightarrow (K^* f)(p) \stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{T}} \Lambda_-(p) \frac{1}{|p-q|^2} \Lambda_+(q) f(q) dq$$

$$\text{tr}(A^*A) = \sum_i \langle \psi_i, A^*A \psi_i \rangle = \sum_i \|A \psi_i\|_2^2 = \sum_i \|\mathcal{F}A\mathcal{F}^{-1} \psi_i\|_2^2$$

(2)
(3. Woche)

$A = \Lambda_+ \frac{1}{|1|} \Lambda_- \Rightarrow$ sei ψ im Fourierraum, dann:

$$(\mathcal{F} \Lambda_+ \frac{1}{|1|} \Lambda_- \mathcal{F}^{-1} \psi)(p) = (\mathcal{F} \Lambda_+ \mathcal{F}^{-1} \underbrace{\mathcal{F} \frac{1}{|1|} \mathcal{F}^{-1}}_{\text{Multiplikationsoperator mit } \psi} \mathcal{F} \Lambda_- \mathcal{F}^{-1} \psi)(p)$$

$$= \mathcal{F} \psi \left(\Lambda_+(p) \frac{1}{|p|} * \Lambda_+ \right) \Lambda_+(p) \left(\frac{1}{|1|} * \Lambda_+(\cdot) \psi \right)(p) = \Lambda_+(p) \int dq \frac{1}{|p^2 - q|^2} \Lambda_-(q) \psi(q)$$

$$\Rightarrow \text{Integraloperator } (\mathcal{K}\psi)(p) = \int K(p, q) \psi(q) dq \quad \text{mit } K(p, q) = \Lambda_+(p) \frac{1}{|p-q|^2} \Lambda_-(q)$$

Mit Hilfe der Gitterung ist $\Lambda_{\pm}(p) = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\alpha p + \beta}{\sqrt{p^2 + 1}} \right) \Rightarrow \|K\|_{HS}^2 = \int \text{tr}_{\mathbb{C}^2} |K(p, q)|^2 dp dq$

$$\Rightarrow \text{Untersuche } I = \int \text{tr}_{\mathbb{C}^2} |K(p, q)|^2 dp dq = \int \text{tr}_{\mathbb{C}^2} \left(\Lambda_+(p) \frac{1}{|p-q|^2} \Lambda_-(q) \right)^2 dp dq \quad \text{da } \alpha, \beta \text{ selbstadjungiert sind}$$

$$\text{tr}_{\mathbb{C}^2} \left[\left(1 + \frac{\alpha p + \beta}{\sqrt{p^2 + 1}} \right)^2 \cdot \left(1 - \frac{\alpha q + \beta}{\sqrt{q^2 + 1}} \right)^2 \right] = \text{tr}_{\mathbb{C}^2} \left[\left(1 + \frac{p^2 + 1}{p^2 + 1} + 2 \frac{\alpha p + \beta}{\sqrt{p^2 + 1}} \right) \left(1 + \frac{q^2 + 1}{q^2 + 1} - 2 \frac{\alpha q + \beta}{\sqrt{q^2 + 1}} \right) \right]$$

$$\text{tr}_{\mathbb{C}^2} \sqrt{\quad} = 4 \text{tr}_{\mathbb{C}^2} \left[\left(1 + \frac{\alpha p + \beta}{\sqrt{p^2 + 1}} \right) \left(1 - \frac{\alpha q + \beta}{\sqrt{q^2 + 1}} \right) \right] = 4 \text{tr}_{\mathbb{C}^2} \left[1 - \frac{pq + 1 + \alpha p \beta + p \alpha \beta + q \beta \alpha}{(\sqrt{p^2 + 1})(\sqrt{q^2 + 1})} + \frac{\alpha p + \beta}{\sqrt{p^2 + 1}} \frac{-\alpha q + \beta}{\sqrt{q^2 + 1}} \right]$$

$$= 4 \left(1 - \frac{pq + 1}{\sqrt{p^2 + 1} \sqrt{q^2 + 1}} \right), \quad \text{da } \text{tr} \alpha = \text{tr} \beta = 0 \quad \text{und} \quad \text{tr} \alpha \beta = \text{tr} \beta \alpha = -\text{tr} \beta \alpha = 0$$

$$\int \text{tr}_{\mathbb{C}^2} |K(p, q)|^2 dp dq = 4 \int \left(1 - \frac{pq + 1}{\sqrt{p^2 + 1} \sqrt{q^2 + 1}} \right) \cdot \frac{1}{|p-q|^4} dp dq$$

$$\begin{aligned} 2u &= p - q \Rightarrow p = u + v \\ 2v &= p + q \Rightarrow q = v - u \end{aligned}$$

$$= \int \left(1 - \frac{v^2 - u^2 + 1}{\sqrt{(u+v)^2 + 1} \sqrt{(u-v)^2 + 1}} \right) \cdot \frac{1}{|u|^4} du dv \quad \begin{aligned} [(u+v)^2 + 1][(u-v)^2 + 1] &= [u^2 + v^2 + 2|u||v| \cos \theta + 1] \cdot \\ &= [u^2 + v^2 - 2|u||v| \cos \theta + 1] \end{aligned}$$

$$= 4\pi \cdot 2\pi \cdot \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{|u|^4} \left(1 - \frac{v^2 - u^2 + 1}{\sqrt{(1+u^2+v^2)^2 - 4u^2v^2 \cos^2 \theta}} \right) du dv = (1+u^2+v^2)^2 - 4u^2v^2 \cos^2 \theta$$

$$\Rightarrow 8\pi^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{|u|^4} \left(1 - \frac{v^2 - u^2 + 1}{\sqrt{(1+u^2+v^2)^2 - 4u^2v^2 \cos^2 \theta}} \right) du dv$$

$$= 8\pi^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{|u|^4} \left[2 - \frac{v^2 - u^2 + 1}{\sqrt{(1+u^2+v^2)^2 - 4u^2v^2 \cos^2 \theta}} \right] \text{Arccos} \left(\frac{2|u||v|}{1+u^2+v^2} \right) \cdot \frac{|v|^2}{|u|^2} du dv$$

$$I = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} d|u| d|v| \left[2 - \frac{u^2 - u^2 + 1}{|u||v|} \operatorname{Arccos} \left(\frac{2|u||v|}{u^2 + v^2 + 1} \right) \right] \frac{|v|^2}{|u|^2} \quad \operatorname{Arccos}(x) > x \quad (x > 0)$$

$$\Rightarrow 2 \int_{u^2 > v^2 + 1} du \int_0^{\infty} d|v| \left[1 - \frac{v^2 - u^2 + 1}{u^2 + v^2 + 1} \right] \frac{|v|^2}{|u|^2} \quad v^2 - u^2 + 1 < 0 \Rightarrow u^2 > v^2 + 1$$

$$\Rightarrow 2 \int_{u^2 > v^2 + 1} d|u| \int_{\mathbb{R}} d|v| \left[1 - \frac{v^2 - u^2 + 1}{u^2 + v^2 + 1} \right] \frac{|v|^2}{|u|^2} = 2 \int_{u^2 > v^2 + 1} d|u| \int_{\mathbb{R}} d|v| \frac{v^2}{u^2 + v^2 + 1} \frac{v^2}{|u|^2} \Rightarrow 2 \int_{u^2 > v^2 + 1} d|u| \int_{\mathbb{R}} d|v| \frac{v^2}{u^2 + v^2 + 1}$$

$$2 \int_{|u| > 1} \frac{v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} = 2 \int_{|u| > 1} \frac{v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} = 2 \int_0^{\infty} \frac{v^2 - 1}{v^2 + 1} = \int_0^1 \frac{v^2 - 1}{v^2 + 1} + \int_1^{\infty} \frac{v^2 - 1}{v^2 + 1}$$

Integraloperator $(K\psi)(p) = \int dq \frac{1}{|p-q|} \psi(q)$

$\Rightarrow \operatorname{Tr}(K^*K) = ?$

Kern in (u, v) Koordinaten: möglicherweise nicht stetig bei $u=0$

$$\lim_{|u| \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{v^2 - u^2 + 1}{(u^2 + v^2 + 1)^2 - 4u^2 v^2}}{(1 + v^2)^2} \quad \text{L'Hospital}$$

Da der Kern stetig in u, v ist, kann man die Spur über

$$f = f_+ \oplus f_- \quad \boxed{f_- = f_+^\dagger}$$

$$f_+ = \chi_{[0, \infty)}(H(e)) \underbrace{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)}_{-f}$$

$$C H(e) C^{-1} = -H(-e)$$

$$f_- = \chi_{(-\infty, 0]}(H(e)) f \quad \text{dann} \quad \chi_{(-\infty, 0]}(H(e)) + \chi_{[0, \infty)}(H(e)) = 1 \quad \chi_{(-\infty, 0]}(\cdot) + \chi_{[0, \infty)}(\cdot) = 1$$

Frage: $\chi_{(-\infty, 0]}(H(e)) \stackrel{?}{=} C \chi_{(-\infty, 0]}(H(e))$ (Siedentop) C unitärer Operator?

$$\stackrel{?}{=} \chi_{[0, \infty)}(C H(-e) C^{-1}) \quad (\text{Merz})$$

$$\text{in} \quad \Downarrow \quad \chi_{[0, \infty)}(-H(e)) = \chi_{(-\infty, 0]}(H(e)) = f_+^\dagger$$

$$C D(e) C^{-1} = -D(-e) \quad \Psi_u \text{ Positronenzustand}$$

$$-D(-e)\Psi_u = -\lambda_u \Psi_u \quad \lambda_u < 0$$

$$C D(e) C^{-1} \Psi_u = -\lambda_u \Psi_u \Rightarrow \cancel{D(e)} D(e) C^{-1} \Psi_u = -\lambda_u C^{-1} \Psi_u$$

$$\Rightarrow C^{-1} \Psi_u \text{ Positronenzustand mit pos. Energie}$$

$$D(e) \Psi_u = \overset{0}{\mu_u} \Psi_u$$

$$C D(e) C^{-1} \Psi_u = \mu_u \Psi_u$$

$$-D(-e) \Psi_u = \mu_u \Psi_u \Rightarrow D(-e) \Psi_u = -\mu_u \Psi_u$$

$$\Rightarrow C \Psi_u \text{ ist Elektronenzustand mit geflippter Ladung und geflippter Energie}$$

$$D_z = \begin{pmatrix} \sqrt{p^2 + m^2} - \alpha z \left(\frac{1}{|k|} \right)_{++} & -\alpha z \left(\frac{1}{|k|} \right)_{+-} \\ -\alpha z \left(\frac{1}{|k|} \right)_{-+} & \sqrt{p^2 + m^2} - \alpha z \left(\frac{1}{|k|} \right)_{--} \end{pmatrix}$$

↳ müssen HS sein, damit $\|D_{z \pm}^{-1} a^\dagger b^\dagger a\| < \infty$
 ↳ kommt von Zweitquantisierung von D_z

LMU MUNICH, INSTITUTE FOR MATHEMATICS

DIE AUSSERDIAGONALELEMENTE $\Lambda_+ \frac{1}{|\cdot|} \Lambda_-$ SIND NICHT HILBERT-SCHMIDT

KONSTANTIN MERZ UND CHRISTOPH KEHLE

Satz 1 ($\Lambda_+ \frac{1}{|\cdot|} \Lambda_-$ ist nicht Hilbert-Schmidt). *Es sei $D_0 = \alpha \cdot p + \beta$ der freie Diracoperator, welcher auf $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$ selbstadjungiert realisiert ist. Die Projektoren auf den positiven \mathcal{H}_+ beziehungsweise negativen \mathcal{H}_+^\perp Spektralbereichen von D_0 werden mit Λ_+ bzw. Λ_- bezeichnet. Sie sind mittels der Gradierung durch $\Lambda_\pm := \frac{1}{2}(1 \pm \tau)$ gegeben, wobei die Gradierung durch den freien Diracoperator erzeugt wird und $\tau = \frac{D_0}{|D_0|}$ ist. Nun gilt*

$$(0.1) \quad K := \Lambda_+ \frac{1}{|\cdot|} \Lambda_- \notin \mathfrak{S}^2(\mathcal{H}_+^\perp \rightarrow \mathcal{H}_+).$$

Beweis. Da im Fourierraum der Operator K ein Integraloperator ist und die Spur invariant bezüglich unitären Transformationen ist, werden wir die Spur von K^*K im Fourierraum bilden. Um den Integralkern zu berechnen wird bemerkt, dass

$$(0.2) \quad (\mathcal{F} \frac{1}{|\cdot|} \mathcal{F}^{-1} f)(p) = \left(\frac{1}{|\cdot|^2} * f \right)(p)$$

gilt und Λ_\pm zu Matrixmultiplikationsoperatoren im Fourierraum werden. Daher gilt

$$(0.3) \quad \begin{aligned} (\hat{K}f)(p) &= (\mathcal{F}K\mathcal{F}^{-1}f)(p) = (\mathcal{F}\Lambda_+\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\frac{1}{|\cdot|}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\Lambda_-\mathcal{F}^{-1}f)(p) \\ &= \Lambda_+(p) \left(\frac{1}{|\cdot|^2} * \Lambda_-f \right)(p) = \int_{\mathbb{R}^3} \Lambda_+(p) \frac{1}{|p-q|^2} \Lambda_-(q) f(q) \, dq \end{aligned}$$

Um zu überprüfen, ob der Integraloperator K ein Hilbert-Schmidt-Operator ist, berechnen wir seine Hilbert-Schmidt-Norm, welche durch

$$(0.4) \quad \|K\|_2^2 = \int \text{Sp}_{\mathbb{C}^4} |K(q, p)|^2 \, dp \, dq,$$

mit dem Integralkern $K(p, q) = \Lambda_+(p) \frac{1}{|p-q|^2} \Lambda_-(q)$, definiert ist. Dazu bemerken wir zunächst, dass mit $\text{Sp}(\alpha) = \text{Sp}(\beta) = \text{Sp}(\alpha\beta) = \text{Sp}(\Sigma) = 0$ die Spur in \mathbb{C}^4 des

Kerns

$$(0.5) \quad \text{Sp} \left[\left(1 + \frac{\alpha \cdot p + \beta}{\sqrt{p^2 + 1}} \right) \cdot \left(1 - \frac{\alpha \cdot q + \beta}{\sqrt{q^2 + 1}} \right) \right] = 4 \left(1 - \frac{pq + 1}{\sqrt{p^2 + 1} \sqrt{q^2 + 1}} \right)$$

ist. Hierbei ist $\Sigma = \text{diag}(\sigma, \sigma)$. Substituiert man nun $2u := p - q$ und $2v = p + q$ und verwendet Kugelkoordinaten für die neuen Variablen wird das Integral modulo einer Konstanten zu:

$$(0.6) \quad \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \int_{-1}^1 dx \left(1 - \frac{v^2 - u^2 + 1}{\sqrt{(1 + u^2 + v^2)^2 - 4u^2v^2x^2}} \right) \frac{u^2v^2}{u^4} \\ = \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \left[2 - \frac{v^2 - u^2 + 1}{|u||v|} \arcsin \left(\frac{2|u||v|}{1 + u^2 + v^2} \right) \right] \frac{v^2}{u^2}$$

Der zweite Summand im Integral wird positiv für den Fall, dass $u^2 > v^2 + 1$ ist. In diesem Fall kann man auch $\arcsin(x) > x$ für $x > 0$ nach unten abschätzen und erhält mit $c > 0$:

$$(0.7) \quad \int \text{Sp}_{\mathbb{C}^4} |K(p, p)|^2 dp \geq c \int_{u^2 > v^2 + 1} du \int_0^\infty dv \left[1 - \frac{v^2 - u^2 + 1}{u^2 + v^2 + 1} \right] \frac{v^2}{u^2} \\ \geq c \int_0^\infty dv \int_{u^2 > v^2 + 1} du \frac{v^2}{u^2} = c \int_0^\infty \frac{v^2}{\sqrt{v^2 + 1}} dv = \infty$$

□

KRITERIEN FÜR DIE REGULARITÄT VON POTENTIALEN DES DIRAC-OPERATORS — DER SPEZIALFALL DES COULOMB POTENTIALS



KONSTANTIN MERZ UND CHRISTOPH KEHLE
MERZ@MATH.LMU.DE KEHLE@MATH.LMU.DE

ZUSAMMENFASSUNG. Im Folgenden werden wir die Definition der Regularität von Störungen des Diracoperators motivieren und Kriterien hierfür finden. Es wird sich herausstellen, dass das Coulombpotential $-\frac{\lambda}{|x|}$ mit $\lambda \in (0, 1)$ nicht mit diesen Kriterien untersucht werden kann und es einer gesonderten Behandlung bedarf.

Date: 9. Mai 2016

Mathematisches Institut
Ludwig-Maximilians-Universität München .

1. DEFINITION DER REGULARITÄT

Wir betrachten den freien Diracoperator D_0 auf dem Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$ mit der Gradierung $\tau = \frac{D_0}{|D_0|}$ und wollen Kriterien für die Regularität einer Störung durch ein externes Potential V herleiten. Es seien $\Lambda_{\pm}^0 = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{D_0}{|D_0|}\right)$ die Projektionen auf den positiven bzw. negativen Spektralraum des freien und $\Lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{D}{|D|}\right)$ die Projektionen auf den positiven bzw. negativen Spektralraum des gestörten Diracoperators. Mit $f \in \Lambda_+ \mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_+$ und $g \in \Lambda_- \mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_-$ definieren wir neue Erzeuger und Vernichter mittels der Bogoliubov Transformationen

$$(1.1) \quad a'(f) = a(\Lambda_+^0 f) + b^*(\Lambda_-^0 f) = a(\Lambda_+^0 \Lambda_+ f) + b^*(\Lambda_-^0 \Lambda_+ f)$$

$$(1.2) \quad b'(g) = a^*(\Lambda_+^0 g) + b(\Lambda_-^0 g) = a^*(\Lambda_+^0 \Lambda_- g) - b(\Lambda_-^0 \Lambda_- g)$$

Die Transformationsmatrix $U = \begin{pmatrix} \Lambda_+^0 \Lambda_0 & \Lambda_+^0 \Lambda_- \\ \Lambda_-^0 \Lambda_+ & \Lambda_-^0 \Lambda_- \end{pmatrix}$ ist unitär, d.h. es gilt $U^*U = \begin{pmatrix} id_{\mathcal{H}_+} & 0 \\ 0 & id_{\mathcal{H}_-} \end{pmatrix}$ und $UU^* = \begin{pmatrix} id_{\mathcal{H}_+^0} & 0 \\ 0 & id_{\mathcal{H}_-^0} \end{pmatrix}$. Das Kriterium von Shale-Stinespring sagt, dass die Transformation U genau dann unitär implementierbar ist und es damit genau einen gekleideten Vakuumzustand gibt, wenn die Außerdiagonalterme $U_{+-} = \Lambda_+^0 \Lambda_-$ und $U_{-+} = \Lambda_-^0 \Lambda_+$ Hilbert-Schmidt Operatoren sind. Damit ist auch die Differenz wieder Hilbert-Schmidt, d.h. es muss

$$(1.3) \quad \Lambda_+ \Lambda_-^0 - \Lambda_- \Lambda_+^0 = \Lambda_+ \Lambda_-^0 - (1 - \Lambda_+) \Lambda_+^0 = \Lambda_+ (\Lambda_-^0 + \Lambda_+^0) - \Lambda_+^0 = \Lambda_+ 0 \Lambda_+^0 \in \mathcal{S}^2$$

sein. Die Bedingungen sind sogar äquivalent, denn

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \text{tr}(|\Lambda_+ \Lambda_-^0 - \Lambda_- \Lambda_+^0|^2) &= \text{tr}(\Lambda_+ \Lambda_-^0) + \text{tr}(\Lambda_- \Lambda_+^0) - \text{tr}(\Lambda_-^0 \Lambda_+ \Lambda_- \Lambda_+^0) - \text{tr}(\Lambda_+^0 \Lambda_- \Lambda_+ \Lambda_-^0) \\ &= \|\Lambda_+ \Lambda_-^0\|_2^2 + \|\Lambda_-^0 \Lambda_+\|_2^2. \end{aligned}$$

Wir können damit definieren, wann wir ein Potential regulär nennen.

Definition 1.1 Das Potential V ist regulär, wenn $\Lambda_+ - \Lambda_+^0 \in \mathcal{S}^2$ ist.

Bevor wir fortfahren, bemerken wir, dass im Sinne von Cauchy

$$(1.5) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta}{a + i\eta} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a d\eta}{a^2 + \eta^2} = \frac{\text{sgn}(a)}{\pi} \arctan(x)|_{-\infty}^{\infty} = \text{sgn}(a)$$

gilt. Mit Hilfe des Spektralkalküls für unbeschränkte, selbstadjungierte Operatoren, kann man deshalb

$$(1.6) \quad \text{sgn}(D_{(0)}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta}{D_{(0)} + i\eta}$$

schreiben. Wir werden später auch Kriterien für die Selbstadjungiertheit von D finden.

Die Differenz kann man mit obigem Wissen auch umschreiben in

$$(1.7) \quad \Lambda_+ - \Lambda_+^0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (R_{\eta} - R_{0,\eta}) d\eta \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (R_1 + R_2) d\eta \equiv \frac{1}{2\pi} (Q_1 + Q_2)$$

mit $R_{\eta} = (D - i\eta)^{-1}$, $R_{0,\eta} = (D_0 - i\eta)^{-1}$, $R_1 = -R_0 V R_0$ und $R_2 = R_0 V R_0 V R_0 (1 + V R_0)^{-1}$. Den Index η werden wir in Zukunft nicht mehr hinschreiben. Die zweite Identität folgt aus zweimaligem Anwenden der zweiten Resolventengleichung

$$(1.8) \quad R_0 - (-R) = -R_0 V R = -R_0 V R_0 + R_0 V R_0 V R_0 (1 + V R_0)^{-1},$$

da $R = R_0(1 + VR_0)^{-1}$ ist.

Wir kümmern uns zunächst um Q_1 im Fourierraum:

$$(1.9a) \quad \mathcal{F}(R_0 f)(p) = \mathcal{F}R_0\mathcal{F}^{-1}\hat{f}(p) = \hat{R}_0(p)\hat{f}(p)$$

$$(1.9b) \quad \mathcal{F}(V \cdot R_0 f)(p) = (\hat{V} * \widehat{R_0 f})(p)$$

$$(1.9c) \quad \mathcal{F}(R_0 V \cdot R_0 f)(p) = R_0(p)(\hat{V} * \widehat{R_0 f})(p)$$

Damit ist

$$(1.10) \quad (Q_1 f)(p) = \int Q_1(p, q) f(q) dq$$

mit dem Integralkern von Q_1 modulo Konstanten

$$(1.11) \quad \begin{aligned} Q_1(p, q) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \frac{\alpha p + \beta + i\eta}{p^2 + 1 + \eta^2} \hat{V}(p - q) \frac{\alpha q + \beta + i\eta}{q^2 + 1 + \eta^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \hat{V}(p - q) \frac{(\alpha p + \beta)(\alpha q + \beta) + i\eta(\alpha(p + q) + 2\beta) - \eta^2}{(p^2 + 1 + \eta^2)(q^2 + 1 + \eta^2)} \\ &= \pi \frac{\hat{V}(p - q)}{e_p + e_q} \left(\frac{(\alpha p + \beta)(\alpha q + \beta)}{e_p e_q} - 1 \right) \end{aligned}$$

und dem Quadrat der Energie $e_p^2 = p^2 + 1$. Analog könnte man mit dem Integralkern für Q_2 verfahren.

Im Folgenden Kapitel werden wir folgende Aussage beweisen:

Satz 1.2 *Erfüllt das Potential V die Integralkriterien (2.3) und*

- *ist $V_1 \in L^3$, so ist D selbstadjungiert*
- *ist $V_1 \in L^{\frac{15}{4} + \delta}$ für beliebiges $\delta > 0$, V relativ D_0 -kompakt und relativ D_0 -beschränkt mit D_0 -Schranke kleiner als 1, so ist V ein reguläres Potential.*

In Kapitel 3 werden wir die Bedingungen untersuchen, die das Coulombpotential erfüllen muss, um regulär zu sein.

2. HINREICHENDE KRITERIEN FÜR DIE REGULARITÄT

Im ersten Schritt verwenden wir die Dreiecksungleichung und erhalten, dass

$$(2.1) \quad \|\Lambda_+ - \Lambda_+^0\|_2 \leq \frac{1}{2\pi}(\|Q_1\|_2 + \|Q_2\|_2)$$

ist. Potentiale, die $\|Q_1\|_2 < \infty$ und $\|Q_2\|_2 < \infty$ erfüllen, sind damit regulär. Wegen der Verwendung der Dreiecksungleichung sind diese Kriterien hinreichend aber nicht notwendig.

2.1. Integralkriterien aus Q_1 . Mit Hilfe von $\Lambda_+^0(p) - \Lambda_-^0(p) = \operatorname{sgn}(D_0) = \frac{\alpha p + \beta}{e_p}$ und etwas Algebra bestimmt man die Hilbert-Schmidt-Norm von Q_1 zu:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \|Q_1\|_2^2 &= \int dp dq \operatorname{tr}_{\mathbb{C}^4}[Q_1^*(p, q)Q_1(p, q)] \\ &= \operatorname{const} \int dp dq \frac{|\hat{V}(p-q)|^2}{(e_p + e_q)^2} \operatorname{tr}_{\mathbb{C}^4}[\Lambda_+^0(p)\Lambda_-^0(q) + \Lambda_-^0(p)\Lambda_+^0(q)] \\ &= \operatorname{const} \int dp dq \frac{|\hat{V}(p-q)|^2}{(e_p + e_q)^2} \left(1 - \frac{p \cdot q + 1}{e_p e_q}\right) = \operatorname{const} \int dp |\hat{V}(p)|^2 \int dq \frac{1 - \frac{(p+q) \cdot q + 1}{e_{p+q} e_q}}{(e_{p+q} + e_q)^2} \end{aligned}$$

Man entwickelt nun das Integral über q für große und kleine p . Man stellt fest, dass es für kleine $|p|$ durch $\operatorname{const} p^2$ und für große $|p|$ durch $\operatorname{const} |p|$ beschränkt ist. Dies führt auf die Bedingungen

$$(2.3a) \quad \int_{|p| \geq a} |p| |\hat{V}(p)|^2 < \infty$$

und

$$(2.3b) \quad \int_{|p| \leq a} p^2 |\hat{V}(p)|^2 < \infty$$

für ein $a > 0$. Das bedeutet, dass man das Potential in einen Infrarot- und einen Ultraviolettteil

$$(2.4) \quad \hat{V}(p) = \hat{V}_1(p) + \hat{V}_2(p)$$

mit $\operatorname{supp} \hat{V}_1 \subset \{|p| \geq a\}$ und $\operatorname{supp} \hat{V}_2 \subset \{|p| \leq a\}$ zerlegen kann. Das bedeutet, dass

$$(2.5) \quad V \in (H^{1/2} + H^1)(\mathbb{R}^3)$$

ist. Wir fassen unser Ergebnis in einem ersten Satz zusammen.

Satz 2.1 *Existiert ein $a > 0$, sodass das Potential $V \in (H^{1/2} + H^1)(\mathbb{R}^3)$ im Sinne der Integrale (2.3), dann ist Q_1 ein Hilbert-Schmidt-Operator.*

2.2. Kriterien für die Selbstadjungiertheit. Damit $D = D_0 + V$ selbstadjungiert ist, müssen wir zeigen, dass V relativ D_0 -beschränkt ist mit D_0 -Schranke $\alpha < 1$. Es muss also ein $0 < \alpha < 1$ und ein $0 < \beta$ geben, sodass

$$(2.6) \quad \|Vf\| \leq \alpha \|D_0 f\| + \beta \|f\|$$

für alle $f \in \mathcal{D}(D_0)$ gilt. Mit den Integralkriterien (2.3) ist klar, dass $\hat{V}_2 \in L_1(\mathbb{R}^3)$ ist. Mittels der Hölder- und der Hausdorff-Young-Ungleichung folgt dann, dass

$$(2.7) \quad \|V_2 f\| \leq \|V_2\|_\infty \|f\|_2 \leq \text{const} \left\| \hat{V}_2 \right\|_1 \|f\|.$$

Funktionen $V_1 \in H^{1/2}$ kann man immer mit Hilfe des Bessel-Potentials $G_{1/2}$ und einer geeigneten Funktion $w \in L^2(\mathbb{R}^3)$ als Faltung darstellen:

$$(2.8) \quad V_1 = G_{1/2} * w$$

mit dem Bessel-Potential $G_{1/2}(x) = \text{const} e^{-|x|} \int_0^\infty e^{-t|x|} \left(t + \frac{t^2}{2}\right)^{3/4} dt$. Der Integralkern mit $y = 2t + t^2$, $dy = 2(t+1)dt$ und $y \mapsto (p^2 + 1)y$ sieht so aus:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \hat{G}_{1/2}(p) &= \int_0^\infty \frac{4 \cdot 2^{-3/4}(1+t)}{(p^2 + 1 + 2t + t^2)^2} (2t + t^2)^{3/4} dt = \int_0^\infty \frac{2^{1/4}}{(p^2 + 1 + y)^2} y^{3/4} dy \\ &= \text{const} \frac{1}{(p^2 + 1)^{1/4}} = \text{const} \langle p \rangle^{-1/2} \end{aligned}$$

mit dem japanischen Symbol $\langle x \rangle = \sqrt{1 + x^2}$. Damit ist die $H^{1/2}$ -Norm von V_1

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \|V_1\|_{H^{1/2}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} (1 + 2\pi|p|) \left| \hat{V}_1(p) \right|^2 dp \\ &\leq \|w\|_2^2 \sup_{p \in \mathbb{R}^3} \left| (1 + 2\pi|p|) \left| \hat{G}_{1/2}(p) \right|^2 \right| = \text{const} \|w\|_2^2 \sqrt{1 + 4\pi^2}. \end{aligned}$$

Das Supremum von letzterem Ausdruck wird für $|p| = 2\pi$ erreicht.

Als nächstes bemerken wir die punktweise Beschränktheit von $G_{1/2}$.

$$(2.11) \quad G_{1/2}(x) = \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{t}{|x|^2} + \frac{t^2}{2|x|^3} \right) e^{-t|x|} dt \leq \text{const} |x|^{-5/2}$$

wobei wir verwendet haben, dass $\left(\frac{t}{|x|^2} + \frac{t^2}{2|x|^3}\right) \leq \text{const} |x|^{-10/3} \left(t + \frac{t^2}{2}\right)$ für kleine $|x|$ immer gilt und $e^{-|x|} \left(\frac{t}{|x|^2} + \frac{t^2}{2|x|^3}\right) \leq \text{const} |x|^{-10/3} \left(t + \frac{t^2}{2}\right)$ mit Hilfe der Exponentialfunktion auch für große $|x|$ gilt. Nun wenden wir die allgemeine Young-Ungleichung an, um eine Abschätzung für die L^3 -Norm von V_1 zu erhalten:

$$(2.12) \quad \|V_1\|_3 \leq \|G_{1/2}\|_{6/5, w} \|w\|_2 \leq \text{const} \left\| |x|^{-5/2} \right\|_{6/5, w} \|w\|_2 < \infty,$$

da $\mu(x : |x|^{-5/2} > t) = (t^{-2/5})^3 = t^{-6/5} \leq \text{const} t^{-6/5}$ und damit $G_{1/2} \in L_w^{6/5}$ ist. Somit gilt mit Hilfe der Sobolev-Ungleichung in drei Dimensionen:

$$(2.13) \quad \|V_1 f\|_2 \leq \|V_1\|_3 \|f\|_6 \leq \text{const} \|V_1\|_3 \|\nabla f\|_2 \leq \text{const} \|V_1\|_3 \|D_0 f\|_2$$

Insgesamt hat man also

$$(2.14) \quad \|V f\|_2 \leq c_1 \|V_1\|_3 \|D_0 f\|_2 + c_2 \left\| \hat{V}_1 \right\| \|f\|.$$

$\|V_1\|_3$ kann nun beliebig klein gemacht werden, indem man die Zerlegung von V geschickt wählt. Wir haben damit folgenden Satz.

Satz 2.2 *Erfüllt V die Integralkriterien (2.3) und ist zudem $V_1 \in L^3$, so ist der gestörte Diracoperator $D = D_0 + V$ für eine geeignete Zerlegung des Potentials im Impulsraum selbstadjungiert auf $L^2(\mathbb{R}^3 : \mathbb{C}^4)$.*

2.3. Kriterien für die relative Kompaktheit des Potentials. Nach dem Satz von Weyl ist das wesentliche Spektrum von D_0 stabil unter Störungen V , wenn

$$(2.15) \quad (D_0 - z)^{-1} - (D - z)^{-1} = (D - z)^{-1}V(D_0 - z)^{-1},$$

mit $z \in \rho(D_0) \cap \rho(D)$, kompakt ist. Da die kompakten Operatoren auf \mathcal{H} ein Ideal bilden und $(D - z)^{-1}$ ein beschränkter Operator ist, ist $\sigma_{ess}(D_0) = \sigma_{ess}(D)$, wenn VR_0 kompakt ist. Wir können die relative Kompaktheit von V auf lokale Kompaktheit zurückführen.

Satz 2.3 a) Wenn $(D_0 - z)^{-1} - (D - z)^{-1}$ kompakt ist, so ist auch $((D_0 - z)^{-1} - (D - z)^{-1}) \chi(|x| < R)$ kompakt.

b) Wenn $((D_0 - z)^{-1} - (D - z)^{-1}) \chi(|x| < R)$ kompakt und $\lim_{R \rightarrow \infty} \left\| \left((D_0 - z)^{-1} - (D - z)^{-1} \right) \chi(|x| \geq R) \right\| = 0$ ist, so ist auch $(D_0 - z)^{-1} - (D - z)^{-1}$ kompakt.

Beweis. **AD a)** Da, wie oben bereits gesagt, das Produkt eines kompakten Operators mit einem beschränkten Operators wieder kompakt ist, impliziert (2.15), dass

$$(2.16) \quad \left((D_0 - z)^{-1} - (D - z)^{-1} \right) \chi(|x| < R)$$

wieder kompakt ist für alle $R > 0$. Hierbei ist $\chi(|x| < R)$ der beschränkte Multiplikationsoperator mit der charakteristischen Funktion auf dem Ball mit Radius R .

AD b) Wenn andererseits die Differenz der Resolventen bei Unendlich abfällt, also, wenn

$$(2.17) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \left\| \left((D_0 - z)^{-1} - (D - z)^{-1} \right) \chi(|x| \geq R) \right\| = 0,$$

dann impliziert (2.16), dass (2.15) wahr ist, denn

$$(2.18) \quad \begin{aligned} (D_0 - z)^{-1} - (D - z)^{-1} &= \left((D_0 - z)^{-1} - (D - z)^{-1} \right) \chi(|x| < R) \\ &\quad + \left((D_0 - z)^{-1} - (D - z)^{-1} \right) \chi(|x| \geq R). \end{aligned}$$

Wegen der Bedingung (2.17) für den Abfall bei Unendlich, verschwindet der zweite Summand für $R \rightarrow \infty$ in Norm. Somit ist die Resolventendifferenz der Limes einer Folge von kompakten Operatoren in Operatornormtopologie. \square

Definition 2.4 Sei $H : \mathcal{D}(H) \rightarrow \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator auf \mathcal{H} . H ist lokal kompakt, wenn es ein $z \in \rho(H)$ und $k > 0$ gibt, sodass der Operator $(H - z)^{-k} \chi(|x| < R)$ kompakt für alle $R > 0$ ist.

Bemerkung 2.5 Wenn H lokal kompakt ist für ein beliebiges $z \in \rho(H)$ und $k > 0$, so ist er auch lokal kompakt für alle $z \in \rho(H)$ und alle $k > 0$. Siehe dazu Behauptung 2.2 in [4]

Lemma 2.6 Seien $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ und $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ zwei beschränkte, stetige Funktionen mit $\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = 0$, dann ist der Operator $g(p^2)f(x^2)$ kompakt.

Beweis. Siehe dazu Behauptung 2.2b in [4]. \square

Lemma 2.7 Sei $\mathcal{D}(D) \subset \mathcal{D}(|D_0|^{1/2})$. Dann ist der Operator $|D_0|^{1/2} (D - z)^{-1}$ beschränkt.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $A := |D_0|^{1/2} (D - z)^{-1}$ ein abgeschlossener Operator ist. Sei dazu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}(A)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y$. Wir werden nun zeigen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax$ ist und $x \in \mathcal{D}(A)$. Zunächst ist klar, dass $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$, weshalb auch $x \in \mathcal{H} = \mathcal{D}(A)$ ist. Da $|D_0|^{1/2}$ und $(D - z)^{-1/2}$ für $z \in \rho(D)$ stetige Operatoren sind, gilt:

$$(2.19) \quad \begin{aligned} |D_0|^{-1/2} y &= |D_0|^{-1/2} \lim_{n \rightarrow \infty} |D_0|^{1/2} (D - z)^{-1} x_n = (D - z)^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = (D - z)^{-1} x \\ &\Rightarrow y = |D_0|^{1/2} (D - z)^{-1} x \end{aligned}$$

Da zudem $\mathcal{D}(|D_0|^{1/2}(D-z)^{-1}) = \mathcal{H}$ ist und \mathcal{H} eine abgeschlossene Menge ist, folgt mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen, dass $|D_0|^{1/2}(D-z)^{-1}$ beschränkt ist. \square

Satz 2.8 *Der freie Diracoperator D_0 ist lokal kompakt. Insbesondere sind die Operatoren $|D_0|^{-k}\chi(|x| < R)$ kompakt für alle $k > 0$ und $R > 0$.*

Beweis. Sei $z \in \rho(D_0)$. Da $|D_0|^k(D_0-z)^{-k}$ ein beschränkter Operator mit stetiger Inverse ist (gleiches Spektralmaß, also kann man Spektralkalkül verwenden), ist die Kompaktheit von $(D_0-z)^{-k}\chi(|x| < R)$ äquivalent zur Kompaktheit von $|D_0|^{-k}\chi(|x| < R)$, denn für $k = 1$ gilt:

$$(2.20a) \quad (D_0-z)^{-1}\chi(|x| < R) = (D_0-z)^{-1}|D_0||D_0|^{-1}\chi(|x| < R)$$

Wenn $|D_0|^{-1}\chi(|x| < R)$ kompakt ist, so ist auch $(D_0-z)^{-1}\chi(|x| < R)$ kompakt, da $(D_0-z)^{-1}|D_0|$ beschränkt ist.

$$(2.20b) \quad |D_0|^{-1}\chi(|x| < R) = |D_0|^{-1}(D_0-z)(D_0-z)^{-1}\chi(|x| < R)$$

Wenn $(D_0-z)^{-1}\chi(|x| < R)$ kompakt ist, so ist auch $|D_0|^{-1}\chi(|x| < R)$ kompakt, da $|D_0|^{-1}(D_0-z)$ beschränkt ist. Nach Bemerkung 2.5 gilt die Äquivalenz dann für alle k . Im Impulsraum ist

$$(2.21) \quad |D_0|^{-k} = \left(\frac{1}{p^2+1} \right)^{-k/2}$$

eine beschränkte Funktion die für $p \rightarrow \infty$ verschwindet. Mit Lemma 2.6 folgt, dass $|D_0|^{-k}\chi(|x| < R)$ kompakt ist. Somit ist auch $(D_0-z)^{-k}\chi(|x| < R)$ kompakt, also ist D_0 lokal kompakt. \square

Falls V relativ D_0 -beschränkt mit Schranke kleiner als 1 ist, so ist D selbstadjungiert und damit insbesondere abgeschlossen. Nehmen wir im Folgenden an, dass $\mathcal{D}(D) \subset \mathcal{D}(|D_0|^{1/2})$ und D selbstadjungiert ist, so ist der Operator $|D_0|^{1/2}(D-z)^{-1}$ nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen beschränkt. Nach obigem Lemma wissen wir, dass D_0 lokal kompakt ist, weshalb nach Adjungieren auch $\chi(|x| < R)|D_0|^{-1/2}$ kompakt ist. Somit ist auch

$$(2.22) \quad \chi(|x| < R)(D-z)^{-1} = \chi(|x| < R)|D_0|^{-1/2}|D_0|^{1/2}(D-z)^{-1}$$

wieder kompakt. Man sieht also, dass der Diracoperator bereits lokal kompakt ist, wenn $\mathcal{D}(D) \subset \mathcal{D}(|D_0|^{1/2})$ ist, also, wenn er wohldefiniert ist.

Um zu zeigen, dass das wesentliche Spektrum unter Störungen stabil bleibt, bleibt der Abfall (2.17) zu zeigen. Für relativ beschränkte Potentiale verwenden wir dazu die zweite Resolventengleichung

$$(2.23) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \left\| \left\| ((D_0-z)^{-1} - (D-z)^{-1})\chi(|x| > R) \right\| \right\| = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\| \left\| (D-z)^{-1}V(D_0-z)^{-1}\chi(|x| \geq R) \right\| \right\|,$$

um die Bedingung (2.17) zu vereinfachen. Wir fassen zusammen:

Satz 2.9 *Sei $D = D_0 + V$ selbstadjungiert und*

$$(2.24) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \left\| \left\| V(D_0-z)^{-1}\chi(|x| \geq R) \right\| \right\| = 0$$

mit $z \in \rho(D_0)$. Dann ist $\sigma_{ess}(D) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

Bemerkung 2.10 Wir bemerken, dass die Bedingung (2.24) eine sehr schwache Bedingung an das Potential V ist. Nehmen wir an, dass V ein Multiplikationsoperator ist, dann ist sie äquivalent zu

$$(2.25) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \left\| \left\| V\chi(|x| \geq R)(D_0-z)^{-1} \right\| \right\| = 0$$

Um zu zeigen, dass (2.25) die ursprüngliche Bedingung (2.24) impliziert, wählen wir eine differenzierbare Funktion $f_R : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ mit $f_R(r) = 0$ für $r < R/2$, $f_R(r) = 1$ für $r \geq R$ und $\sup_r f'_R(r) < c/R$. Dann ist $\chi(|x| \geq R) = f_R(|x|)\chi(|x| \geq R)$ und

(2.26)

$$\| \|V(D_0 - z)^{-1}\chi(|x| \geq R)\| \| \leq \| \|V(D_0 - z)^{-1}\alpha \cdot (\nabla f_R)(D_0 - z)^{-1}\| \| + \| \|Vf_R(D_0 - z)^{-1}\| \|$$

mit der Submultiplikativität der Operatornorm. Für den ersten Summanden haben wir verwendet, dass

(2.27a)

$$[(D_0 - z)^{-1}, f_R] = (D_0 - z)^{-1}[f_R, D_0 - z](D_0 - z)^{-1},$$

(2.27b)

$$[f_R, D_0 - z] = [f_R, \alpha \cdot p] = i\alpha \cdot (\nabla f_R).$$

Da die Norm des Matrixmultiplikationsoperators $\alpha \cdot (\nabla f_R)$ durch

(2.28)

$$\| \alpha \cdot (\nabla f_R) \| = \sup_{r \in [R/2, R]} f'_R(r) = \frac{\text{const}}{R}$$

abgeschätzt werden kann, verschwindet der erste Summand im Limes $R \rightarrow \infty$. Der zweite Summand ist durch $\| \|V\chi(|x| \geq R/2)(D_0 - z)^{-1}\| \|$ beschränkt, welcher nach (2.25) im Limes $R \rightarrow \infty$ ebenfalls verschwindet. Analog beweist man die umgekehrte Richtung.

(2.29)

$$\| \|V\chi(|x| \geq R)(D_0 - z)^{-1}\| \| \leq \| \|V(D_0 - z)^{-1}\alpha \cdot (\nabla f_R)(D_0 - z)^{-1}\| \| + \| \|V(D_0 - z)^{-1}f_R(r)\| \|$$

Letzteren Summanden kann man durch $\| \|V(D_0 - z)^{-1}\chi(|x| \geq R/2)\| \|$ nach oben abschätzen. Dieser verschwindet aber nach Voraussetzung im Limes $R \rightarrow \infty$.

Bemerkung 2.11 Jeder Matrixmultiplikationsoperator mit $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = 0$ erfüllt

(2.30)

$$\| \|V\chi(|x| \geq R)\| \| = \sup_{|x| > R} |V(x)| \rightarrow 0 \text{ für } R \rightarrow \infty$$

und damit auch (2.25) wegen der Submultiplikativität der Operatornorm.

Bemerkung 2.12 Die Bedingungen (2.24) und (2.25) sind allgemeiner als (2.30), da sie auch Singularitäten des Potentials bei großen Abständen zulassen.

Weiterhin ist die Bedingung (2.24) nicht optimal, da es Potentiale gibt, die für $|x| \rightarrow \infty$ gegen Unendlich streben, das wesentliche Spektrum aber dennoch nicht stören. Das passiert insbesondere bei nicht-isotropischen Potentialen, sowie beim Magnetfeld in drei Dimensionen.

Schließlich stellen wir eine weitere Methode vor, um zu zeigen, dass VR_0 kompakt ist. Dazu betrachten wir die q -Schattennorm von VR_0 und schätzen sie mit der Seiler-Simon-Ungleichung ab. Wir beginnen mit der Abschätzung für $V_1 \in L^3(\mathbb{R}^3)$.

(2.31a)

$$\begin{aligned} \|V_1 R_0\|_q^q &= \text{tr} \left[(V_1 R_0^* R_0 V_1)^{q/2} \right] = \text{tr} \left[\left(V_1 \frac{1}{p^2 + 1 + \eta^2} V_1 \right)^{q/2} \right] = \left\| \frac{1}{p^2 + 1 + \eta^2} V_1 \right\|_q^q \\ &\leq \text{const} \left\| \frac{1}{p^2 + 1 + \eta^2} \right\|_q^q \|V_1\|_q^q, \end{aligned}$$

Der Faktor $\|V_1\|_q$ existiert nur für $q \geq 3$. Da $V_2 \in L^\infty$ ist, folgt

(2.31b)

$$\|V_2 R_0\|_\infty \leq \|V_2\|_\infty \|R_0\|_\infty < \infty,$$

da $\|R_0\|_\infty = \| \|R_0\| \| < \infty$ ist.

2.4. **Kriterien aus Q_2 .** Da die Hilbert-Schmidt-Operatoren ein Ideal auf L^2 formen, können wir Q_2 wie folgt abschätzen:

$$(2.32) \quad \|Q_2\|_2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \|R_0 V R_0\|_2 \| \|V R_0\| \| \| (1 + V R_0)^{-1} \| \|$$

Wir beginnen mit dem ersten Term mit $\eta_0^2 = 1 + \eta^2$:

$$(2.33) \quad \|R_0 V R_0\|_2^2 = \int dq d \frac{|\hat{V}(p-q)|^2}{(p^2 + \eta_0^2)(q^2 + \eta_0^2)} = \int dp |\hat{V}(p)|^2 \int \frac{1}{((p+q)^2 + \eta_0^2)(q^2 + \eta_0^2)} dq$$

Letzteres Integral kann man explizit ausrechnen und erhält

$$(2.34) \quad J(p) \equiv \int \frac{1}{((p+q)^2 + \eta_0^2)(q^2 + \eta_0^2)} dq = \frac{2\pi^2}{|p|} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{2\eta_0}{|p|} \right) \right]$$

Für die Ableitung von $J(p)$ ergibt sich

$$(2.35) \quad J'(p) = -\frac{2\pi^2}{|p|^2} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{2\eta_0}{|p|} \right) \right] - \frac{2\pi^2}{|p|} \frac{1}{1 + \left(\frac{2\eta_0}{|p|} \right)^2}.$$

$J'(p)$ ist offensichtlich für alle $|p| > 0$ negativ und für $p = 0$ gerade Null. Weiterhin ist mit der Regel von L'Hospital $\lim_{|p| \rightarrow 0} J(p) = \frac{\pi^2}{\eta_0}$. Das bedeutet, dass $J(p) \leq \text{const } \eta_0^{-1}$ ist. Man hätte das aber auch durch das Skalierungsverhalten von $J(p)$ sehen können, denn:

$$(2.36) \quad \begin{aligned} & \int \frac{1}{((p+q)^2 + \eta_0^2)(q^2 + \eta_0^2)} dq \\ &= \begin{cases} \int \left(\frac{1}{(q^2 + \eta_0^2)^2} - \frac{2\langle q, p \rangle}{(q^2 + \eta_0^2)^3 \eta_0} + \mathcal{O}(p^2) \right) dq \leq \frac{1}{\eta_0} \int \frac{1}{(q^2 + 1)^2} dq & \text{für kleine } |p| \\ \int \left(\frac{p^{-2}}{q^2 + \eta_0^2} - \frac{2\langle q, \hat{e}_p \rangle p^{-3}}{q^2 + \eta_0^2} + \mathcal{O}(p^{-4}) \right) dq \leq \int \frac{p^{-2}}{q^2 + 1} dq & \text{für große } |p| \end{cases} \end{aligned}$$

Somit ist $\|R_0 V R_0\|_2 \leq \text{const } \| \hat{V} \|_2 (\eta^2 + 1)^{-1/4}$ und wir benötigen mindestens noch eine Potenz $(\eta^2 + 1)^{1/4 + \epsilon}$, damit Q_2 ein Hilbert-Schmidt Operator ist.

Als nächstes kümmern wir uns um $\| \|V R_0\| \|$. Mit $\| \|R_0\| \| = \sup_{\lambda \in \sigma(D_0)} \frac{1}{|\lambda - i\eta|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2}}$ und der Submultiplikativität der Operatornorm sieht man, dass

$$(2.37) \quad \| \|V_2 R_0\| \| \leq \|V_2\|_{\infty} \| \|R_0\| \| \leq \frac{\|V_2\|_{\infty}}{\sqrt{1 + \eta^2}} < \infty.$$

Hierbei haben wir implizit die Hausdorff-Young-Ungleichung und $\hat{V}_2 \in L_1$ verwendet. Für V_1 werden wir die UV-Bedingung aus (2.3) verschärfen müssen. Wie wir bereits wissen, muss $V_1 \in L^3$ sein, damit D selbstadjungiert realisiert werden kann. Wir machen daher den Ansatz, dass $V_1 \in L^{3+\epsilon}$ ist und versuchen eine Schranke an ϵ zu finden. Für $f \in \mathcal{D}(D_0)$ hat man zunächst mit der Hölder-Ungleichung:

$$(2.38) \quad \|V_1 f\|_2 \leq \|V_1\|_{3+\epsilon} \|f\|_s$$

mit $s = \frac{6+2\epsilon}{1+\epsilon}$. Als nächstes wenden wir Hausdorff-Young auf $\|f\|_s$ an und erhalten:

$$(2.39) \quad \|f\|_s \leq \text{const } \| \hat{f} \|_r$$

mit $r = \frac{6+2\epsilon}{5+\epsilon} \in (\frac{6}{5}, 2)$. Mit Hilfe der Hölderungleichung kann man $\|\hat{f}\|_r$ noch weiter mit einer beliebigen Zahl M abschätzen:

$$(2.40) \quad \|\hat{f}\|_r = \|(\sqrt{p^2+1}+M)\hat{f}(\sqrt{p^2+1}+M)^{-1}\|_r \leq \|(\sqrt{p^2+1}+M)\hat{f}\|_2 \|(\sqrt{p^2+1}+M)^{-1}\|_{s_1}$$

mit $s_1 = 3 + \epsilon$. Für die Norm von letzterem Ausdruck gilt:

$$(2.41) \quad \begin{aligned} \|(\sqrt{p^2+1}+M)^{-1}\|_{s_1}^{s_1} &= \int \left(\frac{1}{\sqrt{p^2+1}+M} \right)^{s_1} dp \leq \int \left(\frac{1}{|p|+M} \right)^{s_1} dp \\ &= M^{3-s_1} \int \left(\frac{1}{|p|+1} \right)^{s_1} dp \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass das Integral nur dann existieren kann, wenn $s_1 > 3$ ist, was aber nach Definition von s_1 sicher gestellt ist. Mit $\|(\sqrt{p^2+1}+M)\hat{f}\|_2 \leq \|D_0 f\|_2 + M \|f\|_2$ erhalten wir somit

$$(2.42) \quad \|V_1 f\| \leq \text{const} \|V_1\|_{3+\epsilon} (M^{-\epsilon'} \|D_0 f\| + M^{1-\epsilon'} \|f\|)$$

mit $\epsilon' = \frac{\epsilon}{3+\epsilon}$. $f = R_0 g$ mit $g \in \mathcal{H}$ impliziert dann

$$(2.43) \quad \begin{aligned} \|V_1 R_0 g\| &\leq \text{const} \left\{ M^{-\epsilon'} \left(1 + \frac{|\eta|}{\sqrt{\eta^2+1}} \right) + M^{1-\epsilon'} \frac{1}{\sqrt{\eta^2+1}} \right\} \|g\| \\ &\leq \text{const} \left\{ 2M^{-\epsilon'} + M^{1-\epsilon'} \frac{1}{\sqrt{\eta^2+1}} \right\} \|g\|. \end{aligned}$$

Wählt man $M = \sqrt{\eta^2+1}$, so erhält man

$$(2.44) \quad \|V_1 R_0\| \leq \frac{\text{const}}{(\eta^2+1)^{\epsilon'/2}}$$

Dieser Faktor produziert genügend Abfall im Integral (2.32), wenn $\epsilon' > 1/2$, also, wenn $\epsilon > 3/4$ ist. Das bedeutet, dass

$$(2.45) \quad V_1(x) \in L^{\frac{15}{4}+\delta}(\mathbb{R}^3)$$

für ein beliebiges $\delta > 0$ sein muss.

Zuletzt zeigen wir dass $\|(1+VR_0)^{-1}\|$ gleichmässig in η beschränkt ist. Wegen der relativen D_0 -Beschränktheit von V gilt zunächst, dass es ein $a < 1/2$ gibt, sodass

$$(2.46) \quad \|VR_0\| \leq a \left(1 + \frac{|\eta|}{\sqrt{\eta^2+1}} \right) + \frac{b}{\sqrt{\eta^2+1}}$$

ist. Es gibt somit ein η_0 , sodass für $|\eta| > \eta_0$ die Operatornorm $\|VR_0\| < 1$ ist. Wegen der Neumann-Darstellung für die Resolvente ist

$$(2.47) \quad \left\| \frac{1}{1+VR_0} \right\| = \left\| \sum_{n \geq 0} (-1)^n (VR_0)^n \right\| \leq \sum_{n \geq 0} \|(VR_0)^n\| \leq \sum_{n \geq 0} \|VR_0\|^n = \frac{1}{1-\|VR_0\|} < \infty.$$

Für den Fall $|\eta| < \eta_0$ verwenden wir, dass VR_0 kompakt ist und deshalb nach dem analytischen Fredholm-Satz der Operator $(1+VR_0)^{-1}$ meromorph ist. Die Pole sind gerade die Eigenwerte

von $D = D_0 + V$, denn

$$(2.48) \quad (1 + VR_0)^{-1} = ((D_0 - i\eta + V)R_0)^{-1} = (D_0 - i\eta)(D - i\eta)^{-1}.$$

Unter der Annahme, dass 0 kein Eigenwert von $D_0 + V$ ist, können wir die Resolvente auf der imaginären Achse, also mit $i\eta \in \rho(D)$, beschränken. Dazu beweisen wir zunächst folgendes Lemma.

Lemma 2.13 *Sei V relativ D_0 -kompakt. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definiert durch $f(\eta) = VR(\eta)$. Dann ist f stetig.*

Beweis. Sei $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, die nach η konvergiert. Dann ist mit Hilfe der Resolventenformel:

$$(2.49) \quad \begin{aligned} \||V(R_0(\eta_n) - R_0(\eta))\|| &= \||VR_0(\eta_n)(\eta - \eta_n)R_0(\eta)\|| \leq |\eta - \eta_n| \||VR_0(\eta)\|| \||R_0(\eta_n)\|| \\ &\leq |\eta - \eta_n| \||VR_0(\eta)\|| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für $\eta_n \rightarrow \eta$ und zwar uniform, da $\||R_0(\eta_n)\|| \leq \frac{1}{\sqrt{1+\eta_n^2}} \leq 1$. □

Nun betrachten wir die Abbildung

$$(2.50) \quad \begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ \eta &\mapsto VR_0(\eta) \mapsto 1 + VR_0(\eta) \mapsto (1 + VR_0(\eta))^{-1} \end{aligned}$$

Wie wir eben gesehen haben ist die Abbildung $\eta \mapsto VR_0(\eta)$ stetig. Da die Addition der Identität und das Bilden der Inversen auf Banachalgebren stetige Abbildungen sind, ist $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine stetige Abbildung. Da wir oben gesehen haben ist $\lim_{\eta \rightarrow \infty} g(\eta)$ beschränkt. Mit dieser Eigenschaft folgt, dass g eine beschränkte Abbildung ist und somit $(1 + VR_0)^{-1}$ uniform in η beschränkt ist.

Wir fassen unser Ergebnis in folgendem Satz zusammen.

Satz 2.14 *Falls V die Integralkriterien (2.3) erfüllt, V relativ D_0 -kompakt und relativ D_0 -beschränkt mit D_0 -Schranke kleiner als $1/2$, Null kein Eigenwert von D und $V_1 \in L^{\frac{15}{4}+\delta}$ für ein beliebiges $\delta > 0$ ist, so ist Q_2 ein Hilbert-Schmidt-Operator.*

Bemerkung 2.15 Wir können die Zerlegung von \hat{V} immer so wählen, dass V relativ D_0 -beschränkt ist mit D_0 -Schranke kleiner $1/2$.

Bemerkung 2.16 In [3] wurde zudem gezeigt, dass Potentiale, deren Fouriertransformierte \hat{V}

$$(2.51) \quad \int_{\mathbb{R}^3} \frac{p^2}{1+p^{1-\epsilon}} |\hat{V}(p)|^2 < \infty$$

für gegebenes $\epsilon > 0$ erfüllen, regulär sind. Sollten diese Potentiale jedoch

$$(2.52) \quad \int_{\mathbb{R}^3} \frac{p^2}{1+p^{1+\epsilon}} |\hat{V}(p)|^2 = \infty$$

für gegebenes $\epsilon > 0$ erfüllen, so sind sie nicht regulär.

3. DAS COULOMBPOTENTIAL

Die Fouriertransformierte des Coulombpotential geht wie $|p|^{-2}$, weshalb es nicht mit den Kriterien aus der letzten Bemerkung behandelt werden kann. Wir müssen uns daher mit der ursprünglichen Definition der Regularität begnügen.

Wir betrachten im Folgenden den gestörten Dirac-Operator $H(\lambda) = \alpha p + \beta - \frac{\lambda}{|x|}$ mit $\lambda \in (0, 1)$ und werden zeigen, dass das Coulombpotential in diesem Fall nicht regulär, die Differenz $\Lambda_+(\lambda) - \Lambda_+^0$ also kein Hilbert-Schmidt-Operator ist. Dazu führen wir den Streckungsoperator U_σ mit $\sigma > 0$ ein, der durch

$$(3.1) \quad (U_\sigma f)(x) := \sigma^{3/2} f(\sigma x) \Rightarrow (U_\sigma^* f)(x) = \sigma^{-3/2} f(x/\sigma)$$

definiert ist.

Lemma 3.1 $U_\sigma f \rightarrow 0$ für $\sigma \rightarrow 0$ in L^2 .

Beweis. Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ vorgegeben. Wir müssen dann zeigen, dass

$$(3.2) \quad (g, U_\sigma f) \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} 0$$

für alle $g \in L^2$. Sei dazu zunächst $f, g \in C_0(\mathbb{R}^3)$. Dann folgt die Behauptung sofort, denn

$$(3.3) \quad \int \overline{g(x)} \sigma^{3/2} f(\sigma x) dx \leq \sigma^{3/2} \|g\|_\infty \|f\|_\infty.$$

Da $C_0(\mathbb{R}^3)$ in $L^2(\mathbb{R}^3)$ dicht ist, gibt es für jedes Element $f \in L^2$ eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C_0$, sodass $f_n \rightarrow f$ in L^2 . Somit ist mit der Dreiecksungleichung

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} |(g, U_\sigma f)| &\leq \lim_{\sigma \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} (|(g, U_\sigma f_n)| + |(g, U_\sigma(f - f_n))|) \\ &\leq \lim_{\sigma \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} (|(g, U_\sigma f_n)| + \|g\|_2 \|f - f_n\|_2) = 0 \end{aligned}$$

für alle $g \in C_0(\mathbb{R}^3)$. Hierbei durften die Limiten vertauscht werden, da sowohl die rechte Seite für alle $g \in C_0$ und $f \in L^2$ existiert. Approximiert man nun noch $g \in L^2$ durch Funktionen mit kompaktem Träger, ist die Aussage mit dem selben Argument gezeigt. \square

Des Weiteren zeigt man

$$(3.5) \quad U_\sigma \left(\alpha p + \beta - \frac{\lambda}{|x|} \right) U_\sigma^* = \frac{1}{\sigma} \left(\alpha p + \sigma \beta - \frac{\lambda}{|x|} \right),$$

indem man beide Seiten auf ein $f \in L^2$ anwendet.

Lemma 3.2 $\ker(\alpha p - \lambda|x|^{-1}) = \{0\}$ für $\lambda \in (0, 1)$.

Beweis. Die Aussage folgt aus dem letzten Beispiel des Anhangs. Die Lösungen des masselosen Dirac-Coulomb-Operators sind von der Form

$$(3.6) \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ -\kappa - s \end{pmatrix} r^s$$

mit $s = \pm \sqrt{\lambda^2 - \gamma^2}$. Diese Lösung ist jedoch für kein s quadratintegrierbar, weshalb der Kern von $\alpha p - \lambda/|x|$ trivial ist. \square

Lemma 3.3 $\mathcal{D}(\alpha p) \subset \mathcal{D}(\alpha p - \lambda|x|^{-1})$.

Beweis. Dies folgt aus der Tatsache, dass $|x|^{-1}$ relativ αp -beschränkt ist und $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ ein determinierender Bereich für αp ist. \square

Satz 3.4 Die Differenz $\Lambda_+(\lambda) - \Lambda_+^0$ kein Hilbert-Schmidt-Operator, weshalb das Coulombpotential $-\lambda/|x|$ für $\lambda \in (0, 1)$ nicht regulär ist.

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch einen Widerspruch. Angenommen, die Differenz wäre ein Hilbert-Schmidt-Operator, dann wäre wegen der Kompaktheit des Operators $U_\sigma(\Lambda_+(\lambda) - \Lambda_+^0)U_\sigma^*$ der Limes $\lim_{\sigma \rightarrow 0} U_\sigma(\Lambda_+(\lambda) - \Lambda_+^0)U_\sigma^* = 0$ in der starken Operator-topologie, da $U_\sigma f$ schwach gegen Null konvergiert und kompakte Operatoren schwach konvergente Folgen auf stark konvergente Folgen abbildet. Wir werden zeigen, dass dieser Limes zu einem Widerspruch führt. Mit der Spektralprojektion des freien Dirac-Operators auf das Intervall $[0, \infty)$

$$(3.7) \quad \Lambda_+^0 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\alpha p + \beta}{\sqrt{p^2 + 1}} \right)$$

geht

$$(3.8) \quad U_\sigma \Lambda_+^0 U_\sigma^* = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\alpha p + \sigma \beta}{\sqrt{p^2 + \sigma^2}} \right) \rightarrow \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\alpha p}{|p|} \right) =: \tilde{\Lambda}_+^0$$

in der starken Operator-topologie für $\sigma \rightarrow 0$. Mit

$$(3.9) \quad \Lambda_+(\lambda) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-\rho}^{\rho} \frac{d\eta}{H(\lambda) - i\eta}$$

und der Wirkung der Dilatation auf $H(\lambda)$ erhält man

$$(3.10) \quad \begin{aligned} (f, U_\sigma \Lambda_+(\lambda) U_\sigma^* f) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-\rho}^{\rho} \left(f, \frac{\sigma}{\alpha p + \sigma \beta - \lambda |x|^{-1} - i\sigma \eta} f \right) d\eta \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-\rho/\sigma}^{\rho/\sigma} \left(f, \frac{1}{\alpha p + \sigma \beta - \lambda |x|^{-1} - i\eta} f \right) d\eta \\ &=: (f, \Lambda_+^\sigma(\lambda) f), \end{aligned}$$

sodass $U_\sigma \Lambda_+(\lambda) U_\sigma^* =: \Lambda_+^\sigma(\lambda)$ als die Spektralprojektion auf $[0, \infty)$ des Operators $\alpha p + \sigma \beta - \lambda |x|^{-1}$ definiert werden kann. Offensichtlich konvergiert

$$(3.11) \quad \alpha p + \sigma \beta - \frac{\lambda}{|x|} \rightarrow \alpha p - \frac{\lambda}{|x|}$$

in der starken Operator-topologie für $\sigma \rightarrow 0$ auf dem Definitionsbereich des Dirac-Operators $\mathcal{D}(H(\lambda))$. Dies impliziert auch Konvergenz im starken Resolventensinne, d.h. die Resolvente $(H(\lambda) - z)^{-1}$ konvergiert für alle $z \in \rho(H(\lambda))$. Damit konvergiert auch die Projektion

$$(3.12) \quad \Lambda_+^\sigma \rightarrow \tilde{\Lambda}_+(\lambda) =: \tilde{\Lambda}_+$$

für $\sigma \rightarrow 0$, wenn der Kern $\ker(\alpha p - \lambda |x|^{-1}) = \{0\}$, also der Operator $\alpha p - \frac{\lambda}{|x|}$ invertierbar ist, sodass die Projektion $\tilde{\Lambda}_+$ überhaupt existieren kann. Doch dies war genau die Aussage von obigem Lemma. Damit konvergiert

$$(3.13) \quad U_\sigma(\Lambda_+(\lambda) - \Lambda_+^0)U_\sigma^* \rightarrow \tilde{\Lambda}_+ - \tilde{\Lambda}_+^0$$

für $\sigma \rightarrow 0$ und wir müssen daher nur noch zeigen, dass diese Differenz nicht Null ist, um einen Widerspruch zu erhalten. Angenommen also es wäre $\tilde{\Lambda}_+ = \tilde{\Lambda}_+^0$. Dann hat man auf $\mathcal{D}(\alpha p) \subset \mathcal{D}(\alpha p - \lambda |x|^{-1})$

$$(3.14) \quad 0 = \tilde{\Lambda}_- \left(\alpha p - \frac{\lambda}{|x|} \right) \tilde{\Lambda}_+ = \tilde{\Lambda}_-^0 \left(\alpha p - \frac{\lambda}{|x|} \right) \tilde{\Lambda}_+^0 = \tilde{\Lambda}_-^0 (\alpha p) \tilde{\Lambda}_+^0 - \lambda \tilde{\Lambda}_-^0 \frac{1}{|x|} \tilde{\Lambda}_+^0.$$

Da zwar $\tilde{\Lambda}_-^0 (\alpha p) \tilde{\Lambda}_+^0 = 0$ ist, $\tilde{\Lambda}_-^0 \frac{1}{|x|} \tilde{\Lambda}_+^0$ jedoch nicht verschwindet, muss $\tilde{\Lambda}_+ - \tilde{\Lambda}_+^0 \neq 0$ sein, was im Widerspruch zur anfänglichen Behauptung steht. \square

 ANHANG A. SPHÄRISCHE SYMMETRIE DES DIRAC-OPERATORS

Wir können nicht erwarten explizite Lösungen der Dirac-Gleichung zu erhalten ohne zusätzliche Symmetrien zu fordern. Die physikalisch gesehen wichtigste Symmetrie ist die der Kugelsymmetrie.

A.1. Voraussetzungen an das Potential.

Definition A.1 Ein sphärisch symmetrisches Potential ist ein hermitescher 4×4 -Matrixmultiplikationsoperator V , der invariant unter Rotationen der Lorentzgruppe ist.

In $L^2(\mathbb{R}^3)^4$ werden die $SU(2)$ -Rotationen mit Drehwinkel φ um eine Achse \mathbf{n} durch

$$(A.1) \quad e^{-i\varphi \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}} \psi(x) = e^{-i\varphi \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}} \psi(R^{-1}x)$$

mit $\varphi \in [0, 4\pi)$ und $R \in \mathbf{SO}(3)$ dargestellt. Da β mit \mathbf{S} kommutiert, muss

$$(A.2) \quad V(x) = e^{i\varphi \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}} V(R^{-1}x) e^{-i\varphi \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}}$$

gelten, damit V ein rotationssymmetrisches Potential ist.

Das Potential sollte hinreichend regulär sein, im Sinne, dass $\dot{\mathcal{D}} := C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \subset \mathcal{D}(V)$ ist. $\dot{\mathcal{D}}$ ist offensichtlich dicht in $L^2(\mathbb{R}^3)^4$ und invariant unter Rotationen. Die Bedingung $V \in \dot{\mathcal{D}}$ ist erfüllt, falls jede Komponente $V_{ij} \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})^4$ ist für $i, j = 1, 2, 3, 4$. In diesem Falle ist der Operator $D = D_0 + V$ wohldefiniert und symmetrisch auf $\dot{\mathcal{D}}$. Beispiele für rotationssymmetrische Potentiale sind rotationssymmetrische Skalarpotentiale.

A.2. Übergang zu Kugelkoordinaten.

Wir schreiben für alle $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$

$$(A.3) \quad \psi(r, \vartheta, \varphi) = r \Psi(x_1(r, \vartheta, \varphi), x_2(r, \vartheta, \varphi), x_3(r, \vartheta, \varphi))$$

und betrachten ψ als ein Element im Hilbertraum $L^2((0, \infty), dr; L^2(S^2)) \cong L^2((0, \infty), dr) \otimes L^2(S^2)$. Die Funktion $\psi(r, \cdot)$ ist für alle $r \in (0, \infty)$ quadratintegrierbar auf der Sphäre S^2 . Die Abbildung $\Psi \rightarrow \psi$ ist daher ein unitärer Isomorphismus von $L^2(\mathbb{R}^3)$ nach $L^2((0, \infty), dr) \otimes L^2(S^2)$. Analog verfährt man für $L^2(\mathbb{R}^3)^4 = L^2((0, \infty), dr) \otimes L^2(S^2)^4$. Somit ist der Hilbertraum in einen radialen und einen Winkelanteil zerlegt. Mit der Darstellung des Gradienten

$$(A.4) \quad \nabla = e_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(e_\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + e_\varphi \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

ergibt sich für den Drehimpulsoperator und dessen Quadrat

$$(A.5a) \quad L = x \wedge (-i\nabla) = 1_{L^2((0, \infty), dr)} \otimes \left[i e_\vartheta \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - i e_\varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right]$$

$$(A.5b) \quad L^2 = 1_{L^2((0, \infty), dr)} \otimes \left[-\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right].$$

Ab sofort werden wir $1_{L^2((0, \infty), dr)}$ immer weglassen, um die Notation zu vereinfachen. Damit können wir den Gradienten so darstellen:

$$(A.6) \quad -i\nabla = -i e_r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} (e_r \wedge L)$$

A.3. Operatoren, die mit dem Dirac-Operator kommutieren. Wir wollen den Dirac-Operator auf $\dot{\mathcal{D}}$ in Kugelkoordinaten umschreiben. Dazu benutzen wir

$$(A.7a) \quad (\alpha \cdot A)(2S \cdot B) = i\gamma_5 A \cdot B - i\alpha \cdot (A \wedge B),$$

um

$$(A.7b) \quad -i\alpha \cdot \nabla = -i(\alpha \cdot e_r) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \alpha \cdot (e_r \wedge L) = -i(\alpha \cdot e_r) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} (\alpha \cdot e_r)(2S \cdot L)$$

zu erhalten. Damit erhält man

$$(A.8) \quad D_0 = -i(\alpha \cdot e_r) \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \beta K \right) + \beta$$

mit dem Spin-Bahn-Kopplungsoperator

$$(A.9) \quad K = \beta(2S \cdot L + 1) = \beta(J^2 - L^2 + 1/4)$$

und $J = L + S$. Die Operatoren D_0 , J , L , J^2 , L^2 und damit auch K sind alle wesentlich selbstadjungiert realisiert auf dem Definitionsbereich $\dot{\mathcal{D}}$. Wir wissen bereits, dass $[D_0, J_k] = 0$ für alle $k = 1, 2, 3$, da D_0 und J_k die Generatoren der Darstellung der Poincare-Gruppe sind. Eine kleine Rechnung führt auf $\{S \cdot L, \alpha \cdot e_r\} = -\alpha \cdot e_r$, womit $\{2S \cdot L + 1, \alpha \cdot e_r\} = 0$ ist. Da β mit $S \cdot L$ kommutiert und mit $\alpha \cdot e_r$ antikommutiert, ist $[K, \alpha \cdot e_r] = 0$. Daher kommutiert K auch mit dem freien Dirac-Operator D_0 auf $\dot{\mathcal{D}}$. Gleichzeitig kommutiert K mit Rotationen und damit auch mit J^2 und J_3 .

A.4. Eigenfunktionen des Drehimpulsoperators. Die Operatoren J^2 , J_3 und K haben ein reines Punktspektrum auf $L^2(S^2)^4$ und es gibt ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren Φ_{m_j, κ_j} , sodass

$$(A.10a) \quad J^2 \Phi_{m_j, \kappa_j} = j(j+1) \Phi_{m_j, \kappa_j} \quad \text{für } j = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$$

$$(A.10b) \quad J_3 \Phi_{m_j, \kappa_j} = m_j \Phi_{m_j, \kappa_j} \quad \text{für } m_j = -j, -j+1, \dots, j-1, j$$

$$(A.10c) \quad K \Phi_{m_j, \kappa_j} = -\kappa_j \Phi_{m_j, \kappa_j} \quad \text{für } \kappa_j = -(j+1/2), +(j+1/2).$$

Für jede Menge von Eigenwerten j , m_j und κ_j gibt es zwei orthogonale Eigenvektoren $\Phi_{m_j, \kappa_j}^\pm \in C^\infty(S^2)^4$, also

$$(A.11) \quad \Phi_{m_j, \kappa_j} = c_+ \Phi_{m_j, \kappa_j}^+ + c_- \Phi_{m_j, \kappa_j}^-$$

mit beliebigen Koeffizienten c_+ und c_- . In diesem Fall sind

$$(A.12a) \quad \Phi_{m_j, \mp(j+1/2)}^+ = \begin{pmatrix} i\psi_{j\mp 1/2}^{m_j} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Phi_{m_j, \mp(j+1/2)}^- = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{j\pm 1/2}^{m_j} \end{pmatrix}$$

$$(A.12b) \quad \psi_{j-1/2}^{m_j} = \frac{1}{\sqrt{2j}} \begin{pmatrix} \sqrt{j+m_j} Y_{j-1/2}^{m_j-1/2} \\ \sqrt{j-m_j} Y_{j-1/2}^{m_j+1/2} \end{pmatrix},$$

$$(A.12c) \quad \psi_{j+1/2}^{m_j} = \frac{1}{\sqrt{2j+2}} \begin{pmatrix} \sqrt{j+1-m_j} Y_{j+1/2}^{m_j-1/2} \\ -\sqrt{j+1+m_j} Y_{j+1/2}^{m_j+1/2} \end{pmatrix}.$$

Auf $L^2(S^2)$ erfüllen die Kugelflächenfunktionen Y , dass $L^2 Y_l^m = l(l+1) Y_l^m$ und $L_3 Y_l^m = m Y_l^m$. Die Funktionen $\psi_{j\mp 1/2}^{m_j}$ sind in $L^2(S^2)$ und sind gleichzeitige Eigenfunktionen der Operatoren L^2 , L_3 , $J^2 = L^2 + \sigma \cdot L + 3/4$, $J_3 = L_3 + \sigma_3/2$ und $\sigma \cdot L + 1$. Die zugehörigen Eigenwerte werden mit $l(l+1)$, m_l , $j(j+1)$, m_j und $-\kappa$ bezeichnet. Für $\psi_{j-1/2}^{m_j}$ sind Spin und Drehimpuls parallel, $l = j - 1/2 = 0, 1, \dots$ und $\kappa = -l - 1 = -(j + 1/2) < 0$. Für $\psi_{j+1/2}^{m_j}$ ist $l = j + 1/2 = 1, 2, \dots$ und $\kappa = l = (j + 1/2) > 0$, weshalb hier Spin und Drehimpuls antiparallel sind. Man beachte, dass

die Funktionen Φ_{m_j, κ_j}^\pm im Allgemeinen keine Eigenfunktionen von L^2 oder L_3 sind – spezielle Linearkombinationen dieser Funktionen können jedoch Eigenfunktionen werden. Die zugehörigen Unterräume dieser Linearkombinationen sind jedoch nicht links-invariant unter D_0 , da der freie Dirac-Operator nicht mit dem Bahndrehimpuls kommutiert.

Der Hilbertraum $L^2(S^2)^4$ kann daher als direkte orthogonale Summe von zweidimensionalen Hilberträumen $\mathcal{K}_{m_j, \kappa_j}$, die durch die simultanen Eigenfunktionen Φ_{m_j, κ_j}^\pm von J^2 , J_3 und K aufgespannt werden, verstanden werden:

$$(A.13a) \quad L^2(S^2)^4 = \bigoplus_{j=1/2, 3/2, \dots}^{\infty} \bigoplus_{m_j=-j}^j \bigoplus_{\kappa_j=\pm(j+1/2)} \mathcal{K}_{m_j, \kappa_j},$$

$$(A.13b) \quad \mathcal{K}_{m_j, \kappa_j} = \{c_+ \Phi_{m_j, \kappa_j}^+ + c_- \Phi_{m_j, \kappa_j}^- : c_\pm \in \mathbb{C}\}.$$

Die Funktionen $\psi_{j\pm 1/2}^{m_j}$ erfüllen $\sigma \cdot e_r \psi_{j\pm 1/2}^{m_j} = \psi_{j\mp 1/2}^{m_j}$, weshalb $i\alpha \cdot e_r \Phi_{m_j, \kappa_j}^\pm = \mp \Phi_{m_j, \kappa_j}^\mp$. Zusammengefasst:

Lemma A.2 *Die Unterräume $\mathcal{K}_{m_j, \kappa_j}$ sind linksinvariant unter β und $\alpha \cdot e_r$. Diese Operatoren werden in der Basis $\{\Phi_{m_j, \kappa_j}^+, \Phi_{m_j, \kappa_j}^-\}$ durch*

$$(A.14) \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad -i\alpha \cdot e_r = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dargestellt.

A.5. Partielle Wellenunterräume. Die Zerlegung von $L^2(S^2)^4$ impliziert eine ähnliche Zerlegung von $L^2(\mathbb{R}^3)^4$. Jeder partielle Wellenunterraum $L^2((0, \infty), dr) \otimes \mathcal{K}_{m_j, \kappa_j}$ ist isomorph zu $L^2((0, \infty), dr)^2$, wenn wir die Basis $\{\Phi_{m_j, \kappa_j}^+, \Phi_{m_j, \kappa_j}^-\}$ in $\mathcal{K}_{m_j, \kappa_j}$ wählen.

Seien $(f^+, f^-) \in L^2((0, \infty), dr)^2$, dann definiert

$$(A.15) \quad \psi(r, \vartheta, \varphi) = f^+(r) \Phi_{m_j, \kappa_j}^+(\vartheta, \varphi) + f^-(r) \Phi_{m_j, \kappa_j}^-(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} i f^+(r) \psi_{j\mp 1/2}^{m_j}(\vartheta, \varphi) \\ f^-(r) \psi_{j\pm 1/2}^{m_j}(\vartheta, \varphi) \end{pmatrix}$$

einen Vektor in $L^2((0, \infty), dr) \otimes \mathcal{K}_{m_j, \kappa_j}$.

Nach dem Isomorphismus $\psi(r, \vartheta, \varphi) = r \Psi(x_1(r, \vartheta, \varphi), \dots, x_3(r, \vartheta, \varphi))$, korrespondiert ψ zu einem Vektor

$$(A.16) \quad \Psi(x) = \frac{1}{r(x)} \psi(r(x), \vartheta(x), \varphi(x)).$$

Daher ist ein beliebiger Vektor in $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)^4$ eine Linearkombination der Form

$$(A.17) \quad \Psi(x) = \sum_{j, m_j, \kappa_j} \left[\frac{1}{r} f_{m_j, \kappa_j}^+(r) \Phi_{m_j, \kappa_j}^+(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{r} f_{m_j, \kappa_j}^-(r) \Phi_{m_j, \kappa_j}^-(\vartheta, \varphi) \right]$$

mit Koeffizienten $f^\pm \in C_0^\infty(0, \infty)$. Ist ein anderer Vektor Φ durch eine Folge (g_{m_j, κ_j}) dargestellt, so ist das Skalarprodukt durch

$$(A.18) \quad (\Psi, \Phi) = \sum_{j, m_j, \kappa_j} \int_0^\infty \left[\overline{f_{m_j, \kappa_j}^+(r)} g_{m_j, \kappa_j}^+(r) + \overline{f_{m_j, \kappa_j}^-(r)} g_{m_j, \kappa_j}^-(r) \right] dr$$

definiert. Dies wiederum zeigt, dass wir einen unitären Isomorphismus zwischen $L^2(\mathbb{R}^3)^4$ und der direkten Summe der partiellen Wellenunterräume $L^2((0, \infty), dr)^2$ haben. Durch diese Definitionen wird beispielsweise der Operator $\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}$ auf $L^2(\mathbb{R}^3)$ zu $\frac{d}{dr}$ auf $L^2((0, \infty), dr)$.

Satz A.3 Der Dirac-Operator mit dem Potential

$$(A.19) \quad V(x) = \phi_{sc}\beta + \phi_{el}\mathbf{1}_4 + i\beta\alpha \cdot e_r\phi_{am}(r)$$

lässt die partiellen Wellenunterräume $C_0^\infty(0, \infty) \otimes \mathcal{K}_{m_j, \kappa_j}$ invariant.

Dargestellt in der $\{\Phi_{m_j, \kappa_j}^+, \Phi_{m_j, \kappa_j}^-\}$ -Basis wirkt der Dirac-Operator auf jedem Unterraum durch den Operator

$$(A.20) \quad h_{m_j, \kappa_j} = \begin{pmatrix} 1 + \phi_{sc}(r) + \phi_{el}(r) & -\frac{d}{dr} + \frac{\kappa_j}{r} + \phi_{am}(r) \\ \frac{d}{dr} + \frac{\kappa_j}{r} + \phi_{am}(r) & -1 - \phi_{sc}(r) + \phi_{el}(r) \end{pmatrix},$$

welcher wohldefiniert auf $C_0^\infty(0, \infty)^2 \subset L^2((0, \infty), dr)^2$ ist.

Der Dirac-Operator D ist auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)^4$ unitär äquivalent zur direkten Summe der partiellen Wellen-Dirac-Operatoren h_{m_j, κ_j} , also

$$(A.21) \quad D \cong \bigoplus_{j=1/2, 3/2, \dots}^{\infty} \bigoplus_{m_j=-j}^j \bigoplus_{\kappa_j=\pm(j+1/2)} h_{m_j, \kappa_j}.$$

Lemma A.4 Der Dirac-Operator D ist genau dann wesentlich selbstadjungiert auf $\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})^4$, wenn alle h_{m_j, κ_j} wesentlich selbstadjungiert auf $C_0^\infty(0, \infty)$ sind. In diesem Fall ist das Spektrum des zugehörigen selbstadjungierten Operators D die Vereinigung der Spektren der selbstadjungierten Operatoren h_{m_j, κ_j} .

Beweis. Siehe [5]. □

A.6. Der radiale Dirac-Operator. Wir geben nun einen kurzen Überblick über die Selbstadjungiertheit und die Spektraltheorie des radialen Dirac-Operators, welcher eine selbstadjungierte Erweiterung des Operators

$$(A.22) \quad h = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{d}{dr} \\ \frac{d}{dr} & 0 \end{pmatrix} + V(r)$$

auf $C_0^\infty(0, \infty)$ mit dem Potential

$$(A.23) \quad V(r) = \begin{pmatrix} 1 + \phi_{sc}(r) + \phi_{el}(r) & \frac{\kappa}{r} + \phi_{am}(r) \\ \frac{\kappa}{r} + \phi_{am}(r) & -1 - \phi_{sc}(r) + \phi_{el}(r) \end{pmatrix}.$$

Hierbei sind die Funktionen ϕ_{sc} , ϕ_{am} und ϕ_{el} reell, messbar und lokal integrierbar.

Satz A.5 Der Operator h ist genau dann wesentlich selbstadjungiert, wenn für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ die Gleichung $hf = \lambda f$ eine Lösung $f \notin L^2(0, R)^2$ für ein $R > 0$, die also nicht quadratintegrierbar am Ursprung ist, hat.

Beispiel A.6 (Coulombpotential) Im Falle des Coulombpotentials hat das Potential die Form

$$(A.24) \quad V(r) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\gamma}{r} & \frac{\kappa}{r} \\ \frac{\kappa}{r} & -1 + \frac{\gamma}{r} \end{pmatrix}.$$

Der beschränkte Operator σ_3 beeinflusst nicht die Selbstadjungiertheit von h , weshalb man ihn im Folgenden auch weglassen kann. Ohne die Masse hat die Gleichung $hf = 0$ die Lösungen

$$(A.25) \quad f(r) = \begin{pmatrix} \gamma \\ -\kappa - s \end{pmatrix} r^s,$$

wobei $s = \pm\sqrt{\kappa^2 - \gamma^2}$. Die Lösung ist nur für $s < 0$ und $\gamma^2 < \kappa^2 - 1/4$ nicht am Ursprung quadratintegrierbar. Der Dirac-Coulomb-Operator $D = D_0 + \gamma/|x|$ ist daher auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})^4$ genau dann selbstadjungiert, wenn $|\gamma| \leq \sqrt{3}/2$.

DANKSAGUNG

Die Autoren bedanken sich bei Professor H. K. H. Siedentop, der dieses Projekt motiviert hat und immer ein offenes Ohr für Fragen jeglicher Art hatte.

LITERATUR

1. M. Klaus, Nonregularity of the Coulomb Potential in Quantum Electrodynamics, *Helv. Phys. Acta* **53** (1980), 36–39.
2. M. Klaus and G. Scharf, The Regular External Field Problem in Quantum Electrodynamics, *Helv. Phys. Acta* **50** (1977), 779–802.
3. G. Nenciu and G. Scharf, On Regular External Fields in Quantum Electrodynamics, *Helv. Phys. Acta* **51** (1978), 412–424.
4. P.A. Perry, Scattering theory by the enss method, *Mathematical reports*, no. v. 1, pt. 1, Harwood Academic Publishers, 1983.
5. B. Thaller, The dirac equation, *Texts and monographs in physics*, Springer-Verlag, 1992.

$$\|Vf\| \leq a\|H_0 f\| + b\|f\| \quad a < 1 \quad R_0 = \frac{1}{\alpha p + \beta - i\eta} = \frac{\alpha p + \beta + i\eta}{p^2 + 1 + \eta^2}$$

~~$$\|VR_0 f\| \leq a \|R_0 f\| + b \|f\|$$~~

$$\|Vg\|$$

$$\|Vf\| \leq a\|H_0 f\| + b\|f\| \quad \forall f \in D(H_0)$$

$$g = R_0 f \quad f \in \mathcal{D} \rightarrow g \in D(H_0)$$

$$\begin{aligned} \|Vg\| &\leq a\|H_0 g\| + b\|g\| \\ &= a\|H_0 (H_0 - i\eta)^{-1} f\| + b\|(H_0 - i\eta)^{-1} f\| \\ &\leq \| (H_0 - i\eta)^{-1} \| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(H_0 - i\eta)^{-1}\| &= \sup_{\lambda \in \sigma(H_0)} \frac{1}{|\lambda - i\eta|} = \sup \frac{1}{\sqrt{p^2 + \eta^2}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2}} \end{aligned}$$

4*

$$H_0 (H_0 - i\eta)^{-1} = (H_0 - i\eta)(H_0 - i\eta)^{-1} + i\eta (H_0 - i\eta)^{-1} = 1 + i\eta (H_0 - i\eta)^{-1}$$

$$\|VR_0 f\| \leq a \left[1 + \frac{b|a|}{\sqrt{1 + \eta^2}} \right] + \frac{b}{\sqrt{1 + \eta^2}} \quad \text{Da } a < \frac{1}{2} \text{ zB gew\u00e4hlt werden kann}$$

$$\|VR_0 f\| < 1 \quad \text{f\u00fcr } \eta > \eta_0 \Rightarrow (1 + VR_0)^{-1} \text{ uniform beschr\u00e4nkt f\u00fcr } \eta > \eta_0$$

f\u00fcr $\eta < \eta_0$: benutze, dass V H_0 -kompakt ist, also VR_0 kompakt. (warum auch immer)

$(1 + VR_0)^{-1}$ meromorph
holomorph bis auf bei isolierten Punkten, an denen die Fkt eine Laurentreihe haben muss

$\Rightarrow (1 + VR_0)^{-1}$ beschr\u00e4nkt auf der imagin\u00e4ren Achse

Für $\|VR_0\| < 1$

$(1+VR_0)^{-1}$ als Neumann-Reihe schreibbar

$$\|(1+VR_0)^{-1}\| = \sum \|VR_0\|^n (-1)^n < \infty \text{ unabh. von } \eta$$

Frage Wenn V relativ H_0 -beschränkt, $\stackrel{?}{\Leftrightarrow}$ V relativ H -beschränkt
es gibt ein $a < 1$. Wähle es zu $a = 0,3$ z.B.!!

$$\|Vf\| \leq a\|H_0f\| + b\|f\|$$

$$\|Hf\| = \|(H_0 + V)f\| \leq \|H_0f\| + \|Vf\| \leq (a+1)\|f\|$$

$$\|Vf\| \leq a\|(H-V)f\| + b\|f\| \leq a\|Hf\| + b\|f\| + a\|Vf\|$$

$$(1-a)\|Vf\| \leq a\|Hf\| + b\|f\|$$

$$\|Vf\| \leq \frac{a}{1-a}\|Hf\| + \frac{b}{1-a}\|f\|$$

$$\frac{a}{1-a} < 1? \quad a < 1 \Leftrightarrow -a > -1$$

nein! a.

→ analog für

$$a < 1-a \Leftrightarrow a < \frac{1}{2}$$

$\Lambda^\circ VR \Lambda^{\circ-1}$ für große η | Wähle $a < \frac{1}{2}$

(3)

Theorem 1 Sei V D_0 -beschränkt mit Schranke < 1 (\rightarrow Kato-Rellich) und, sodan $\Lambda_+ \Lambda_-$ & $\Lambda_+ \Lambda_-^0 \in HS$ sind und 0 kein Eigenwert von $D = D_0 + V$ ist.

Dann erfüllt das Skalarpotential

$$\int \rho \, dq \frac{|V(p-q)|^2}{(E_p + E_q)^{2+\epsilon}} \left(1 - \frac{pq+1}{E_p E_q}\right) < \frac{c}{\epsilon}$$

Beweis Mit $R(\eta) = \frac{1}{D - i\eta}$ ist auch $\Lambda_+ R(\eta) \Lambda_-^0 = \Lambda_+ \Lambda_- R(\eta) \Lambda_-^0 + \Lambda_+ R(\eta) \Lambda_+ \Lambda_-^0 \in HS$

da $\|\Lambda_+ R(\eta) \Lambda_-^0\|_2 \leq \underbrace{\|\Lambda_+ \Lambda_- R(\eta) \Lambda_-^0\|_2}_{c_1} + \underbrace{\|\Lambda_+ R(\eta) \Lambda_+ \Lambda_-^0\|_2}_{c_2} = (c_1 + c_2) \|R(\eta)\| \leq \frac{const}{1+\eta}$

(ρ Elemente: $\|AB\|_p \leq \|A\|_q \|B\|_r$) $\leq \underbrace{\|\Lambda_+ \Lambda_-\|_2}_{c_1} \|R(\eta)\| \leq \underbrace{\|\Lambda_+ \Lambda_-\|_2}_{c_2} \|R(\eta)\|$ $\sqrt{1+\eta} \gg 1+\eta$

$$R_0 = \frac{1}{D_0 - i\eta} = \frac{1}{\alpha p + \beta \bar{i}\eta} = \frac{\alpha p + \beta + i\eta}{p^2 + 1 + \eta^2} \rightarrow \|R\| \leq \|R_0\| \leq \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1 + \eta^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+\eta}} \leq \frac{const}{1+\eta}$$

$$R = \frac{1}{\alpha p + \beta + V - i\eta} = \frac{\alpha p + \beta + V + i\eta}{(\alpha p + \beta + V)^2 + \eta^2}$$

Schreibe nun: $R = R_0 + R_1$ $R_0 - R_0 + R = R_0 - R_0(D - D_0)R = R_0 - R_0 V R$

$$\Rightarrow \Lambda_+ R \Lambda_-^0 = \Lambda_+ R_0 \Lambda_-^0 - \Lambda_+ R_0 V R \Lambda_-^0 = \underbrace{\Lambda_+ R_0 \Lambda_-^0}_{= \Lambda_+ \Lambda_-^0 R_0 = 0} - \Lambda_+ R_0 V R_0 \Lambda_-^0 + \Lambda_+ R_0 V R_0 V R \Lambda_-^0$$

$$= \Lambda_+ R_0 V \Lambda_+ R_0 V R \Lambda_-^0 + \Lambda_+ R_0 V R_0 \Lambda_-^0 V R \Lambda_-^0 - \Lambda_+ R_0 V R_0 \Lambda_-^0 \in HS$$

$$\Rightarrow \Lambda_+ R_0 V R_0 \Lambda_-^0 (\Lambda_-^0 V R \Lambda_-^0 - 1) \in HS = \underbrace{\Lambda_+}_{bd} \underbrace{\left(\frac{1}{\lambda_0} + R_0 V\right)}_{bd} \underbrace{\Lambda_+ R \Lambda_-^0}_{HS} \in HS \text{ wieder}$$

$$\Lambda_+ R_0 V R_0 \Lambda_-^0 R_0^{-1} (\Lambda_+ R_0 \Lambda_-^0 V R \Lambda_-^0 - \Lambda_-^0 R_0 \Lambda_-^0)$$

$$\Lambda_+ R_0 V \Lambda_-^0 (\Lambda_-^0 (R_0 V R - R_0) \Lambda_-^0) \sqrt{(\lambda_0^2 + \eta^2)^{-1}} > \lambda_0 \eta$$

$$\lambda_0 < 1 \Rightarrow -\Lambda_+ R_0 V \Lambda_-^0 R \Lambda_-^0$$

$$\|R(\eta)\| = \sup_{\sigma(D)} \frac{1}{|\lambda - i\eta|} = \frac{1}{|\lambda_0 - i\eta|} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_0^2 + \eta^2}} \begin{cases} \leq \frac{1}{|\eta|} \text{ für große } \eta \\ \leq \frac{1}{\lambda_0} \end{cases} \leq \frac{1}{\lambda_0 + \eta} = \frac{c}{1+\eta}$$

$$\begin{aligned}
 \Lambda_+^\circ R_0 V R_0 \Lambda_+^\circ (\Lambda_+^\circ V R \Lambda_+^\circ - 1) &= \Lambda_+^\circ R_0 (D - D_0) R_0 \Lambda_+^\circ + \Lambda_+^\circ R_0 V R_0 \Lambda_+^\circ V R \Lambda_+^\circ \\
 &= \Lambda_+^\circ R_0 \Lambda_+^\circ - \Lambda_+^\circ R_0 D (R - R_0 V R) \Lambda_+^\circ + \Lambda_+^\circ R_0 V R_0 \Lambda_+^\circ V R \Lambda_+^\circ \\
 &= \underbrace{\Lambda_+^\circ R_0 \Lambda_+^\circ}_0 - \Lambda_+^\circ R_0 D (R - R_0 V R) \Lambda_+^\circ + \Lambda_+^\circ R_0 V R_0 \Lambda_+^\circ V R \Lambda_+^\circ \\
 &= -\underbrace{\Lambda_+^\circ R_0 \Lambda_+^\circ}_0 + \Lambda_+^\circ R_0 D R_0 V R \Lambda_+^\circ +
 \end{aligned}$$

$\Lambda_+^\circ R_0 V R_0 \Lambda_+^\circ V R \Lambda_+^\circ - \Lambda_+^\circ R_0 V R_0 \Lambda_+^\circ - \Lambda_+^\circ R \Lambda_+^\circ - \Lambda_+^\circ R_0 V \Lambda_+^\circ R \Lambda_+^\circ$ betrachte nur Zug zu $\Lambda_+^\circ, \Lambda_+^\circ$

$$\begin{aligned}
 R_0 V (\Lambda_+^\circ R_0 V R \Lambda_+^\circ - \Lambda_+^\circ R) - \Lambda_+^\circ R_0 V R_0 - R \\
 \quad \quad \quad - \Lambda_+^\circ R_0 + \Lambda_+^\circ R_0 V R \quad \quad \quad R_0 V R_0 - R_0 V R_0 V R \\
 = R_0 V (R_0 V R - \Lambda_+^\circ R_0) - R_0 V R_0 - R_0 + R_0 V R = -R_0 \\
 \quad \quad \quad \text{0, da auf rechter Seite noch } \Lambda_+^\circ \text{ steht}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Lambda_+^\circ R_0 V R_0 \Lambda_+^\circ (\Lambda_+^\circ V R \Lambda_+^\circ - 1) = \Lambda_+^\circ (\Lambda_+^\circ R_0 V) \Lambda_+^\circ R \Lambda_+^\circ \Rightarrow \Lambda_+^\circ R_0 V R_0 \Lambda_+^\circ = \Lambda_+^\circ (\Lambda_+^\circ R_0 V) \Lambda_+^\circ R \Lambda_+^\circ (\Lambda_+^\circ V R \Lambda_+^\circ - 1)^{-1}$$

\nearrow
 HS
 gleichmäßig in η beschränkt

$$\|\Lambda_+^\circ R_0 V R_0 \Lambda_+^\circ\|_2^2 \leq \frac{c}{\eta^2} \quad \text{da} \quad \|\Lambda_+^\circ R \Lambda_+^\circ\|_2^2 \leq \frac{c}{(\eta+1)^2}$$

$\Lambda_+^\circ V R \Lambda_+^\circ$ ist auf ganz \mathcal{H} definiert und $\Lambda_+^\circ V R \Lambda_+^\circ f = f$ hat nur die triviale Lsg $f=0$
 $\Rightarrow \text{Kern}(\Lambda_+^\circ V R \Lambda_+^\circ) = \emptyset \Rightarrow \Lambda_+^\circ V R \Lambda_+^\circ - 1$ invertierbar auf \mathcal{H}

$\text{Kern}(\Lambda_+^\circ V R \Lambda_+^\circ) = \emptyset$, denn:

$$\Lambda_+^\circ V R \Lambda_+^\circ f \Rightarrow \text{für } f = \Lambda_+^\circ f: \Lambda_+^\circ V R \Lambda_+^\circ \Lambda_+^\circ f = 0 = \Lambda_+^\circ f \Rightarrow f = 0$$

$$\text{für } f = \Lambda_+^\circ f: \Lambda_+^\circ V R f = f \quad \text{Schreibe: } f = (D - i\eta)g$$

$$\Lambda_+^\circ V g = (D - i\eta)g \quad \text{Im auf beiden Seite: Skalarprodukt mit } g \text{ von links}$$

$$0 = -\eta \|g\|^2 \Rightarrow g = 0 \text{ für } \eta > 0.$$

Theorem 2

(5)

$$\hat{V} \text{ regular potential} \Rightarrow \int dp \frac{p^2}{1+p^{1+\epsilon}} |\hat{V}(p)|^2 < \frac{C}{\epsilon}$$

Beweis Start: V muss $\int dp dq \frac{|\hat{V}(p,q)|^2}{(E_p + E_q)^{2+\epsilon}} \left(1 - \frac{pq+1}{E_p E_q}\right) < \frac{C}{\epsilon}$ erfüllen

$$\left. \begin{array}{l} 2V = p+q \\ 2u = p-q \end{array} \right\} \begin{array}{l} p = u+v \\ q = v-u \end{array} \xrightarrow{\text{modulo Jacobi}} \int du dv \frac{|\hat{V}(u)|^2 \left(1 - \frac{v^2 - u^2 + 1}{(\sqrt{u^2 + v^2 + 2uv \cos \theta} + 1)(\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta} + 1)}\right)}{(\sqrt{u^2 + v^2 + 2uv \cos \theta} + 1 + \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta} + 1)^{2+\epsilon}}$$

$$p_1 = p - q \rightarrow \int dp_1 |\hat{V}(p_1)|^2 F(p_1)$$

$$p_2 = p + q$$

$$a = p_1^2 + p_2^2 + 4 \quad b = 2|p_1| |p_2|$$

$$F(p_1) = 2\pi \int_0^\infty dp_2 \int_{-1}^1 dx \frac{p_2^2}{\left[\frac{1}{2}(a+bx)^{1/2} + \frac{1}{2}(a-bx)^{1/2}\right]^{2+\epsilon}} \left(1 - \frac{p_2^2 - p_1^2 + 4}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}}\right) > 0 \text{ \& stetig}$$

\Rightarrow Nur Verhalten bei $p_1 \rightarrow 0$ und $p_1 \rightarrow \infty$ interessant

$$\lim_{p_1 \rightarrow 0} \frac{1}{p_1^2} F(p_1) = \lim_{p_1 \rightarrow 0} \int_0^\infty dp_2 \int_{-1}^1 dx \frac{p_2^2}{(p_2^2 + 4)^{1+\epsilon/2}} \left(\frac{1}{p_2^2 + 4} - \frac{p_2^2 x^2}{(p_2^2 + 4)^2}\right) = \text{const} > 0$$

\hookrightarrow gleichmäßig beschränkt in $\epsilon > 0$

Für $p_1 \rightarrow \infty$, definiere: $p_2' = \frac{p_2}{p_1}$ $a' = \frac{a}{p_1^2} = p_1'^2 + 1 + \frac{4}{p_1^2}$ $b' = \frac{b}{p_1^2} = 2p_1'$

$$F(p_1) = p_1^{1-\epsilon} \cdot 2\pi \int_0^\infty dp_2' \int_{-1}^1 dx \frac{p_2'^2}{\left[\frac{1}{2}\sqrt{a'+b'x} + \frac{1}{2}\sqrt{a'-b'x}\right]^{2+\epsilon}} \left(1 - \frac{p_2'^2 - 1 + 4/p_1^2}{\sqrt{a'^2 - b'^2 x^2}}\right)$$

$$\lim_{p_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{p_1^{1-\epsilon}} F(p_1) = \text{const}$$

$$\Rightarrow \int_{|p| \geq a} dp p^{1-\epsilon} |\hat{V}(p)|^2 < \infty \quad \&\& \quad \int_{|p| \leq a} dp p^2 |\hat{V}(p)|^2 < \infty$$

Wie auch immer gilt:

$$\| \mathcal{R}_0(\eta) \vee \mathcal{R}_1(\eta) \|_2^2 = \int dp dq \frac{|\hat{V}(p-q)|^2}{(E_p^2 + \eta^2)(E_q^2 + \eta^2)} \left(1 - \frac{p \cdot q + 1}{E_p E_q} \right) \leq \frac{\text{const}}{\eta^2} \quad | \cdot \eta^2 / \cdot \eta^{-1-\epsilon}$$

$$\Rightarrow \int dp dq \int_1^\infty \frac{|\hat{V}(p-q)|^2 \eta^{1-\epsilon}}{(E_p^2 + \eta^2)(E_q^2 + \eta^2)} \left(1 - \frac{p \cdot q + 1}{E_p E_q} \right) d\eta \leq C \int_1^\infty \frac{d\eta}{\eta^{1+\epsilon}} = -\frac{C}{\epsilon} \Big|_1^\infty = \frac{C}{\epsilon}$$

Untersuche
$$J = \int_1^\infty d\eta \frac{\eta^{1-\epsilon}}{(\eta^2 + E_p^2)(\eta^2 + E_q^2)}$$

1. Fall: $E_p > E_q > 1 \Rightarrow 1 < E_q < E_p$ $\forall \eta < 2E_p \Rightarrow \eta^{-\epsilon} > (2E_p)^{-\epsilon}$

$$\Rightarrow J > \int_1^{2E_p} \frac{\eta^{1-\epsilon}}{(\eta^2 + E_p^2)^2} > \left(\frac{1}{2E_p} \right)^\epsilon \cdot \int_1^{2E_p} \frac{\eta}{(\eta^2 + E_p^2)^2} = \frac{1}{(2E_p)^\epsilon} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_p^2 + 1} - \frac{1}{5E_p^2} \right) > \frac{C}{E_p^{2+\epsilon}}$$

2. Fall: $E_q > E_p > 1: J > \frac{C}{E_q^{2+\epsilon}}$

3. Fall: beliebige $E_p, E_q: E_p, E_q > 1$

$$J > \int_1^{E_p + E_q} \frac{\eta^{1-\epsilon}}{(\eta^2 + E_p^2)(\eta^2 + E_q^2)} > \frac{1}{(E_p + E_q)^\epsilon} \int_1^{E_p + E_q} \frac{\eta}{(\eta^2 + E_p^2 + E_q^2)^2} > \frac{C}{(E_p + E_q)^{2+\epsilon}}$$

$$\Rightarrow \int dp dq \frac{|\hat{V}(p-q)|^2}{(E_p + E_q)^{2+\epsilon}} \left(1 - \frac{p \cdot q + 1}{E_p E_q} \right) < \frac{C}{\epsilon}$$

Theorem 4

(6)

Falls $\int_{\mathbb{C}^n} \frac{|p|^2}{1+|p|^{2-\epsilon}} |\hat{V}(p)|^2 < \infty \Leftrightarrow$ mit $\epsilon > 0 \Rightarrow \mathcal{L}_+^0 - \mathcal{L}_+$ ist Hilbert-Schmidt
 $\Rightarrow V$ ist regulär

$$D_0 = \sqrt{-\Delta + m^2}$$

Frage $\Lambda_{\pm} \frac{1}{|1|} \Lambda_{\pm} \in \mathcal{Y}^2(\mathbb{H})?$

$$\Lambda_{0\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \tau) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{D_0}{|D_0|}\right) = \frac{1}{2}(1 \pm \operatorname{sgn} D_0) \quad D_s = D_0 - \frac{\sqrt{\Delta}}{|1|} \quad V = -\frac{\sqrt{\Delta}}{|1|}$$

Für $a \in \mathbb{R}$ ist $\operatorname{sgn}(a) = \frac{1}{\pi} \int_{-\rho}^{\rho} dy \frac{1}{a+iy} = \frac{1}{\pi} \int_{-\rho}^{\rho} dy \frac{a-iy}{a^2+y^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\rho}^{\rho} dy \frac{a}{a^2+y^2}$

$$\stackrel{\text{y-Hilf}}{=} \frac{1}{\pi} \operatorname{sgn}(a) \int_{-\rho}^{\rho} \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{1}{\pi} \operatorname{sgn}(a) \cdot [\operatorname{Arctan}(\rho) - \operatorname{Arctan}(-\rho)] = \operatorname{sgn} a$$

$$\Rightarrow \operatorname{sgn}(D_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\rho}^{\rho} \frac{dy}{D_0+iy}$$

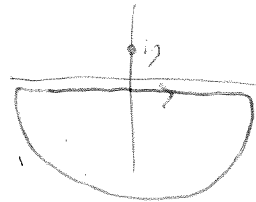
$$\Rightarrow \Lambda_{s+} - \Lambda_{0+} = \frac{1}{2}(\operatorname{sgn}(D(e)) - \operatorname{sgn} D_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\rho}^{\rho} dy \left(\frac{1}{D_s+iy} - \frac{1}{D_0+iy} \right)$$

klar, da $D_0, D(e)$ reell sind
ist $iy \in \mathcal{S}(D_0), \mathcal{S}(D(e))$

$$\frac{1}{D_0+iy} - \frac{1}{D_s+iy} = \frac{1}{D_s+iy} \frac{(D_0-D_s)}{\frac{\sqrt{\Delta}}{|1|}} = \frac{1}{D_s+iy} \frac{(D_0-D_s)}{|1|}$$

$$\stackrel{-1}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\rho}^{\rho} dy \frac{1}{D_0+iy} V^{-1} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\rho}^{\rho} dy \frac{1}{D_0+iy} (\Lambda_{+} + \Lambda_{-}) V (\Lambda_{+} + \Lambda_{-}) \frac{1}{D_s+iy}$$

z.B. $-\frac{1}{2\pi} \int_{-\rho}^{\rho} dy \frac{1}{D_0+iy} \Lambda_{\pm} V \Lambda_{\pm} \frac{1}{D_s+iy} = 0$



$$D_s = D_0 + V$$

einzig nicht-verschwindende Kombination

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\rho}^{\rho} dy \frac{1}{D_0+iy} \Lambda_{+} V \Lambda_{-} \frac{1}{D_s+iy} = \frac{1}{D_s+iy} = \frac{1}{D_0+iy} + R_1 + R_2 \quad R_1 = -R_0 V R_0, \quad R_2 = R_0 V R_0 V R_0 (1 + V R_0)$$

Integralhern? $\left(\frac{1}{D_0+iy}\right)^{\wedge} * V * \left(\frac{1}{-D_s+iy}\right)^{\wedge} \in L^2(\mathbb{R}^3)?$

$$V = \frac{1}{|1|} \Rightarrow \int d\rho d\eta \left| \frac{1}{(\rho+i\eta)} \frac{1}{|\rho-1|^2} \frac{1}{-\bar{\epsilon}(\rho)+i\eta} \right|^2 < \rho?$$

Ursprüngliche Frage: $\Lambda_{+} V \Lambda_{-} \in \mathcal{Y}^2(\mathbb{H})? \quad \iint \left| \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\alpha p + \beta}{|p^2+1|}\right) \frac{1}{|p-1|^2} \left(1 - \frac{\alpha p + \beta}{\sqrt{q^2+1}}\right) \right|^2 d\rho d\eta < \infty$

$$\int dp \frac{|\hat{V}(p)|^2}{e_p e_q} \int dq \frac{1 - \frac{(p+q)q+1}{e_p e_q}}{(e_p + e_q)^2}$$

$$\int dq q^2 \cdot (q+1)^\alpha$$

$$2+\alpha < 2 \Leftrightarrow \alpha < 0$$

$$\frac{q^{1+\epsilon}}{q^2} \quad \epsilon < 1$$

$$\text{Krit. 1} \int_{|p| \leq a} dp p^2 |\hat{V}(p)|^2 \cdot \int dq \frac{1 - \frac{(p+q)q+1}{e_p e_q}}{(e_p + e_q)^2 |p|^2} \leq \text{const?}$$

~~das muss der Integrand bei ∞ wie~~

$$\int_0^\infty dq q^2 \int_{-1}^1 dx \frac{1 - \frac{|p||q|x + q^2 + 1}{\sqrt{(p^2 + q^2 + 1 + |p||q|x)(q^2 + 1)}}}{(\sqrt{q^2 + 1} \cdot M + \sqrt{p^2 + q^2 + 2|p||q|x + 1})^2}$$

$$q \mapsto |p|q$$

$$e_{p+q}^2 \approx p^2 + q^2 p^2 + 1 + 2|q||p|^2 x \sim p^2$$

$$e_q^2 \approx p^2 q^2 + 1 \approx p^2$$

Nenner $\sim |p|^4$

$$e_q \cdot e_{p+q} = \sqrt{p^2 q^2 + 1} \sqrt{p^2 + q^2 p^2 + 1 + 2|q||p|^2 x} \sim p^2$$

$$p \rightarrow 1 - \frac{(p+q)q+1}{e_p e_q} \sim 1 - \frac{p^2(\hat{e}_p + q) + 1}{p^2}$$

$$\|(1+VR_0)^{-1}\| < c \text{ uniform in } \mathcal{D}$$

Da $\|Vg\| \leq a\|H_0 f\| + b\|g\|$ folgt

$$\|VR_0$$

Ausflug: Selbstadjungiertheit: für $V \in L^{\frac{15}{4}+s} + L^2$

1) Kato-Rekurrenz: Zeige $\exists_{a,b} \forall_{a < 1} \|Vg\| \leq a\|H_0 f\| + b\|g\|$

Für V_2 ok: ~~$\|V_2 f\| \leq \|V_2\| \|f\|$~~ $\|V_2 f\| = \sqrt{\int |V_2 f|^2 dx} \leq \|V_2\|_{\infty} \cdot \|f\|$

~~$\|(1+VR_0)^{-1}\| < c$~~ $\|VR_0\| < 1$ $g = (D_0 - i\eta) f$ $f = (D_0 - i\eta) g$

$\|(1+VR_0)\| > c$ $\|VR_0 f\| = \|Vg\| \leq a\|H_0 g\| + b\|g\| < 1$

$(1+VR_0)^{-1} f$ $R_0 (D_0 - i\eta + V) = R_0 (D_0 - i\eta) + R_0 V$

$(R_0 - R_0 VR_0 + R_0 VR_0 VR_0 (1+VR_0)^{-1}) (D_0 - i\eta) (D_0 - i\eta + V) (D_0 - i\eta + V)$

$= V - R_0 V - V + VR_0 VR_0 (1+VR_0)^{-1} (D_0 - i\eta + V)$

~~$-R_0 V$~~

~~$= 1 + V R_0 V$~~

$= 1 + R_0 V - R_0 V - R_0 VR_0 V$

$(D_0 - i\eta + V) R_0 = 1 + VR_0$

$-(D_0 - i\eta + V) R_0 VR_0 = -VR_0 - VR_0 VR_0$ } $= 1 - VR_0 VR_0$

$(D_0 - i\eta + V) R_0 VR_0 VR_0 (1+VR_0)^{-1} = VR_0 VR_0 (1+VR_0)^{-1} + VR_0 V R_0 VR_0 (1+VR_0)^{-1}$

$= VR_0 VR_0 \underbrace{[(1+VR_0)^{-1} + VR_0 (1+VR_0)^{-1}]}_{(1+VR_0)(1+VR_0)^{-1}} = VR_0 VR_0$

(4) $R_0 V R_0$ ist beschränkt, denn $\exists \frac{1}{2} \|V f\| \leq a \|D_0 f\| + b \|f\| \quad f \in D(D_0)$

$$\begin{aligned} \|V R_0 f\| &\leq a \|D_0 R_0 f\| + b \|R_0 f\| & \| (D_0 - i\eta)^{-1} \| &= \sup_{\lambda \in \sigma} \frac{1}{|\lambda - i\eta|} = \sup \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \eta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2}} \\ &\leq a \| (D_0 - i\eta) R_0 f\| + a \eta \|R_0 f\| + b \|R_0 f\| \\ &= a \left(1 + \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + 1}}\right) \|f\| + \frac{b}{\sqrt{1 + \eta^2}} \|f\| \Rightarrow \|V R_0\| < 1 \text{ für } \eta > \eta_0 \text{ (hinreichend großes } \eta) \end{aligned}$$

Ist V D_0 -beschränkt, dann auch D -beschränkt, denn:

~~$$\|D f\| \leq \|D_0 f\| + \|V f\| \leq \|D_0 f\| \cdot (1+a) + b \|f\|$$~~

$$\|V f\| \leq a \|(D-V)f\| + b \|f\| \leq a \|D f\| + a \|V f\| + b \|f\|$$

$$(1-a) \|V f\| \leq a \|D f\| + b \|f\| \Rightarrow \|V f\| \leq \frac{a}{1-a} \|D f\| + b \|f\| \quad \frac{a}{1-a} < 1 \Leftrightarrow a < \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow V$ D -beschränkt für $a < \frac{1}{2}$. Da $a < 1$ frei wählbar war, wähle er zu $\frac{1}{3}$ z.B.

Namans: $(1 + V R_0)^{-1} = \sum_n (-1)^n (V R_0)^n$

$$\begin{aligned} \|(1 + V R_0)^{-1}\| &\leq \sum_n \|V R_0\|^n \\ &\leq \sum_n \|V R_0\|^n \end{aligned}$$

Für $\eta > \eta_0$: $\|V R_0\| < 1 \Rightarrow \|(1 + V R_0)^{-1}\| = \|(1 - (-V R_0))^{-1}\| \leq \sum_n (-1)^n \underbrace{\|V R_0\|}_<1^n < \infty \Rightarrow$ gleichmäßig in η beschränkt

$\|V R_0 f\| \leq c \|f\| \quad f = (D_0 - i\eta) f$?

$$\|f\| \leq c \|(D_0 - i\eta) f\| \leq c \|D_0 f\| + |\eta| c \|f\| = a \|D_0 f\| + b \|f\| + \underbrace{(c-a) \|D_0 f\| + (|\eta|c - b) \|f\|}_{\stackrel{?}{\leq} 0}$$

~~$$a > a + c: -a \|D_0 f\| + (|\eta|c - b) \|f\| \leq (|\eta|c - b - a) \|f\|$$~~

$$\|D_0 f\| \geq \|f\|$$

$$\min \sigma(D_0) = 1$$

$$c < a < 1$$

~~$$(c-a) \underbrace{\|D_0 f\|}_{\geq \|f\|} + (|\eta|c - b) \|f\| \stackrel{?}{\leq} 0$$~~

$$< |\eta|c - b \quad \rightarrow \text{wähle } b > \eta$$

Unter der Annahme, dass V relativ H_0 -kompakt ist, also, dass
VR_0 kompakt ist, gilt, dass $(1+VR_0)^{-1}$ überall bis auf an Iso-Merten
Punkten (tatsächlich Spektralhalbteil) holomorph ist. Diese Pole sind alle Eigenwerte vom
gestörten Diracoperator D_H , welcher sich realisiert werden kann, und daher auf
der reellen Achse liegen.
Da 0 kein Eigenwert ist, ist $(1+VR_0)^{-1}$ auf der imaginären Achse beschränkt.

Zur Gleichmäßigen Beschränktheit von $(1+VR_0)$

V ist relativ D_0 -beschränkt d.h. $\exists a \in \frac{1}{2}$, b.e.s. sodaß

$$\|Vf\| \leq a\|D_0 f\| + b\|f\| \quad \text{mit } f = R_0 g$$

$$\|VR_0 g\| \leq a\|(D_0 - i\eta)R_0 g\| + a\eta\|R_0 g\| + b\|R_0 g\|$$

$$\leq a\left(1 + \frac{\eta}{1+\eta^2}\right)\|g\| + \frac{b}{1+\eta^2}\|g\| \leq 1 \quad \text{für genügend großes } \eta \text{ und } a < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+VR_0} = \frac{1}{1 - (-VR_0)} \stackrel{\text{Neuman}}{=} \sum_{n \geq 0} (-1)^n (VR_0)^n \Rightarrow \|(1+VR_0)^{-1}\| \leq \sum_{n \geq 0} \|(VR_0)^n\| \leq \sum_{n \geq 0} \|VR_0\|^n$$

$$(1+VR_0)^{-1} = ((D_0 - i\eta + V)R_0)^{-1} = (D_0 - i\eta)(D - i\eta)^{-1} = \frac{1}{1 - \|VR_0\|} < \infty$$

Für kleine η : $\frac{1}{1+VR_0} = \frac{1}{(D_0 - i\eta + V)R_0} \in (D_0 - i\eta)(D - i\eta)^{-1}$

$\Rightarrow \frac{1}{1+VR_0}$ ist meromorph und hat die selben Pole wie R , was die Eigenwerte von $D_0 + V$ sind. Diese Pole können auch nicht von $D_0 - i\eta$ weggehoben werden, da D_0 nur wesentliches Spektrum hat.

Unter der Annahme, dass D keinen Eigenwert bei 0 hat, kann man deshalb $(1+VR_0)^{-1}$ auf der imaginären Achse beschränken, wir wählen daher als Resolventenparameter wieder $i\eta$

$$\frac{D_0 - i\eta}{D - i\eta} = \frac{(D_0 - i\eta)(D + i\eta)}{D^2 + \eta^2} \leq \frac{D_0^2 + \eta^2 + V(D_0 - i\eta)}{D^2 + \eta^2} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \frac{D_0^2 + VD_0}{D^2} \quad \eta \in \mathbb{R}$$

~~Diese D habe kleinsten Eigenwert $1 > \lambda_0 > 0 \Rightarrow D^2 > \lambda_0^2$ interessant für $\eta \rightarrow 0$~~

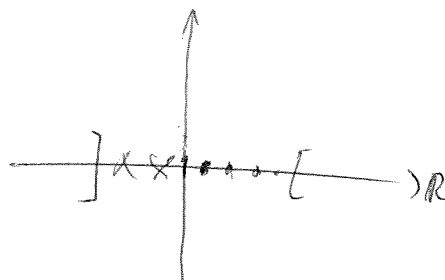
$$\|(1+VR_0)^{-1}\| < \infty \quad \text{unabh. von } \eta \quad \|R_0\| = \sup_{\lambda \in \sigma(D_0)} \frac{1}{|\lambda - i\eta|} = \frac{1}{\eta}$$

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \|(D_0 + V)\varphi\| \geq \varepsilon \|\varphi\| \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(D_0 + V) \quad \Leftrightarrow |\langle (D_0 + V)\varphi, \varphi \rangle| \geq \varepsilon \|\varphi\|^2$$

$$D_0 + V = D_0 - i\eta + V + i\eta$$

R_0

$$\|(D_0 - i\eta)(D - i\eta)^{-1}\| = \|1 + V(D - i\eta)^{-1}\| \leq 1 + \|VR\|$$



$$\|Vf\| \leq a\|f\|$$

$$\|Vf\| \leq a\|D_0 f\| + b\|f\|$$
$$\leq a\|(D_0 + V)f\| + a\|Vf\|$$

$$\left(\begin{matrix} \pm V \\ D_0 - i\eta \end{matrix} \right) (D_0 - i\eta)^{-1} =$$

$$D = D_0 + V$$

$$I = V(D_0 - i\eta)^{-1}$$

$$V = \text{dom}(D) \rightarrow \mathbb{H}$$

stetig. für rel. beschr.

Selbstadjungiertheit von D auf $\mathcal{D}(D_0)$ für Potentiale $V \in H^1 + H^{1/2}$

$$\int_{|p| \leq a} |\hat{V}(p)|^2 p^2 d^3 p < \infty \quad \& \quad \int_{|p| > a} |\hat{V}(p)|^2 p d^3 p < \infty$$

Schwach L^p : $\mu(x: |V(x)| > t) < ct^{-p}$

Dazu zeigen wir, dass V relativ H_0 -beschränkt ist, d.h. \exists a, b, c sodass $\|Vf\| \leq a\|H_0 f\| + b\|f\| \quad \forall f \in \mathcal{D}(H_0)$

$$\|Vf\| \leq \|V_1 f\| + \|V_2 f\| \quad \text{supp } V_2 \subset \{|p| \leq a\} \quad \text{supp } V_1 \subset \{|p| > a\}$$

$$\leq a^2 \int |\hat{V}_2|^2 d^3 p$$

Da $\int_{|p| \leq a} |\hat{V}_2(p)|^2 p^2 d^3 p < \infty \Rightarrow \hat{V}_2 \in L_1(\mathbb{R}^3) \Rightarrow \hat{V}_2 \in L_p(\mathbb{R}^3) \Rightarrow \|V_2 f\| \leq \|V_2\|_p \|f\|_q$

~~$\Rightarrow \|V_2 f\| \leq \|V_2\|_p \|f\|_q \leq \|V_2\|_p \|f\| \leq c \|V_2\|_p \|f\|$~~

$\Rightarrow \|V_2 f\| \leq \|V_2\|_p \|f\| \leq c \|V_2\|_p \|f\|$ Hausdorff-Young

$V_2 = \hat{V}_2 \Rightarrow \|V_2\|_p \leq c \|V_2\|_1$

Nicht so leicht für V_1 (supp $V_1 \subset \{|p| > a\}$)

Für $V_1 \in H^{1/2}$ können wir es so darstellen: $V_1 = G_{1/2} * w_1$ mit dem Besselpotential

$G_{1/2}(x) = \text{const} \int_0^\infty e^{-t|x|} \left(t + \frac{t^2}{2}\right)^{3/4} dt$ und einer geeigneten Funktion $w_1 \in L^2(\mathbb{R}^3)$

$\int w_1(y) e^{-|x-y|} \int_0^\infty e^{-t|x-y|} \left(t + \frac{t^2}{2}\right)^{3/4} dt dy = V_1(x) \in H^{1/2}$

$\|V_1\|_3 \leq \|G_{1/2}\|_{6/5} \cdot \|w_1\|_2 \leq c \| |x|^{-5/2} \|_{6/5, w} \|w_1\|_2$

generalized Young $\|fg\|_r \leq C \|f\|_p \|g\|_q$
 $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$

$\Rightarrow V_1 \in L^3(\mathbb{R}^3)$

$e^{-|x|} \int_0^\infty e^{-t|x|} \left(t + \frac{t^2}{2}\right) dt = \int_0^\infty e^{-t\left(\frac{t}{|x|^2} + \frac{t^2}{2}\right)} dt \leq e^{-|x|}$

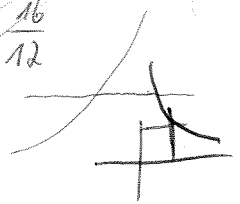
$|x|^{-2} \leq |x|^{-5/2} \quad c_1 > 1$
 $|x|^{-3} \leq |x|^{-5/2} \quad c_2 < 1$

$|x|^{-2} \leq c \cdot |x|^{-20/3}$
 $|x|^{4/3} \leq c$ für kleine $|x|$ gut

$\frac{t}{|x|^2} + \frac{t^2}{2|x|^3} \leq \text{const} |x|^{-20/3} (t + t^2)$
 bei kleinen x automatisch; bei großen $|x|$ hilft die e^{-t} -Funktion

Da $|G_{1/2}(x)| \leq |x|^{-5/2}$ folgt:

$\frac{1}{3} = \frac{5}{6} + \frac{1}{2} = \frac{10}{12} + \frac{6}{12} = \frac{16}{12}$
 $\frac{4}{3} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \checkmark$



$\int x^{-3} d^3 x$

Weak L^p : $\|g\|_{p, w} = \sup_t (t^p \mu\{|g(x)| > t\})^{1/p} < \infty$

$\sup_t (t^{6/5} \mu\{|g(x)| > t\})^{5/6}$
 $= \sup_t (t^{6/5} \cdot t^{-2/5})^{5/6} = \sup_t (t^{4/5})^{5/6}$
 $\mu(x: |x|^{-5/2} > t) = (t^{-2/5})^{3/2} = t^{-6/5}$

$\mu(x: |x|^{-5/2} > t) = t^{-6/5}$
 ~~$\mu(x: |x|^{-5/2} > t) = t^{-8/5}$~~

$$\Rightarrow \|V_1 f\|_2 \leq \|V_1\|_3 \|f\|_6 \leq c \|V_1\|_3 \sum_i \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_2 = c \|V_1\|_3 \|\nabla f\|_2$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Reed Simon II
P. 113 / Sobolev in 3 Dimensionen

$$\|f\|_q^2 \leq \frac{1}{s} \|\nabla f\|_2^2$$

$$q = \frac{2n}{n-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \checkmark$$

Wahl $\|D_0 f\|^2 = \int \langle (\frac{1}{i} \partial_i^2 \vec{v} + \beta) f, (\frac{1}{i} \partial_i^2 \vec{v} + \beta) f \rangle = \|\nabla f\|_2^2 + \|f\|^2 \Rightarrow \|\nabla f\|_2^2 = \|D_0 f\|^2 - \|f\|^2 \leq \|D_0 f\|^2$

folgt: $\|V_1 f\|_2^2 \leq c \|V_1\|_3 \|\nabla f\|_2^2 \leq c_1 \|V_1\|_3 \|\nabla f\|_2^2$

Man wählt man die Splitting $V = V_1 + V_2$ sodass $\|V_1\| < 1$ μ wird.

Wir wollen nun zeigen, dass VR_0 kompakt ist. Daraus folgt, dass $\sigma_{\text{ess}}(D_0) = \sigma_{\text{ess}}(D)$ und D hat nur Eigenwerte in $(-1, 1)$.

~~Wir beginnen mit dem langreckwelligem Teil V_2 wir werden $VR_0 = V_1 R_0 + V_2 R_0 \in \mathcal{S}^p$ zeigen.~~

Kriterium nach Jörgens: VR_0 kompakt $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \varphi_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ so daß

$$\|V \varphi_\epsilon\| \leq \epsilon (\|f\| + \|D_0 f\|) + \|\varphi_\epsilon f\| \quad \forall u \in D(D_0)$$

$V = \hat{G}_2 * w_1 \in \mathcal{H}^{1/2}$? $\hat{V} = \hat{G}_2 * \hat{w}_1$

$\|V\|_{\mathcal{H}^{1/2}}^2 = \int (1+c|p|) |\hat{V}(p)|^2 d^3 p = \int (1+c|p|) |\hat{G}_2|^2 \cdot |\hat{w}_1|^2 d^3 p \leq \|w_1\|_2 \cdot \sup_p \{ (1+c|p|) |\hat{G}_2|^2(p) \}$

$\hat{G}_2 = \int dx dt e^{-ipx - |k| - t|k|} (t + \frac{t^2}{2})^{3/4} = \int_0^\infty dt dx \int_{-1}^1 d\theta e^{-k(|p|\theta + 1+t)} x^2 (t + \frac{t^2}{2})^{3/4}$
 $= \int_0^\infty dt dx x^2 \frac{2e^{-(1+t)|k|} \sin(p|k|)}{|p||k|} (t + \frac{t^2}{2})^{3/4} = \int_0^\infty dt \frac{4(1+t)}{(p^2 + (1+t)^2)^2} (t + \frac{t^2}{2})^{3/4}$

~~$= \frac{1}{|p|^4} \int_0^\infty dt \frac{4(1+t)}{(1 + \frac{(1+t)^2}{|p|^2})^2} (t + \frac{t^2}{2})^{3/4} = \frac{1}{|p|^2} \int_0^\infty dt \frac{4t \cdot |p|^2}{(1+t^2)^2} (t + \frac{t^2}{2})^{3/4} = \frac{1}{|p|^2} \int_0^\infty dt \frac{4t \cdot |p|^2}{(1+t^2)^2} (t + \frac{t^2}{2})^{3/4}$~~

$= \int_0^\infty dt \frac{4 \cdot 2^{-3/4}}{(p^2 + 1 + 2t + t^2)^2} (2t + t^2)^{3/4} = \int_0^\infty \frac{2^{1/4}}{(p^2 + 1 + y)^2} y^{3/4} dy = \frac{(p^2 + 1)^{-3/4}}{(p^2 + 1)^2} \cdot \# = \frac{c}{(p^2 + 1)^{11/4}}$
 $y = 2t + t^2$
 $dy = 2(1+t)dy$

$\sup \left\{ \frac{1+c|p|}{(1+p^2)^{11/4}} \right\} = \frac{1+4\pi^2}{\sqrt{1+4\pi^2}} = \sqrt{1+4\pi^2}$
maximal bei $|p|=2\pi$

MATHEMATICA: Limits existieren



(2)

$$Q_1(p, q) = \pi \frac{\sqrt{p-q}}{E_p + E_q} \left(\frac{(kp + \beta)(aq + \beta)}{E_p \cdot E_q} - 1 \right)$$

$$\begin{aligned} & (\lambda_+^0(p) - \lambda_-^0(p))(\lambda_+^0(q) - \lambda_-^0(q)) - E_p E_q \cdot 1 \\ & = -\lambda_+^0(p)\lambda_-^0(q) - \lambda_-^0(p)\lambda_+^0(q) + \lambda_+^0(p)\lambda_+^0(q) + \lambda_-^0(p)\lambda_-^0(q) - 1 \end{aligned}$$

$\circ(\dots)^*$ =

$$\lambda_+^0(p) - \lambda_-^0(p) = \operatorname{sgn} D_0 = \frac{\alpha p + \beta}{E_p}$$

modulo Konstanten

$\lambda_+^0(p)\lambda_-^0(q)$
 unexplizit und
 über alle
 integriert

$$\Rightarrow \|Q_1\|_2^2 = \int dp dq \left[Q_1^*(p, q) \cdot Q_1(p, q) \right] = c \int dp dq \frac{|\sqrt{p-q}|^2}{(E_p + E_q)^2} \operatorname{tr}_{c^4} [\lambda_+^0(p)\lambda_-^0(q) + \lambda_-^0(p)\lambda_+^0(q)]$$

$$\stackrel{\text{letztes mal}}{\uparrow} = c \int dp dq \frac{|\sqrt{p-q}|^2}{(E_p + E_q)^2} \left(1 - \frac{p \cdot q + 1}{E_p E_q} \right) = \|V\|_0^2$$

$$\begin{aligned} 2p_1 &= p-q & 2p_2 &= p+q \\ \Rightarrow p &= \frac{p_1+p_2}{2} & q &= \frac{p_2-p_1}{2} \end{aligned}$$

$$\int dp_1 A(p_1) |\sqrt{p_1}|^2 \quad c \int dp_1 A(p_1) |\sqrt{2p_1}|^2$$

$$\int dp_2 \frac{1 - \frac{p_2^2 - p_1^2 + 1}{E_p E_q}}{(p_1^2 + p_2^2 + 1)^2 - 4p_1^2 p_2^2} = \frac{(p_1^2 + p_2^2 + 1)^2 - 4p_1^2 p_2^2}{(p_1^2 + p_2^2 + 1)^2 - 4p_1^2 p_2^2} = \frac{(p_1^2 + p_2^2 + 1 + 2p_1 p_2)(p_1^2 + p_2^2 + 1 - 2p_1 p_2)}{(p_1^2 + p_2^2 + 1)^2 - 4p_1^2 p_2^2} = \frac{(p_1^2 + p_2^2 + 1 - 2p_1 p_2)}{(p_1^2 + p_2^2 + 1)^2 - 4p_1^2 p_2^2}$$

$$A_1(p_1) = \int dp_2 \left(1 - \frac{p_2^2 - p_1^2 + 1}{E_p E_q} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{(p_1^2 + p_2^2 + 1 + 2p_1 p_2)(p_1^2 + p_2^2 + 1 - 2p_1 p_2)}}^2$$

$$p_1 = p-q \quad p_2 = p+q$$

$$A(p_1) = 2c \int dp_2 \int dx \underbrace{\frac{p_2^2}{(E_p + E_q)^2} \left(1 - \frac{p_2^2 - p_1^2 + 4}{4E_p E_q} \right)}_{A_1}$$

$$E_p^2 = \frac{a+bx}{4} \quad E_q^2 = \frac{a-bx}{4}$$

$$a = p_1^2 + p_2^2 + 4 \quad b = 2p_1 p_2$$

$$A_1 = \int dx \frac{1 - \frac{a-2p_1^2}{(a^2 - b^2 x^2)^{1/2}}}{2a + 2(a^2 - b^2 x^2)^{1/2}} = 2 \frac{a - p_1^2}{ab} \left(\frac{a}{b} - \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right)^{1/2} \right) + \frac{2}{b} \operatorname{Arctan} \left(\frac{a}{b} - \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right)^{1/2} \right) = A_2 + A_3$$

$$\int_0^M dp_2 p_2^2 A_2 = -\frac{1}{2p_1^2} \left\{ \int_0^M dp_2 (p_2^2 + p_1^2 + 4) - \frac{1}{3} \sqrt{P(z)} - \frac{1}{3} (4 - p_1^2) J_1 - \frac{1}{3} (4 + p_1^2)^2 J_0 \right\} + \frac{1}{2} \left\{ M - \frac{1}{2} J_1 - \frac{1}{2} (4 - 3p_1^2) J_0 - 2p_1^2 (4 + p_1^2) J_3 \right\}$$

$$z = M^2 \quad P(z) = z^3 + z^2 (8 - 2p_1^2) + z(4 + p_1^2)^2, \quad J_0 = \int_0^M \frac{dz}{\sqrt{P(z)}}, \quad J_1 = \int_0^M dz \frac{z}{\sqrt{P(z)}}$$

$$J_3 = \int_0^M \frac{dz}{(z + 4 + p_1^2) \sqrt{P(z)}}$$

$$\int_0^M dp_2 p_2^2 A_3 = \frac{M}{2} + \frac{1}{4} \left\{ J_1 - 2(p_1^2 + 4) J_0 + 2(p_1^2 + 4)^2 J_3 \right\}$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} J_0 = \frac{2}{(p_1^2 + 4)^{1/2}} K(h)$$

$K(h), E(h)$ elliptische Integrale der 1./2. Art

$$\lim_{M \rightarrow \infty} J_1 = \frac{1}{(p_1^2 + 4)^{3/2}} K(h)$$

$$h^2 = \frac{p_1^2}{p_1^2 + 4}$$

$$K(h) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-h^2t^2)}}$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} J_2 = 2M + 2(p_1^2 + 4)^{1/2} (K(h) - 2E(h))$$

$$k = \sqrt{\frac{p_1^2}{p_1^2 + 4}}$$

$$E(h) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-h^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$\Rightarrow A(p_1) = \text{const.} \left\{ \frac{K(h)}{\sqrt{p_1^2 + 4}} \left(\frac{32}{3p_1^2} - \frac{4}{3} \right) + E(h) \sqrt{p_1^2 + 4} \left(\frac{2}{3} - \frac{8}{3p_1^2} \right) \right\}$$

Da $A(p_1) > 0$ & stetig ist nur Verhalten bei $p_1 \rightarrow 0$ & $p_1 \rightarrow \infty$ interessant

$$\text{für } p_1 \rightarrow \infty: A(p_1) \sim p_1$$

$$p_1 \rightarrow 0: A(p_1) \sim \frac{1}{p_1}$$

$$\Rightarrow \int_{|p| > a} p^3 |V(p)|^2 dp < \infty \quad \&\& \quad \int_{|p| < a} dp |V(p)|^2 \cdot \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(p) = \hat{V}_1(p) + \hat{V}_2(p) \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \text{supp } \hat{V}_1 &\subset \{|p| > a\} & UV \quad V_1 \in L^{15/4+3} \\ \text{supp } \hat{V}_2 &\subset \{|p| \leq a\} & IR \end{aligned}$$

wie sich später rausstellen wird

$$\text{für } p_1 \rightarrow \infty \Rightarrow h \sim \text{const} \Rightarrow K(h) \dots = 0$$

$$K(h) \sim \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{h^2}{4} + \dots \right)$$

$$E(h) \sqrt{p_1^2 + 4} (\dots) \sim p_1$$

$$E(h) \sim \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{h^2}{4} + \dots \right)$$

$$p_1 \rightarrow 0: E(h) = K(h) = \frac{\pi}{2} \quad \text{in erster Ordnung.}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{32}{3p_1^2} - \frac{4}{3} \right) + 2 \left(\frac{2}{3} - \frac{8}{3p_1^2} \right) = \frac{4}{3} - \frac{4}{6} + \frac{16}{3p_1^2} - \frac{16}{3p_1^2} = \frac{2}{3}$$

$$\int_{|p| < a} \frac{|V(p)|^2}{p} dp < \infty \Leftrightarrow \leq \left(\int_{|p| < a} |p|^{-\alpha} dp \right)^{1/\alpha} \left(\int_{|p| < a} |V(p)|^{2 \cdot \frac{\alpha}{\alpha-1}} dp \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

$$1 - \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha-1}{\alpha} \quad \hookrightarrow \quad p^{2-\alpha}: \quad 2-\alpha > -1 \Rightarrow \alpha < 3 \Rightarrow \frac{2 \cdot 3}{3-1} = 3$$

$$\Rightarrow \hat{V}_2 \in L^p \quad \text{mit} \quad \underline{p > 3}$$

Satz 1 Sei $\alpha \in \mathbb{R}^+$ und V erfülle $\int_{|p| < a} p^2 |V(p)|^2 dp < \infty$ & $\int_{|p| > a} p |V(p)|^2 dp < \infty$, dann sind $\mathcal{L}^{-1} \mathcal{L}^0$ HS

$$f_{\pm} = L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^u) = f_{\pm}^{\circ} \oplus f_{\pm}^{-} = f_{\pm}^{+} \oplus f_{\pm}^{-} \quad f_{\pm}^{\circ} = 1_{\pm} f \quad f_{\pm}^{\circ} = 1_{\pm}^{\circ} f$$

$$1_{\pm}^{\circ} = \frac{1}{2}(1 \pm \operatorname{sgn} D_0) \quad f_{\pm}^{\circ}: \text{nachter } e^{-}/e^{+} \text{ Raum} \quad f_{\pm}^{\circ} = (f_{\pm}^{\circ})^{\dagger}$$

$$f_{\pm}^{\pm}: \text{gehobener } e^{-}/e^{+} \text{ Raum}$$

Bogoliubov: neue Erzeuger/Vernichter mittels unitärer Transformation

$$a'(f) = a(1_{+}^{\circ} f) + b^{*}(1_{-}^{\circ} f) \quad f \in f_{+} \quad \text{allgemein: } a'(f) = a(u_{+}, f) + b^{*}(u_{-}, f)$$

$$b'(g) = a^{*}(1_{+}^{\circ} g) + b(1_{-}^{\circ} g) \quad g \in f_{-} \quad b'(g) = a^{*}(u_{+}, g) + b(u_{-}, g)$$

$$\Rightarrow a'(f) = a(1_{+}^{\circ} 1_{+} f) + b^{*}(1_{-}^{\circ} 1_{+} f)$$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} 1_{+}^{\circ} 1_{+} & 1_{+}^{\circ} 1_{-} \\ 1_{-}^{\circ} 1_{+} & 1_{-}^{\circ} 1_{-} \end{pmatrix} \Big|_{\mathbb{R}^2} \text{ unitär und}$$

$$b'(g) = a^{*}(1_{+}^{\circ} 1_{-} g) + b(1_{-}^{\circ} 1_{-} g)$$

$$U: f_{+} \oplus f_{-} \rightarrow f_{+} \oplus f_{-}$$

$$U^{*} U = \begin{pmatrix} 1_{f_{+}} & 0 \\ 0 & 1_{f_{-}} \end{pmatrix} \quad U U^{*} = \begin{pmatrix} 1_{f_{+}} & 0 \\ 0 & 1_{f_{-}} \end{pmatrix}$$

$$U_{++}^{*} U_{++} + U_{-+}^{*} U_{-+} = \frac{1}{2} 1_{+} 1_{+}^{\circ} 1_{+}^{\circ} 1_{+} + \frac{1}{2} 1_{+} 1_{-}^{\circ} 1_{-}^{\circ} 1_{+} = 1_{+} \quad \left| \begin{array}{l} U_{++}^{*} U_{-+} + U_{-+}^{*} U_{-+} = \frac{1}{2} 1_{+} 1_{+}^{\circ} 1_{-}^{\circ} 1_{-} + \frac{1}{2} 1_{+} 1_{-}^{\circ} 1_{-}^{\circ} 1_{-} = 0 \\ U_{-+}^{*} U_{-+} + U_{-+}^{*} U_{-+} = \frac{1}{2} 1_{-} 1_{-}^{\circ} 1_{-}^{\circ} 1_{-} + \frac{1}{2} 1_{-} 1_{+}^{\circ} 1_{+}^{\circ} 1_{-} = 1_{-} \end{array} \right.$$

Skalar-Steinspring: U ist unitär implementierbar (und damit gibt es ^{genau} einen 'gehobenen' Vakuumzustand), wenn $U_{++}, U_{-+}, U_{+-}, U_{--} \in \mathcal{Y}^2$ sind, also

$$1_{+}^{\circ} 1_{-}, 1_{-}^{\circ} 1_{+} \in \mathcal{Y}^2, \text{ also } 1_{-} 1_{+}^{\circ} 1_{-} \in \mathcal{Y}^1, 1_{+} 1_{-}^{\circ} 1_{+} \in \mathcal{Y}^1$$

$$\Rightarrow 1_{+}^{\circ} 1_{-}, 1_{-}^{\circ} 1_{+} \in \mathcal{Y}^2 \quad \operatorname{tr}(1_{-} 1_{+}^{\circ} 1_{-}) \in \mathcal{H}^1 < \infty \quad \operatorname{tr}(1_{+} 1_{-}^{\circ} 1_{+}) = \operatorname{tr}(1_{+} 1_{-}^{\circ}) < \infty$$

$$\operatorname{tr}(1_{-} 1_{+}^{\circ}) < \infty$$

$$\Rightarrow 1_{+} 1_{-}^{\circ} - 1_{-} 1_{+}^{\circ} = 1_{+} 1_{-}^{\circ} - (1 - 1_{+}) 1_{+}^{\circ} = 1_{+} (1_{-}^{\circ} + 1_{+}^{\circ}) - 1_{+}^{\circ} = 1_{+} - 1_{+}^{\circ} \in \mathcal{H}^1$$

$$\Rightarrow \operatorname{tr}((1_{+} 1_{-}^{\circ} - 1_{-} 1_{+}^{\circ})^2) = \underbrace{\operatorname{tr}(1_{+} 1_{-}^{\circ})}_{\|1_{+} 1_{-}^{\circ}\|_2^2} + \underbrace{\operatorname{tr}(1_{-} 1_{+}^{\circ})}_{\|1_{-}^{\circ} 1_{+}\|_2^2} - \underbrace{\operatorname{tr}(1_{-}^{\circ} 1_{+} 1_{-} 1_{+}^{\circ})}_0 - \operatorname{tr}(1_{+}^{\circ} 1_{-} 1_{+} 1_{-}^{\circ})$$

$$\Rightarrow 1_{+} 1_{-}^{\circ} \in \mathcal{H}^1, 1_{-}^{\circ} 1_{+} \in \mathcal{H}^1$$



$$(\mathcal{F} R_0 \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} V \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} R_0 \mathcal{F}^{-1} f)(p) = \hat{R}_0(p) [\mathcal{F} V \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} R_0 \mathcal{F}^{-1} f](p) = \hat{R}_0(p) (V \cdot R_0 \mathcal{F}^{-1} f)(p)$$

$$= R_0(p) (\hat{V} * \mathcal{F}^{-1} R_0 \mathcal{F}^{-1} f)(p) = \hat{R}_0(p) (\hat{V} * \hat{R}_0 f)(p) = \hat{R}_0(p) \int dq \hat{V}(p-q) \hat{R}_0(q) f(q)$$

Man bemerkt: $\operatorname{sgn}(a) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{a+iy} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{a-iy}{a^2+y^2} \stackrel{PV}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ady}{a^2+y^2} = \frac{\operatorname{sgn}(a)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2} = \operatorname{sgn}(a)$

$\alpha = \operatorname{sgn} a$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{pa}{\pi \operatorname{Re}(a+iy)} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\alpha+iy} dy$

$2 \int_{-R}^R \frac{y}{1+y^2} dy = \frac{1}{2} \log(y^2+1) \Big|_{-R}^R = \frac{1}{2} \log \frac{R^2+1}{R^2-1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$

Selbiges kann man auch für unbeschränkte Operatoren mittels Spektralkalkül machen.

$\operatorname{sgn} D_{(0)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{D_{(0)}+iy}$ $D = D_0 + V$ (D, D_0 sa auf $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$ realwert \Rightarrow reelles Spektrum)

Definiere: $R(z) := (D_{(0)} - z)^{-1} \Rightarrow R = R_0 + R_1 + R_2$ mit $R_1 = -R_0 V R_0$
 $R_2 = R_0 V R_0 V R_0 (1 + V R_0)^{-1}$

$\Rightarrow \Lambda_+ - \Lambda_+^0 = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{sgn} D)^{-1} - \frac{1}{2} (1 + \operatorname{sgn} D_0)^{-1} = \frac{1}{2} (\operatorname{sgn} D - \operatorname{sgn} D_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (R_0(iy) + R_1(iy) + R_2(iy) - R_0(iy)) dy$
 $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy (R_1(iy) + R_2(iy))$; für $\Lambda_+ - \Lambda_+^0 \in \mathcal{Y}^2$ muss mindestens schon $Q_1 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy R_1(iy) \in \mathcal{Y}^2$ sein.

Im Fouriersaum wird $R_0 = \frac{1}{D_{(0)}+iy}$ zum Multiplikationsoperator $\frac{1}{D_{(0)}(p)+iy}$ und das Skalarpotential $V(x)$ zum Faltungoperator $\hat{V} *$. Mithilfe Fourier-Konstanten ist Q_1 ein Integraloperator, der wie folgt wirkt:

$(Q_1 f)(p) = \int Q_1(p, q) f(q) dq$ mit dem Integralkern

$Q_1(p, q) \sim \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\alpha p + \beta - iy}{p^2 + 1 + y^2} \hat{V}(p-q) \frac{\alpha q + \beta - iy}{q^2 + 1 + y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{(\alpha p + \beta - iy)(\alpha q + \beta - iy)}{(p^2 + 1 + y^2)(q^2 + 1 + y^2)} \hat{V}(p-q)$

$= \int_{-\infty}^{\infty} dy \hat{V}(p-q) \left[\frac{(\alpha p + \beta)(\alpha q + \beta)}{(p^2 + 1 + y^2)(q^2 + 1 + y^2)} - \frac{(\alpha p + \beta)(\alpha q + \beta) - (\alpha p + \beta)(\alpha q + \beta) - (\alpha p + \beta)(\alpha q + \beta) - (\alpha p + \beta)(\alpha q + \beta)}{(p^2 + 1 + y^2)(q^2 + 1 + y^2)} \right]$

$\frac{1}{E_p + E_q} \left(\frac{A \cdot B}{E_p E_q} - 1 \right) = \frac{AB - E_p E_q}{E_p E_q + E_q^2 E_p}$

$= \pi \frac{\hat{V}(p-q)}{E_p + E_q} \left(\frac{(\alpha p + \beta)(\alpha q + \beta)}{E_p E_q} - 1 \right)$

$$f(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{1}{[(p+q)^2 + 1 + \eta^2][q^2 + 1 + \eta^2]} \stackrel{2\pi}{=} \int_0^{\infty} dq q^2 \int_{-1}^1 dx \frac{1}{[p^2 + q^2 + 2q/|p|x + 1 + \eta^2][q^2 + 1 + \eta^2]}$$

$$= 4\pi \int_0^{\infty} dq \frac{q^2 \log\left(1 + \frac{4|p||q|}{q^2 + 1 + \eta^2 + (|p|-|q|)^2}\right)}{2|p||q|(1 + \eta^2 + q^2)}$$

$$\stackrel{?}{=} \frac{2\pi^2}{|p|} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctanh}\left(\frac{2\sqrt{p^2+1}}{|p|}\right) \right)$$

$$|p|=1, \eta=1 \Rightarrow \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4} \operatorname{Arctan}\left(\frac{336}{529}\right)$$

$$\operatorname{Arctan}(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$= 4\pi \int_0^{\infty} dq q^2 \frac{1}{q^2 + 1 + \eta^2} \cdot \operatorname{Arctanh}\left(\frac{2|p||q|}{p^2 + q^2 + \eta^2 + 1}\right) \cdot \frac{1}{2|p||q|}$$

$$= \frac{6 \cdot 2\pi}{|p|} \int_0^{\infty} \frac{|q|}{q^2 + 1 + \eta^2} \operatorname{Arctanh}\left(\frac{2|p||q|}{p^2 + q^2 + 1 + \eta^2}\right) dq =$$

$$q^2 + \eta^2 + 1 = u^2 \quad u = \sqrt{q^2 + \eta^2 + 1}$$

$$q = \sqrt{u^2 - \eta^2 - 1}$$

$$dq = \frac{1}{\sqrt{u^2 - \eta^2 - 1}} \cdot u du$$

$$= \frac{2\pi}{|p|} \int_{\sqrt{\eta^2+1}}^{\infty} \frac{\sqrt{u^2 - \eta^2 - 1}}{u^2} \operatorname{Arctanh}\left(\frac{2|p|\sqrt{u^2 - \eta^2 - 1}}{p^2 + u^2}\right) \frac{u}{\sqrt{u^2 - \eta^2 - 1}} du$$

$$\operatorname{Arctanh}\left(\frac{2|p||q|}{p^2 + q^2 + \eta^2 + 1}\right) = \frac{1}{2} \left[\log\left(1 + \frac{2|p||q|}{p^2 + q^2 + \eta^2 + 1}\right) - \log\left(1 - \frac{2|p||q|}{p^2 + q^2 + \eta^2 + 1}\right) \right]$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}, \frac{2\pi - 2\pi i p}{2\pi}\right) = 1$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{a} \int_{-1}^1 \frac{dx}{1 + \frac{b}{a}x} \stackrel{x \mapsto \frac{a}{b}x}{=} \frac{1}{b} \int_{-a/b}^{a/b} \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{b} \log \frac{1 + \frac{a}{b}}{1 - \frac{a}{b}} = 2 \operatorname{Arctanh}\left(\frac{1}{a}\right) \cdot \frac{1}{b} \quad (b < a)$$

$\operatorname{Arctanh} x$ monoton steigend

$$b = 2|q||p|$$

$$a = p^2 + q^2 + 1 + \eta^2 > b \quad \checkmark$$

Wertauchnung

$$1 - \frac{q^2+1+qpx}{\sqrt{q^2+1}\sqrt{q^2+p^2+1+2qpx}} = \frac{1+q^2(1-x^2)}{8(1+q^2)^3} + \frac{3(-qx-q^3x+q^3x^1)}{8(1+q^2)^4} \cdot p^2 \cdot 0(p^2)$$

Zähler bei $p=0$: $1 - \frac{q^2+1}{q^2+1} = 0 \rightarrow$ L'Hospital

~~$$(\text{Zähler})' = \frac{\sqrt{q^2+1}\sqrt{q^2+p^2+1+2qpx} \cdot qx - (q^2+1+qpx) \cdot \{2p(\dots)^2 + 2p^2(\dots)\} \cdot \frac{1}{\sqrt{q^2+p^2+1+2qpx}} \cdot (p+qx)}{(q^2+1)(q^2+p^2+1+2qpx)}$$~~

~~$$\rightarrow \frac{(q^2+1) \cdot qx - (q^2+1) \cdot \{2p \cdot 4(q^2+1) + 2p^2 \cdot 2\sqrt{q^2+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{q^2+1}} \cdot qx\}}{(q^2+1)^2}$$~~

~~$$(\text{Zähler})' = \frac{\sqrt{q^2+1}\sqrt{q^2+p^2+1+2qpx} \cdot qx - (q^2+1+qpx) \cdot \{ \sqrt{q^2+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{q^2+p^2+1+2qpx}} \cdot (p+qx) \}}{(q^2+1)(q^2+p^2+1+2qpx)} \Big|_{p=0}$$~~

~~$$= \frac{(q^2+1) \cdot qx - (q^2+1) \cdot qx}{(q^2+1)^2} = 0$$~~

$(\text{Nenner})' = 2p(\dots)^2 + 2p^2(\dots) \cdot \frac{1}{\sqrt{\dots}} \cdot (2p+q) = 0$ nochmal L'Hospital

$$(\text{Zähler})'' = \frac{(-1+2p^2-q^2+pqx)(-1+q^2x^2-q^2)}{\sqrt{q^2+1}(1+p^2+q^2+2qpx)^{5/2}} \Big|_{p=0} = \frac{(q^2+1)(q^2+1-q^2x^2)}{(q^2+1)^3} = \frac{q^2+1-q^2x^2}{(q^2+1)^2}$$

$(\text{Nenner})'' = 8(1+q^2)$

\rightarrow 0. Ordnung $\frac{q^2(1-x^2)+1}{8(q^2+1)^3}$

$\rightarrow \int_0^{\infty} dq \int_{-1}^1 dx \frac{q^2(1-x^2)+1}{8(q^2+1)^3} = \frac{3\pi}{64}$

~~Satz~~ Der Operator $\Lambda_+ - \Lambda_+^0$ ist

Sei $a \in \mathbb{R}^+$;

Def

Def: $\hat{V}(p) = \hat{V}_1(p) + \hat{V}_2(p)$ mit $\text{supp}(\hat{V}_1) \subset \{|p| \geq a\}$
und $\text{supp}(\hat{V}_2) \subset \{|p| < a\}$

~~Satz~~ Seien $Q_1 = R_0 V R_0$ und $Q_2 =$

Satz Seien $Q_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp R_0 V R_0$ und $Q_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp R_0 V R_0 (1 + V R_0)^{-1}$

Operatoren und $a \in \mathbb{R}^+$. $\hat{V}_1 \in H^{1/2}$

Wenn $\int_{|p| > a} dp |p| |\hat{V}_1(p)|^2 < \infty$ und $\int dp |p|^2 |\hat{V}_2(p)|^2 < \infty$ ist $Q_1 \in \mathcal{Y}^2$.

$\hat{V}_1(p) \Rightarrow V \in H^{\frac{1}{2} + \epsilon}$ $\hat{V}_2(p) \Leftrightarrow V_2 \in L^\infty$

Wenn $\hat{V} \in L^2$, $\hat{V}_+ \in L^\infty$, $\hat{V}_- \in L^{2+\delta}$ mit $\delta > 0$, V relativ H_0 -beschränkt, dann ist Q_2 HS.

Korollar: $\Lambda_+ - \Lambda_+^0 = Q_1 + Q_2$; Falls Q_1 und $Q_2 \in \mathcal{Y}^2$, dann ist auch $\Lambda_+ - \Lambda_+^0$ HS.

$$\|\Lambda_+ - \Lambda_+^0\|_{HS} \leq \|Q_1\|_2 + \|Q_2\|_2$$

Strategie Berechne $\|Q_1\|_2$ & $\|Q_2\|_2$ und leite Kriterien her, sodass $Q_1, Q_2 \in HS$ sind

Bisher $\|Q_1\|_2^2 = c \int dp dq \frac{|\hat{V}(p-q)|^2}{(e_p + e_q)^2} \left(1 - \frac{p \cdot q + 1}{e_p \cdot e_q}\right)$

$$K(h) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{h^2}{4} + O(h^4)\right)$$

$$E(h) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{h^2}{4} + O(h^4)\right)$$

$$= c \int dp |\hat{V}(p)|^2 \cdot A(p)$$

$$A(p) = c \left\{ \frac{K(h)}{p^2 + 4} \left(\frac{32}{3p^2} - \frac{4}{3}\right) + E(h) \sqrt{p^2 + 4} \left(\frac{2}{3} - \frac{8}{3p^2}\right) \right\}$$

mit $h = \sqrt{\frac{p^2}{p^2 + 4}}$

$$K(h) = \int_0^1 dt \frac{1}{\epsilon(1-t^2)(1-h^2 t^2)^{1/2}}$$

$$E(h) = \int_0^1 dt \frac{\sqrt{1-h^2 t^2}}{\sqrt{1-t^2}}$$

$V \in L^\alpha$

$$\int_{|p| > a} p |\hat{V}_1(p)|^2 \leq \left(\int |\hat{V}_1(p)|^{2 \cdot \frac{\alpha}{\alpha-2}} \right)^{\frac{\alpha-2}{\alpha}} \cdot \left(\int p^{\frac{\alpha}{\alpha-2}} \right)^{\frac{\alpha-2}{\alpha}}$$

$L^q \subset L^p$ für $1 \leq p < q \leq +\infty$ (Hölder)

$L^6 \subset L^4$ z.B.

$\Rightarrow V_2 \in L^1$

$$\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow q = \frac{\alpha}{\alpha-2}$$

$$\frac{\alpha}{\alpha-2} + 2 < -1$$

$$\Rightarrow \alpha < \frac{3}{2} \text{ z.B. } \alpha = 1$$

Zu den Kriterien:

Ursprüngliches Integral (nach $p+q+y$)

$$1) \int_{|p| \leq a} dp \, p^2 |\hat{V}(p)|^2 < \infty$$

$$\int dp \, |\hat{V}(p)|^2 \int dq \left(1 - \frac{(p+q) \cdot q + 1}{e_{p+q} \cdot e_q}\right) \frac{1}{(e_{p+q} + e_q)^2}$$

$$\Rightarrow \int dq \frac{1 - \frac{p \cdot q + q^2 + 1}{e_q \cdot e_{p+q}}}{p^2 (e_{p+q} + e_q)^2} < \infty \text{ gleichmäßig in } |p| \text{ für } |p| \leq a$$

Problem bei $|p|=0$: Entwicklung für kleine $|p|$: ($x = \cos \theta$)

$$\frac{1 + q^2(1-x^2)}{8(1+q^2)^3} + O(p) \rightarrow \text{Singularität bei } p=0 \text{ beheben} \left. \vphantom{\frac{1 + q^2(1-x^2)}{8(1+q^2)^3}} \right\} \text{Kriterium ob}$$

Entwicklung für große $|q| \Leftrightarrow$ kleine $\frac{1}{|q|} = y$ (kein Problem für kleine q)

$$\frac{1}{8} (1-x^2) \frac{1}{q^4} + \frac{3}{8} |p| (-x+x^3) y^5$$

$$2) \int_{|p| \geq a} dp \, |p| |\hat{V}(p)|^2 < \infty$$

$$\int dq \frac{1 - \frac{p \cdot q + q^2 + 1}{e_q \cdot e_{p+q}}}{|p|^2 (e_q + e_{p+q})^2} < \infty \text{ gleichmäßig zu } |p| \text{ für } |p| \geq a$$

$$\hookrightarrow \text{Entwicklung für große } |q|: \frac{1}{8} (1-x^2) \frac{1}{q^4} |p| + \frac{3}{8} |p|^2 (-x+x^3) q^{-5}$$

$$\hookrightarrow \text{Entwicklung für große } |p|: \left(1 - \frac{q \cdot x}{|q|^2 + 1}\right) |p|^{-3} + O(|p|^{-4})$$

Kriterien sind lediglich hinreichend, nicht notwendig, da zuvor die Dreiecksungleichung verwendet worden war

Kompaktheit von VR_0

Falls $(D_0 - z)^{-1} - (D_0 - z)^{-1} = \underbrace{(D - z)^{-1}}_{\text{beschränkt}} \vee \underbrace{(D_0 - z)^{-1}}_{\text{beschränkt}}$ kompakt $\Rightarrow \mathbb{R} \quad VR_0$ kompakt

$$\Downarrow \quad \text{beschränkt durch 1}$$
$$((D - z)^{-1} - (D_0 - z)^{-1}) \chi(|k| < R) \text{ kompakt } \forall R > 0$$

Falls zusätzlich $\lim_{R \rightarrow \infty} \|((D - z)^{-1} - (D_0 - z)^{-1}) \chi(|k| > R)\| = 0$ dann gilt auch die umgekehrte

Richtung: $((D - z)^{-1} - (D_0 - z)^{-1}) \chi(|k| < R)$ kompakt $\Rightarrow (D - z)^{-1} - (D_0 - z)^{-1}$ kompakt, denn

$$(D - z)^{-1} - (D_0 - z)^{-1} = ((D - z)^{-1} - (D_0 - z)^{-1}) \chi(|k| < R) + ((D - z)^{-1} - (D_0 - z)^{-1}) \chi(|k| > R)$$

$$\xrightarrow{R \rightarrow \infty} (D - z)^{-1} - (D_0 - z)^{-1}$$

Zeige in unserem Fall, dass $((D - z)^{-1} - (D_0 - z)^{-1}) \chi(|k| < R)$ kompakt

$$= \underbrace{- (D - z)^{-1}}_{\text{beschr.}} \vee R_0 \chi(|k| < R)$$

$$\|V_2 R_0\| \leq \|V_2\|_\infty \|R_0\| \leq \frac{\|V_2\|_\infty}{\sqrt{y^2+1}} \quad \|V R_0\| \leq \|V_1 R_0\| + \|V_2 R_0\|$$

$$\int p^2 |V(p)| < \infty$$

$$\|R_0\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{|1-iy|} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \rightarrow \text{Zusammen mit } \frac{1}{(y^2+1)^{1/4}} \rightarrow \text{Integral bei } \varnothing$$

Für V_1 muss die UV-Bedingung $\int p |V(p)|^2 < \infty$ verschärft werden.

Wir nehmen also an, dass $V_1 \in L^{3+\epsilon}(\mathbb{R}^3)$ ist ($L^3(\mathbb{R}^3)$ wg. Selbstadjungiertheit von D auf $\mathcal{D}(D_0)$)

später: $f = R_0 g$
 Hölder: $\|V_1 f\|_2 \leq \|V_1\|_{3+\epsilon} \cdot \|f\|_s \quad s = \frac{6+2\epsilon}{1+\epsilon} \quad \frac{1+\epsilon}{6+2\epsilon} + \frac{1}{3+\epsilon} = \frac{1+\epsilon+2}{6+2\epsilon} = \frac{1}{2}$

Hölder-Young: $\|f\|_s \leq (2\pi)^{\frac{3}{2}-\frac{3}{r}} \|f\|_r \quad r = \frac{6+2\epsilon}{5+\epsilon} \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{r} = \frac{1+\epsilon+5+\epsilon}{6+2\epsilon} = 1$

w. für $r \in [1, 2]$
 $\|f\|_q \leq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/p} \|f\|_r \quad r(\epsilon) = \frac{4}{(5+\epsilon)^2} \quad r(\epsilon=0) = \frac{6}{5} \quad r(\epsilon \rightarrow \infty) = 2$

Nochmal Hölder auf $\|f\|_r$

$$\|f\|_r = \|(\sqrt{p^2+1}+M) \hat{f} (\sqrt{p^2+1}+M)^{-1}\|_r \leq \|(\sqrt{p^2+1}+M) \hat{f}\|_s \cdot \|(\sqrt{p^2+1}+M)^{-1}\|_{s_1} \quad s_1 = 3+\epsilon$$

$$\frac{1}{3+\epsilon} + \frac{1}{2} = \frac{3+\epsilon+2}{6+2\epsilon} = \frac{1}{r} \quad \checkmark$$

Da $\|(\sqrt{p^2+1}+M) \hat{f}\|_2 \leq \|D_0 f\| + M \|f\|$ und $\|(\sqrt{p^2+1}+M)^{-1}\|_{s_1} \leq c \cdot M^{-1+\frac{3}{s_1}} \quad \frac{3}{s_1} - 1 = \frac{3-3-\epsilon}{3+\epsilon} = \frac{-\epsilon}{3+\epsilon} = -\epsilon'$

$$\Rightarrow \|V_1 f\|_2 \leq c \|V_1\|_{3+\epsilon} \left((\|D_0 f\| + M \|f\|) \cdot M^{\frac{3}{s_1}-1} \right)$$

$$= c \|V_1\|_{3+\epsilon} \left[M^{-\epsilon'} \|D_0 f\| + M^{1-\epsilon'} \|f\| \right]$$

Setzt man nun $f = (D_0 - iy)^{-1} g \quad (g = f)$
 $\|D_0 (D_0 - iy)^{-1}\| = 1 + y \|D_0 - iy\|^{-1}$

$$\|V_1 R_0 g\|_2 \leq c \left[M^{-\epsilon'} \left(1 + \frac{|y|}{\sqrt{y^2+1}} \right) + M^{1-\epsilon'} \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} \right] \|g\|$$

$$\leq c \cdot \left\{ 2 M^{-\epsilon'} + \frac{M^{1-\epsilon'}}{\sqrt{y^2+1}} \right\} \|g\| \quad \text{wähle } M = \sqrt{y^2+1}$$

$$\Rightarrow \|V_1 R_0\| \leq \frac{c}{(y^2+1)^{\epsilon'/2}} \Rightarrow \text{Konvergenz des Integrals falls } \epsilon' > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \epsilon > \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow V_1(x) \in L^{3+\epsilon} = L^{\frac{15}{4}+\delta} \quad \delta > 0 \quad \frac{\epsilon'}{2} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon-3}{\epsilon} < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{3}{\epsilon} < \frac{1}{2} \Rightarrow \epsilon > 6$$

$$V_1(x) \in L^{\frac{15}{4}+\delta} \subset L^{3+\epsilon} \quad \delta > 0$$

$$Q_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dy R_2(y) \quad R_2(y) = R_0 \vee R_0 \vee R_0 (1 + \vee R_0)^{-1}$$

$$(3) \int dp dq \left| \frac{1}{\alpha p + \beta + iy} \hat{V}(p-q) \frac{1}{\alpha q + \beta + iy} \right|$$

$$\|Q_2\|_2 \leq \frac{1}{2\pi} \int dy \|\vee R_0 \vee R_0\|_2 \|\vee R_0\| \|(1 + \vee R_0)^{-1}\| = \int dp dq \frac{1}{\alpha p + \beta + iy} \hat{V}(p-q) \frac{1}{\alpha q + \beta + iy} \frac{1}{\alpha q + \beta + iy} \frac{1}{\alpha p + \beta + iy}$$

$$\|\vee R_0 \vee R_0\|_2^2 = \int dp dq \frac{|\hat{V}(p-q)|^2}{(p^2+1)(q^2+1)} \quad (*) \quad \begin{matrix} p = p-q \\ q = p+q \\ p \rightarrow p+q \end{matrix} \quad \frac{(q+iy)(q-iy)}{(q^2+1)^2} = \frac{1}{q^2+1}$$

$$= \int dp_1 |\hat{V}(p_1)|^2 \int dp_2 \frac{1}{(p_2)^2+1}$$

$$= \int dp |\hat{V}(p)|^2 \int dq \frac{1}{((p+q)^2+1)(q^2+1)}$$

$$= \int dp |\hat{V}(p)|^2 F(p) \quad F(p) = \frac{2\pi^2}{|p|} \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan} \left(\frac{\sqrt{p^2+1}}{|p|} \right) \right) \quad \text{Arctan} \left(\frac{\sqrt{p^2+1}}{p} \right) =$$

Am $p \rightarrow 0$ $F(p) = \frac{\pi^2}{|p^2+1|}$ (L'Hospital) \Rightarrow Damit obiges Integral existiert, muss $\hat{V} \in L^2$ sein, was beschränkt bei $p=0$ $\Rightarrow \int dp p^2 |\hat{V}(p)|^2 < \infty$ wird verschärft.

Für $p \leq 2\sqrt{p^2+1}$ ist $\text{Arctan} \frac{2\sqrt{p^2+1}}{p} > \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int dp p^2 |\hat{V}(p)|^2 < \infty$ (IR) wird verschärft

$$? \rightarrow F(p) \leq \frac{2\pi^2}{2\sqrt{p^2+1}} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{c}{\sqrt{p^2+1}}$$

Weiterhin $\forall p: F(p) \leq \frac{c}{p} \Rightarrow F(p) \leq \frac{c}{\sqrt{p^2+1}}$ für $p > \sqrt{p^2+1}$

$$\|R_0 \vee R_0\|_2^2 \leq \|\hat{V}\|_2^2 \cdot \frac{1}{(p^2+1)^{1/2}}$$

$\|R_0 \vee R_0\|_2 \leq \|\hat{V}\|_2 \cdot \frac{1}{(p^2+1)^{1/4}} \Rightarrow (*)$ bei ∞ noch nicht integrierbar!

Wir brauchen noch einmal ein $\frac{1}{(p^2+1)^{m+\epsilon}}$

$$F(p) = \int \frac{dq}{[(p+q)^2+y_0^2][q^2+y_0^2]} = \frac{1}{y_0^4} \int \frac{dq}{[\frac{p+q}{y_0^2} + 1][q^2/y_0^2 + 1]} \stackrel{q \rightarrow y_0^2 q}{=} \frac{1}{y_0} \int \frac{dq}{[\frac{p^2}{y_0^2} + \frac{2p}{y_0} q + q^2 + 1][q^2 + 1]} \leq \text{const unabhängig von } y \neq p$$

Für kleine $|p|: \leq \frac{1}{(1+q^2)^2} + O(|p|)$

große $|p|: \leq \frac{y_0^2 |p|^{-2}}{1+q^2} + O(|p|^{-3}) \leq \frac{1}{1+q^2}$ für $y_0 < |p|$

DIE AUSSERDIAGONALELEMENTE $\Lambda_+ \frac{1}{|\cdot|} \Lambda_-$ SIND NICHT HILBERT-SCHMIDT

KONSTANTIN MERZ UND CHRISTOPH KEHLE

Satz 1 ($\Lambda_+ \frac{1}{|\cdot|} \Lambda_-$ ist nicht Hilbert-Schmidt). *Es sei $D_0 = \alpha \cdot p + \beta$ der freie Diracoperator, welcher auf $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$ selbstadjungiert realisiert ist. Die Projektoren auf den positiven \mathcal{H}_+ beziehungsweise negativen \mathcal{H}_+^\perp Spektralbereichen von D_0 werden mit Λ_+ bzw. Λ_- bezeichnet. Sie sind mittels der Gradierung durch $\Lambda_\pm := \frac{1}{2}(1 \pm \hat{\tau})$ gegeben, wobei die Gradierung durch den freien Diracoperator erzeugt wird und $\tau = \frac{D_0}{|D_0|}$ ist. Nun gilt*

$$(0.1) \quad K := \Lambda_+ \frac{1}{|\cdot|} \Lambda_- \notin \mathfrak{S}^2(\mathcal{H}_+^\perp \rightarrow \mathcal{H}_+).$$

Beweis. Da im Fourierraum der Operator K ein Integraloperator ist und die Spur invariant bezüglich unitären Transformationen ist, werden wir die Spur von K^*K im Fourierraum bilden. Um den Integralkern zu berechnen wird bemerkt, dass

$$(0.2) \quad (\mathcal{F} \frac{1}{|\cdot|} \mathcal{F}^{-1} f)(p) = (\frac{1}{|\cdot|^2} * f)(p)$$

gilt und Λ_\pm zu Matrixmultiplikationsoperatoren im Fourierraum werden. Daher gilt

$$(0.3) \quad \begin{aligned} (\hat{K}f)(p) &= (\mathcal{F}K\mathcal{F}^{-1}f)(p) = (\mathcal{F}\Lambda_+\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\frac{1}{|\cdot|}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\Lambda_-\mathcal{F}^{-1}f)(p) \\ &= \Lambda_+(p) (\frac{1}{|\cdot|^2} * \Lambda_-f)(p) = \int_{\mathbb{R}^3} \Lambda_+(p) \frac{1}{|p-q|^2} \Lambda_-(q) f(q) \, dq \end{aligned}$$

Um zu überprüfen, ob der Integraloperator K ein Hilbert-Schmidt-Operator ist, berechnen wir seine Hilbert-Schmidt-Norm, welche durch

$$(0.4) \quad \|K\|_2^2 = \int \text{Sp}_{\mathbb{C}^4} |K(p, q)|^2 \, dp \, dq,$$

mit dem Integralkern $K(p, q) = \Lambda_+(p) \frac{1}{|p-q|^2} \Lambda_-(q)$, definiert ist. Dazu bemerken wir zunächst, dass mit $\text{Sp}(\alpha) = \text{Sp}(\beta) = \text{Sp}(\alpha\beta) = \text{Sp}(\Sigma) = 0$ die Spur in \mathbb{C}^4 des

$$\|V\chi_{(k_1 > R)}(H_0 - z)^{-1}\| = \|V\chi_{(k_1 > R)} f_R(r)(H_0 - z)^{-1}\|$$

$$\leq \|V f_R(r)(H_0 - z)^{-1}\|$$

$$\leq \|V(H_0 - z)^{-1}\| \underbrace{\|\chi_{(k_1 > R)}(H_0 - z)^{-1}\|}_{\leq \frac{C}{R}} + \|V(H_0 - z)^{-1} f_R(r)\|$$

$$\operatorname{Arctanh}' = \frac{1}{1-x^2} \quad \operatorname{Arctan}' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\leq \|V(H_0 - z)^{-1}\chi_{(k_1 > \frac{R}{2})}\| \stackrel{\text{Thm}}{=} 0$$

$$\int_0^\infty \int_{-1}^1 \frac{dx dq^2}{(q^2 + p^2 + y_0^2 + 2qpx)(q^2 + y_0^2)} \quad x \mapsto \frac{q^2 + p^2 + y_0^2}{2qp} x$$

$$= \int_0^\infty \int_{-\frac{2qp}{q^2+p^2+y_0^2}}^{\frac{2qp}{q^2+p^2+y_0^2}} \frac{q^2}{(q^2+p^2+y_0^2)(1+x)(q^2+y_0^2)} \cdot \frac{q^2+p^2+y_0^2}{2qp} dx dq$$

$$= \int_0^\infty \frac{q^2}{q^2+y_0^2} \operatorname{Arctanh}\left(\frac{2qp}{q^2+p^2+y_0^2}\right) dq$$

$$= \int_0^\infty \frac{q}{q^2+y_0^2} \operatorname{Arctanh}\left(\frac{2qp}{q^2+p^2+y_0^2}\right) dq$$

$$= \int_0^\infty \frac{q}{q^2+1} \operatorname{Arctanh}\left(\frac{1}{y_0} \cdot \frac{2qp}{q^2+\frac{p^2}{y_0^2}+1}\right) dq$$

$$= \int_0^\infty \frac{q}{q^2+1} \operatorname{Arctanh}\left(\frac{1}{y_0} \cdot \frac{2qp}{q^2+\frac{p^2}{y_0^2}+1}\right) dq$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{a+bx} = \frac{2 \operatorname{Arctanh}\left(\frac{b}{a}\right)}{b}$$

$$\stackrel{x \mapsto \frac{a}{b}x}{=} \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{b} \int_{-\frac{b}{a}}^{\frac{b}{a}} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{b} \int_{-\frac{b}{a}}^{\frac{b}{a}} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{b} \left[\log^b \right]$$

$$\stackrel{x \mapsto x-1}{=} \frac{1}{b} \int_{-\frac{b}{a}-1}^{\frac{b}{a}-1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{b} \left(\log \frac{b}{a} - 1 - \log \left(-\frac{b}{a} - 1\right) \right)$$

$$= \frac{1}{b} \log \left[\frac{1+\frac{b}{a}}{1-\frac{b}{a}} \right] = \frac{2 \operatorname{Arctanh}\left(\frac{b}{a}\right)}{b}$$

$$\text{kleine } p \quad \frac{\operatorname{Arctanh}\left(\frac{2qp}{y_0(q^2 + \frac{p^2}{y_0^2} + 1)}\right)}{p} = \frac{2q}{(1+q^2)y_0}$$

$$\text{große } p \quad = \frac{2q y_0}{p^2}$$

$$(\mathcal{F} R_0 \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} V \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} R_0 \mathcal{F}^{-1} f)(p)$$

Note rechnung

$$= \hat{R}_0(p) [\mathcal{F} V \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} R_0 \mathcal{F}^{-1} f](p)$$

$$\mathcal{F}(fg)\mathcal{F}^{-1} = \hat{f} * \hat{g}$$

$$(\mathcal{F} V \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} R_0 \mathcal{F}^{-1} f)(p) = (\mathcal{F} V \mathcal{F}^{-1} (\hat{R}_0(q) f(q)))(p)$$

$$\stackrel{\text{Faltung}}{=} (\widehat{V R_0 \mathcal{F}^{-1} f})(p) = (\hat{V} * \mathcal{F} R_0 \mathcal{F}^{-1} f)(p) = \int dq \hat{V}(p-q) R_0(q) f(q)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(a+y^2)(b+y^2)} \cdot y = 0 \quad (\text{Mult. } \mathcal{F} V \text{ von ungerader mit gerader Fkt.})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(a+y^2)(b+y^2)} = \int_{-\infty}^{\infty} dy \left[\frac{1}{y^2(a-b)+b(a-b)} - \frac{1}{y^2+(a-b)+a(a-b)} \right]$$

$$= \frac{1}{b(a-b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\frac{y^2}{b}+1} - \frac{1}{a(a-b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\frac{y^2}{a}+1} = \frac{1}{b(a-b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{y^2+1} - \frac{1}{a(a-b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{y^2+1}$$

$$= \frac{\text{ArcTan}(y)}{\sqrt{b}(a-b)} - \frac{\text{ArcTan}(y)}{\sqrt{a}(a-b)} \stackrel{y \rightarrow \infty}{=} \text{ArcTan}(y) \left[\frac{\sqrt{a}(a-b) - \sqrt{b}(a-b)}{\sqrt{ab}(a-b)^2} \right] = \text{ArcTan}(y) \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}(a-b)}$$

$$= \frac{\text{ArcTan} y}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \xrightarrow{y \rightarrow \infty} \frac{\pi}{E_p E_q (E_p + E_q)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy y^2}{(a+y^2)(b+y^2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy \cdot a}{y^2(a-b)+a(a-b)} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy b}{y^2(a-b)+b(a-b)} = \frac{1}{a-b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\frac{y^2}{a}+1} - \frac{1}{a-b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\frac{y^2}{b}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} \text{ArcTan}(y) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} \frac{\pi}{E_p + E_q}$$

$$\left(1 + \frac{\alpha p + \beta}{E_p} \right) \left(1 + \frac{\alpha q + \beta}{E_q} \right) = 1 + \frac{pq + 1 - (p \times q) \Sigma + (p \cdot q) \alpha \beta}{E_p E_q} + \frac{\alpha p + \beta}{E_p} + \frac{\alpha q + \beta}{E_q}$$

$$\frac{\alpha p + \beta}{E_p} + \frac{\alpha q + \beta}{E_q} - 1 = (\Lambda_+^0(p) - \Lambda_-^0(p)) (\Lambda_+^0(q) - \Lambda_-^0(q)) - 1 \quad * \text{ das Adjungierte}$$

$$[(\Lambda_+^0(p) - \Lambda_-^0(p)) (\Lambda_+^0(q) - \Lambda_-^0(q)) - 1] \cdot [(\Lambda_+^0(q) - \Lambda_-^0(q)) (\Lambda_+^0(p) - \Lambda_-^0(p)) - 1] = 0$$

$$\# (\Lambda_+^0(q) - \Lambda_-^0(q)) (\Lambda_+^0(q) - \Lambda_-^0(q)) = \Lambda_+^0(q) + \Lambda_-^0(q) - 1$$

$$(*) = 1 + 1 - (\Lambda_+^0(p) - \Lambda_-^0(p)) (\Lambda_+^0(q) - \Lambda_-^0(q)) - (\Lambda_+^0(q) - \Lambda_-^0(q)) (\Lambda_+^0(p) - \Lambda_-^0(p))$$

$$= 2 - \Lambda_+^0(p) \Lambda_+^0(q) - \Lambda_+^0(q) \Lambda_+^0(p) - \Lambda_-^0(p) \Lambda_-^0(q) - \Lambda_-^0(q) \Lambda_-^0(p) + \Lambda_+^0(p) \Lambda_-^0(q) + \Lambda_-^0(p) \Lambda_+^0(q) + \Lambda_+^0(q) \Lambda_-^0(p) + \Lambda_-^0(q) \Lambda_+^0(p)$$

$$\text{in } t_{22}: 2[\Lambda_+^0(p) \Lambda_-^0(q) + \Lambda_-^0(p) \Lambda_+^0(q)] + 2[1 - \Lambda_+^0(p) \Lambda_-^0(q) - \Lambda_-^0(p) \Lambda_+^0(q)] \quad \text{same in the trace trace}$$

Interessant: $4 [\lambda_+^0(p) \lambda_+^0(q) + \lambda_-^0(p) \lambda_-^0(q)]$

~~$(1 + \frac{\alpha p + \beta}{E_p})(1 + \frac{\alpha q + \beta}{E_q}) + (1 - \frac{\alpha p + \beta}{E_p})(1 - \frac{\alpha q + \beta}{E_q})$~~

~~$= 2(1 + \frac{(\alpha p + \beta)(\alpha q + \beta)}{E_p E_q}) = 2(1 + \lambda_+^0(p) \lambda_+^0(q))$~~

~~$\lambda_+^0 = \lambda_-^0$~~

$[(\lambda_+^0(p) - \lambda_-^0(p))(\lambda_+^0(q) - \lambda_-^0(q)) - 1] [(\lambda_+^0(p) - \lambda_-^0(p))(\lambda_+^0(q) - \lambda_-^0(q)) - 1]^*$

~~$\frac{\alpha p + \beta}{E_p} = \lambda_+^0(p) - \lambda_-^0(p)$ interessant: $(\frac{\alpha p + \beta}{E_p} \cdot \frac{\alpha q + \beta}{E_q} - 1)^2$~~

~~$\frac{\alpha p + \beta}{E_p} = \lambda_+^0(p) - \lambda_-^0(p)$ interessant: $\frac{\alpha p + \beta}{E_p} \cdot \frac{\alpha q + \beta}{E_q} - 1$~~

$(\lambda_+^0(q) - \lambda_-^0(q))(\lambda_+^0(q) + \lambda_-^0(q)) = \lambda_+^0(q) - \lambda_-^0(q)$

$[(\lambda_+^0(p) - \lambda_-^0(p))(\lambda_+^0(q) - \lambda_-^0(q)) - 1] [(\lambda_+^0(q) - \lambda_-^0(q))(\lambda_+^0(p) - \lambda_-^0(p)) - 1]$

$= 1 + 1 - 2(\lambda_+^0(p) - \lambda_-^0(p))(\lambda_+^0(q) - \lambda_-^0(q)) - (\lambda_+^0(q) - \lambda_-^0(q))(\lambda_+^0(p) - \lambda_-^0(p))$ Zyklichkeit und Integral $d p d q$

$= 2 - 2 \lambda_+^0(p) \lambda_+^0(q) - 2 \lambda_-^0(p) \lambda_-^0(q) + 2 \lambda_+^0(p) \lambda_-^0(q) + 2 \lambda_-^0(p) \lambda_+^0(q)$

$4 \lambda_+^0(p) \lambda_-^0(q)$

$2 - \frac{1}{2} (1 + \frac{\alpha p + \beta}{E_p})(1 + \frac{\alpha q + \beta}{E_q}) - \frac{1}{2} (1 - \frac{\alpha p + \beta}{E_p})(1 - \frac{\alpha q + \beta}{E_q})$ Mischterme $\frac{\alpha p + \beta}{E_p}, \frac{\alpha q + \beta}{E_q}$ heben sich gegenseitig weg

$= 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{2(pq + 1 + (p-q)\alpha\beta - (pq)\Sigma)}{2 E_p E_q} \xrightarrow{tr} 4(1 - \frac{pq + 1}{E_p E_q})$

$4 \lambda_+^0(p) \lambda_-^0(q) = (1 + \frac{\alpha p + \beta}{E_p})(1 - \frac{\alpha q + \beta}{E_q}) = 1 - \frac{pq + 1 + (p-q)\alpha\beta - (pq)\Sigma}{E_p E_q} \xrightarrow{tr} 4(1 - \frac{pq + 1}{E_p E_q})$

$R = R_0 - R_0 V R_0 + R_0 V R_0 V R_0 (1 + V R_0)^{-1}$

$(D_0 - i\gamma + V) R_0 = 1 + V R_0$

$R_0 (D_0 - i\gamma + V) = 1 + R_0 V$
 $R_0 V R_0 (D_0 - i\gamma + V) = R_0 V - R_0 V R_0 V$

$-(D_0 - i\gamma + V) R_0 V R_0 = -V R_0 - V R_0 V R_0$

$R_0 V R_0 V R_0 (1 + V R_0)^{-1} (D_0 - i\gamma + V)$
 $\stackrel{!}{=} 1 = (1 + V R_0)^{-1} R_0 (D_0 - i\gamma + V)$
 $= (1 + V R_0)^{-1} (1 + R_0 V)$

$(D_0 - i\gamma + V) R_0 V R_0 V R_0 (1 + V R_0)^{-1}$
 $= V R_0 V R_0 (1 + V R_0)^{-1} + V R_0 V R_0 V R_0 (1 + V R_0)^{-1}$

$= V R_0 V R_0 [(1 + V R_0)^{-1} + V R_0 (1 + V R_0)^{-1}]$
 $(1 + V R_0)(1 + V R_0)^{-1} = 1$

$V_\alpha \in L^\alpha(\mathbb{R}^3) \rightarrow$ Hölder, Hausdorff-Young, Hölder $\|VR_0\|$ Abschätzung für $\|V_\alpha R_0\|$

Sei $f = R_0 g \in D(D_0)$ $\hookrightarrow \|f\|_q \leq \left(\frac{1}{2r}\right)^{1/p} \|g\|_p$ $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$

$\|V_\alpha f\|_2 \leq \|V_\alpha\|_\alpha \cdot \|f\|_\alpha$ mit $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta = \frac{2\alpha}{\alpha-2}$

$\|f\|_\beta \leq \left(\frac{1}{2r}\right)^{\frac{1}{\beta}} \|g\|_r$ mit $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{r} = 1 \Leftrightarrow r = \frac{1}{\frac{1}{\beta} - 1} = \frac{2\alpha}{\alpha-2} = \frac{2\alpha}{\alpha-2} \cdot \frac{\alpha-2}{2\alpha-\alpha+2} = \frac{2\alpha}{\alpha+2}$
 $r = \frac{2\alpha}{\alpha+2}$

$\|\hat{f}\|_r = \|(\sqrt{p^2+1}+M)\hat{f}(\sqrt{p^2+1}+M)^{-1}\|_r \leq \|(\sqrt{p^2+1}+M)\hat{f}\|_2 \cdot \|(\sqrt{p^2+1}+M)^{-1}\|_{s_1}$ mit $\frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{s_1}$

$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{s_1} \Rightarrow s_1 = \frac{2r}{2-r} = \frac{4\alpha}{(\alpha+2)(2-\frac{2\alpha}{\alpha+2})} = \frac{4\alpha}{2\alpha+4-2\alpha} = \alpha$

$\Rightarrow s_1 = \frac{2}{2r-1} = \frac{2}{\frac{4\alpha}{\alpha+2}-1} = \frac{2}{\frac{4\alpha-\alpha-2}{\alpha+2}} = \frac{2(\alpha+2)}{3\alpha-2}$

$\|(\sqrt{p^2+1}+M)\hat{f}\|_2 \leq \|D_0 f\|_2 + M\|f\|_2$ (FT unitär auf L^2)

und $\|(\sqrt{p^2+1}+M)^{-1}\|_{s_1} \leq cM^{\frac{3}{s_1}-1}$ $\frac{3}{s_1}-1 = \frac{3}{\alpha}-1$

$\Rightarrow \|V_\alpha f\|_2 \leq c \|V_\alpha\|_\alpha (M^{\frac{3}{\alpha}-1} \|D_0 f\|_2 + M^{\frac{3}{\alpha}} \|f\|_2)$ $f = R_0 g$

$\Rightarrow \|V_\alpha R_0 g\|_2 \leq c \left(M^{\frac{3}{\alpha}-1} \left(1 + \frac{|y|}{\sqrt{y^2+1}}\right) + M^{\frac{3}{\alpha}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} \right) \|g\|_2$

$\leq c \left(2M^{\frac{3}{\alpha}-1} + M^{\frac{3}{\alpha}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} \right) \|g\|_2$ $M = \sqrt{y^2+1}$

$= cM = \tilde{c} (y^2+1)^{\frac{1}{2}(\frac{3}{\alpha}-1)}$

$\frac{1}{2}(\frac{3}{\alpha}-1) < -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{\alpha} < 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha > 6$

$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}+M} \leq \frac{1}{M}$

$p_0 = |y| + 1$

$\|D_0(D_0 - iy)^{-1} f\| \leq \|f\| + |y| \cdot \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} \|f\|$

$\|D_0 - iy\| \leq \sup_{\lambda} \frac{1}{|\lambda - iy|} = \sup_{\lambda} \frac{1}{(\lambda^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$

Nebenrechnung $0 < \alpha < \pi/2$

$\eta^2 = \eta^2 + 1$ Abschätzungen für $f(p)$

Arctan monoton steigend und Arc

$$\text{Arctan } x = x - \frac{x^3}{3} \leq x$$

$$f(p) = \frac{2\pi^2}{|p|} \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{2\eta_0}{|p|}\right) \right) \in (0, \frac{\pi}{2})$$

lim $f(p)$ via L'Hospital: (Nenner)' = 1

$$\text{Zähler}' = 2\pi^2 \cdot \frac{4\eta_0 \pi^2}{p^2 + 4\eta_0^2} \Big|_{p=0} = \frac{4\eta_0 \pi^2}{\eta_0^2} = \frac{\pi^2}{\eta_0}$$

$$\lim_{|p| \rightarrow 0} f(p) = \frac{\pi^2}{\eta_0} \quad \lim_{|p| \rightarrow \infty} f(p) = 0$$

~~Für $p \leq 2\eta_0$ ist $\text{Arctan}\left(\frac{2\eta_0}{p}\right) \geq \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f(p) \leq \frac{2\pi^2 \cdot \pi}{4} \cdot \frac{1}{|p|}$~~

Für alle $|p|$ gilt (da $\text{Arctan}(x) \in [0, \frac{\pi}{2}) \forall x > 0$), dass $f(p) < \text{const} \cdot \frac{1}{|p|}$ ist.

\Rightarrow für $|p| > 2\eta_0$ ist $\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{2\eta_0}{|p|}\right) \leq \frac{\pi}{2}$ und $f(p) \leq \frac{\pi^3}{4\eta_0}$

Für $|p| \leq 2\eta_0$ ist $\text{Arctan}\left(\frac{2\eta_0}{|p|}\right) \geq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{2\eta_0}{|p|}\right) \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow f(p) \leq \frac{\pi^3}{4|p|}$

$|p| = 2\eta_0: f(p) = \frac{\pi^2}{\eta_0} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^3}{4\eta_0}$

~~$f'(p) = \frac{\pi^2}{|p|^2} \left[2|p| \text{Arctan}\left(\frac{2\eta_0}{|p|}\right) + \frac{4\eta_0|p|^2}{|p|^2 + 4\eta_0^2} - \pi|p| \right] < 0 \forall |p| > 0$~~

~~$\leq 2|p| \cdot \frac{2\eta_0}{|p|} - \pi|p| \leq 4\eta_0 - \pi|p| \leq \frac{4\eta_0}{\eta_0} = 4 < \pi|p|$~~

$$f'(p) = -\frac{2\pi^2}{|p|^2} \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{2\eta_0}{|p|}\right) \right) - \frac{2\pi^2}{|p|} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{2\eta_0}{|p|}\right)^2} = -\frac{2\pi^2}{|p|^2} \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{2\eta_0}{|p|}\right) \right) - \frac{2\pi^2}{|p| + \frac{4\eta_0^2}{|p|}}$$

$\rightarrow 0 \quad |p| \rightarrow \infty$
 $\rightarrow \frac{\pi}{2} \quad |p| \rightarrow 0$

$f(p) = \frac{2\pi^2}{|p|} \rightarrow 0 \quad |p| \rightarrow \infty$
 $\frac{2\pi^2}{|p| + \frac{4\eta_0^2}{|p|}} \rightarrow \frac{2\pi^2}{2|p|} \rightarrow 0 \quad |p| \rightarrow \infty$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(q^2+p^2+y_0^2+2qp x)(q^2+y_0^2)} dx dq = \frac{1}{q_0 y_0} \int_0^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{(q^2+p^2+1+2qp x)(q^2+1)} dx dq$$

$$\Leftrightarrow q^2 = u - p^2 - 1$$

$$q = \sqrt{u - p^2 - 1}$$

$$dq = \frac{1}{2\sqrt{u - p^2 - 1}} du$$

$$= \int_{y_0}^1 \frac{1}{16q^4 p} \cdot \frac{1}{(u-p^2)} \cdot 2 \operatorname{Arctanh}\left(\frac{2qp}{u}\right) = \frac{1}{y_0} \int \frac{1}{16p(u-p^2)^2(u-p^2)} \cdot 2 \operatorname{Arctanh}\left(\frac{2qp\sqrt{u-p^2-1}}{u}\right)$$

$$\left| \frac{D_0 - iy}{D_0 - iy} \right| = \left| \frac{D_0 - iy}{D_0 + iy} \right| \quad \frac{D_0 + iy}{D_0 - iy} \leq \frac{(1+i)D_0 + b - iy}{D_0 - iy} \leq \frac{2D_0 + b - iy}{D_0 - iy} = 2 + \frac{b+iy}{D_0 - iy}$$

$$\left(2\pi^2 \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{2y_0}{|p|}\right)\right]\right)' = -2\pi^2 \cdot \frac{1}{1+\frac{4y_0^2}{|p|^2}} \cdot \frac{1}{|p|^2} = -2\pi^2 \cdot \left(1 + \frac{4y_0^2}{|p|^2}\right)$$

$$\frac{2\pi^2}{|p|} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{2y_0}{|p|}\right] \quad \frac{2\pi^2}{|p|^2} \left(1 + \frac{4y_0^2}{|p|^2}\right)$$

$$\left(2\pi^2 \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{2y_0}{|p|}\right)\right]\right)' = -2\pi^2 \left(1 + \frac{4y_0^2}{|p|^2}\right) \quad \frac{1}{1+\frac{4y_0^2}{|p|^2}} \Big|_{p=0} = \frac{1}{2y_0}$$

Sei $D(A) \subset D(\mathcal{D}_0)^{1/2} \Rightarrow |\mathcal{H}_0|^{1/2} (A-z)^{-1}$ ist beschränkt
 cgt
 closed graph theorem

~~\mathcal{H} ist \mathcal{D}_0 -reduzierend~~ $\Rightarrow |\mathcal{H}_0|^{1/2} (A-z)^{-1}$ abgeschlossen?

Sei $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}$ mit $\varphi_n \rightarrow \varphi$ und $|\mathcal{H}_0|^{1/2} (A-z)^{-1} [\varphi_n] \rightarrow \psi$

$$\Rightarrow \mathbb{R} |\mathcal{H}_0|^{1/2} (A-z)^{-1} [\varphi_n] =$$

$$|\mathcal{H}_0|^k (A-z)^{-k} \text{ beschr.} = A = \text{beschr.}$$

1. Frage: ist $|\mathcal{H}_0| (A-z)^{-1}$ abgeschlossen?

$$1 - V(A-z)^{-1}$$

$$(\mathcal{D}_0 - z)^{-1} \chi_{(A, 2R)} + (\mathcal{D}_0)^{-k} \chi_{(k, R)}$$

Satz $(H-z)^{-1} - (H_0-z)^{-1}$ kompakt $\Leftrightarrow [(H-z)^{-1} - (H_0-z)^{-1}] \chi(k) \chi(k) \chi(k) \chi(k) \chi(k) \chi(k)$ kompakt und
 $\lim_{R \rightarrow \infty} \|[(H-z)^{-1} - (H_0-z)^{-1}] \chi(k) \chi(k) \chi(k) \chi(k) \chi(k) \chi(k)\| = 0$

Satz $(H-z)^{-1} - (H_0-z)^{-1}$ kompakt $\Rightarrow [(H-z)^{-1} - (H_0-z)^{-1}] \chi(k) \chi(k) \chi(k)$ kompakt

$[(H-z)^{-1} - (H_0-z)^{-1}] \chi(k) \chi(k) \chi(k)$ kompakt & $\lim_{R \rightarrow \infty} \|[(H-z)^{-1} - (H_0-z)^{-1}] \chi(k) \chi(k) \chi(k)\| = 0$

Satz D_0 ist lokal kompakt, also $\exists h > 0, R > 0$ sodass $|D_0|^h \chi(k) \chi(k) \chi(k)$ kompakt

$(D_0-z)^{-h} \chi(k) \chi(k) \chi(k)$ kompakt.

Insbesondere ist $|D_0|^h \chi(k) \chi(k) \chi(k)$ kompakt

Beweis $|D_0|^h (D_0-z)^{-h}$ ist beschränkt (klar mit Spektralkalkül)
 $A = |D_0|^h (D_0-z)^{-h} \rightarrow |D_0|^{-h} A = (D_0-z)^{-h}$
 $\Rightarrow (D_0-z)^{-h} \chi(k) \chi(k) \chi(k)$ kompakt $\Leftrightarrow |D_0|^{-h} \chi(k) \chi(k) \chi(k)$ kompakt

im Impulsraum: $|D_0|^{-h} = \frac{1}{(p^2+1)^{h/2}}$

$\rightarrow |D_0|^{-h} = \frac{1}{(p^2+1)^{h/2}} \cdot \chi(k) \chi(k) \chi(k)$ (mit Lemma)

Lemma für $f(x^2) \rightarrow 0$ $|x| \rightarrow \infty$ & $g(x^2) \rightarrow 0$ $|x| \rightarrow \infty \Rightarrow \int f(x^2) g(x^2) dx$ kompakt

Offene Frage: $\frac{|H_0|^{1/2}}{H-z}$ beschränkt? $\forall \epsilon$ mit relativer Schranke von V

Wir wissen: $\|Vf\| \leq a \|D_0 f\| + b \|f\| = a \|(D_0 + V - V)f\| + b \|f\|$
 $\leq a \|D_0 f\| + a \|Vf\| + b \|f\|$

$\Rightarrow (1-a) \|Vf\| \leq a \|D_0 f\| + b \|f\|$

$\frac{a}{1-a} < 1 \Leftrightarrow a < 1-a$
 $\Leftrightarrow a < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \|Vf\| \leq \frac{a}{1-a} \|D_0 f\| + \frac{b}{1-a} \|f\|$

\rightarrow wohl mit closed graph lemma, das, dass $\frac{|H_0|^{1/2}}{H-z}$ ist abgeschlossen

Kerns

$$(0.5) \quad \text{Sp} \left[\left(1 + \frac{\alpha \cdot p + \beta}{\sqrt{p^2 + 1}} \right) \cdot \left(1 - \frac{\alpha \cdot q + \beta}{\sqrt{q^2 + 1}} \right) \right] = 4 \left(1 - \frac{pq + 1}{\sqrt{p^2 + 1} \sqrt{q^2 + 1}} \right)$$

ist. Hierbei ist $\Sigma = \text{diag}(\sigma, \sigma)$. Substituiert man nun $2u := p - q$ und $2v = p + q$ und verwendet Kugelkoordinaten für die neuen Variablen wird das Integral modulo einer Konstanten zu:

$$(0.6) \quad \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \int_{-1}^1 dx \left(1 - \frac{v^2 - u^2 + 1}{\sqrt{(1 + u^2 + v^2)^2 - 4u^2v^2x^2}} \right) \frac{u^2v^2}{u^4} \\ = \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \left[2 - \frac{v^2 - u^2 + 1}{|u||v|} \arcsin \left(\frac{2|u||v|}{1 + u^2 + v^2} \right) \right] \frac{v^2}{u^2}$$

Der zweite Summand im Integral wird positiv für den Fall, dass $u^2 > v^2 + 1$ ist. In diesem Fall kann man auch $\arcsin(x) > x$ für $x > 0$ nach unten abschätzen und erhält mit $c > 0$:

$$(0.7) \quad \int \text{Sp}_{\mathbb{C}^4} |K(p, p)|^2 dp \geq c \int_{u^2 > v^2 + 1} du \int_0^\infty dv \left[1 - \frac{v^2 - u^2 + 1}{u^2 + v^2 + 1} \right] \frac{v^2}{u^2} \\ \geq c \int_0^\infty dv \int_{u^2 > v^2 + 1} du \frac{v^2}{u^2} = c \int_0^\infty \frac{v^2}{\sqrt{v^2 + 1}} dv = \infty$$

□

Theorem VIII.25 (a) Let $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ and A be self-adjoint operators and suppose that D is a common core for all A_n, A . If $A_n \varphi \rightarrow A\varphi$ for each $\varphi \in D$, then $A_n \rightarrow A$ in the strong resolvent sense.

(b) Let $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ and A be self-adjoint operators with a common domain, D . Norm D with $\|\varphi\|_A = \|A\varphi\| + \|\varphi\|$. If

$$\sup_{\|\varphi\|_A=1} \|(A_n - A)\varphi\| \rightarrow 0$$

then $A_n \rightarrow A$ in the norm resolvent sense.

(c) Let $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ and A be positive self-adjoint operators with a common form domain \mathcal{H}_{+1} which we norm with

$$\|\psi\|_{+1} = \sqrt{(\psi, A\psi) + (\psi, \psi)}$$

If $A_n \rightarrow A$ in norm in the sense of maps from \mathcal{H}_{+1} to \mathcal{H}_{-1} , that is, if

$$\sup_{0 \neq \psi, \varphi \in D} \frac{|(\varphi, (A - A_n)\psi)|}{\|\varphi\|_{+1} \|\psi\|_{+1}} = \sup_{0 \neq \psi \in D} \frac{|(\psi, (A - A_n)\psi)|}{(\psi, (A + 1)\psi)} \rightarrow 0$$

then $A_n \rightarrow A$ in the norm resolvent sense.

Proof (a) Let $\varphi \in D$, $\psi = (A + i)\varphi$, then

$$[(A_n + i)^{-1} - (A + i)^{-1}]\psi = (A_n + i)^{-1}(A - A_n)\varphi$$

converges to zero as $n \rightarrow \infty$, since $(A - A_n)\varphi \rightarrow 0$ and the $(A_n + i)^{-1}$ are uniformly bounded. Since D is a core for A , the set of such ψ is dense in

$$(A_n + i)^{-1}\varphi \rightarrow (A + i)^{-1}\varphi \quad \text{for all } \varphi \in \mathcal{H}$$

A similar proof works for $(A_n - i)^{-1}$.

We sketch the proofs of (b) and (c). For (b), first one proves that the hypothesis is equivalent to $(A_n - A)(A + i)^{-1} \rightarrow 0$ in the ordinary \mathcal{H} -operator norm. Thus $(I + (A_n - A)(A + i)^{-1})^{-1}$ exists and converges to I in norm as $n \rightarrow \infty$. As a result

$$(A_n + i)^{-1} = (A + i)^{-1}(I + (A_n - A)(A + i)^{-1})^{-1} \rightarrow (A + i)^{-1}$$

in norm. Similarly $(A_n - i)^{-1} \rightarrow (A - i)^{-1}$.

To prove (c), one first proves that the hypothesis is equivalent to

$$(A + I)^{-1/2}(A_n - A)(A + I)^{-1/2} \rightarrow 0$$

in the ordinary operator norm. Using

$$(A_n + I)^{-1} = (A + I)^{-1/2}(I + (A + I)^{-1/2}(A_n - A)(A + I)^{-1/2})^{-1}$$

one then follows the proof of (b). ■

Finally, we introduce graph limits. Graph limits will

Definition Let A_n be self-adjoint operators. We say that $\langle \psi, \varphi \rangle \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, $\psi_n \in D(A_n)$ so that $\psi_n \rightarrow \psi$ in the strong graph limit by Γ_∞^s if $\langle \psi_n, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle \psi, \varphi \rangle$ is the strong graph limit of

First, we consider the self-adjoint.

Theorem VIII.26 Suppose $A_n \rightarrow A$ in the strong graph limit.

Proof Suppose first that $\langle \varphi, \varphi \rangle \in \Gamma_\infty^s(A)$. Then $\varphi_n \equiv (A_n + i)^{-1}(A - i)\varphi \in \Gamma_\infty^s(A)$. Thus $\Gamma(A)$ is the strong graph limit of $\Gamma(A_n)$ and $A_n \varphi_n \rightarrow \psi$. If we

$$\begin{aligned} \eta_n - \varphi_n &= [(A_n + i)^{-1} - (A + i)^{-1}](A - i)\varphi \\ &= [(A_n + i)^{-1} - (A + i)^{-1}](A - i)\varphi \\ &\rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Then $\eta_n \rightarrow \varphi$ and $A\eta_n = (A_n - i)\varphi_n \rightarrow (A - i)\varphi$. Thus, $\Gamma(A) = \Gamma_\infty^s(A)$.

Conversely, suppose that $\langle \varphi, \varphi \rangle \in \Gamma_\infty^s(A)$ and $\varphi_n \in D(A_n)$ so that $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in the strong graph limit.

$$\begin{aligned} [(A_n + i)^{-1} - (A + i)^{-1}]\varphi_n &= (A_n + i)^{-1}\varphi_n - (A + i)^{-1}\varphi_n \\ &\rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Since $\|\varphi_n\| \leq 1$, $(A_n + i)^{-1}\varphi_n \rightarrow (A + i)^{-1}\varphi$ in the strong convergence of the graph limit.

Thus we see that if the limit is self-adjoint, the strong convergence are the same and that the limit is self-adjoint.

To prove (b), we note that since $a, b \in \rho(A)$, there exists $\varepsilon < \frac{1}{2}(b-a)$ and N , so that

$$\sup_{n \geq N} \{ \|(A_n - a)^{-1}\|, \|(A_n - b)^{-1}\| \} \leq 1/\varepsilon$$

Therefore, by the functional calculus, $\sigma(A_n) \cap (a, b) \subset (a + \varepsilon, b - \varepsilon)$ for $n \geq N$. Let f be a continuous function which equals one on $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$ and is equal to zero outside (a, b) . Then

$$P_{(a,b)}(A_n) = f(A_n) \quad P_{(a,b)}(A) = f(A)$$

and so by Theorem VIII.20,

$$\|P_{(a,b)}(A_n) - P_{(a,b)}(A)\| \rightarrow 0 \blacksquare$$

Theorem VIII.24 Let $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ and A be self-adjoint operators and suppose that $A_n \rightarrow A$ in the strong resolvent sense. Then

- (a) If $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, and $(a, b) \cap \sigma(A_n) = \emptyset$ for all n , then $(a, b) \cap \sigma(A) = \emptyset$. That is, if $\lambda \in \sigma(A)$, then there exists $\lambda_n \in \sigma(A_n)$ so that $\lambda_n \rightarrow \lambda$.
- (b) If $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, and $a, b \notin \sigma_{pp}(A)$, then $P_{(a,b)}(A_n)\varphi \rightarrow P_{(a,b)}(A)\varphi$ for all $\varphi \in \mathcal{H}$.

Proof By the functional calculus, the statement that $(a, b) \cap \sigma(A) = \emptyset$ is equivalent to the statement that

$$\|(A - \lambda_0)^{-1}\| \leq \frac{\sqrt{2}}{b-a}$$

where

$$\lambda_0 = \frac{a+b}{2} + i \left(\frac{b-a}{2} \right)$$

But $(A_n - \lambda_0)^{-1}$ converges strongly to $(A - \lambda_0)^{-1}$ so we have

$$\|(A - \lambda_0)^{-1}\| \leq \liminf_n \|(A_n - \lambda_0)^{-1}\| \leq \frac{\sqrt{2}}{b-a}$$

This proves (a).

To prove (b), we find uniformly bounded sequences of continuous functions f_n and g_n so that $0 \leq f_n \leq \chi_{(a,b)}$, $f_n(x) \nearrow \chi_{(a,b)}(x)$ pointwise and $\chi_{(a,b)} \leq g_n \leq \chi_n(x) \searrow \chi_{(a,b)}(x)$ pointwise. Then $f_n(A) \rightarrow P_{(a,b)}(A)$ and $g_n(A) \rightarrow P_{(a,b)}(A)$ strongly.

Since $a, b \notin \sigma_{pp}(A)$, $P_{(a,b)}(A) = P_{(a,b)}(A)$ which means that given ψ and $\varepsilon > 0$, we can find continuous functions f, g , with $f \leq \chi_{(a,b)} \leq \chi_{(a,b)} \leq g$, so that $\|f(A)\psi - g(A)\psi\| \leq \varepsilon/5$. By Theorem VIII.20b we can find N so that $n \geq N$ implies

$$\|f(A_n)\psi - f(A)\psi\| \leq \varepsilon/5 \quad \|g(A_n)\psi - g(A)\psi\| \leq \varepsilon/5$$

by an $\varepsilon/3$ argument

$$\|f(A_n)\psi - g(A_n)\psi\| \leq 3\varepsilon/5$$

Since the functional calculus implies

$$\|f(A)\psi - P_{(a,b)}(A)\psi\| \leq \|f(A)\psi - g(A)\psi\|$$

another $\varepsilon/3$ argument implies

$$\|P_{(a,b)}(A_n)\psi - P_{(a,b)}(A)\psi\| \leq \varepsilon \blacksquare$$

Part (a) of Theorem VIII.24 says that the spectrum of the limiting operator cannot suddenly expand. It can, however, contract rather spectacularly as the following example shows: Let $A_n = x/n$ on $L^2(\mathbb{R})$; then A_n converges to the zero operator in the strong resolvent sense. For each n , $\sigma(A_n) = \mathbb{R}$, but the spectrum of the limiting operator contains only the origin. An easy application of part (a) is the statement that if the A_n are positive and $A_n \rightarrow A$ in the strong resolvent sense, then A is positive.

If A_n converges to A in *norm* resolvent sense, Theorem VIII.23 tells us that the spectrum of the limiting operator cannot suddenly contract in the sense that if $\lambda \in \sigma(A_n)$ for all sufficiently large n , then $\lambda \in \sigma(A)$. Notice that in the example $A_n = x/n$ above, A_n does not converge to A in the norm resolvent sense.

The principle of noncontraction of the spectrum under norm resolvent convergence remains true even when A_n and A are not self-adjoint. But the principle of nonexpansion of the spectrum in the strong resolvent limit is not always valid for general not-necessarily-self-adjoint operators. In fact, there exists a *norm* convergent sequence of uniformly bounded operators $A_n \rightarrow A$ with $\sigma(A_n)$ the unit circle in \mathbb{C} for each n and $\sigma(A)$ the entire unit disc. Thus the reader should be careful to apply Theorem VIII.24 only in the self-adjoint case.

In applications, one is usually given the operators $\{A_n\}$ and A on domains of self-adjointness or essential self-adjointness and it may be very difficult to compute the resolvents. Thus, in order to use Theorems VIII.23 and VIII.24 one must have criteria on the operators A_n , A themselves which guarantee norm or strong resolvent convergence.

Förger

Interessant z.B. $r=1, r=\frac{1}{2}$

Energie \downarrow \uparrow Masse

$$k(y) = |y|^2 + m^2 \equiv |y|^2 + 1$$

\uparrow
Impuls

Lemma 1 Sei $(1+k(y))^2 \geq c_0 (1+|y|^2)^r \quad \forall y \in \mathbb{R}^3$ mit $c_0, r > 0$.

Dann ist $u \mapsto \varphi u$ D_0 -kompakt $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$

Beweis Sei $\|\cdot\|_r$ die Norm des Sobolevraums $W^{r,r}$. Dann hat man für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ und $u \in \mathcal{D}(D_0)$:

$$\|\varphi u\|_r^2 = \int |\widehat{\varphi u}(y)|^2 (1+|y|^2)^r dy \leq \frac{1}{c_0} \int |\widehat{\varphi u}(y)|^2 (1+k(y))^2 dy$$

$u = \mathcal{R}_0 \bar{u}$

$$= \frac{1}{c_0} (\|\varphi u\|_2^2 + \|D_0 \varphi u\|_2^2) \leq c_1 (\|u\|_2^2 + \|D_0 u\|_2^2)$$

$$= \frac{1}{c_0} (\|\varphi \mathcal{R}_0 \bar{u}\|_2^2 + \|D_0 \varphi \mathcal{R}_0 \bar{u}\|_2^2)$$

Sei nun $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in D_0 sodass $\|u_n\|_2^2 + \|D_0 u_n\|_2^2$ beschränkt ist.

$\Rightarrow \|\varphi u_n\|$ ebenfalls beschränkt.

Rellich-Gürding: $G \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet. Falls $T \in L(H_0^k(G), H_0^k(G))$ für $j < k$

$\|T\varphi\|_k \leq c \|\varphi\|_j \quad \forall \varphi \in H_0^k(G)$ erfüllt, so ist T als Operator in $L(H_0^k(G), H_0^k(G))$ kompakt.

R-G. \Rightarrow Teilfolge u_{n_j} sodass φu_{n_j} in H konvergiert. \square

Kompakter Op. Jede beschränkte Folge x_n besitzt eine Teilfolge x_{n_k} sodass $T x_{n_k}$ konvergiert

Satz Seien D_0 und V abgeschlossene Operatoren, $u \mapsto \varphi u$ D_0 -kompakt, $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Dann ist V D_0 -kompakt genau dann, wenn $\forall \epsilon > 0 \exists \varphi_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ sodass

$$\|V u\| \leq \epsilon (\|u\| + \|D_0 u\|) + \|\varphi_\epsilon u\| \quad \forall u \in \mathcal{D}(D_0)$$

Beweis

Sk \mathcal{D}_φ nicht kompakt

$$x_n \xrightarrow{w} x \rightarrow T x_n \xrightarrow{s} T x$$

$\not\Rightarrow \forall x_n \xrightarrow{s} x$

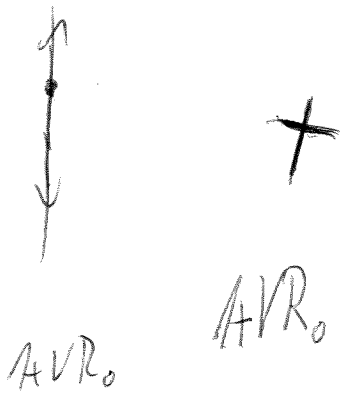
$$\text{Set } VR_0 \in \mathcal{Y}^2$$

$(1+VR_0)^{-1}$ bounded on imaginary axis

$$\begin{aligned} \text{Set } VR_0 \quad (1+V(D_0 - iy))^{-1} &= (1+VD_0 - iyV)^{-1} \\ &= \left\| \frac{1}{1+VD_0 - iyV} \right\| = \frac{1+VD_0 + iy}{(1+VD_0)^2 + y^2} \end{aligned}$$

bound it on imaginary axis

$(1+VR_0)^{-1}$ meromorphic



$$\begin{aligned} R_0 \quad (1+VR_0)^{-1} &= \left(\cancel{R_0(D_0 - iy + V)} \right)^{-1} \\ &= \cancel{R_0 - iy} + (D_0 + V - iy)^{-1} \cdot \cancel{D_0 - iy} \end{aligned}$$