

SEMINAR ZU THEMEN DER VIELTEILCHENQUANTENMECHANIK

Geplanter Termin: Montags um 15.00 Uhr in F 316 a (Universitätsplatz 2), ab dem 09.05.2022, außer den Montagen an denen das GAuS-Seminar stattfindet. Der genaue Zeitplan wird auf der Website bekannt gegeben.

Themen: Die Gliederung ist bewusst fein gehalten, damit einzelne Punkte leicht kombiniert werden können. Es ist mit ca. zehn Vorträgen rechnen. Es würde sich z.B. anbieten (1) und (2) unten zu zwei Vorträgen zusammenzufassen. Punkt (3) sollte höchstens zwei Vorträge dauern, wenn wir ihn überhaupt behandeln. Punkt (4) könnte in zwei, maximal drei Vorträgen abgearbeitet werden. Die Arbeiten [Hai21, NT21, HST22] könnten in den restlichen (drei bzw. fünf, je nachdem ob (3) behandelt wird oder nicht) Sitzungen behandelt werden.

- (1) Vorbereitung
 - (a) Operatoren in Hilberträumen und Tensorprodukte. Siehe [Sol14, S. 4–11] oder [Nam20, S. 4–6].
 - (b) Prinzipien der Quantenmechanik, insbesondere die Begriffe *reiner und gemischter Zustand, Observable und Erwartungswert, Hamilton-Operator, Grundzustand und Stabilität, Schrödingersche Zeitentwicklung, Entropie, freie Energie und Gibbs-Zustand*. Siehe [Sol14, S. 11–14] oder [Nam20, S. 7–8].
 - (c) Grundlagen der Vielteilchenquantenmechanik. Siehe [Sol14, S. 14–17] oder [Nam20, S. 9–14].
- (2) Optional oder Crashkursartig: Quadratische Formen, Unschärfeprinzip ausgedrückt durch Sobolew- und Hardy-Ungleichungen, IMS-Formel, Ein- und Vielteilchen-Schrödinger-Operatoren (Selbstadjungiertheit, Min-Max, Weyl, HVZ, Zhislin und Ionisierungsvermutung). Siehe [Sol14, S. 19–31] oder [Nam20, S. 15–39]. Ansonsten die Standardreferenzen [RS75, RS78].
- (3) Optional: Variationsrechnung und Untersuchung der Hartree-Theorie. Siehe [Nam20, S. 40–113]. (Siehe auch [Sie22, Abschnitt 5.1].)
- (4) Fockraum-Formalismus
 - (a) Kanonisches und großkanonisches Bild, Fockräume. Siehe [Sol14, S. 32–35] oder [Bac21, S. 53–55].
 - (b) Zweite Quantisierung. Siehe [Sol14, S. 35–41] (Bosonen und Fermionen) oder [Nam20, S. 114–123] (nur Bosonen) oder [Bac21, S. 53–69] oder [Bac22, S. 7–8].
 - (c) Ein- und Zweiteilchendichtematrizen. Siehe [Sol14, S. 41–53, Appendix G] (Bosonen und Fermionen) oder [Nam20, S. 123–128] (nur Bosonen) oder [Bac22, S. 8–12, 18–33].
 - (d) Kohärente, Gaussche und quasifreie Zustände. Siehe [Nam20, S. 128–136] oder [Bac22, S. 29–33]. (Alternativ: [Sol14, S. 67–69] wenn man zuerst Bogolubov-Transformationen einführt.)
 - (e) Optional: Bogolubovs heuristische Argumente. Siehe [Nam20, S. 137–145].

- (f) Bogolubov-Transformationen. Siehe [Sol14, S. 53–67] oder [Nam20, S. 146–158] oder [Bac22, S. 21–23, S. 29–33].
 - (g) Optional: Diagonalisierung von Blockoperatoren. Siehe [Nam20, S. 158–165].
 - (h) Charakterisierung quasifreier Zustände. Siehe [Nam20, S. 165–174] oder [Bac22, S. 29–33, Theorem 8].
 - (i) Diagonalisierung quadratischer Hamilton-Operatoren. Siehe [Nam20, S. 174–181] oder [Sol14, S. 70–74].
 - (j) Verallgemeinerte Hartree–Fock-Theorie (Fermionen). Siehe [Sol14, S. 74–76] oder [Bac22, S. 34–39]. (Siehe auch [Bac22, S. 1–6, S. 13–17].)
 - (k) Bogolubov-Theorie (Bosonen). Siehe [Sol14, S. 76–80]. Detaillierter in [Nam20, S. 182–228] im mean-field scaling.
- (5) Vereinfachter Beweis von Bose–Einstein-Kondensation im Gross–Pitaevskii-Grenzwert von Hainzl [Hai21] sowie einfachere Herleitung des angeregten Spektrums von Nam und Triay [NT21] und Hainzl–Schlein–Triay [HST22]. Ursprünglich von Boccato–Brennecke–Cenatiempo–Schlein [BBCS18, BBCS19, BBCS20b, BBCS20a].

Weitere Referenzen: [Ber66, Sie14, Sie15, Sie22, Bac22, Hai21, HST22]

REFERENCES

- [Bac21] Volker Bach. Renormierungstransformationen. Available at http://www.iaa.tu-bs.de/konmerz/ss22/ZQLiteratur/FA-2-RG_Kap-1-2-3-4-5-6-7.pdf, 2021.
- [Bac22] Volker Bach. Hartree–Fock theory, Lieb’s variational principle, and their generalizations. *To appear in birthday proceedings for Elliott H. Lieb’s 90th birthday*, pages 1–48, 2022. Available at <http://www.iaa.tu-bs.de/konmerz/ss22/ZQLiteratur/BachHartreeFockTheoryLiebsVariationalPrincipleAndTheirGeneralizations.pdf>.
- [BBCS18] Chiara Boccato, Christian Brennecke, Serena Cenatiempo, and Benjamin Schlein. Complete Bose–Einstein condensation in the Gross–Pitaevskii regime. *Comm. Math. Phys.*, 359(3):975–1026, 2018.
- [BBCS19] Chiara Boccato, Christian Brennecke, Serena Cenatiempo, and Benjamin Schlein. Bogoliubov theory in the Gross–Pitaevskii limit. *Acta Math.*, 222(2):219–335, 2019.
- [BBCS20a] Chiara Boccato, Christian Brennecke, Serena Cenatiempo, and Benjamin Schlein. The excitation spectrum of Bose gases interacting through singular potentials. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 22(7):2331–2403, 2020.
- [BBCS20b] Chiara Boccato, Christian Brennecke, Serena Cenatiempo, and Benjamin Schlein. Optimal rate for Bose–Einstein condensation in the Gross–Pitaevskii regime. *Comm. Math. Phys.*, 376(2):1311–1395, 2020.
- [Ber66] F. A. Berezin. *The Method of Second Quantization*. Pure and Applied Physics, Vol. 24. Academic Press, New York–London, 1966. Translated from the Russian by Nobumichi Mugibayashi and Alan Jeffrey.
- [Hai21] Christian Hainzl. Another proof of BEC in the GP-limit. *J. Math. Phys.*, 62(5):Paper No. 051901, 16, 2021.
- [HST22] Christian Hainzl, Benjamin Schlein, and Arnaud Triay. Bogoliubov theory in the Gross–Pitaevskii limit: a simplified approach. *arXiv e-prints*, page arXiv:2203.03440, March 2022.
- [Nam20] Phan Thành Nam. Mathematical quantum mechanics ii. Available at <https://www.math.lmu.de/~nam/LectureNotesMQM2020.pdf>, 2020.
- [NT21] Phan Thành Nam and Arnaud Triay. Bogoliubov excitation spectrum of trapped Bose gases in the Gross–Pitaevskii regime. *arXiv e-prints*, page arXiv:2106.11949, June 2021.
- [RS75] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics. II. Fourier Analysis, Self-Adjointness*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975.

- [RS78] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics*, volume 4: Analysis of Operators. Academic Press, New York, 1 edition, 1978.
- [Sie14] Heinz Siedentop. Mathematical Quantum Mechanics 1. Available at <http://www.iaa.tu-bs.de/konmerz/ss22/ZQLiteratur/Skript.pdf> and <http://www.iaa.tu-bs.de/konmerz/ss22/ZQLiteratur/Lecture.pdf>, 2014.
- [Sie15] Heinz Siedentop. Fortgeschrittene Themen der Analysis und Mathematischen Physik. Lecture notes by K. Merz. Available at <http://www.iaa.tu-bs.de/konmerz/ss22/ZQLiteratur/ThemenMathPhys.pdf>, 2015.
- [Sie22] Heinz Siedentop. Mathematical elements of density functional theory. pages 1–54, March 2022. To appear in the proceedings of “Density Functionals for Many-Particle Systems: Mathematical Theory and Physical Applications of Effective Equations”, September 2-27, 2019, Institute for Mathematical Sciences of the National University of Singapore. Available at <https://arxiv.org/abs/2203.14069>.
- [Sol14] Jan Philip Solovej. Many body quantum mechanics – with corrections and additions of P. T. Nam from August 30, 2009. Available at <http://web.math.ku.dk/~solovej/MANYBODY/mbnotes-ptn-5-3-14.pdf>, 2014.