

Fourierrestriktion in $d=2$

8.7.2021

1 Beweis d. Restriktionsvermutung - oszillatorische Integrale

Von Hörmander bewiesen:

Angenommen $\phi: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sei C^2 mit

$\inf_{\xi \in [-1, 1]} |\phi''(\xi)| \geq \nu > 0$ (so parametrisieren wir unsere Kurve, auf der wir im Fourierraum restringieren wollen)

Zugehöriger Erweiterungsoperator für die Kurve $(\xi, \phi(\xi)) \in \mathbb{R}^2$

$$E^\phi: C^\infty((-1, 1)) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$$

$$(E^\phi f)(x_1, x_2) = \int_{-1}^1 f(\xi) e^{2\pi i(x_1 \cdot \xi + x_2 \cdot \phi(\xi))} d\xi$$

Thm 1.1 Es gilt $\|E^\phi f\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \lesssim \|f\|_{L^\Gamma(-1, 1)}$

für alle $q > 4$ und $\frac{3}{q} + \frac{1}{\Gamma} \leq 1$

$$(q > \frac{2d}{d-1}; \quad \Gamma = \frac{d+1}{d-1} \Gamma')$$

Beweis Mit Interpolation genügt es den Fall $\frac{3}{q} + \frac{1}{\Gamma} = 1$ zu beweisen.

Notation: $q = 2p'$ mit $p \in [1, 2]$, $\Gamma = \frac{2p}{3-p}$.

\Rightarrow zu zeigen: $\|E^\phi f\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}^2 \lesssim \|f\|_\Gamma^2$

Beobachtung: $q = 4 + \epsilon = 2 \cdot 2 + \epsilon$, d.h. wir

schreiben

$$\|E_{\phi} f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^2 = \|E_{\phi} f \cdot E_{\phi} f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$$

$$\begin{aligned} (E_{\phi} f)^2(x_1, x_2) &= \int_{-1}^1 ds \int_{-1}^1 dt \exp(2\pi i (x_1(t+s) + x_2(\phi(t) + \phi(s)))) \underbrace{f(t)f(s)}_{(f \otimes f)(t,s)} \\ &= 2 \iint_{t > s} ds dt \end{aligned}$$

$$= \iint d\xi_1 d\xi_2 \exp(2\pi i (x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)) \underbrace{(f \otimes f)(T(\xi_1, \xi_2)) |\det T'|}_{F(\xi_1, \xi_2)}$$

mit Variablensubstitution $(t, s) = T(\xi_1, \xi_2)$

$$(\Rightarrow (\xi_1, \xi_2) = (t+s, \phi(t) + \phi(s)))$$

$\Rightarrow (E_{\phi} f)(x_1, x_2)^2$ ist 2-dim FT von $F(\xi_1, \xi_2)$

$$\|(E_{\phi} f)^2\|_{L^p} = \|\widehat{F}\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \stackrel{\text{Hausdorff-Young}}{\leq} \|F\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$$

verbleibt zu zeigen, dass $\|F\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \lesssim \|f\|_{L^p(-1,1)}^2$

Um $\|F\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$ auszurechnen, machen wir die Substitution rückgängig. Dazu müssen wir $|\det T'|$ bzw.

$$|\det (T^{-1})'|, \text{ Erinnerung: } T^{-1}(t, s) = (t+s, \phi(t) + \phi(s))$$

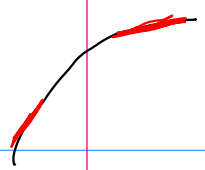
$$\Rightarrow (T^{-1})' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \phi'(t) & \phi'(s) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\det (T^{-1})'| &= |\phi'(s) - \phi'(t)| \\ &\approx |t - s| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|F\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^p = \iint_{-1}^1 |f \otimes f(t, s)|^p \frac{|\det (T^{-1})'|}{|\det (T^{-1})'|^p} dt ds$$

$$\lesssim \iint_{-1}^1 dt ds |f(t)|^p |f(s)|^p |t-s|^{1-p}$$

$$H^1 \lesssim \|\cdot\|_{L^2}^{2p}$$



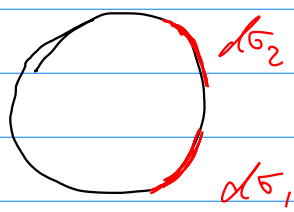
in $d=2$: • Oscillationen im Fourierraum können wg. Plancherel direkt übersetzt werden in Größenabschätzungen im Ortsraum

Stückchen sind transversal zueinander

$\Rightarrow |\phi'(t) - \phi'(s)| \gtrsim |t-s|$ • Krümmung der Kurve \Leftrightarrow Transversalität von Stückchen der Kurve.
 \Rightarrow Input für Größenabschätzungen im Ortsraum.

2 Warm-up für den zweiten Beweis der Restriktionsvermutung

$$S = \{ \xi \in \mathbb{R}^d : P(\xi) = 0 \}$$



$d\sigma_1, d\sigma_2$?

$$d\sigma_S = \delta^{(1)}(P(\xi))$$

$f * g$ ist höchstens so singular wie f oder g

Erinnerung: Für zwei Borelmaße ν_1, ν_2 auf \mathbb{R}^d , dann ist die Faltung

$$(\nu_1 * \nu_2)(A) = \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A(\xi_1 + \xi_2) d\nu_1(\xi_1) d\nu_2(\xi_2)$$

Ziel Wie singular ist $\nu_1 * \nu_2$?

- Upshot: 1) $\nu_1 * \nu_2$ ist absolut stetig bzgl. Lebesgue, d.h. $d\nu_1 * d\nu_2 = F(\xi) d\xi$ für ein $F \in L^1_{loc}$
 2) $F(\xi) \sim |\xi|^{-1}$

Prop 2.1 Sei $\mu \geq 0$ ein endliches Borelmaß auf \mathbb{R}^d mit $\mu * \mu = F(\xi) d\xi$ für ein $F \in L^\infty(\mathbb{R}^d, d\xi)$, d.h. $\mu * \mu$ ist absolut stetig bzgl. Lebesgue

$$\Rightarrow \|\widehat{g} d\mu\|_{L^4(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|g\|_{L^2(d\mu)} = \left(\int |g|^2 d\mu \right)^{1/2}$$

Bew Sei $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d: [0, \infty))$ mit $\int \phi = 1$ $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-d} \phi(x/\epsilon)$

Definiere die Regularisierung $\mu_\epsilon(\xi) = (\phi_\epsilon * \mu)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi_\epsilon(\xi - \eta) d\mu(\eta)$

• $\mu_\epsilon \in L^1(\mathbb{R}^d)$: $\int_{\mathbb{R}^d} \mu_\epsilon(\xi) d\xi = \int d\xi \int d\mu(\eta) \phi_\epsilon(\xi - \eta)$
 $= \|\phi\|_{L^1(dx)} \cdot \mu(\mathbb{R}^d) < \infty$

• $\mu_\epsilon d\xi \rightarrow d\mu \Leftrightarrow \int d\xi f(\xi) \mu_\epsilon(\xi) = \int d\xi f(\xi) \int d\mu(\eta) \phi_\epsilon(\xi - \eta)$
 \Downarrow $\forall f \in C_c$ $= \int d\mu(\eta) \underbrace{(f * \phi_\epsilon)(\eta)}_{\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} f(\eta) \text{ p.w. Lebesgue-f.ä.}} \Rightarrow d\mu - \text{f.ä.}$
 $\int f(\xi) \mu_\epsilon(\xi) d\xi \rightarrow \int f(\eta) d\mu(\eta) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \int d\mu(\eta) f(\eta)$

Genügt zu zeigen, dass

$$\underbrace{\|\widehat{g\mu_\epsilon}\|_{L^4(\mathbb{R}^d, d\xi)}}_{\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \|\widehat{gd\mu}\|_{L^4(\mathbb{R}^d, d\xi)}} \approx \underbrace{\left(\int |g(x)|^2 \mu_\epsilon(x) dx \right)^{1/2}}_{\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \|g\|_{L^2(d\mu)}} \quad g \text{ l.m. in } \mathcal{C}.$$

$$\begin{aligned} \|\widehat{g\mu_\epsilon}\|_{L^4(\mathbb{R}^d)}^4 &= \left(|\widehat{g\mu_\epsilon}|^2, |\widehat{g\mu_\epsilon}|^2 \right)_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \left(\mathcal{F}^{-1}(|\widehat{g\mu_\epsilon}|^2), \mathcal{F}^{-1}(|\widehat{g\mu_\epsilon}|^2) \right)_{L^2(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int |g|^2 \mu_\epsilon(\xi) d\xi &= \int |(g\mu_\epsilon * g\mu_\epsilon)(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int d\xi \left| \int d\eta (g\mu_\epsilon)(\xi - \eta) \cdot (g\mu_\epsilon)(\eta) \right|^2 \\ &= \int d\xi \left| \int d\eta g(\xi - \eta) g(\eta) (\mu_\epsilon(\xi - \eta) \mu_\epsilon(\eta))^{1/2} \right|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 CS &\leq \int d\xi \left(\int d\eta \ g(\xi-\eta)^2 g(\eta) \mu_\epsilon(\xi-\eta) \mu_\epsilon(\eta) \right) \\
 &\quad \cdot \left(\int d\eta \ \mu_\epsilon(\xi-\eta) \cdot \mu_\epsilon(\eta) \right) \\
 &= \underbrace{\left(\int d\xi \ |g(\xi)|^2 \mu_\epsilon(\xi) \right)^2}_{\text{was wir wollten}} \cdot \sup_{\xi} (\mu_\epsilon * \mu_\epsilon)(\xi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|\mu_\epsilon * \mu_\epsilon\|_{L^\infty} &= \|(\mu * \phi_\epsilon) * (\mu * \phi_\epsilon)\|_{L^\infty} \\
 1 + \frac{1}{\infty} = 1 + \frac{1}{\infty} & \leq \|\mu * \mu\|_{L^\infty} \underbrace{\|\phi_\epsilon * \phi_\epsilon\|_{L^1}}_{=1 \text{ per Voraussetzung}} \\
 &= \|F\|_{L^\infty} < \infty
 \end{aligned}$$

Bem Flächenmaß von S^{d-1} erfüllt die Bedingung dieses ^{Prop.} Lemmas, wie wir jetzt sehen werde □

Lemma 2.2 Sei $d\sigma$ das Lebesgue-Leray Flächenmaß von S^{d-1} , $d \geq 2$.
Dann: $d\sigma * d\sigma = F(\xi) d\xi$ für ein $F \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, die erfüllt

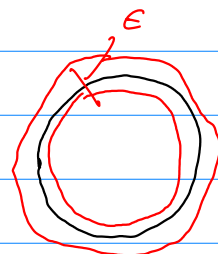
$$|F(\xi)| \lesssim \begin{cases} |\xi|^{-1} & \text{für } 0 < |\xi| < 1 \\ (2-|\xi|)^{(d-3)/2} & \text{für } 1 \leq |\xi| < 2 \end{cases}$$

$$F(\xi) = 0 \text{ für } |\xi| > 2$$

$$\begin{aligned}
 \text{Bem} \quad \underbrace{(\sigma * \sigma)}_{\uparrow \text{Lebesgue-Ma\ss}}(\xi) &= \frac{|\xi|^{d-2}}{|\xi|} \left(1 - |\xi|^2/4\right)_+^{(d-3)/2} \quad (HA)
 \end{aligned}$$

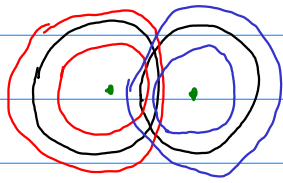
Beweis Wir wenden $d\sigma$ wieder auf

$$\sigma_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \mathbb{1}_{S_\epsilon^{d-1}}$$



(warum $\frac{1}{\epsilon}$? $do(\xi) = \delta^{(1)}(\rho(\xi)) = \delta^{(1)}(|\xi|^2 - 1) = \delta^{(1)}(|\xi| - 1)$
 \uparrow
 Leray-Map $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\chi((|\xi| - 1)/\epsilon)}{\epsilon}$

$$\begin{aligned}
 (\sigma_\epsilon * \sigma_\epsilon)(\xi) &= \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \delta^{(d)}(\xi - \eta_1 - \eta_2) \mathbb{1}_{S_\epsilon^{d-1}}(\eta_1) \mathbb{1}_{S_\epsilon^{d-1}}(\eta_2) d\eta_1 d\eta_2 \\
 &= \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} d\eta_1 d\eta_2 \delta(\eta_1, -\eta_2) \mathbb{1}_{S_\epsilon^{d-1} + \xi}(\eta_1) \mathbb{1}_{S_\epsilon^{d-1}}(\eta_2) \\
 &= \epsilon^{-2} |S_\epsilon^{d-1} \cap (S_\epsilon^{d-1} + \xi)| \neq 0 \text{ nur, wenn } |\xi| < 2 + 2\epsilon
 \end{aligned}$$

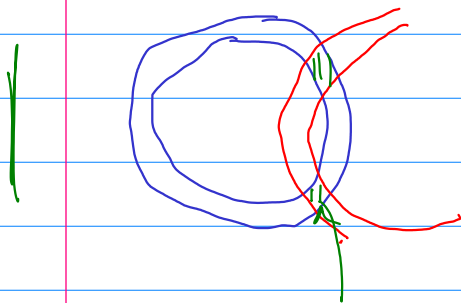


$\sim \epsilon^2 \cdot g(|\xi|)$
 ??

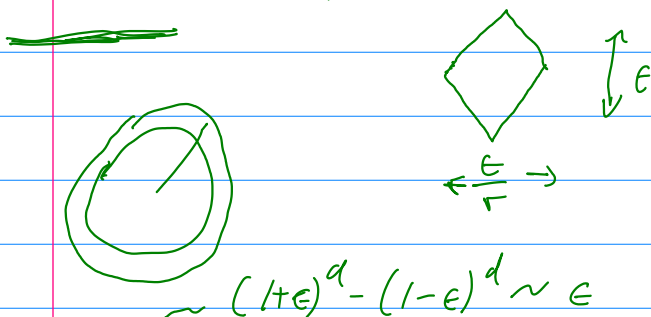
rotiert in die Tafel Ebene \rightarrow Rotationskörper

\rightarrow Volumen dieses Rotationskörpers
 $= \text{const}(d) \cdot |S_\epsilon^{d-1} \cap (S_\epsilon^{d-1} + \xi)|$
 wobei $\xi = (r, 0)$

Wir rechnen heute nur für den Fall $|\xi| \leq 1$ (analog für $|\xi| \rightarrow 2$)



vertikale Schnitt $\sim \epsilon$, da Annuli die Dicke ϵ haben.
 horizontaler Schnitt soll Länge $\sim \frac{\epsilon}{r}$ haben



$y = (y_1, y_2) \in S_\epsilon^1 \cap S_\epsilon^2 + (r, 0)$

$\Rightarrow 1 - 2\epsilon \leq y_1^2 + y_2^2 \leq 1 + 2\epsilon$ (i)
 $1 - 2\epsilon \leq (y_1 - r)^2 + y_2^2 \leq 1 + 2\epsilon$ (ii)

$\sim (1+\epsilon)^d - (1-\epsilon)^d \sim \epsilon$

Setze (i) in (ii) ein: $-2\gamma_1 r + \underbrace{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + r^2}_{\geq 1-2\epsilon} \leq 1+2\epsilon$ (ii)

$$\Rightarrow |2\gamma_1 - r| \leq 4\epsilon / r$$

$$\Rightarrow \text{horizontale Schnitt} \lesssim \epsilon / r$$

$$\Rightarrow |S_\epsilon' \cap S_{\epsilon'}' + (r, 0)| \lesssim \epsilon \cdot \frac{\epsilon}{r} = \frac{\epsilon^2}{|r|}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{\epsilon^2} (\sigma_\epsilon * \sigma_{\epsilon'}) (\xi)}_{\epsilon \rightarrow 0} \lesssim \frac{1}{|r|}$$

$$\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} (d\sigma_{\xi_{\text{sd}-1}} * d\sigma_{\xi_{\text{sd}-1}}) (\xi) \quad \square$$

Hausaufgabe 5.1 zeigt, dass die $|r|^{-1}$ -Singularität von $d\sigma_{\xi_{\text{sd}-1}} * d\sigma_{\xi_{\text{sd}-1}}$ notwendig ist, d.h. Prop 2.1 kann nicht angewandt werden, um die Restriktionsvermutung zu zeigen.

2.2 Beweis der 2-dim. Restriktionsvermutung mit bilinearen Abschätzungen

Gesehen: in Thm 1.1 (Hörmanders Beweis) und Prop 2.1

Falls gerade Lebesgue-Exponenten im Spiel, können wir
bspw. $\|F\|_{L^4}^2 = 4 \|F \cdot F\|_{L^2} = \|\hat{F} * \hat{F}\|_{L^2}$ ausnutzen.

\Rightarrow Plötzlich wird die Rolle von Oszillationen / Auslöschungen (z.B. im Fourierraum) durch Größenabschätzungen sowie geometrische Eigenschaften (z.B. Transversalität) ersetzt

$$\|(g d\sigma)^{\wedge q}\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \lesssim \|g\|_{L^p(S^1, d\sigma)} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} q &> 4 \\ q &\geq 3p' \end{aligned}$$

Ug Interpolation genügt es $q = 3p'$ zu betrachten.
 Parankiewicz

Dazu zeigen wir $L^{p'} \rightarrow L^q$ -Schranke falls $q = 3p'$
 $q > 4$

$$\|(\mathbb{1}_R d\sigma)^{\wedge}\|_{L^q} \lesssim \|\mathbb{1}_R\|_{L^{p'}} \sim |R|^{1/p'} \quad \forall R \in S^1$$

Dazu $\|(\mathbb{1}_R d\sigma)^{\wedge}\|_{L^q}^2 = \|(\mathbb{1}_R d\sigma)^{\wedge} \cdot (\mathbb{1}_R d\sigma)^{\wedge}\|_{L^{q/2}} \lesssim |R|^{2/p}$

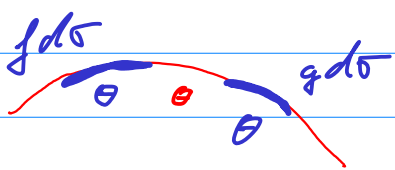
$$\forall q/2 > 2$$

Dazu interpolieren wir zwischen den Fällen $q/2 = 2$
 und $q/2 = \infty$

zur $q = \infty$: $\|(\underbrace{f d\sigma}_{\int f(\xi) e^{i2\pi x \cdot \xi} d\sigma(\xi)})^{\wedge} (g d\sigma)^{\wedge}\|_{\infty} \leq \|f\|_{L^1(S)} \|g\|_{L^1(S)}$

- zur $q = 4$: 4 Schritte:
- 1) Plancherel $\rightarrow f d\sigma \leftrightarrow g d\sigma$
 - 2) Dyadische Zerlegung von S^1
 - 3) Wechselwirkungen (viele) der dyadischen Stückchen abschätzen
 - 4) Alles recombiniieren.

Wir starten mit Schritt 3: angenommen dazu, dass $f d\sigma$ und $g d\sigma$ auf zwei Bogenstücken getragen sind, die Länge $\theta \ll 1$ haben und θ -separiert sind



$$|\text{supp } f d\sigma| = |\text{supp } g d\sigma| \sim \theta$$

$$|\xi - \eta| \sim \theta \quad \forall \xi \in \text{supp } f d\sigma, \eta \in \text{supp } g d\sigma$$

Lemma 3.1 Angenommen f und g sind auf θ -separierter Bogenstücken der Länge θ getragen

$$\Rightarrow \underbrace{\|f d\sigma + g d\sigma\|_2^2}_{=} \leq \theta^{-1} \|f\|_2^2 \|g\|_2^2$$

$$= \|f d\sigma\|_2 \|g d\sigma\|_2$$

Beweis Dazu Interpolation zw. $L^1 \rightarrow L^1$ - und $L^\infty \rightarrow L^\infty$ -Schranken

$$L^1 \rightarrow L^1: \|f d\sigma + g d\sigma\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} \quad (\text{Young})$$

$$L^\infty \rightarrow L^\infty: \sup_{\xi} (f d\sigma + g d\sigma)(\xi) = \sup_{\xi} \int_S d\sigma(y_1) \int_S d\sigma(y_2) \delta(\xi - y_1 - y_2) f(y_1) g(y_2)$$

$$= \sup_{\xi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} \int_{S'_\epsilon} d y_1 \int_{S'_\epsilon} d y_2 \delta(\xi - y_1 - y_2) f(y_1) g(y_2)$$

$$\underbrace{\int_{S'_\epsilon} f}_{\leq \|f\|_\infty} \underbrace{\int_{S'_\epsilon} g}_{\leq \|g\|_\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} \underbrace{\sup_{\xi} |\{S'_\epsilon \cap \text{supp } f\} \cap S'_\epsilon \cap \text{supp } g|}_{\leq \frac{\epsilon^2}{\theta}} \quad (\text{HA 5.2})$$

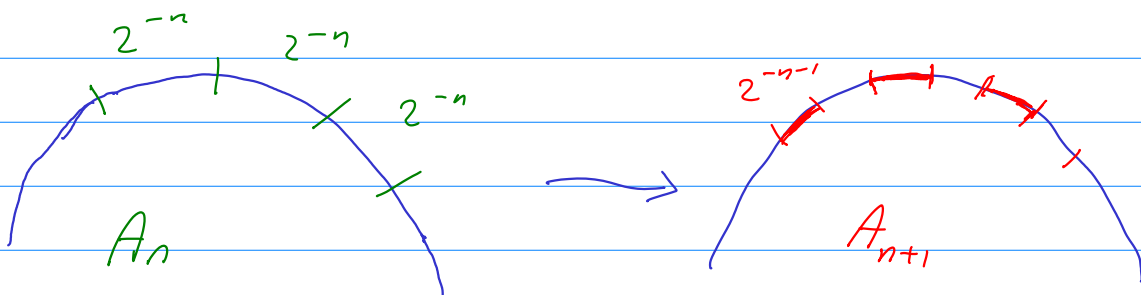
$$\leq \frac{1}{\theta} \|f\|_\infty \|g\|_\infty$$

$$L^1 \rightarrow L^1 \text{-Schranke mit Norm } 1$$

$$L^\infty \rightarrow L^\infty \text{ - " - " - " } \theta^{-1}$$

$$\Rightarrow L^2 \rightarrow L^2 \text{ - " - " - " } \theta^{-1/2} \quad \square$$

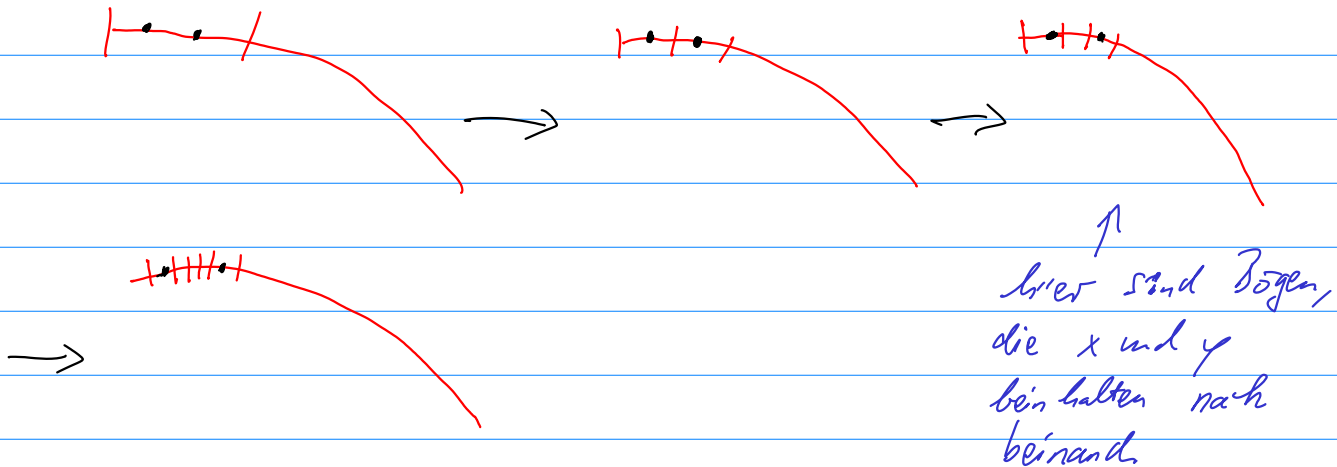
zu Schritt 2: dyadische Zerlegung von S' in 2^n gleich große Stückchen mit $n \in \mathbb{N}$.



Def Wir sagen, dass zwei Bogenstücke I und J aus der

Familie A_n der Bogenstücke der Länge 2^{-n} nahe beinander sind, falls I und J nicht benachbart sind, aber deren Eltern benachbart sind. Wir schreiben $I \sim J$

Beobachtung Für alle $x, y \in S$ gibt es genau ein Paar von Bogenstücken I und J , die x und y beinhalten und nahe beinander sind.



Definition + Beobachtung $\Rightarrow (\mathbb{1}_n d\sigma)^{\wedge} (\mathbb{1}_n d\sigma)^{\wedge}$

$$\|F\|_{L^4}^2 = \|F \cdot F\|^2$$

$$= \sum_{I \sim J} (\mathbb{1}_n d\sigma_I)^{\wedge} (\mathbb{1}_n d\sigma_J)^{\wedge}$$

$$= \sum_{n \geq 1} \sum_{\substack{I, J \in A_n \\ I \sim J}} (\mathbb{1}_n d\sigma_I)^{\wedge} (\mathbb{1}_n d\sigma_J)^{\wedge}$$

Beobachtung: Für festes $I \in A_n$ gibt es nur $O(1)$ viele nahe J (diese Zahl hängt nicht von n ab)

Jetzt zu den Abschätzungen ($q > 4$)

$$\|(\mathbb{1}_n d\sigma)^{\wedge} (\mathbb{1}_n d\sigma)^{\wedge}\|_{q/2} \leq \sum_{n \geq 1} \left\| \sum_{\substack{I, J \in A_n \\ I \sim J}} (\mathbb{1}_n d\sigma_I)^{\wedge} (\mathbb{1}_n d\sigma_J)^{\wedge} \right\|_{q/2}$$

Um $L^{q/2}$ -Norm zu kontrollieren interpolieren wir zwischen

$L^1 \rightarrow L^\infty$ und $L^2 \rightarrow L^2$ -Schranken.

Δ -Ugl., Riemann-Lebesgue

$$\left\| \sum_{\substack{I \sim J \\ I, J \in \mathcal{A}_n}} (\mathbb{1}_I d\sigma_I)^\wedge (\mathbb{1}_J d\sigma_J)^\wedge \right\|_{L^\infty} \leq \sum_{\substack{I \sim J \\ I, J \in \mathcal{A}_n}} \|\mathbb{1}_I d\sigma_I\|_{L^1} \|\mathbb{1}_J d\sigma_J\|_{L^1}$$

$$= \sum_{\substack{I \sim J \\ I, J \in \mathcal{A}_n}} |\mathbb{1}_I| \cdot |\mathbb{1}_J|$$

$\leq \min\{2^{-n}, |\mathbb{1}_J|\}$

Jedes I hat nur $O(1)$ J , die $I \sim J$ erfüllen

$$\leq 2^{-n} \sum_{I \in \mathcal{A}_n} |\mathbb{1}_I|$$

$$= 2^{-n} |\Omega|$$

Alternativ können wir die Summationsbedingung $I \sim J$ weglassen

$$\Rightarrow \left\| \sum_{\substack{I \sim J \\ I, J \in \mathcal{A}_n}} (\mathbb{1}_I d\sigma_I)^\wedge (\mathbb{1}_J d\sigma_J)^\wedge \right\|_{L^\infty} \leq \min\{2^{-n} |\Omega|, |\Omega|\}$$

Zur $L^2 \rightarrow L^2$ -Abschätzung

\hookrightarrow

$$\left\| \sum_{I \sim J} (\mathbb{1}_I d\sigma_I)^\wedge (\mathbb{1}_J d\sigma_J)^\wedge \right\|_2^2$$

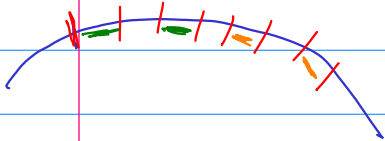
$$\stackrel{\text{Plancherel}}{=} \left\| \sum_{I \sim J} (\mathbb{1}_I d\sigma_I) + (\mathbb{1}_J d\sigma_J) \right\|_2^2 \equiv (*)$$

Beobachtung die Minkowski-Summen $I+J$ sind beinahe disjunkt, wenn wir $I \sim J$ laufen lassen

nach besser: wenn wir nur jedes "zehnte" $I+J$ anschauen haben wir echte Disjunktheit

$$\int |\sum f_j|^2 \leq \sum \int |f_j|^2$$

Nicht Δ -Ugl., sondern beinahe Disjunktheit



Abstrakter: Falls $(f_j)_{j=1}^n \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mit $\text{supp } \hat{f}_j \subset \Omega_j$, wobei die Ω_j nur endlichen Überlapp mit einander haben

$$\Rightarrow \left\| \sum f_j \right\|_2 \leq \left\| \left(\sum |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_2$$

$$\|\Sigma f_j\|_2^2 = \int |\Sigma f_j|^2 \leq \|\sqrt{|\Sigma f_j|^2}\|_2^2$$

$$\|\Sigma_{I \in A_n} \mathbb{1}_I d\sigma_I * \mathbb{1}_I d\sigma_I\|_2^2 = \Sigma \int |\mathbb{1}_I|^2$$

Beinahe
orthogonalität

$$(*) \ll \Sigma_{\substack{I, J \in A_n \\ I \neq J}} \|\mathbb{1}_I d\sigma_I * \mathbb{1}_J d\sigma_J\|_2^2$$

$$\|\mathbb{1}_I d\sigma_I * \mathbb{1}_J d\sigma_J\|_2^2$$

$$\leq \frac{1}{6} \|\mathbb{1}_I\|_2^2 \|\mathbb{1}_J\|_2^2$$

Lemma 3.1

$$\ll \Sigma_{\substack{I, J \in A_n \\ I \neq J}} 2^n \|\mathbb{1}_I d\sigma_I\|_2^2 \|\mathbb{1}_J d\sigma_J\|_2^2$$

$$= \Sigma_{I \neq J} 2^n |I \cap J| |I| |J|$$

$$\ll 2^n |I| \min\{|I|, 2^{-n}\}$$

21.7.21

$$\Rightarrow \|\Sigma_{\substack{I, J \in A_n \\ I \neq J}} (\mathbb{1}_I d\sigma_I)^\wedge (\mathbb{1}_J d\sigma_J)^\wedge\|_2^2 \ll 2^n |I| \min\{|I|, 2^{-n}\}$$

letztes mal $\|\Sigma_{\substack{I, J \in A_n \\ I \neq J}} (\mathbb{1}_I d\sigma_I)^\wedge (\mathbb{1}_J d\sigma_J)^\wedge\|_{L^\infty} \ll |I| \min\{|I|, 2^{-n}\}$

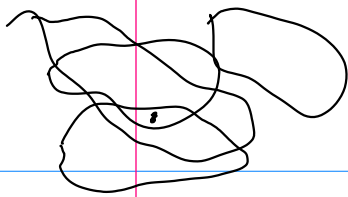
Interpolation zwischen diesen beiden Schranken liefert

$$\Sigma_{I \neq J} \|\Sigma_{\substack{I, J \in A_n \\ I \neq J}} (\mathbb{1}_I d\sigma_I)^\wedge (\mathbb{1}_J d\sigma_J)^\wedge\|_{q/2} \lesssim 2^{2n/q} (|I| \min\{|I|, 2^{-n}\})^{1-2/q} \\ \sim |I|^{1-2/q} = |I|^{2/p} \quad \square$$

Beinahe Orthogonalität

Definition (Endlicher Überlapp) Seien $(r_j)_{j=1}^n$ eine Folge von Mengen in \mathbb{R}^d .

Wir sagen: "Ein Punkt $\xi \in \mathbb{R}^d$ lebt in höchstens $A_\xi \in \mathbb{N}$ der r_j ", wenn immer die Zahl der r_j , die ξ enthält durch $A = A(\xi)$



gegeben ist, d.h. $A_{\xi} := \sup \{ \# \text{ der } \Omega_j \text{ die } \xi \text{ enthalten} \}$

Die Ω_j haben "endlichen Überlapp" A , falls $\sup_{\xi} A_{\xi} = A < \infty$.

Behauptung (Beinahe Orthogonalität / L^2 - und L^4 Littlewood-Paley-Ungleichungen)

Seien $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mit $\text{supp } \hat{f}_j \subseteq \Omega_j \subseteq \mathbb{R}^d$.

a) (Beinahe Orthogonalität): Angenommen, die $(\Omega_j)_{j=1}^n$ haben endlichen Überlapp $A_2 < \infty$.

$$\Rightarrow \left\| \sum_j f_j \right\|_2^2 \leq A_2 \left\| \left(\sum |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_2^2$$

$$= A_2 \int \sum |f_j|^2 = A_2 \sum \int |f_j|^2$$

Falls Ω_j
paarweise
disjunkt
↓
Gleichheit!

b) (Beinahe Bi-Orthogonalität) Angenommen die Minkowski-Summen $\Omega_i + \Omega_j = \{ \xi + \xi' : \xi \in \Omega_i, \xi' \in \Omega_j \}$ (daran gibt es n^2 viele)

haben endlichen Überlapp

$$\Rightarrow \left\| \sum f_j \right\|_{L^4}^4 \leq A_4 \left\| \left(\sum |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^4}^4$$

Beweis a) $\left\| \sum f_j \right\|_2 = \left\| \sum \hat{f}_j \right\|_2 = \left(\int \left| \sum \hat{f}_j \right|^2 \right)^{1/2}$

$$\hookrightarrow \left(\sum_j |f_j(\xi)| \mathbb{1}(\xi \in \text{Überlapp der } \Omega_j) \right)^2$$

$$\leq \sum_j |f_j|^2 \sum \mathbb{1}(\xi \in \text{Überlapp})$$

$$= A_2 \sum |f_j|^2$$

$$\Rightarrow \left\| \sum f_j \right\|_2 \leq \sqrt{A_2} \left(\int \sum |f_j|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{A_2} \left\| \left(\sum |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|$$

Plancherel
→ Hut kann
vergessen werden

$$16) \quad \left\| \sum_j f_j \right\|_{L^4}^2 = \left\| \sum_{j \in I} f_j f_e \right\|_{L^2} = \text{LHS} \stackrel{?}{=} \text{RHS}$$

$$\text{RHS} = \left\| \sqrt{\sum_{j \in I} |f_j|^2} \right\|_{L^4}^2 = \left\| \left(\sum_{j \in I} |f_j f_e|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^2}^2$$

→ wie vorher, nur mit $\sum_j f_j \mapsto \sum_{j \in I} f_j f_e$ bzw.

$$\sum_j |f_j|^2 \mapsto \sum_{j \in I} |f_j f_e|^2$$

ersetzt. Da $f_j f_e$ im Fourierraum auf Minkowski-Summe $\Omega_j + \Omega_e$ lebt die $\Omega_j + \Omega_e$ nur endliche Überlapp haben, folgt Behauptung wie oben.

⇨

Exkurs
HA 5.1

$\int_{S^{d-1}}$ mit Leray $d\sigma = \delta(|z|^2 - 1) = \frac{1}{2} d\Sigma(z)$
 \uparrow
 Lebesgue-Maß auf S^{d-1}

$$(\sigma \otimes \sigma)(z) = \int d\sigma(y_1) \int d\sigma(y_2) \delta(z - y_1 - y_2) \\
 = \int d\sigma(y_1) \int d\sigma(y_2) \delta(z - y_1 - y_2) \delta(|y_2|^2 - 1)$$

Verschiebung

$$[\delta(v(x)) f(x)]$$

=

$$f(v) = \alpha f_f$$

$$= \int_{S^{d-1}} d\sigma(y_1) \delta(|z - y_1|^2 - 1) \\
 \underbrace{|z|^2 + |y_1|^2 - 2z \cdot y_1 - 1}_{= |z|^2 - 2z \cdot y_1} = |z|^2 - 2z \cdot y_1 \\
 = |z| \left(|z| - 2y_1 \cdot \frac{z}{|z|} \right)$$

$$\delta(|z|^2 - 1) = \int d\sigma(y_1) \delta\left(\left(2y_1 \cdot \frac{z}{|z|} - |z|\right) |z|\right)$$

1-dim Delta

also homogen von

Grad -1

$$\text{Supp}(\sigma \otimes \sigma) \subseteq 2S^{d-1}$$

$$= \frac{1}{|z|} \int_{S^{d-1}} d\sigma(y_1) \delta\left(2y_1 \cdot \frac{z}{|z|} - |z|\right)$$

$$\stackrel{?}{=} \frac{|S^{d-2}|}{2|z|} \left(1 - \frac{|z|^2}{4}\right)_+^{(d-3)/2}$$

$$\int_{S^{d-1}} d\sigma(y) \delta\left(2y \cdot \frac{z}{|z|} - |z|\right) \quad \begin{array}{l} \text{rotiere } y \mapsto \mathbb{R}y \\ \text{so dass } \frac{z}{|z|} = e_d = (0, \dots, 0, 1) \end{array}$$

$$= \int_{S^{d-1}} d\sigma(y) \delta(2 \cos \theta_{d-1} - |z|)$$

$$= |S^{d-2}| \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \delta(2 \cos \theta - |z|) (\sin \theta)^{d-2}$$

$$= |S^{d-2}| \int_{-1}^1 du \delta(2u - |z|) (1-u^2)^{\frac{d-2}{2} - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{|S^{d-2}|}{2} \int_{-2}^2 du \delta(u - |z|) \cdot \left(1 - \frac{u^2}{4}\right)^{(d-3)/2}$$

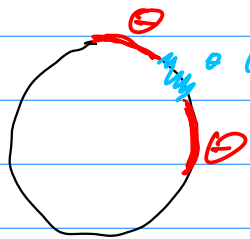
$$\begin{pmatrix} \sin \theta_{d-1} \cos \theta_{d-2} \\ \sin \theta_{d-1} \sin \theta_{d-2} \\ \cos \theta_{d-1} \end{pmatrix} \uparrow \text{Winkelparameter}$$

$$= \frac{18^{d-2}}{2} \left(1 - \frac{131^2}{4}\right)^{(d-3)/2}$$

$$\Rightarrow \sigma * \sigma = \frac{1}{131} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} d\sigma(y) \delta\left(2y \cdot \frac{x}{131} - 131\right)$$

$$= \frac{18^{d-2}}{2 \cdot 131} \left(1 - \frac{131^2}{4}\right)^{(d-3)/2} \quad \Rightarrow$$

Teil d. Beweises v. Lemma 3.1 $0 < \theta < 1$



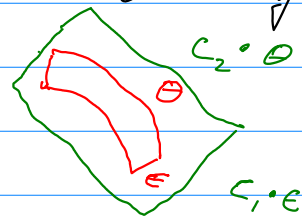
$$I_1 = \{(\cos \varphi, \sin \varphi) : \varphi \in [\theta, \theta + \theta]\}$$

$$I_2 = \{(\cos(2\theta + \varphi), \sin(2\theta + \varphi)) : \varphi \in [\theta, \theta + \theta]\}$$

$$\|d\sigma_{I_1} * d\sigma_{I_2}\|_{\infty} \lesssim \theta^{-1} ?$$

$$\epsilon^{-1} \mathbb{1}_{I_1^\epsilon}(\xi)$$

I_1^ϵ ist ϵ -Verdichtung von I_1



C_1, C_2
unabh. von
 $\epsilon, \theta!$

in weichgemachter Form

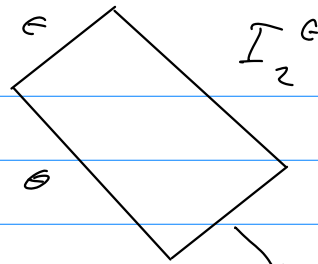
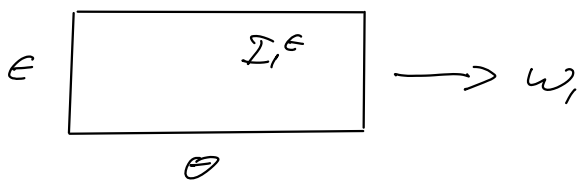
$$\epsilon^{-2} \|\mathbb{1}_{I_1^\epsilon} * \mathbb{1}_{I_2^\epsilon}\| \stackrel{?}{\lesssim} \theta^{-1} \quad \forall \epsilon > 0$$

Falls wahr, dann $\epsilon \rightarrow 0$, v. verwende $d\sigma_I = w\text{-lim}_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbb{1}_{I_1^\epsilon}}{\epsilon}$

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{I_1^\epsilon} * \mathbb{1}_{I_2^\epsilon}(\xi) = \sup_{\xi} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{I_1^\epsilon}(\xi - y) \mathbb{1}_{I_2^\epsilon}(y) dy$$

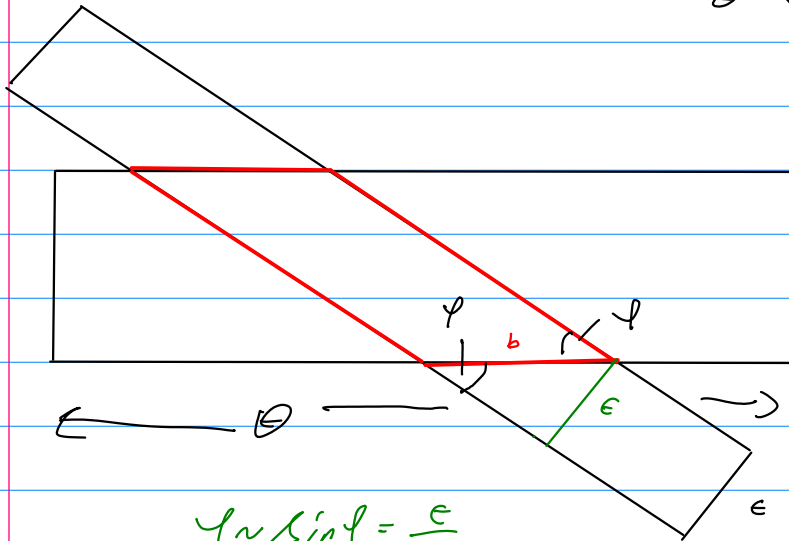
$$= \sup_{\xi} \underbrace{\text{Leb}((I_1^\epsilon + \xi) \cap I_2^\epsilon)}_{\sim \epsilon^2 / \theta ?}$$

ja!



$$\omega_2 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\varphi \in [2\theta, 3\theta]$$



$$\varphi \sim \sin \varphi = \frac{\epsilon}{b}$$

$$\Leftrightarrow b \sim \epsilon / \varphi \sim \epsilon / \theta$$

$$\Rightarrow \text{Parallelogramm Fläche} = b \cdot h \sim \frac{\epsilon}{\theta} \cdot \epsilon = \frac{\epsilon^2}{\theta}$$



Dank der Familie 😊

$$\theta \ll 1$$

$$\varphi \in [2\theta, 3\theta]$$