

3 Fourierrestriktion: Tomas-Stein & Anwendungen

3.1 Einführung, Formulierung d. Vermutung

Angenommen $f \in L^2(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ wg Plancherel

\Rightarrow das bedeutet, \hat{f} gehört zu einer Äquivalenzklasse von Fkt.en, die auf Lebesgue-Multimengen, wie Hyperflächen voneinander abweichen können

\Rightarrow Restriktion von \hat{f} auf Hyperflächen sinnlos

Andererseits: falls $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \hat{f} \in C_\infty$, also insb ist \hat{f} sogar ptweise definiert.

Wg Unschärfeprinzip sollten Fouriertransformationen hinreichend schnell abfallender Fkten sinnvoll restringiert werden können

(\hat{f} wird glatter, je schneller f im ∞ abfällt)

Quantifizierung: z.B. \circ in L^p

(v. Abfall)

\circ ptweise

\circ gewichtete $L^p \rightarrow$ Spurlemma, $p=2$

Spurlemma Angenommen S ist eine glatte Hyperfläche, die durch eine Funktion $F: \underbrace{\Omega}_{\mathbb{R}^{d-1}} \rightarrow \mathbb{R}$ parametrisiert wird, also $F \in C^\infty(\Omega)$, \circ Aka

$$\left(x_3 = \pm \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \right)$$

Verschärfung von Agmon-Hörmander (\rightarrow Hörmander II, Kap 14)

Beh 3.1 Sei $\alpha > \frac{1}{2}$ und \tilde{F}, \tilde{r} wie oben.

$$\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{d-1})$$

$$\|\tilde{u}\|_{L^2(\tilde{r})}^2 = \int_{\tilde{r}} |\tilde{u}(\xi', \tilde{F}(\xi'))|^2 d\xi' \lesssim_{d,\alpha} \frac{1}{2\alpha-1} \int_{\mathbb{R}^d} (1+x_d^2)^\alpha |u(x)|^2 dx$$

$$\left(\leq \frac{1}{2\alpha-1} \underbrace{\|u\|_{L^\infty}^2}_{\int |\tilde{u}|^2 (1+x_d^2)^\alpha} \right)$$

Bew $\tilde{u}(\xi', x_d) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-2\pi i x' \cdot \xi'} u(x', x_d) dx'$

$$\langle x_d \rangle^2 = 1 + x_d^2$$

$$|\tilde{u}(\xi)|^2 = \left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x \cdot \xi} u(x', x_d) \right|^2 = \left| \int_{\mathbb{R}} dx_d \tilde{u}(\xi', x_d) e^{-2\pi i x_d \xi_d} \frac{\langle x_d \rangle^{\alpha/2}}{\langle x_d \rangle^{\alpha/2}} \right|^2$$

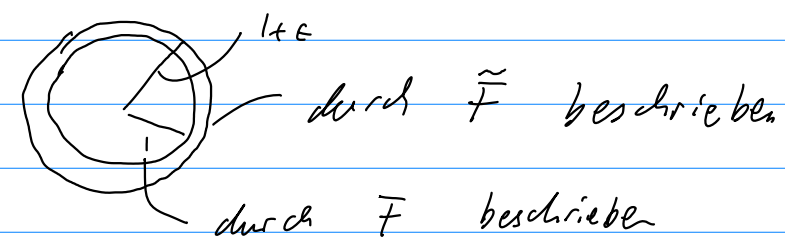
$$\lesssim \frac{1}{2\alpha-1} \int dx_d |\tilde{u}(\xi', x_d)|^2 \langle x_d \rangle^\alpha \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d,$$

also insb. für $\xi = (\xi', \tilde{F}(\xi'))$

$$\int_{\tilde{r}} |\tilde{u}(\xi', \tilde{F}(\xi'))|^2 d\xi' \lesssim \frac{1}{2\alpha-1} \int dx_d \langle x_d \rangle^\alpha \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\tilde{u}(\xi', x_d)|^2$$

$$\stackrel{\text{Plancherel}}{=} \frac{1}{2\alpha-1} \int dx_d \langle x_d \rangle^\alpha \int dx' |u(x', x_d)|^2$$

□



Beh 3.2 (Hölder-Stetigkeit d. Spurlemmas)

Sei $\alpha > \frac{1}{2}$, $\theta = \begin{cases} \alpha - \frac{1}{2} & \text{falls } \alpha < 3/2 \\ 1 - \epsilon & \forall \epsilon \in (0,1), \text{ falls } \alpha = 3/2 \\ 1 & \text{falls } \alpha > 3/2 \end{cases}$

$$\int_{\Omega} | \hat{u}(\xi', \bar{F}(\xi')) - \hat{u}(\xi', \tilde{F}(\xi')) |^2 d\xi'$$

$$\leq \sup_{\xi' \in \Omega} | \bar{F}(\xi') - \tilde{F}(\xi') |^{2\theta} \int_{\mathbb{R}^d} \langle x_d \rangle^{2\alpha} |u(x', x_d)|^2 dx$$

Bew Analog wie in Beh 3.1 sei

$$\hat{u}(\xi', x_d) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-2\pi i x' \cdot \xi'} u(x', x_d) dx'$$

Schritt $\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x_d \xi_d} \hat{u}(\xi', x_d) dx_d$

$\xi_d = \bar{F}(\xi')$

$\tilde{\xi}_d = \tilde{F}(\xi')$

zum Schluss

$$\Rightarrow \hat{u}(\xi', \xi_d) - \hat{u}(\xi', \tilde{\xi}_d) = \int_{\mathbb{R}} (e^{-2\pi i x_d \xi_d} - e^{-2\pi i x_d \tilde{\xi}_d}) \hat{u}(\xi', x_d) dx_d$$

$$\Rightarrow | \hat{u}(\xi', \xi_d) - \hat{u}(\xi', \tilde{\xi}_d) |^2 \leq \int_{\mathbb{R}} | \hat{u}(\xi', x_d) |^2 \langle x_d \rangle^{2\alpha} dx_d$$

wie in Beh 3.1
verwischen
(Plancherel)

$$\cdot \int_{\mathbb{R}} \sin^2 \left(\frac{(\xi_d - \tilde{\xi}_d) x_d}{2} \right) \langle x_d \rangle^{-2\alpha} dx_d$$

$$\leq \min \{ 1, |x_d| |\xi_d - \tilde{\xi}_d| \}^{2\alpha} \leq k \| \cdot \|$$

Falls $|\xi_d - \tilde{\xi}_d| > 1 \rightarrow \sin^2 \leq 1$ reicht; o.B.d.A also $|\xi_d - \tilde{\xi}_d| < 1$

$$\int_{k_d | \xi_d - \tilde{\xi}_d |^{-1}} dx_d |\xi_d - \tilde{\xi}_d|^2 \cdot |x_d| \langle x_d \rangle^{-2\alpha} \sim \begin{cases} |\xi_d - \tilde{\xi}_d|^{2\alpha-1} & \alpha < \frac{3}{2} \text{ (mit } \langle x \rangle \geq k) \\ |\xi_d - \tilde{\xi}_d|^{2-\epsilon} & \alpha = 3/2 \text{ (mit } \langle x \rangle^3 \geq |x|^{3-\epsilon}) \\ |\xi_d - \tilde{\xi}_d|^2 & \alpha > \frac{3}{2} \text{ (vergiss obere Integrationsgrenze)} \end{cases}$$

$$\int_{k_d | \xi_d - \tilde{\xi}_d |^{-1}} dx_d |x_d|^{-2\alpha} \sim |\xi_d - \tilde{\xi}_d|^{2\alpha-1}, \alpha > \frac{1}{2}$$

□

20.5.21

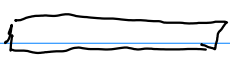
Jetzt: Fourierrestriktion für L^p -Funktionen?

Behauptung 3.3 Sei $S = \{ \xi = (\xi', \xi_d) \in \mathbb{R}^d : \xi_d = 0, |\xi'| < 1 \}$
 $d\xi_S = d\xi'$

und $1 \leq p, q \leq \infty$ und angenommen, es gälte

$$\| \hat{f} \|_{L^q(S, d\xi_S)} \lesssim \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \quad \forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ (oder beliebiger}$$

anderer Raum, der dicht in $L^p(\mathbb{R}^d)$. $\Rightarrow p=1$

Beweis HA. (Skalieren ) Sei $\hat{f}_\lambda(\xi) = \lambda \hat{f}(\xi', \lambda \xi_d)$
mit $\lambda \gg 1 \Rightarrow \| \hat{f}_\lambda \|_{L^q(S)} \sim \lambda$; $f_\lambda(x) = f(x', x_d/\lambda) \Rightarrow \| f_\lambda \|_{L^p} \sim \lambda^{1/p}$
 \Rightarrow für $\lambda \rightarrow \infty$ kann $\| \hat{f}_\lambda \|_{L^q(S)} \lesssim \| f_\lambda \|_{L^p}$ nur für $p=1$ wahr sein \square

Welche Abschätzungen sind erwartbar, falls S gekrümmt?

$$\| \hat{f} \|_{L^q(S)} \lesssim \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

S ... glatte, kompakte Kodimension-Eins Untermannigfaltigkeit in \mathbb{R}^d mit Flächenmaß $d\sigma$ und nirgends verschwindender Gaußkrümmung

Definition $F_S : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^\infty(S)$ Restriktionsoperator
 $f \mapsto \hat{f}|_S$

$$F_S^* : C^\infty(S) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$$

$$g \mapsto \int d\sigma_S(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} g(\xi)$$

Erweiterungsoperator.

Formal sind F_S und F_S^* zueinander adjungiert; seien $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,
 $g \in C^\infty(S)$

$$\begin{aligned} \langle g, F_S f \rangle_{L^2(S)} &= \int_S d\sigma(\xi) \overline{g(\xi)} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} dx f(x) \int_S d\sigma(\xi) \overline{g(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} dx \overline{(g d\sigma)^\vee(x)} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} dx \overline{F_S^* g(x)} f(x) \\ &= \langle F_S^* g, f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Beh 3.4 Angenommen μ sei ein Radonmaß auf \mathbb{R}^d , $1 \leq p, q \leq \infty$

Dann sind äquivalent: (1) $\|\hat{f}\|_{L^q(\mathbb{R}^d, d\mu)} \leq A \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d, dx)}$, $f \in C_c^\infty$

(2) $\|(g d\mu)^\wedge\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d, dx)} \leq A \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^d, d\mu)}$, $g \in C_c^\infty$

Falls zusätzlich $q=2$, dann sind (1), (2) auch äquivalent zu

(3) $\|\hat{\mu} * \psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq A^2 \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$, $\psi \in C_c^\infty$

Beweis Per Dualität: $\|\hat{f}\|_{L^q(\mathbb{R}^d, d\mu)} = \int |\hat{f}(z)|^q d\mu(z)$

$$T: L^p(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^d, d\mu)$$

$$f \mapsto \hat{f}$$

$$T^*: L^{q'}(\mathbb{R}^d, d\mu) \rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^d)$$

$$g \mapsto (g d\mu)^\vee$$

$$(1) \Leftrightarrow (2) \quad \underbrace{|(g, T f)|}_{L^{q'}(\mathbb{R}^d, d\mu)} \leq \|T\|_{p, q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^d, d\mu)}$$

$$= |(T^* g, f)| \leq \|T^*\|_{q' \rightarrow p'} \|g\|_{L^{q'}} \|f\|_{L^p}$$

Für Äquivalenz mit (3) \rightarrow HA ($q=2$)

$$T: L^p \rightarrow L^2 \quad T^*: L^2 \rightarrow L^{p'}$$

$$T^* T: L^p \rightarrow L^{p'}$$

$$T^* T f = T \underbrace{\hat{f}}_{\in L^2(\mathbb{R}^d, d\mu)} = (\hat{f} d\mu)^\vee = f * \widehat{d\mu}$$

□

Notwendige Bedingungen zu Restriktionsabschätzungen in L^p

Vermutung Thm 3.5 Sei S eine glatte, kompakte Hyperfläche mit nirgends verschwindender Gaußkrümmung.

(Dund(2)) Angenommen, es gälte $\|\hat{f}\|_{L^q(S)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ (*)
 sind auch für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

hinreichende Bedingungen für (*)
 Dann gelte notwendigerweise

$$(1) \quad p < \frac{2d}{d+1}$$

Bedingungen für (*)

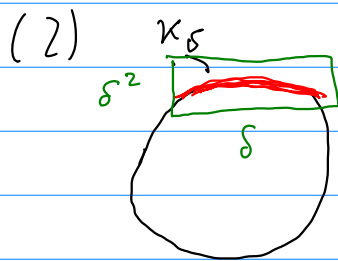
($d=2$ ✓
 $d \geq 3$ offen!)

$$(2) \quad \frac{d+1}{p'} \leq \frac{d-1}{q} \quad (\text{Knapp})$$

Beweis Wir arbeiten mit der dualen Variablen (Erweiterungsabschätzungen). Also angenommen $\|(g d\sigma)^\vee\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|g\|_{L^q(S)}$

(1) $g \equiv 1, (d\sigma)^\vee(x) \sim (1+|x|)^{-(d-1)/2}$ (wg Krümmung)

\Rightarrow notwendig $p' \cdot \frac{d-1}{2} > d \Leftrightarrow p < \frac{2d}{d+1}$
 $p' > \frac{2d}{d-1}$



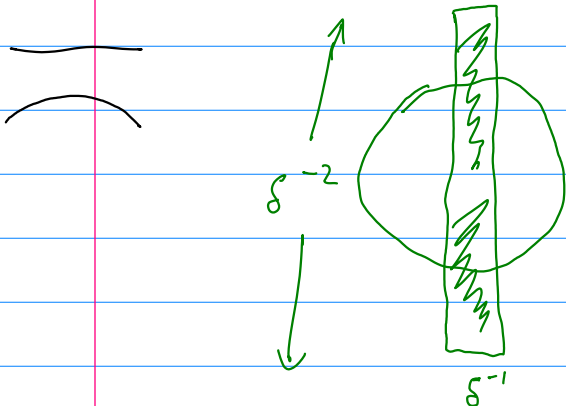
Radius d. Polkappe sei $0 < \delta \ll 1$

$g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ (im Fourierreum)

$(g|_{K_\delta} d\sigma)^\vee$

Unschärfeprinzip: $(g|_{K_\delta} d\sigma)^\vee$ sollte auf der dualen Tube

$T_{C/\delta} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x_n| < \frac{C}{\delta^2}; |x'|| < \frac{C}{\delta}\}$



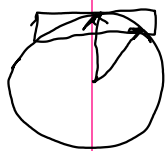
$\|g\|_{L^q(S)} = \sigma(K_\delta)^{1/q'} = \delta^{\frac{d-1}{q'}}$

$|(g d\sigma)^\wedge(x)| \sim \delta^{d-1} \quad f. x \in T_{C/\delta}$

$\|(g d\sigma)^\wedge\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \gtrsim \int \delta^{d-1} \cdot \delta^{-\frac{d+1}{p'}}$

$\Rightarrow \delta^{-\frac{d+1}{p'} + d-1} \lesssim \delta^{\frac{d-1}{q'}} = \delta^{(d-1)(1-\frac{1}{q})}$

$d-1 - \frac{d+1}{p'} \geq d-1 - \frac{d-1}{q} \Leftrightarrow \frac{d-1}{q} \geq \frac{d+1}{p'}$



$K_\delta = \{ \xi \in \mathbb{S}^{d-1} : 1 - \xi \cdot e_d \leq \delta^2 \}$ impliziert den Radius $\sim \delta$

$$|\xi - e_d|^2 = 2 - 2 \cdot \xi \cdot e_d \leq 2\delta^2$$

$\Rightarrow |\xi - e_d| \leq \delta$ falls $\xi \in K_\delta$

Andererseits impliziert $|\xi - e_d| < c\delta$, dass $\xi \in K_\delta$, falls c hinreichend klein gewählt

Knapp-Beispiel: $g(\xi) = \chi\left(\frac{\xi - e_d}{\delta}\right)$

$c \ll 1$ bump auf Kugel

$$\|g\|_{L^q(\mathbb{S})} \sim (\text{Vol}(K_\delta))^{1/q} \sim \delta^{(d-1)/q}$$

$$(g d\sigma)^\vee(x) = \int_{\mathbb{S}} e^{2\pi i x \cdot \xi} g(\xi) d\sigma_{\mathbb{S}}(\xi)$$

Wir brauchen nur eine untere Schranke an $\|(g d\sigma)^\vee\|_p$

also schätzen wir nur $\|(g d\sigma)^\vee\|_{L^p(\mathbb{T}^d/\mathbb{S})}$ ab.

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{T}^d/\mathbb{S} & \quad \left| (g d\sigma)^\vee(x) \right| = \left| \int d\sigma(\xi) e^{2\pi i (\xi - e_d) \cdot x} \chi\left(\frac{\xi - e_d}{\delta}\right) \right| \\ & \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right. \\ & \quad \left\{ x \in \mathbb{R}^d : |x_d| < \frac{c^2}{\delta^2} \right. \\ & \quad \left. |x| < \frac{c}{\delta} \right\} & \quad \geq \int_{K_\delta} d\sigma(\xi) \cos((\xi - e_d) \cdot x) \stackrel{(*)}{\geq} \int_{K_\delta} d\sigma(\xi) \\ & & \quad = \delta^{d-1} \end{aligned}$$

(*) ist wahr, falls $|(\xi - e_d) \cdot x| < \frac{\pi}{6}$

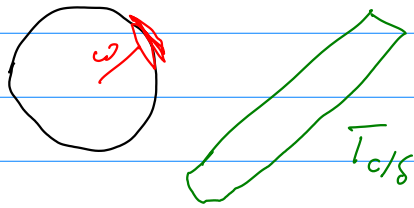
$$|\xi - e_d| \leq c \cdot \delta$$

\Rightarrow betrachte nur $x \in \mathbb{R}^d$ mit $|x| < c\delta^{-1}$, c hinreichend klein

$$\| (g \delta_S)^Y \|_{L^{p'}(T_{c/S})} \geq \delta^{d-1} |T_{c/S}|^{1/p'} = \delta^{d-1 - \frac{d-1+2}{p'}} = \delta^{d-1 - \frac{d+1}{p'}}$$

(Vgl. linke & rechte Seite f. $\delta \rightarrow 0$) □

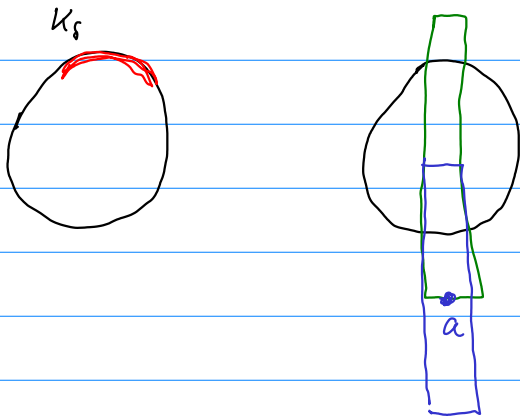
Bemerkung • κ_S hätte auch entlang anderer Richtungen statt es orientiert sein können



• g hätte auch moduliert werden können, z.B.

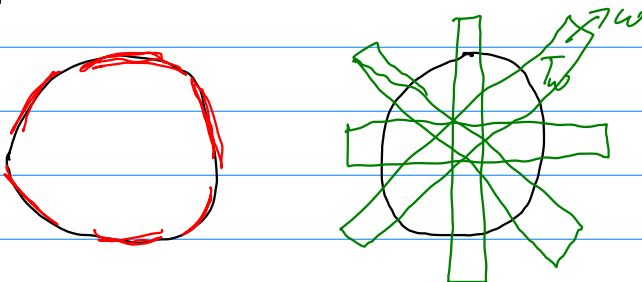
$$g(\xi) e^{2\pi i a \cdot \xi}$$

$a \in \mathbb{R}^d$ (z.B. läuft a durch Zentren von dualen Tuben, die \mathbb{R}^d pflastern)
 \rightarrow s.h. Unschärfeprinzip-VL



• Überlagerung mehrerer, nur endlich überschneidender Knapp-Beispiele mit Koeffizienten, die Rademacher-verteilt sind

Rademacher
 |
 symm. Bernoulli



Durch Randomisierung d. Koeffizienten lässt sich die Kompression, also z.B.

$\|\sum A_{T_w}\|_p$ sehr klein in $\frac{1}{\delta}$

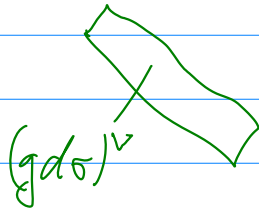
\Rightarrow Konsequenzen für Hausdorffdimension
von Besicovitchmengen

$$\left| \bigcup_w \tilde{T}_w \right| \leq \frac{1}{K} \sum |T|, \quad K = \frac{\log 1/\delta}{\log \log 1/\delta}$$

\tilde{T}_w ... um $2\delta^{-2}$ verschobene Tuben in Richtung der längeren
Seite

(später genauer)

- die translatierte und rotierte $(g d \sigma)^{\vee}$
heißen zu S gehörende
wave packets



3.2 Tomas-Stein

Erste teilweise positive Antwort auf die Restriktionsvermutung

\rightarrow Spezialfall $q=2$ in Thm 3.5

Thm 4.6 (Tomas-Stein) $F_S: L^p(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(S)$ beschränkt

für alle $p \in \left[1, \frac{2(d+1)}{d+3}\right]$ (optimal für $q=2$)

(S kompakt, glatt, Kodim-1, gekrümmt)

Beweis f. $p \in \left[1, \frac{2(d+1)}{d+3}\right)$

Beweis f. $p \in \left[1, \frac{4d}{3d+1}\right]$

$$F_S : L^p \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d); \quad F_S^* : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^d)$$

$$F_S^* F_S : L^p \rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^d)$$

$$F_S^* F_S f(x) = ((d\sigma)^{\vee} * f)(x)$$

mit Young: $\| (d\sigma)^{\vee} * f \|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$

$$1 + \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{r}, \text{ wobei } (d\sigma)^{\wedge} \in L^r$$

$$= \frac{2}{p'} \quad (\Rightarrow)$$

$$p' = 2r > \frac{4d}{d-1}$$

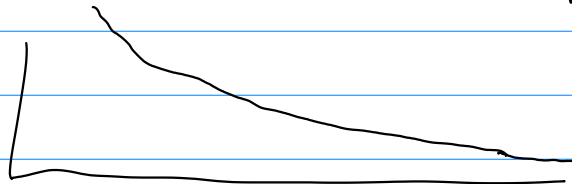
$$p < \frac{4d}{3d+1}$$

$$\frac{d-1}{2} \cdot r > d \quad (\Rightarrow) \quad r > \frac{2d}{d-1}$$

(Stein 1968)

Tomas-Beweis

→ dyadische Zerlegung, um langsamen Abfall besser auszunutzen

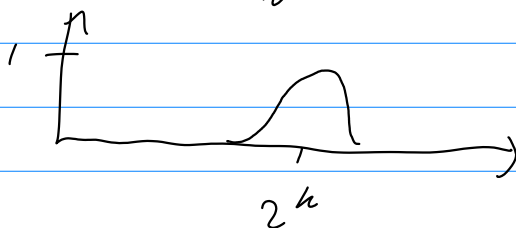


1-Kugel

$$\| (d\sigma)^{\vee} * f \|_{p'} = \left\| \sum_{h \geq 0} (\psi_h (d\sigma)^{\vee}) * f \right\|_{p'}, \text{ wobei } \psi_0 = \psi \in C_c^{\infty}$$

$$= \left\| \sum_{h \geq 0} T_h * f(x) \right\|_{p'}$$

$$\psi_h = \psi\left(\frac{x}{2^h}\right) \in C_c^{\infty}$$



Δ -Kugl. und $\| T_h * f \|_{p'}$ einzeln kontrollieren

$$T_h : L^2 \rightarrow L^2$$

$$T_h: L^1 \rightarrow L^\infty$$

$$\| \Psi_h(d\sigma)^h * f \|_{L^\infty} \leq \| f \|_{L^1} \| \overbrace{(d\sigma)^h \Psi_h}^{L^{\infty} \sim 2^{-(d-1)h}} \|_{L^\infty}$$

$$\approx \| f \|_{L^1} 2^{-h(d-1)/2}$$

$$\| \Psi_h(d\sigma)^h * f \|_2 = \| (\widehat{\Psi}_h * d\sigma) \widehat{f} \|_2$$

$$\leq \| f \|_2 \| \widehat{\Psi}_h * d\sigma \|_2$$

$$(*) \int_S d\sigma(y) 2^{hd} (1 + 2^{+h} |\xi - y|)^{-N} \sim 2^{hd} \cdot 2^{-h(d-1)}$$

$$= 2^h$$

$$\| T_h \|_{1, \infty} \leq 2^{-h(d-1)/2} \quad \| T_h \|_{2,2} \leq 2^h$$

$$\rightarrow \text{interpolation} \quad \| T_h \|_{p,p'} \leq 2^{-h \frac{d-1}{2} \theta + h(1-\theta)}$$

$$\theta > \frac{2}{d+1} \rightarrow \text{geom Reihe konv}$$

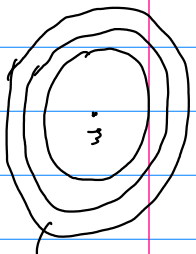
$$\Downarrow$$

$$p < \frac{2(d+1)}{d+3}$$

(*):

$$2^{hd} \int d\sigma(y) (1 + 2^h |\xi - y|)^{-N} \left(\frac{1}{B_\xi(2^{-h})} (y) + \sum_{j>0} \frac{1}{B_\xi(2^{j+1-h}) \setminus B_\xi(2^{j-h})} (y) \right)$$

$1 - |\xi - y| > 2^{j+1-h}$



$$\leq 2^{hd} \left[\sigma(B_\xi(2^{-h})) + \sum_{j>0} \sigma(B_\xi(2^{j+1-h})) - \sigma(B_\xi(2^{j-h})) 2^{-N(k+j-h)} \right]$$

$$B_\xi(2^{j+1-h}) \setminus B_\xi(2^{j-h}) \leq 2^{hd} \left[2^{-h(d-1)} + 2^{-h(d-1)} \sum_{j>0} 2^{j(d-1) - Nj} \right] \leq 2^h$$

$\infty \quad (N > d-1)$

$$\sigma(B(r)) \sim r^{d-1}$$

Thm 3.7 (TS ist Hölderstetig für S^{d-1})

Seien $S_t = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1+t\}$, $1+t < \frac{1}{2}$, $S_0 = S^{d-1}$.

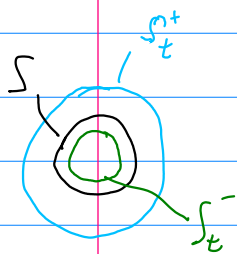
Seien $1 \leq p < \frac{2(d+1)}{d+3}$ und $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p'}$, d.h. $q \in [1, \frac{d+1}{2})$.

Falls $\alpha \in (0, \min\{\frac{d+1}{2} - q, q\})$, dann gilt

$$\sup_{t < 1/2} \|F_{S_t}^* F_{S_t} - F_{S_0}^* F_{S_0}\|_{p,p'} \lesssim_{\alpha,q} |t|^{\alpha/q}$$

Für den Beweis beweisen wir folgende abstraktere Behauptung (in Anlehnung an Bah-Seeger)

Lemma Seien $\tau \in (0, 1)$, $0 < \beta \leq \frac{d-1}{2}$, $p_0 = \frac{2(1+\beta)}{2+\beta} \in (1, 2)$ und $1 \leq p_0 < p$. Sei ferner $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p'}$ und



$$\widehat{dw}^\pm := \widehat{dw}_{S_t^\pm} - \widehat{dw}_S.$$

Angenommen, es gäbe $\alpha \in (0, \min\{\beta+1-q, q\})$ so, dass

$$|\widehat{dw}^\pm(x)| \lesssim_\tau t^\alpha (1+|x|)^{\alpha-\beta}, \quad t \in (0, \tau),$$

dann gilt $\sup_{t \in (0, \tau)} \|F_{S_t}^* F_{S_t} - F_S^* F_S\|_{L^{p_0} \rightarrow L^{p'}} \lesssim_{\alpha, q, \tau} t^{\alpha/q}$

Beweis vom Lemma Betrachte lediglich S_t^+ und schreibe $dw \equiv dw^+$, sodass $\widehat{dw} = \widehat{dw}_{S_t} - \widehat{dw}_S$. Wie in Tomas Beweis zerlegen wir die Differenz $F_{S_t}^* F_{S_t} - F_S^* F_S$ dyadisch

ψ_h bump auf $|x| \sim 2^h$

$$(\widehat{F}_{S_t}^* F_{S_t} - F_S^* F_S) f = \sum_{k \geq 0} (\widehat{d\omega} \cdot \psi_k) * f = \sum_{k \geq 0} T_k f$$

$$\|T_k\|_{1,\infty} \leq t^\alpha 2^{-k(\beta-\alpha)} \text{ wg } |\widehat{d\omega}(k)| \lesssim t^\alpha (t|x|)^{\alpha-\beta}$$

$$\text{und } \|T_k f\|_2 \leq \underbrace{\|\widehat{d\omega}_{S_t} \cdot \psi_k * f\|_2}_{\leq \|f\|_2 \| \psi_k * d\omega_{S_t} \|_\infty} + \|(d\omega_S \cdot \psi_k) * f\|_2$$

$\leq \|f\|_2 \| \psi_k * d\omega_{S_t} \|_\infty \leq 2^k \|f\|_2$ wie im Tomas-Beweis (s. h. m. Seite 12)

$$\Rightarrow \text{Interpolation zeigt } \|T_k\|_{p,p'} \leq 2^{k(1-\theta) - \theta k(\beta-\alpha)} t^{\alpha\theta}$$

$$\text{wobei } 1-\theta = 2/p', \text{ d.h. } \theta = \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p'}, \text{ d.h.}$$

$$\|T_k\|_{p,p'} \lesssim t^{\alpha/q} 2^{k(1 - \frac{\beta+1-\alpha}{q})}$$

Exponent < 0 , falls $\alpha < \beta + 1 - q$ □

Beweis v. Lem 3.7 Mit dem Lemma genügt es zu zeigen, dass

$$|\widehat{d\omega}_{pS} - \widehat{d\omega}_S| \lesssim |p-1|^\alpha (t|x|)^{\alpha - \frac{d-1}{2}} \text{ gilt,}$$

wobei $S = S^{d-1}$, $pS = \{z \in \mathbb{R}^d : |z|=p\}$ und $p > 0$.

$$\widehat{d\omega}_{pS}(x) = \int_{pS} e^{2\pi i x \cdot \xi} d\omega_{pS}(\xi) = p^{d-1} \widehat{d\omega}_S(px)$$

Da sowohl $|\widehat{d\omega}_S(x)| \leq \langle x \rangle^{-(d-1)/2}$ als auch $|\widehat{d\omega}_S(x)| \lesssim \langle x \rangle^{-(d-1)/2}$

mit stationärer Phase gelten, folgt mit $|p-1| \ll 1$,

$$\begin{aligned} |\widehat{d\omega}_{pS} - \widehat{d\omega}_S| &\lesssim \min_{\text{m.w.S. } (p=1+\varepsilon)} \left\{ \langle x \rangle^{-(d-1)/2}, |p-1| \langle x \rangle^{1 - \frac{d-1}{2}} \right\} \\ &\lesssim |p-1|^\alpha \langle x \rangle^{\alpha - (d-1)/2} \quad \forall 0 \leq \alpha \leq 1 \quad \square \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |p-1| \ll 1 \\ \Rightarrow p^{d-1} \sim 1 \\ (\end{aligned}$$

Heute: Endpunktkversion von Tomas-Stein

2.6.21

mittels Stein-Interpolation

Thm 3.8 (Stein-Interpolation)

Stein-Weiss, Stein 1993,
Stein-Shakarchi (IV, V)

Sei T_z ein ^{linearer} Operator, der auf Funktionen im \mathbb{R}^d wirkt und holomorph von $z \in S = \{z \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Re}(z) < b\}$ abhängt, im Sinne, dass die quad. Form

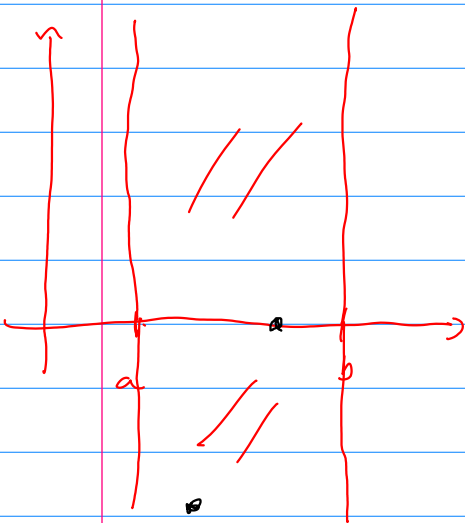
$\langle f, T_z g \rangle$ für $f, g \in \mathcal{D}(T)$ holomorph in $z \in S$ ist und stetig auf ∂S (dem Rand) ist.

Angenommen weiter

$$|\langle f, T_z g \rangle| = O_{f,g}(\exp(O_{f,g}(\exp(r-\delta)|z|))) \text{ für jedes } \delta > 0$$

und $z \in S$

$$\text{und } \|T_{z_j} f\|_{L^{q_j}} \leq A_j \|f\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^d)} \quad j=0,1.$$



$$z_0 = a + iy \quad y \in \mathbb{R}$$

$$z_1 = b + iy$$

$$\Rightarrow \|T_z f\|_{L^{q_\theta}(\mathbb{R}^d)} \leq A_0^{1-\theta} A_1^\theta \|f\|_{L^{p_\theta}}$$

$$\forall \operatorname{Re}(z) \in (a, b) \text{ mit } \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

$\theta \in [0, 1]$.

$$\operatorname{Re}(z) = (1-\theta)a + \theta b$$

Um TS zu zeigen bitten wir den Faltungsoperator $\hat{f} \ast$

in eine holomorphe Familie von Operatoren ein und wende Stein-Interpolation ($L^1 + L^\infty + L^2 \rightarrow L^2 \Rightarrow L^p \rightarrow L^p$) an

$$\hat{d}\mu_* : L^1 \rightarrow L^p$$

Reduziere zunächst auf den Fall, wo S ein kleiner ^{kompakter} Teil der Hyperfläche ist und beschreibe S durch den Graphen $\xi_d = \varphi(\xi')$ mit $\varphi(0) = 0$ und $\nabla_{\xi'} \varphi(\xi' = 0) = 0$

$$\begin{aligned} F_S^* \bar{F}_S f &= \int \underbrace{d\mu(x-y)}_{\psi_0(\xi)} f(y) dy & d\mu(\xi) &= \sqrt{1 + |\varphi'|^2} d\xi' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d\xi' \underbrace{\sqrt{1 + |\varphi(\xi')|^2} \psi(\xi', \varphi(\xi'))}_{\psi_0(\xi)} \exp(2\pi i(x' \cdot \xi' + x_d + \varphi(\xi'))) f(\xi', \varphi(\xi')) \end{aligned}$$

$$K_S(\xi) := \gamma_s (\xi_d - \varphi(\xi'))_+^{s-1} \psi_0(\xi)$$

$$\begin{aligned} \int (K(x-y)) f(y) & \quad \gamma_s = \underbrace{s(s+1)\dots(s+N)}_{\text{gleich...}} \underbrace{e^{-s^2}}_{\text{wird polynomiellen Wachstum von } s^N \text{ abfedern}}, \quad N \gg \frac{d-1}{2} \text{ fest.} \\ \frac{1}{\|T\|_f} \|f\|_\infty & \leq \|K\|_\infty \|f\| \end{aligned}$$

Prop. 3.3 Die FT von K_S ist glm bdd für $\operatorname{Re}(s) \in [-\frac{d-1}{2}, 1]$,

dh $\exists M > 0$ sd $\sup_x |K_S(x)| \leq M \quad \forall \operatorname{Re}(s) \in [-\frac{d-1}{2}, 1]$.

Beweis beruht auf folgender $d=1$ -FT:

$$I_s(p) = s(s+1)\dots(s+N) \int_0^\infty u^{s-1} F(u) e^{-2\pi i p \cdot u} du$$

mit $F \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $p \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{C}$.



Lemma 3.10 Die Fkt $I_s(p)$, die zunächst für $\operatorname{Re}(s) > 0$ definiert ist, kann analytisch auf $\operatorname{Re} s > -N-1$ fortgesetzt werden. weiter gelten

$$(1) I_s(p) \leq a_s (1+|p|)^{-\operatorname{Re}(s)} \quad \text{falls} \quad -N-1 < \operatorname{Re}(s) \leq 1$$

$$(2) I_0(p) = F(0) \cdot N!$$

Hierbei wächst a_s höchstens polynomiell in s und hängt nur von C^{n+1} -Normen und dem Träger von F ab.

(Bem: $p=0 \Rightarrow I_s$ stellt gerade die Distribution x_+^{s-1} dar)

Beweis Wir schreiben $s(s+1)\dots(s+N)u^{s-1} = \left(\frac{d}{du}\right)^{N+1} u^{s+N}$ und

integrieren partiell, d.h.

$$I_s(p) = (-1)^{N+1} \int_0^\infty u^{s+N} \left(\frac{d}{du}\right)^{N+1} (F(u) e^{-2\pi i p u}) du$$

\Rightarrow falls $\operatorname{re}(s) > -N-1$ ist analytische Fortsetzbarkeit gesichert (da $F \in C_c^\infty$)

\Rightarrow insb folgt (1) falls $|p| \leq 1$ (dann $|I_s(p)| \leq 1$)

Um (1) (also den Abfall) für $|p| > 1$ zu zeigen unterscheiden wir zwischen $|p| \geq 1$

$$p \in C_c^\infty(\mathbb{R}_0^+)$$

$$(1) u < \frac{1}{|p|} : \left| \int_0^\infty u^{s+N} \left(\frac{d}{du}\right)^{N+1} \left(\gamma(|p|u) F(u) e^{-2\pi i p u} \right) du \right|$$

$$\begin{aligned} \text{re}(s) > -N-1 & \leq \int_0^{\frac{1}{|p|}} (1+|p|)^{N+1} \int_0^{\frac{1}{|p|}} u^{\text{Re}(s)+N} du \\ & \sim |p|^{N+1-\text{Re}(s)-N-1} = |p|^{-s} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$(2) u > \frac{1}{|p|} \int_0^\infty u^{s+N} \left(\frac{d}{du}\right)^{N+1} \left((1-\gamma(|p|u)) F(u) e^{-2\pi i p u} \right)$$

$$= s(s+1)\dots(s+N) \int_0^\infty u^{s-1} (1-\gamma(pu)) F(u) \frac{1}{(-2\pi i p)^N} \left(\frac{d}{du}\right)^N e^{-2\pi i p u}$$

modulo $s(s+1)\dots$ und $(2\pi i)^N$ ist Integral gleich

$$p^{-N} \int_0^\infty e^{-2\pi i p u} \left(\frac{d}{du}\right)^N \left(\underbrace{(1-\gamma(pu))}_{\substack{\text{auf } \mathbb{R}^+ \setminus B_0(1/p) \\ \text{getragen}}} \underbrace{F(u)}_{\substack{\text{auf } B_0(A) \\ \text{getragen}}} u^{s-1} \right) \mathbb{1}_{\frac{1}{p} < u < A}$$

$$A = \text{supp } \text{supp}(F)$$

$$\leq \int_{\frac{1}{|p|}}^A u^{\text{Re}(s)-1-N} du \leq p^{-N-\text{Re}(s)+N}$$

$$\text{re}(s) < N$$

→ Kombination gibt (1)

(mit $\int_{\frac{1}{|p|}}^A du \gamma'(|p|u) g(u) = 0$, da $\text{supp } \gamma(pu) \subseteq B_0(1)$
 ⇒ keine pos. Potenzen von p durch Ableitungen auf γ)

$$\bar{I}_s(p) = (s+1)(s+2)\dots(s+N) \int_0^\infty \left(\frac{d}{du} u^s\right) F(u) e^{-2\pi i p u}$$

$$= -(s+1)\dots(s+N) \int_0^\infty u^s \frac{d}{du} (F(u) e^{-2\pi i p u})$$

$$\rightarrow s=0 \quad \bar{I}_0(p) = -N! \int_0^\infty du \frac{d}{du} (F(u) e^{-2\pi i p u})$$

$$= N! F(0)$$

□

Bew von Prop 3.9 $K_s(\xi) = \gamma_s (\xi_d - \varphi(\xi'))_+^{s-1} \psi_0(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d$

$$\widehat{K}_s(x) = \gamma_s \int d\xi \psi_0(\xi) (\xi_d - \varphi(\xi'))_+^{s-1} e^{-2\pi i(x' \cdot \xi' + x_d \xi_d)}$$

$$= \gamma_s \int_0^\infty du u^{s-1} e^{-2\pi i x_d u} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d\xi' \psi_0(\xi', \varphi(\xi') + u) e^{-2\pi i(x' \cdot \xi' + x_d \varphi(\xi'))}$$

$u = \xi_d - \varphi(\xi')$

$$= e^{s^2} I_s(x_d)$$

$$I_s(\rho) = s(s+1) \dots (s+N) \int_0^\infty du u^{s-1} F(u) e^{-2\pi i \rho u}$$

$$\text{mit } F(u) = \int d\xi' e^{-2\pi i(x' \cdot \xi' + x_d \varphi(\xi'))} \psi_0(\xi', u + \varphi(\xi'))$$

wir wissen (stationäre Phase) $|D^k F(x)| \leq (4|x|)^{-(d-1)/2}$

(Ableitungen nach x bringen nur Potenzen in $\xi \Rightarrow$ irrelevant wg kompaktem Träger)

\rightarrow mit Lemma 3.10 ist damit $(\operatorname{Re} s \geq -N > -N-1)$

$$|\widehat{K}_s(x)| \leq e^{s^2} \underbrace{\alpha_s}_{\substack{\text{polynomiell beschränkt} \\ \text{in } \operatorname{Im}(s)}} (1+|x|)^{-\operatorname{Re}(s)} (1+|x|)^{-(d-1)/2}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\approx 1}$

$$\Rightarrow |\widehat{K}_s(x)| \leq (1+|x|)^{-(d-1)/2 - \operatorname{Re}(s)} \quad -\frac{d-1}{2} \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$$

$$\leq \text{const} \quad (-\operatorname{Re}(s) \leq (d+1)/2)$$

Beweis von $F_s^* F_s : L^p \rightarrow L^p \quad \forall p \in [1, \frac{2(d+1)}{d+3}]$

$$F_s^* F_s f = \frac{1}{N!} \underbrace{\widehat{K}_0}_{\underbrace{\quad}_{N! d_\mu}} * f$$

$$K_S(z) = \gamma_S (z_d - \varphi(z'))_+^{s-1} \psi_0(z) \quad \text{mit } \gamma_S = s(s+1) \dots (s+n) e^{s^2}$$

$$\widehat{K}_S(x) = e^{s^2} I_S(x_d)$$

$$(\text{Lemma 3.10 } \widehat{K}_0(x) = e^{s^2} I_0(x_d) = N! \cdot (d\mu)^{\wedge})$$

→ analyt. Familie von Integralkernen $\widehat{K}_S(x)$; checke Bedingungen

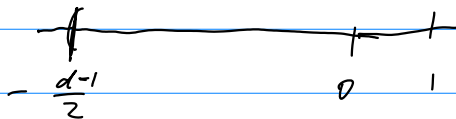
von Stein-Interpolation: doppelexp. Wachstum in S ✓

$$L^1 \rightarrow L^\infty + L^2 \rightarrow L^2 \text{ - Schranken?}$$

$$\operatorname{Re}(s) = 1 \Rightarrow |K_1(z)| \leq 1 \Rightarrow L^2 \rightarrow L^2 \text{ - bdd Operator.}$$

$$\operatorname{Re}(s) = -\frac{d-1}{2} : |\widehat{K}_S(x)| \leq 1 \Rightarrow \|\widehat{K}_S * f\|_\infty \leq \|\widehat{K}_S\|_0 \|f\|_1,$$

⇒ Stein anwendbar $L^p \rightarrow L^{p'}$ - Schranken für K_0



$$0 = (1-\theta) \cdot \frac{-(d-1)}{2} + \theta$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{d-1}{d+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p_0} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2} \quad (\Rightarrow) \quad p_0 = \frac{2(d+1)}{d+3}$$

Stein-Shakarchi IV, Kap 8

Muscalu-Schlag I

$$F_S^* F_S : L^p \rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^d) (\Rightarrow)$$

$$W_1 F_S^* F_S W_2 : L^2 \rightarrow L^2$$

(mit Hölder)

(wenn $W_1, W_2 \in L^q$)

$$1 \leq p \leq 2$$

3.6.21

$$T: L^p \rightarrow L^p \quad \langle f, Tg \rangle_{L^2} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_p \|T\|_{p \rightarrow p}$$

$$W, \tilde{g} \in L^p? \quad \|W, \tilde{g}\|_p \leq \|W, \|_q \|\tilde{g}\|_{L^2}$$

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{2} = \frac{1}{q} \Leftrightarrow q = \frac{2p}{2-p}$$

$$\rightarrow \|W, T W_2\|_{L^2, L^2} \leq \|T\|_{p, p'} \|W, \|_q \|W_2\|_q$$

\underline{q} $T: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ kompakt $\Leftrightarrow T$ bildet schwach-konv. Folgen auf stark konv. Folgen ab.
 $\Leftrightarrow T \in \mathcal{Y}^\infty(\mathcal{H})$
 $\Leftrightarrow T$ approximierbar durch Operatoren endlichen Ranges approximiere
 $\Leftrightarrow \dots$

wichtig: $T \in \mathcal{Y}^\infty$ hat rein diskretes Spektrum, welches sich höchstens bei Null häufen kann.

$$\bullet T \in \mathcal{Y}^\infty \Leftrightarrow T^* \in \mathcal{Y}^\infty$$

$$\bullet TS \in \mathcal{Y}^\infty, \text{ falls } T, S \text{ kompakt}$$

$$\Rightarrow TT^* \in \mathcal{Y}^\infty, \text{ nicht-negativ.}$$

$$\sigma(TT^*) = \{s_j^2\}_{j \in \mathbb{N}}, \quad s_j^2 \geq 0; |s_j| \text{ heißen Singularwerte}$$

Jeder $T \in \mathcal{Y}^\infty$ eine norm-konvergente Entwicklung

$$T = \sum_{j=1}^{\infty} |s_j| |\varphi_j\rangle \langle \psi_j|, \quad \{\varphi_j\}, \{\psi_j\} \text{ ONB}$$

$$\text{Schatten-Klasse } T \in \mathcal{Y}^p(\mathcal{H}) \Leftrightarrow \sum |s_j|^p < \infty \quad 0 < p < \infty$$

$$\gamma^p \hookrightarrow \gamma^q \quad p \leq q$$

$$\|T\|_{\gamma^p}^p = \sum |s_j|^p$$

Hilbert-Schmidt-Operatoren: $p = 2$

$$T \in \gamma^2(L^2(\mathbb{R}^d)) \Leftrightarrow \exists K \in L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$$

$$\text{mit } (Tf)(x) = \int K(x,y)f(y)dy$$
$$\text{und } \|T\|_{\gamma^2}^2 = \int |K(x,y)|^2 dx dy$$

Spurklassen-Operatoren $p = 1$

↳ haben auch eine Integralform $K \in L^2$,

(allerdings i.A. nicht wahr, dass

$$\|T\|_{\gamma^1} = \int |K(x,x)| dx ; K(x,x) \text{ i.A. nicht definiert.}$$

(Abbildungen sind möglich \rightarrow Simon-Trace Ideal)

Satz: $W_1 F_S^* F_S W_2 : L^2 \rightarrow L^2$ falls $W_1, W_2 \in L^q, q \in [1, d]$

verbessern zu $W_1 F_S^* F_S W_2 \in \gamma^{\frac{(d-1)q}{d-q}}, q \in [1, d+1]$

Behauptung 3.11 (Frank-Sabin '17)

die auf Fkten im \mathbb{R}^d wirkt

Sei T_z eine holomorphe Familie von Operatoren auf dem Streifen $S = \{z \in \mathbb{C} : -d_0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$ für ein $d_0 > 1$ im Sinne von Stern. Ang. $\exists a, b > 0$ s.d.

$$\|T_{iy}\|_{2,2} \leq M_0 e^{a|y|}, \quad \|T_{-d_0+iy}\|_{L^1 \rightarrow L^\infty} \leq M_1 e^{b|y|}$$

für alle $y \in \mathbb{R}$.

\Rightarrow für alle $W_1, W_2 \in L^{2d_0}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ gilt

$$\|W_1 T_{-1+iy} W_2\|_{\gamma^{2\lambda_0}(L^2(\mathbb{R}^d))} \leq \|W_1\|_{L^{2\lambda_0}} \|W_2\|_{L^{2\lambda_0}} M_0^{1-\frac{1}{\lambda_0}} M_1^{1/\lambda_0}$$

Beweis verwendet Verallgemeinerung von Stein-Interpolation für Schattenklassen: (Simon - Trace Ideals, Thm 2.9)

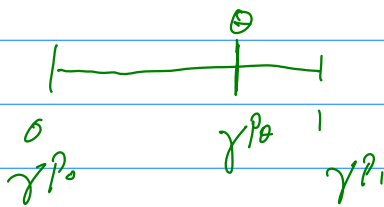
Sei S_z holomorphe Familie von Operatoren in $L^2(\mathbb{R}^d)$ auf Streifen $0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1$

$$\|S_{\sigma+iy}\|_{\gamma^{p_0}} \leq M_0 \quad \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow \|S_{\sigma+iy}\|_{\gamma^{p_0}} \leq M_0^{1-\sigma} M_1^\sigma$$

$$\|S_{1+iy}\|_{\gamma^{p_1}} \leq M_1$$

$$0 < p_0 \leq p_1 \leq \infty$$

↑
kompakte oder
beschr. Operatoren



Bew von Beh 3.11 $W_1, W_2 \geq 0$ (ansonst: $W_1 = |W_1| e^{i\varphi}$)

Bastle Familie von Operatoren $W_1^{-z} T_z W_2^{-z} \equiv S_z$

$$\operatorname{Re} z = 0: \|W_1^{iy} T_{iy} W_2^{iy}\|_{L^2, L^2} \leq M_0 e^{\alpha|y|}$$

$\operatorname{Re} z = -d_0$: T_{-d_0+iy} ist $L^1 \rightarrow L^\infty$ -bdd, d.h.

$$(T_{-d_0+iy} f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K_{-d_0+iy}(x, w) f(w) dw$$

Cycon-Froese-
Kirsch-Simon

für $K_{-d_0+iy} \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ (Dunford-Pettis)

Beh $W_1^{-iy+d_0} T_{-d_0+iy} W_2^{-iy+d_0}$ ist Hilbert-Schmidt

→ Integralieren durch $W_1^{-iy+d_0}(x) K_{-d_0+iy}(x,w) W_2^{d_0-iy}(w)$

$$\int |W_1|^{2d_0}(x) |W_2(w)|^{2d_0} |K_{-d_0+iy}(x,w)|^2 dx dw$$

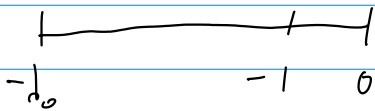
$$\leq \|W_1\|_{L^{2d_0}}^{2d_0} \|W_2\|_{L^{2d_0}}^{2d_0} \leq (M_1 e^{b|y|})^2$$

$$\Rightarrow \|S_{iy}\|_{L^2, L^2} \leq M_0 e^{a|y|} \|W_1\|_{L^\infty}^{-iy} \|W_2\|_{L^\infty}^{iy}$$

$$\|S_{-d_0+iy}\|_{\gamma^2} \leq M_1 e^{b|y|} \|W_1\|_{L^{2d_0}}^{d_0} \|W_2\|_{L^{2d_0}}^{d_0}$$

$$\Rightarrow \|S_{-1+iy}\|_{\gamma^{2d_0}} \leq M_0^{1-\frac{1}{d_0}} M_1^{1/d_0} \|W_1\|_{L^{2d_0}} \|W_2\|_{L^{2d_0}}$$

$$d_0 > 1 \quad \frac{1}{2d_0} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2} \quad (\Leftrightarrow) \quad \theta = \frac{1}{d_0} \quad \square$$



$$\theta \cdot -\frac{1}{d_0} + (1-\theta) \cdot 0 = -1 \quad (\Leftrightarrow) \quad \theta = \frac{1}{d_0} \quad \checkmark$$

Thm 3.12 Sei $q \in [1, \frac{d+1}{2}]$, $W_1, W_2 \in L^{2q}(\mathbb{R}^d)$.

Sei S eine glatte, kompakte Hyperfläche mit nirgends verschwindender Gauß-Krümmung

$$\Rightarrow \|W_1 F_S^* F_S W_2\|_{\gamma^{\frac{d-D_S}{d-q}}(L^2(\mathbb{R}^d))} \leq \|W_1\|_{L^{2q}} \|W_2\|_{L^q}$$

Beweis Mit Prop 3.11 und dem Beweis von Tomas-Stein (Endpunktversion) folgt

$$\|W_1 F_S^* F_S W_2\|_{\gamma^{\frac{2p}{2-p}}(L^2(\mathbb{R}^d))} \leq \|W_1\|_{L^{\frac{2p}{2-p}}} \|W_2\|_{L^{\frac{2p}{2-p}}} \quad p \in [1, \frac{2(d+1)}{d+3}]$$

✓

$$\rho_0 = \frac{d+1}{2}$$

$$\rho_d = \frac{2(d+1)}{d+3}$$

$$\begin{aligned} \frac{2\rho_d}{2-\rho_d} &= \frac{4(d+1)}{(d+3)\left(2 - \frac{2(d+1)}{d+3}\right)} \\ &= \frac{4(d+1)}{2d+6-2(d+1)} = \frac{4(d+1)}{4} \\ &= d+1 \end{aligned}$$

$$\|AB\|_1 \leq \|A\|_q \|B\|_{q'}$$

$$\|V_1 \mathcal{F}_S^* \mathcal{F}_S V_2\|_{\gamma'(L^2(\mathbb{R}^d))} \leq \|V_1 \mathcal{F}_S^*\|_{\gamma^2(L^2(S) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d))}$$

$$\|V_2 \mathcal{F}_S^*\|_{\gamma^2(L^2(S) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d))}$$

$$(V_1 \mathcal{F}_S^* g)(x) = V_1(x) \int d\sigma_S(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} g(\xi)$$

→ Integralkern gegeben durch $V_1(x) e^{2\pi i \xi \cdot x}$, $x \in \mathbb{R}^d$, $\xi \in S$

$$\int |V_1(x)|^2 dx d\sigma_S(\xi) = \|V_1\|_2^2 \sigma(S)$$

$$\Rightarrow \|V_1 \mathcal{F}_S^* \mathcal{F}_S V_2\|_{\gamma'(L^2(\mathbb{R}^d), L^2(\mathbb{R}^d))} \leq \|V_1\|_2 \|V_2\|_2 \sigma(S)$$

$$\Rightarrow \text{Kombinieren mit } \|W_1 \mathcal{F}_S^* \mathcal{F}_S W_2\|_{\gamma^{\frac{2p}{2-p}}} \leq \|W_1\|_{L^{\frac{2p}{2-p}}} \|W_2\|_{L^{\frac{2p}{2-p}}}$$

gibt Bekämpfung mit komplexer Interpolation wie im Beweis von Beh. 3.11 \square

Weitere Erweiterungen von Tomas-Stern

— Bah-Seegeer: • $\mathcal{F}_S^* \mathcal{F}_S : L^{p_d, 2} \rightarrow L^{p_d, 2}$

• Erweiterung auf allgemeine Maße, die Dimensionsbedingungen und Fourier dimensionsbedingungen erfüllen

μ ... WS-Maß auf \mathbb{R}^d mit $\mu(B_r) \lesssim r^a$ & $B_r \in \mathbb{R}^d$

$$|\hat{f}(x)| \leq (1+|x|)^{-b}$$

$$\Rightarrow \int |\hat{f}|^2 d\mu(\xi) \leq \|f\|_{L^{p_0,2}}^2$$

$$p_0 = \frac{2(d-a+b)}{2(d-a)+b}$$

(wir hatten
 $\alpha = d-1, b = \frac{d-1}{2}$)

Hausaufgabe

Sei $\Gamma(\lambda): \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{S}^{d-1})$

$$f \mapsto \lambda^{(d-2)/4} \hat{f}(\sqrt{\lambda}\xi) \\ = \lambda^{(d-2)/4} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i \sqrt{\lambda} x \cdot \xi} f(x) dx$$

$$x \mapsto x/\sqrt{\lambda} = \lambda^{-1/2} \cdot \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} \underbrace{f(x/\sqrt{\lambda}) \cdot \lambda^{-d/4}}_{= (\mathcal{D}_\lambda f)(x)} dx$$

$$(\mathcal{D}_\lambda f)^\wedge(\xi) = \lambda^{d/4} \hat{f}(\sqrt{\lambda}\xi)$$

$$\Rightarrow \|\mathcal{D}_\lambda f\|_{L^2(\mathbb{S})} = \lambda^{d/4 - \frac{\alpha-1}{4}} \|f\|_{L^2(\mathbb{S})}$$

$$= \lambda^{-1/2} (\mathcal{D}_\lambda f)^\wedge(\xi) \Big|_{\xi \in \mathbb{S}} \\ = \lambda^{-1/2} F_\mathbb{S}(\mathcal{D}_\lambda f)(\xi)$$

mit \mathcal{D}_λ
dem unitären
Skalierungs-
operator

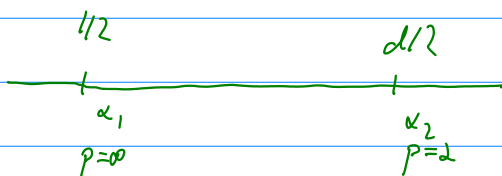
$$\Rightarrow \|\Gamma(\lambda) \underbrace{\langle x \rangle^{-\alpha_1} f}_f\|_{L^2(\mathbb{S})} = \lambda^{-1/2} \|(\mathcal{D}_\lambda \langle x \rangle^{-\alpha_1} f)^\wedge\|_{L^2(\mathbb{S})}$$

$$= \lambda^{-1/2} \cdot \lambda^{1/4} \| \langle x \rangle^{-\alpha_1} f^\wedge \|_{L^2(\mathbb{S})} \\ \leq \lambda^{-1/4} \|f\|_{L^2} \text{ (Spwterma)} \quad (\alpha_1 > 1/2)$$

Andererseits: $\|\Gamma(\lambda) \langle x \rangle^{-\alpha_2}\|_{\mathcal{Y}^2(L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{S}))}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} dx \langle x \rangle^{-2\alpha_2} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} d\sigma_\xi(\xi) |e^{i\sqrt{\lambda} x \cdot \xi}|^2 \lambda^{\frac{d-2}{2}}$

$$\sim \lambda^{(d-2)/2}, \quad \alpha_2 > d/2$$

\Rightarrow Interpolation in Schattenräumen (Simon Thom 2.9) (Yafaev Kap 0)



$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2} \Leftrightarrow \theta = 2/p$$

$$\alpha = (1-\theta)\alpha_1 + \theta\alpha_2 \Leftrightarrow \theta = \frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{2}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

$(\mathcal{Y}^p \hookrightarrow \mathcal{Y}^q)$
 $p < q$

$$\Gamma(\lambda) \langle x \rangle^{-\alpha}$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{2(\alpha_2 - \alpha_1)}{\alpha - \alpha_1} > \frac{d-1}{\alpha - 1/2}$$

$$\Rightarrow \|\Gamma(d)\langle x \rangle^{-\alpha}\|_{\mathcal{S}^p} \leq \lambda^{-\frac{1}{4}(1-\theta) + \theta \cdot \frac{d-2}{4}} = \lambda^{-\frac{1}{4}(1-\frac{2}{p}) + \frac{d-2}{4} \cdot \frac{2}{p}}$$

$$= \lambda^{-\frac{1}{4} + \frac{d-1}{2p}}$$

$$(CS) \Rightarrow \|\Gamma(d)\langle x \rangle^{-2\alpha}\Gamma(d)^*\|_{\mathcal{S}^{p/2}} \leq \lambda^{-\frac{1}{2} + \frac{d-1}{p}}$$

Ersetzen v. $p \mapsto \frac{p}{2}$ und $\rho := 2\alpha$ zeigt

Thm (Birman-Köppenho-Krein-Kuroda-Yafaev)

Sei $(\Gamma(d)f)(\xi) \equiv \lambda^{(d-2)/4} \hat{f}(\sqrt{\lambda}\xi) |_{\xi \in \mathcal{S}^{d-1}}$ mit $d > 0$ sowie $p > 1$ und $p > \frac{d+1}{p-1}$. Dann gilt

$$\|\Gamma(d)\langle x \rangle^{-1}\Gamma(d)^*\|_{\mathcal{S}^p(L^2(\mathcal{S}^d))} \leq \lambda^{-\frac{1}{2} + \frac{d-1}{2p}}$$

3.3 Zufälliges Tomas-Stein

Bisher: "deterministisches" Tomas-Stein ist optimal in L^p -Skalen (wg Knapp-Beispiel), d.h.

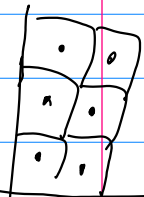
$$|W_1|, |W_2| \text{ ist } \|\underbrace{W_1^{1/2}}_A \underbrace{F_S^* F_S}_{B} W_2^{1/2}\|_{L^2, L^2} < \infty \Leftrightarrow W_1, W_2 \in L^q$$

$$\|AB\| \leq \|BA\| \quad \text{mit } q \in [1, \frac{d+1}{2}]$$

normal $\Rightarrow \|\underbrace{F_S}_A V \underbrace{F_S^*}_B\|_{L^2(\mathcal{S}^d), L^2(\mathcal{S}^d)} \leq \|V\|_{L^q}, q \in [1, \frac{d+1}{2}]$

Pourgain

$$V_w(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \omega(n) v(n) \mathbb{1}_{Q_n}(x)$$

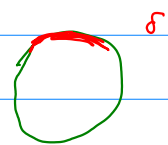


$$Q_n = [0, 1]^d + n, \quad n \in \mathbb{Z}^d$$

iid. Zufallsvariablen

(Gauss, Bernoulli)

symmetrisches



$$\text{Falls } v \in \mathcal{L}^{\frac{d+1}{2}} \Rightarrow \|F_S V_w F_S^*\| \lesssim \|v\|_{\mathcal{L}^{\frac{d+1}{2}}} \quad \forall w$$

$$v \in \mathcal{L}^{\frac{d+1}{2}-\epsilon} \Rightarrow \mathbb{E} \|F_S V_w F_S^*\| \lesssim_{\epsilon} \|v\|_{\mathcal{L}^{\frac{d+1}{2}-\epsilon}}$$

Heute: diskreter Fall (Vershynin; Kap 2, 7, 8) 12.6.21

$$(\mathcal{F}_{disc} f)(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f(n) e^{-2\pi i n \cdot \xi} \quad \xi \in \mathbb{T}^d; \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^d$$

$$(\mathcal{F}_{disc}^{-1} g)(n) = \int_{\mathbb{T}^d} g(\xi) e^{2\pi i n \cdot \xi} d\xi$$

Sei $S \subseteq \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^d$ eine Hyperfläche glatt, kompakt, gekrümmt (nirgends verschwindende Gauß-Krümmung) mit Flächenmaß $d\sigma_S$

$$(\mathcal{F}_S f)(\xi) = \sum_n e^{-2\pi i n \cdot \xi} f(n) \Big|_{\xi \in S}$$

$$(\mathcal{F}_S^* g)(n) = \int_S d\sigma_S(\xi) e^{2\pi i n \cdot \xi} g(\xi)$$

Mit Sterns Beweis (komplexe Interpolation mit Funktionen, die im \mathbb{Z}^d leben) und stationärer Phase folgt

$$|\widehat{d\sigma_S}(n)| \lesssim (1+|n|)^{-(d-1)/2} \quad \text{und dementsprechend}$$

deterministisches

Tomar-Stein in \mathbb{Z}^d Thm 3.13 Sei $\mu \ll \sigma_S$ (absolut stetig) mit $\frac{d\mu}{d\sigma_S} \in L^2(S)$

$$\Rightarrow \|(\mathcal{F}_{disc}^{-1} \mu)\|_{\ell^{\frac{2(d+1)}{d-1}}} \lesssim \left\| \frac{d\mu}{d\sigma_S} \right\|_{L^2(S)}$$

Insbesondere gilt (mit Dualität/Hölder)

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p'} \quad \|\mathcal{F}_S v\|_{L^2(S)} \|\mathcal{F}_S^* g\|_{L^2(S)} \lesssim \|v\|_{\ell^q} \quad q \in \left[1, \frac{d+1}{2}\right]$$

$p \in \left[1, \frac{2(d+1)}{d+3}\right]$

Jetzt randomisieren v : $V_w(n) = w_n |n|^{-\frac{d}{2}} v(n)$

$v(n) \in \ell^{d+1}$, w_n i.i.d. subgaussische \mathbb{Z}^d

Thm 3.14 (Zufälliges Tomas-Stein (Bourgain 2003))

In der obigen Situation gilt

$$E_0 \| \overset{\text{diskret!}}{F_S^{(n)}} V_\omega \overset{\text{kont.}}{F_S^*} \|_{L^2(S)} \leq \epsilon \|v\|_{L^{d+1}}$$

Bemerkungen

- analoges Thm für $|v(n)| \leq n^{-1/2}$ (mittels Spurlemma) (ebenfalls von Bourgain) braucht keine Krümmung
- Verallgemeinerung auf \mathbb{R}^n ist delikat und kann "nur" indirekt vorgenommen werden
- wesentliche Motivation für dieses Thm war Beweis der Anderson-Lokalisierungsvermutung in Dimensionen ≥ 2 .

Zufällige Schrödingeroperatoren in $L^2(\mathbb{Z}^d)$

$$-\Delta - V_\omega \text{ defn in } L^2(\mathbb{Z}^d)$$

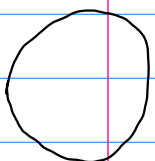
Problematisch in hohen Dimensionen für gewöhnlichen Gitterlaplace-Operator

$$(-\Delta u)(n) := \frac{1}{2d} \sum_{\|m-n\|_2=1} u(m)$$

$$= \mathcal{F}_{disc}^{-1} \left(\underbrace{\frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \cos(2\pi \xi_j)}_{\text{Fouriermultiplikator von } -\Delta} u(\xi) \right) (n)$$

Fouriermultiplikator von $-\Delta$

$$|z|^2 = d \Leftrightarrow |z| = \sqrt{d}$$



$$G(-\Delta) = \int_0^\infty dE(t) G(t) = \int_0^\infty dt G(t) \underbrace{\begin{pmatrix} F_{S_t}^* & F_{S_t} \end{pmatrix}}_{\text{Spektalmaß}}$$

$$\langle \varphi, G(-\Delta) \varphi \rangle = \int d\xi \widehat{\varphi}(\xi) G(|\xi|^2) \widehat{\varphi}(\xi)$$

Plancherel

$$= \int_0^\infty dh h^{d-1} G(h^2) \int_{S^{d-1}} d\omega_{S^{d-1}}(\omega) \widehat{\varphi}(h\omega) \widehat{\varphi}(h\omega)$$

$$\sim \langle F_{hS^{d-1}} \varphi, F_{hS^{d-1}} \varphi \rangle \quad (\text{modulo Faktor von } h)$$

$$= \langle \varphi, F_{hS}^* F_{hS} \varphi \rangle$$

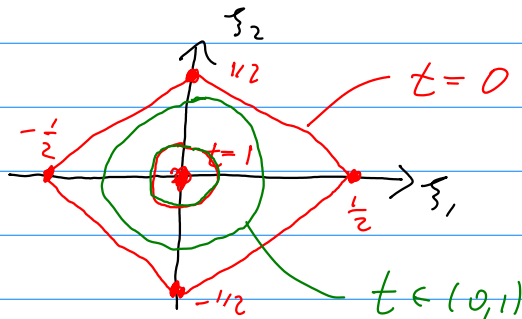
$$\approx \int dh G(h) \langle \varphi, F_{hS}^* F_{hS} \varphi \rangle$$

$$=$$

Im diskreter Situation gibt es "TS für $-\Delta$ " nur wenn $d=2$, denn

$$S_t = \left\{ \xi \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^d : \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \cos(2\pi \xi_j) = t \right\}$$

nur gekrümmt falls $d=2$



$$t=0 \quad \xi_1=0$$

$$\quad \quad \quad \xi_2 = \frac{1}{2}$$

Lemma 3.15 (Maximum von subgaussische ZV)

Sei $(X_j)_{j=1, \dots, N}$ eine Folge subgaussischer ZV.

$$\Rightarrow \mathbb{E} \max_{j=1, \dots, N} |X_j| \lesssim \sqrt{\log N} \max_j \|X_j\|_{\psi_2}$$

$$= \inf_{t>0} \{ t > 0 : \mathbb{E} \left(\exp\left(\frac{X^2}{t^2}\right) - 1 \right) \leq 1 \}$$

Bew (unter zusätzlicher Annahme $\mathbb{E} X_j = 0$)

$\forall \log X_j > 0$

$$\mathbb{E} \max_j X_j = \inf_s \frac{1}{s} \mathbb{E} \left(\ln e^{s \max_j X_j} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \exp(s \max_j X_j) \\
 & \leq \inf_s \frac{1}{s} \ln \left(\mathbb{E} \exp(s \max_j X_j) \right) \\
 & \stackrel{\text{Vershynin}}{\leq} \inf_s \frac{1}{s} \ln \sum_j \mathbb{E} \exp(s X_j) \\
 & \stackrel{\text{Def. Charakterisierung von subgausscher ZV}}{\leq} \inf_s \frac{1}{s} \ln \sum_j \exp(s^2 \|X_j\|_{\psi_2}^2) \\
 & \stackrel{\text{Def. } \mathbb{E} X = 0}{\leq} \inf_s \frac{1}{s} \ln \left(N \cdot \exp(s^2 \max \|X_j\|_{\psi_2}^2) \right) \\
 & \stackrel{\text{Def.}}{=} \inf_s \frac{1}{s} \left(\ln N + s^2 \max \|X_j\|_{\psi_2}^2 \right) \\
 & s = \sqrt{\frac{\ln N}{\max \|X_j\|_{\psi_2}^2}} \quad \text{optimiert} \\
 & = \frac{\log N}{\sqrt{\log N}} \cdot \sqrt{\max \|X_j\|_{\psi_2}^2} = \sqrt{\log N} \max \|X_j\|_{\psi_2}
 \end{aligned}$$

Lemma 3.16 (Summe subgausscher ist subgaussch)

$$\left\| \sum_j X_j \right\|_{\psi_2}^2 \leq \sum_j \|X_j\|_{\psi_2}^2$$

Bew Vershynin Kap 2

Ziel: Vektorwertige Verallgemeinerung von Lemma 3.15

Motivation: Gaußsche Breite einer Menge $T \subseteq \mathbb{R}^n$.

Vershynin Exercise 7.5.10: sei T diskret, dann

$$\begin{aligned}
 \sum g_j e_j &= \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \\
 w(T) &:= \mathbb{E} \sup_{x \in T} \left\langle x, \sum_{j=1}^n g_j e_j \right\rangle \\
 &\leq \sqrt{\log |T|} \cdot \text{diam } T
 \end{aligned}$$

↑
gaussch ZV

Situation: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ (evtl. " $n = \infty$ ")

↳ diskret mit Elementen $\{\xi^{(j)}\}_{j=1}^{|\mathcal{E}|}$

$$\xi^{(j)} = (\xi_1^{(j)}, \xi_2^{(j)}, \dots)$$

$$= \left(\xi_m^{(j)} \right)_{m=1}^n$$

Erstes Zentraler
↓ Werkzeug!

Korollar 3.17

$$\mathbb{E}_w \sup_{\xi \in E} \left| \sum_{m=1}^n w_m \xi_m \right| \stackrel{\text{Supergaußsch}}{\leq} \sqrt{\log |\mathcal{E}|} \sup_{\xi \in E} \left(\sum_{m=1}^n |w_m \xi_m|^2 \right)^{1/2}$$

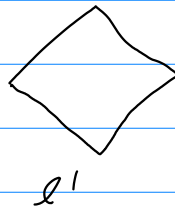
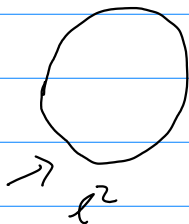
Bew Identifiziere X_0 aus Lemma 3.15 mit $\sum_{m=1}^n w_m \cdot \xi_m^{(j)}$

$$\Rightarrow \mathbb{E} \sup_{\xi \in E} \left| \sum_{m=1}^n w_m \xi_m \right| \stackrel{3.15}{\leq} \sqrt{\log |\mathcal{E}|} \sup_{\xi \in E} \left\| \sum_{m=1}^n w_m \cdot \xi_m \right\|_{\psi_2}$$

$$\stackrel{3.16}{\leq} \sqrt{\log |\mathcal{E}|} \sup_{\xi} \left(\sum_{m=1}^n \|w_m \xi_m\|_{\psi_2}^2 \right)$$

$$\leq \sqrt{\log |\mathcal{E}|} \sup_{\xi} \sqrt{\sum_{m=1}^n |w_m \xi_m|^2} \quad \Rightarrow$$

Bemerkung Bourgain bezeichnet Korollar 3.17 als Dudley-Ungleichung. Andere Bedeutung in anderer Literatur (sh. z.B. Vershynin, Kap 8)



Wie viele ϵ -Kugeln in einer (Halb-) Norm $\|\cdot\|_X$ in \mathbb{R}^n braucht es, um l^2 zu überdecken?

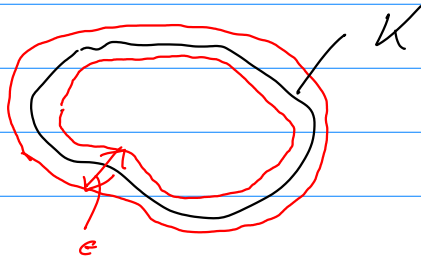
$$B_n^2 = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum |x_j|^2 \leq 1\}$$

$$B_X = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\|_X \leq 1\} \quad (X = \ell^p \text{ z.B.})$$

$$N(B_n^2, \|\cdot\|_X, \epsilon) = \min \left\{ N \in \mathbb{N} : \exists t_1, \dots, t_N \in \mathbb{R}^n : B_n^2 \subseteq \bigcup_{j=1}^N t_j + \epsilon B_X \right\}$$

Bsp $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_2$ $N(K, \|\cdot\|_2, \epsilon) \leq \frac{|K + \epsilon/2 B_n^2|}{|\frac{\epsilon}{2} B_n^2|}$

$$\leq \frac{|K|}{|\frac{\epsilon}{2} B_n^2|}$$



2. zentrales
Werkzeug für TS

$$N(B_n^2, \|\cdot\|_2, \epsilon) \sim \epsilon^{-n}$$

Thm 3.18 (zu Sudakov duale Ungleichung)

$$\log N(B_n^2, \|\cdot\|_X, \epsilon) \leq n \cdot \epsilon^{-2} \cdot \underbrace{\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} d\mu(x) \|x\|_X \right)^2}_{A_n}$$

Flächenmaß

Bemerkungen • Beweise von Pajor-Tomczak-Jaegermann
mit vereinfachtem Beweis von Bourgain-Lindenstrauss
Milman

$$\bullet A_n = \text{const} \cdot n^{-n/2} \int dx \|x\|_X \exp\left(-\frac{\|x\|_2^2}{2}\right)$$

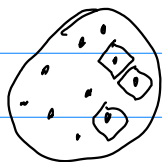
$$= \text{const} \cdot n^{-n/2} \int d\rho(\omega) \left\| \sum_{j=1}^n g_j(\omega) e_j \right\|_X$$

irgendein WS-Raum mit WS-Maß ρ
 $g_j(\omega)$ iid normalverteilt
 $\{e_j\}_{j=1}^n$ eine ONB in \mathbb{R}^n .

Sudakov: $\log(N(B_x, \|\cdot\|_2, \epsilon)) \leq \frac{n}{\epsilon^2} \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|x\|_x \right)^2$ K.6.2011

Beweis (Thm 3.18) $A_n = \frac{a_n}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_x e^{-\|x\|_2^2/2} dx$ $a_n^{-1/2}$

$d\sigma(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-4x\|x\|_2^2/2} dx$ WS-Maß



$\{x_j\}_{j=1}^n \subseteq B_n$ mit Nebenbedingung,

daß $\|x_j - x_\ell\|_x > \epsilon \quad \forall j \neq \ell$

$\{x_j + \frac{\epsilon}{2} B_x\}_{j=1}^n$ haben disjunktes Inneres

$1 \geq \sum_{j=1}^n \sigma\left(x_j + \frac{2A_n}{a_n} B_x\right) = N \sigma\left(y_j + \frac{2A_n}{a_n} B_x\right)$

$y_j = x_j \cdot \frac{4A_n}{a_n \epsilon}$

$\sigma\left(y_j + \frac{2A_n}{a_n} B_x\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\frac{2A_n}{a_n} B_x} dx \exp\left(-\frac{\|x \pm y_j\|_2^2}{2}\right)$

$= \frac{1}{2} \int \dots e^{-\|x-y_j\|_2^2/2} + e^{-\|x+y_j\|_2^2/2}$

$\frac{f(z) + f(w)}{2} \approx f\left(\frac{z+w}{2}\right)$

$\geq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\frac{2A_n}{a_n} B_x} dx \exp\left(-\frac{\|x-y_j\|_2^2 + \|x+y_j\|_2^2}{4}\right)$

$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\frac{2A_n}{a_n} B_x} dx \exp\left(-\frac{\|x\|_2^2 + \|y_j\|_2^2}{2}\right)$

$= \exp\left(-\frac{\|y_j\|_2^2}{2}\right) \cdot \sigma\left(\frac{2A_n}{a_n} B_x\right) \leq \frac{1}{2} e^{-\|y_j\|_2^2/2}$

$$\sigma(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_X \leq \frac{2A_n}{a_n}\}) = 1 - \sigma(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_X \geq \frac{2A_n}{a_n}\})$$

$$\geq 1 - \frac{a_n}{2A_n} \int_{\mathbb{R}^n} d\sigma(x) \|x\|_X = 1 - \frac{a_n}{2A_n} \cdot \frac{A_n}{a_n} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow N \leq 2 \exp\left(+ \frac{\|y_i\|_2^2}{2}\right) \quad y_j = x_j \cdot \frac{A_n}{4a_n \epsilon}$$

$$\Rightarrow \log N \leq \left(\frac{A_n}{a_n \cdot \epsilon}\right)^2 \underset{a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sim} \frac{1}{n} \cdot e^{-2} \cdot \left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} d\mu(x) \|x\|_X\right)^2$$

□

Beweis v. Lm 3.19 (zufälliges TS)

$$(A) = \mathbb{E}_w \left\| \overset{(d)}{F_S} V_w \overset{(d)}{F_S^*} \right\|_{L^2(S), L^4(S)} \leq \epsilon \quad \|v\|_{\ell^{d+1}} \quad V_w(n) = w(n) v(n) |n|^{-\epsilon}$$

$$V_w(n) = \sum_{\ell > 0} V_\ell, \quad V_0 = V_w \mathbb{1}_{|n| \leq 1}$$

$$V_\ell = V_w \mathbb{1}_{2^{\ell-1} \leq |n| \leq 2^\ell}$$

$$= V_w \mathbb{1}_{A_\ell}$$

$$A_\ell = 2\mathbb{L}^d \cap \{x \in \mathbb{R}^d : 2^{\ell-1} \leq |x| \leq 2^\ell\}$$

$$(x) \leq \sum_{\ell > 0} \mathbb{E}_w \left\| F_S V_\ell F_S^* \right\|_{L^2(S), L^4(S)}$$

$$= \sup_{\substack{\mu_1, \mu_2 \in L^2(d\sigma_S) \\ \|\alpha_{\mu_j}/d\sigma\|_2 = 1}} |\langle \mu_1, F_S V_\ell F_S^* \mu_2 \rangle|$$

$$= \sup_{\mu_1, \mu_2} |\langle \hat{\mu}_1, V_\ell \hat{\mu}_2 \rangle|$$

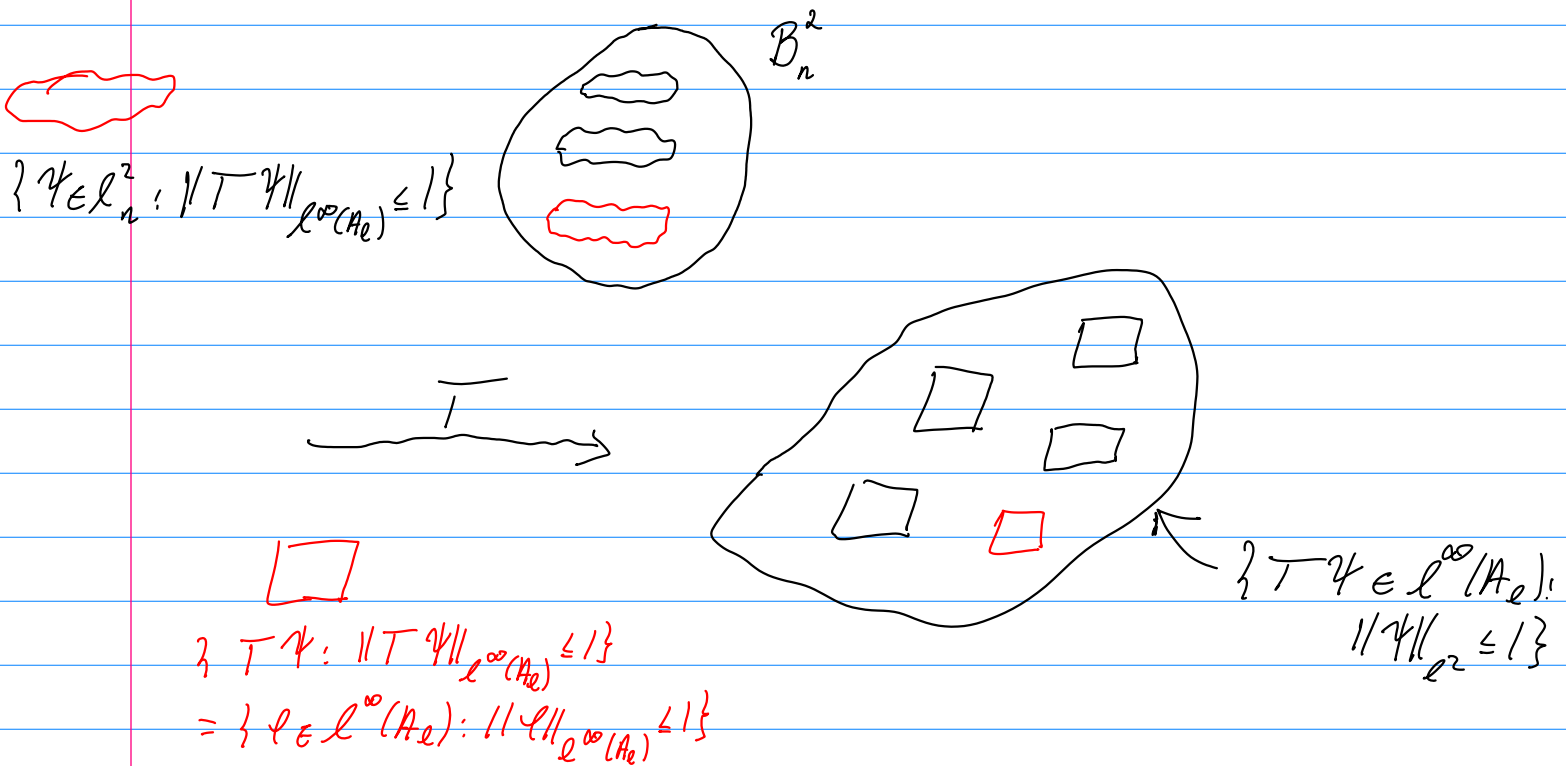
$$= \sup_{\mu_1, \mu_2} \left| \sum_{n \in A_\ell} w(n) v(n) \hat{\mu}_1(n) \hat{\mu}_2(n) \right|$$

Einschub wollen $L^2(S)$ mit B_x -Kugeln überdecken,
um $\hat{\mu}_j$ zu entwickeln

$$F_S^*: L^2(S) \rightarrow \ell^\infty \quad \ell_n^2 = (\mathbb{R}^n; \|\cdot\|_2)$$

Ziel Überdecke B_n^2 mit B_x -Kugeln wobei

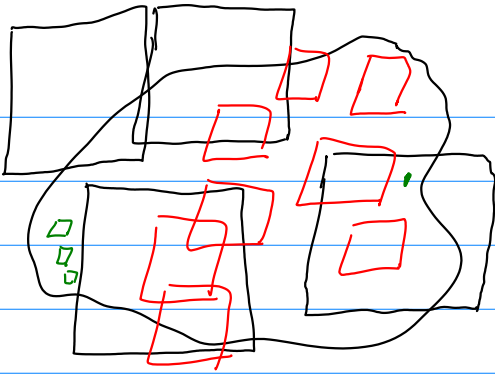
$$\|\psi\|_X \equiv \|T\psi\|_{\ell^\infty(A_\epsilon)}, \text{ wobei } T: \ell_n^2 \rightarrow \ell^\infty(A_\epsilon) \text{ beschränkt}$$



\Rightarrow Zahl der ϵ -Kugeln in $\|\cdot\|_X$ -Norm, die es zum Überdecken von B_n^2 braucht ist gleich Zahl der ϵ -Kugeln in $\ell^\infty(A_\epsilon)$ -Norm, die es braucht, um $\{T\psi \in \ell^\infty(A_\epsilon) : \|\psi\|_{\ell_n^2} \leq 1\}$

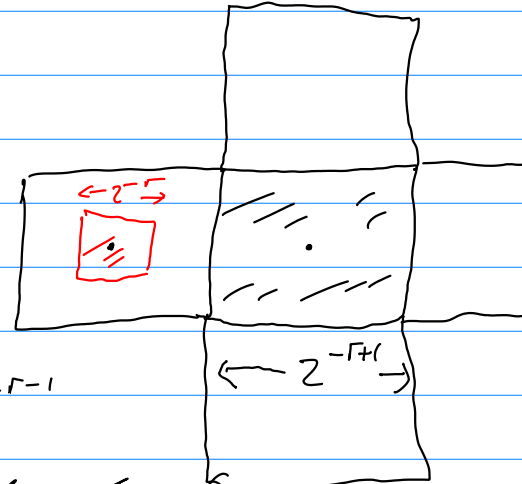
\Rightarrow Wsr bezeichnen mit \mathcal{E}_ϵ die Familie aller ϵ -Kugeln in $\ell^\infty(A_\epsilon)$ -Norm, die es braucht, um $\{T\psi : \|\psi\|_{\ell_n^2} \leq 1\}$ zu überdecken. $(\max_{\psi \in B_n^2} \min_{\xi \in \mathcal{E}} \|T\psi - \xi\| < \epsilon)$

$\epsilon \equiv 2^{-r}$ mit $r \in \mathbb{N}_0$ (Summationsvariable später)

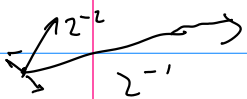


$\mathcal{E}_{2^{-r}}$

$\mathcal{E}_{2^{-r-1}}$



Wähle eine Teilmenge $\mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{E}_{2^{-r}} - \mathcal{E}_{2^{-r-1}}$



$$= \left\{ \xi = \xi_{r_1} - \xi_{r_2} : \begin{array}{l} \xi_{r_1} \in \mathcal{E}_{2^{-r}} \\ \xi_{r_2} \in \mathcal{E}_{2^{-r-1}} \end{array} \right\}$$

so, dass $\|\xi\|_{\mathcal{L}^\infty(A_2)} \leq 2^{-r+1} \quad \forall \xi \in \mathcal{F}_r$

\Rightarrow Mit den \mathcal{F}_r zerlegen wir $\underbrace{T\psi}_{\in \mathcal{L}^\infty(A_2)} = \sum_r \xi^{(r)}$

für gewisse $\xi^{(r)} \in \mathcal{F}_r$ (Teleskopsumme)

Bemerkung $|\mathcal{F}_r| \leq |\mathcal{E}_{2^{-r-1}}| \cdot |\mathcal{E}_{2^{-r}}|$

Mit dud- to- Sudakov schätzen wir $|\mathcal{E}_\epsilon|$ ab.

$$\log(N(B_2^n, \|\cdot\|_X, \epsilon)) \leq n \cdot \epsilon^{-2} \left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} d\mu(k) \|x\|_X \right)^2$$

$\gamma \dots$ gendwelle $= n \cdot (a_n)^2 \cdot \epsilon^{-2} \cdot \left(\int_{\Omega} d\rho(y) \left\| \sum_j^n g_j(y) e_j \right\|_X \right)^2$

Ω \uparrow \uparrow \uparrow
 WS-Raum \uparrow iid Gauss \uparrow $\{e_j\} \dots$ ONB in \mathbb{L}_2^n

$$\| \sum g_j(y) T e_j \|_{\mathcal{L}^\infty(A_2)} = \text{const} \cdot \epsilon^{-2} \left(\int_{\Omega} d\rho(y) \left\| T \sum g_j(y) e_j \right\|_{\mathcal{L}^\infty(A_2)} \right)^2$$

$$= \sup_{m \in A_2} | \sum g_j(y) (T e_j)_m |$$

nutzen das,
dass wir auf
Gitter sind

$$= \text{const } \epsilon^{-2} \left(\mathbb{E}_y \sup_{m \in A_\epsilon} \left| \sum_{j=1}^n g_j(\omega) \underbrace{(\tau_{ej})_m}_{\xi_j \text{ (dann/s)}} \right|^2 \right)$$

$$|A_\epsilon| \leq 2^{dL}$$

Dudley \rightarrow

$$\lesssim \epsilon^{-2} \left(\sqrt{\log |A_\epsilon|} \left(\sup_m \sqrt{\sum_j |(\tau_{ej})_m|^2} \right) \right)^2$$

$$= \epsilon^{-2} \cdot d \cdot L \quad \|T\|_{\ell_n^2 \rightarrow \ell^\infty(A_\epsilon)}^2$$

RHS unabhängig von n !!

\Rightarrow haben mit vorheriger Diskussion gezeigt, dass

$$\log |Z_\epsilon| \lesssim \epsilon^{-2} \cdot L \quad \|T\|_{\ell_n^2 \rightarrow \ell^\infty(A_\epsilon)}^2$$

ϵ -Netz von $\ell^\infty(A_\epsilon)$ -Kugeln mit denen
wir $\{T\psi: \|v\|_{\ell_n^2} \leq 1\}$ überdeckt hatten

Erinnerung: $T\psi = \sum_{r \geq 0} \xi^{(r)}$ für gewisse

$$\xi^{(r)} \in \mathcal{F}_r$$

$$\subseteq \mathcal{E}_{2^{-r-1}} - \mathcal{E}_{2^{-r}}$$

$$\text{mit } |\mathcal{F}_r| \leq |\mathcal{E}_{2^{-r-1}}|$$

\rightarrow wg. Glmässigkeit in n können wir

$$\underbrace{\mathbb{E}_{A_\epsilon} \sum_{j=1}^n \mu_j}_{\in \ell^\infty(A_\epsilon)} = \sum_{r \geq 0} \xi^{(r)}$$

$$\|\xi^{(r)}\|_{\ell^\infty(A_\epsilon)} \lesssim 2^{-r}$$

$$\|\xi^{(r)}\|_{\ell^{2(\alpha+1)/(\alpha-1)}} \lesssim 1$$

wg. Tomas-Stein

$$V_e = V_w \mathbb{1}_{A_e} \\ = w(n)v(n) 2^{-\epsilon |n|} \Rightarrow$$

$$|(\hat{\mu}_1, v, \hat{\mu}_2)|$$

$$\mathbb{E}_w \| \mathbb{F}_S V_w \mathbb{F}_S^* \| \leq_d \sum_{\ell \geq 0} 2^{-\epsilon \ell} \sum_{r_1, r_2 \geq 0} \mathbb{E}_w \max_{\substack{\xi_1 \in \mathbb{F}_{r_1} \\ \xi_2 \in \mathbb{F}_{r_2}}} \left| \sum_{n \in A_\ell} \xi_1(n) \xi_2(n) v(n) w(n) \right|$$

→ jetzt $\mathbb{E}_w | \dots |$ mit deterministischen und ws-theoretischen Methoden abschätzen.

$$\xi_i \in \mathbb{F}_{r_i} : \|\xi_i\|_{\ell^\infty(A_\ell)} \leq 2^{-r_i}, \|\xi_i\|_{\ell^{2(d+1)/d+1}} \leq 1, \text{Willgan} \leq 1 \quad \frac{17.6.21}{}$$

* Deterministische Schranke:

$$\max_{\substack{\xi_1 \in \mathbb{F}_{r_1} \\ \xi_2 \in \mathbb{F}_{r_2}}} \left| \sum_{n \in A_\ell} w_n v(n) \xi_1(n) \xi_2(n) \right| \\ \leq 2^{-r_1 - r_2} \sum_{n \in A_\ell} |v(n)| \\ \leq 2^{-r_1 - r_2} \text{Willgan} \cdot 2^{\frac{d \cdot \ell}{d+1}}$$

→ wunderbar summierbar in r_1, r_2 , aber katastrophal in ℓ

* Probabilistische Schranke

$$\mathbb{E}_w \max_{\substack{\xi_1 \in \mathbb{F}_{r_1} \\ \xi_2 \in \mathbb{F}_{r_2}}} \left| \sum_{n \in A_\ell} w_n v(n) \xi_1(n) \xi_2(n) \right| \\ \mathbb{F}_r \leq \mathcal{E}_{2^{-r}} - \mathcal{E}_{2^{-r-1}}$$

$$\sqrt{\log |\mathbb{F}_{r_1} \times \mathbb{F}_{r_2}|} \stackrel{\text{Dudley}}{\leq} \sqrt{\ell} (2^{r_1} + 2^{r_2}) \sqrt{\sum_{n \in A_\ell} |v(n)|^2 |\xi_1(n)|^2 |\xi_2(n)|^2} \\ \leq \sqrt{\log |\mathbb{F}_{r_1}| + \log |\mathbb{F}_{r_2}|} \leq \sqrt{\ell} (2^{r_1} + 2^{r_2}) \|v\|_{d+1} \|\xi_1, \xi_2\|_{\frac{2(d+1)}{d-1}} \\ \leq \sqrt{\log |\mathcal{E}_{2^{-r_1}}| + \log |\mathcal{E}_{2^{-r_2}}|} \leq \sqrt{\ell} (2^{r_1} + 2^{r_2}) \|v\|_{d+1} \min\{2^{-r_2}, 2^{-r_1}\} \\ \leq \sqrt{2^{2r_1} \cdot \ell + 2^{2r_2} \cdot \ell} \leq \sqrt{\ell} \|v\|_{d+1} \quad \text{gut in } \ell, \text{ schlecht in } r_1, r_2$$

$$\lesssim \sqrt{l} (2^{\gamma_1} + 2^{\gamma_2})$$

→ Einsetzen beider Schranken liefert

$$\mathbb{E}_w \| \mathcal{F}_S V_w \mathcal{F}_S^* \|_{L^2(S), L^2(S)} \lesssim \|v\|_{d+1} \sum_{\ell \geq 0} 2^{-\epsilon \ell} \sum_{\gamma_1, \gamma_2 \geq 0} \min \left\{ 2^{-(\gamma_1 + \gamma_2)} \cdot 2^{\frac{d^2}{d+1} \ell}, \sqrt{\ell} \right\}$$

$$\begin{aligned} &\lesssim \|v\|_{d+1} \sum_{\ell \geq 0} 2^{-\epsilon \ell} \left[\sum_{\gamma_1 + \gamma_2 > c_{d,S} \ell} 2^{-(\gamma_1 + \gamma_2)} \cdot 2^{\frac{d^2}{d+1} \ell} + \sum_{\gamma_1 + \gamma_2 \leq c_{d,S} \ell} \sqrt{\ell} \right] \\ &2^{\gamma_1 + \gamma_2} > 2^{\left(\frac{d^2}{d+1} - \delta\right) \ell} \\ &= 2^{c_{d,S} \ell} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta < \epsilon &\lesssim \|v\|_{d+1} \sum_{\ell \geq 0} 2^{-\epsilon \ell} \left[2^{-\ell(c_{d,S} - \frac{d^2}{d+1})} + \sqrt{\ell} \cdot \ell^2 \right] \\ &\lesssim \|v\|_{d+1} \end{aligned} \quad \square$$

Exkurs (Vorsicht!!!) Erweiterung von zufälligem TS auf Gitter zu zufälligem TS in \mathbb{R}^d

$\mathbb{E}_w \| \mathcal{F}_S V_w \mathcal{F}_S^* \|$ mit \mathbb{R}^d -Fourier restriktionsoperator, wobei

$$S \subseteq \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]^d \quad \text{Hypertfläche}$$

$$V_w(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \omega(n) \text{Inl} \underset{\substack{| \\ C_c^\infty \text{ (z.B. charakteristische Fkt)}}}{v \in \mathcal{L}^{d+1}} \chi(k-n)$$

mit $\text{supp } \chi \subseteq [-1, 1]^d$

$$\mathcal{V}_S := \mathcal{F}_S V_w \mathcal{F}_S^*$$

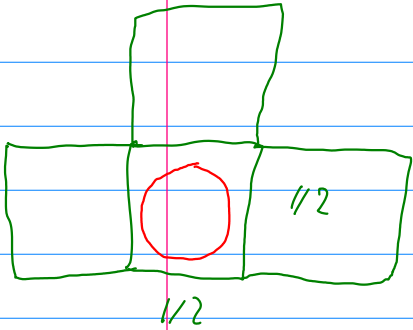
$$(\mathcal{V}_S u)(\xi) = \int d\sigma_S(y) \overset{\mathbb{R}^d\text{-FT}}{(\mathcal{F} V_w)(\xi-y)} u(y)$$

$$= \int d\sigma_S(y) \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \omega(n) v(n) e^{-2\pi i n \cdot (\xi-y)} (\mathcal{F} \chi)(\xi-y) u(y)$$

\Rightarrow Integral kern von V_{ξ} ist $\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} w(n) v(n) e^{-2\pi i n(\xi-\eta)} (\mathcal{F}\chi)(\xi-\eta)$
 $\xi, \eta \in S \subseteq [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]^d$

Beobachtung: Integral kern für festes $\xi-\eta$ mit $\xi, \eta \in S$
 $\subseteq [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$

stimmt mit seiner Periodisierung überein, gegeben durch



$$\sum_{h \in \mathbb{Z}^d} (\mathcal{F}V_w)(\xi-\eta+h) \mathbb{1}_{|\xi-\eta+h| < \frac{1}{2}}$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} w(n) v(n) \sum_{h \in \mathbb{Z}^d} e^{-2\pi i n(\xi-\eta+h)} (\mathcal{F}\chi)(\xi-\eta+h) \mathbb{1}_{|\xi-\eta+h| < \frac{1}{2}}$$

$$\stackrel{\xi, \eta \in S}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} w(n) v(n) \sum_{h \in \mathbb{Z}^d} e^{-2\pi i n(\xi-\eta+h)} (\mathcal{F}\chi)(\xi-\eta+h) = \chi$$

Annahme: \nearrow

$(\mathcal{F}\chi)(\xi-\eta) > 1$ falls $\xi-\eta \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$

Poissonsummiertion: $\sum_{h \in \mathbb{Z}^d} (\mathcal{F}f)(\xi+h) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} f(m) e^{-2\pi i m \cdot \xi}$

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}^d} e^{-2\pi i n(\xi-\eta+h)} (\mathcal{F}\chi)(\xi-\eta+h) = \sum_m \chi(m-n) e^{-2\pi i m(\xi-\eta)}$$

\Rightarrow Für $\xi, \eta \in S$: $V_{\xi}(\xi-\eta) = \sum_{h \in \mathbb{Z}^d} (\mathcal{F}V_w)(\xi-\eta+h) \mathbb{1}_{|\xi-\eta+h| < \frac{1}{2}}$

$$= \sum_n w(n) v(n) \sum_m \chi(m-n) e^{-2\pi i m(\xi-\eta)}$$

$$\stackrel{n \leftrightarrow m}{=} \sum_n e^{-2\pi i n(\xi-\eta)} \sum_m w(m) v(m) \chi(m-n)$$

χ radial \nearrow

im diskreten Problem war der Integral kern von

$$V_S^d = \overline{F_S^d} V_w^d (F_S^d)^*$$

gerade $(F^d V_w)(z-y) = \sum_h e^{-2\pi i n(z-y)} w(n) v(n)$

modulo endlich vieler m -Summanden um festes n stimmt der Integralteil von V_S (kontinuierlich) mit dem von V_S^d überein.

\Rightarrow Thm 3.14 anwendbar mit Dreiecksungleichung um endlich viele m -Summanden zu behandeln

$$\Rightarrow \|E_w \| V_S \| \lesssim \|v\|_{d+1}$$

3.4 Gleichmäßige Resolventenabschätzungen, Tomas-Stein und spectral cluster bounds

$$F(z) = -a; \int d\xi = \int_0^\infty dt \int d\sigma_{\mathbb{S}^d} \quad S_\varepsilon = \{ \xi \in \mathbb{R}^d : |F(\xi)| = \varepsilon \}$$

$$(\psi, (-a-z)^{-1} \psi) = \int_{\mathbb{R}^d} d\xi |\hat{\psi}(\xi)|^2 (\xi^2 - z)^{-1}$$

$$\int_0^\infty d\mu_{\text{res}}(h) (h-z)^{-1} = \int_0^\infty dh h^{d-1} (h^2 - z)^{-1} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} d\sigma(\omega) |\hat{\psi}(h\omega)|^2$$

$$(\psi, dE_{-\Delta}(h) \psi)$$

(Spekttralmaß bzw. -projektor)

$$h \mapsto \tilde{h} = \frac{1}{2} \int_0^\infty dh h^{\frac{d-1}{2} - \frac{1}{2}} (h-z)^{-1} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} d\sigma(\omega) |\hat{\psi}(\tilde{h}\omega)|^2$$

$$\omega \mapsto \omega/\tilde{h}$$

$$= \frac{1}{2} \int dh h^{-\frac{1}{2}} (h-z)^{-1} \int_{\tilde{h} \mathbb{S}^{d-1}} d\sigma(\omega) |\hat{\psi}(\omega)|^2$$

$$\Rightarrow dE_{-\Delta}(h) = \frac{1}{2} h^{-\frac{1}{2}} F_{\tilde{h} \mathbb{S}^{d-1}}^* F_{\tilde{h} \mathbb{S}^{d-1}}$$

$$\langle \psi, F_{\tilde{h} \mathbb{S}^{d-1}}^* F_{\tilde{h} \mathbb{S}^{d-1}} \psi \rangle$$

Zur Erinnerung: $\text{Im} \frac{1}{x-d-i\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{(x-d)^2 + \varepsilon^2}$ Poisson kern, $x, d, \varepsilon \in \mathbb{R}$

$$\text{d.h.} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Im} \frac{1}{\lambda - d - i\epsilon} = \pi \delta(x-d) \quad \text{im } \mathcal{S}'$$

Sinn

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi} \text{Im} \langle \psi, (-d-z)^{-1} \psi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dh \, h^{-\frac{1}{2}} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + (h-d)^2} \langle \psi, F_{\sqrt{h}}^* F_{\sqrt{h}} \psi \rangle$$

$z = d + i\epsilon$

$$\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} d^{-1/2} \langle \psi, F_{\sqrt{d}}^* F_{\sqrt{d}} \psi \rangle$$

$$= d E_{-d}(d)$$

→ Integrieren über $d \in \Lambda$ liefert ($\Lambda \subseteq \mathbb{R}_+$)

$$\psi \in L^p(\mathbb{R}^d) \quad \langle \psi, E_{\Delta}(\Lambda) \psi \rangle = \frac{1}{2} \int_{\Lambda} dd \, d^{-1/2} \langle \psi, F_{\sqrt{d}}^* F_{\sqrt{d}} \psi \rangle$$

$p \in [1, \frac{2(d+1)}{d+3}]$

$$\leq \|\psi\|_p^2 \, d^{-\frac{d+1}{2} + \frac{d}{p}}$$

$$\Lambda \equiv (d_0, d_0 + 1)$$

24.6.21

$$\|F_{\sqrt{d}} \psi\|_{L^2(\mathbb{R}^{d+1})}^2 = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} d\sigma(\xi) |\hat{\psi}(\xi)|^2$$

$$= d^{(d-1)/2} \int_{\mathbb{S}^{d+1}} d\sigma(\xi) |\hat{\psi}(\sqrt{d}\xi)|^2$$

$\hat{\phi}_d(\xi)$

$$\begin{aligned} \phi_d(x) &= \int d\xi \, e^{2i x \cdot \xi} \hat{\psi}(\sqrt{d}\xi) \\ &= d^{-d/2} \psi(x/\sqrt{d}) \end{aligned}$$

$$\leq d^{(d-1)/2} \|\phi_d\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^2$$

$$= d^{(d-1)/2 - d} \|\psi(\cdot/\sqrt{d})\|_p^2$$

$$= d^{-(d+1)/2 + d/p} \|\psi\|_p^2$$

$$\Rightarrow \langle \psi, E_{\Delta}(\Lambda) \psi \rangle \leq \|\psi\|_p^2 \int_{\Lambda} dd \, d^{-1 - \frac{d}{2} + \frac{d}{p}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p'}$$

$$d^{-1 - \frac{d}{2} (\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})}$$

$$\langle \psi, E_\Delta(\lambda) \psi \rangle \lesssim \int_1^\lambda \lambda^{-1 + \frac{d}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})} \|\psi\|_p^2 d\lambda$$

$$\Rightarrow \|E_\Delta(\lambda) \psi\|_2 \lesssim \int_1^\lambda \lambda^{-\frac{1}{2} + \frac{d}{4}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})} \|\psi\|_p d\lambda$$

Bsp Statt Δ können wir auch andere Fouriermultiplikatoren betrachten. z.B. solche, die ein diskontinuierliches Spektrum haben.

z.B. $-\Delta_g$ auf (M, g) kompakt

\rightarrow man kann obige Schritte wiederholen und findet (für $-\Delta_g$), dass

$$\|E_{-\Delta_g}(\lambda) \psi\|_{L^2(M, dv_g)} \lesssim \int_1^\lambda d\lambda \lambda^{-\frac{1}{2} + \frac{d}{4}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})}$$

Bsp ψ Eigenfkt von $-\Delta_g$ zu einem EW λ_0

Falls $\Lambda = [\lambda_0, \lambda_0 + c]$, wobei $c > 0$ sodass Λ keinen weiteren von λ_0 verschiedenen EW enthält,

$$\text{dann } \|E_{-\Delta_g}(\lambda) \psi\|_{L^2(M)} = \|\psi\|_{L^2(M)}$$

$$\lesssim \lambda^{-\frac{1}{2} + \frac{d}{4}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})} \|\psi\|_{L^p(M)} \quad (17)$$

$$\Leftrightarrow \|\psi\|_{L^{p'}(M)} \lesssim \lambda^{-\frac{1}{2} + \frac{d}{4}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})} \|\psi\|_{L^2(M)}$$

$$= \lambda^{-\frac{1}{2} + \frac{d}{4}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})} \quad (\text{falls } \psi \text{ } L^2\text{-normiert})$$

cluster
 \downarrow

Spectral bounds: $\|E_{-\Delta_g}(\lambda)\|_{L^p, L^{p'}(M)} \lesssim \int_1^\lambda d\lambda \lambda^{-1 + \frac{d}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})}$

Bsp $-\Delta_{g^{m-1}}$ $l(l+d-2)$ $l \in \mathbb{N}_0$
 χ_m $m = (m_1, \dots, m_{d-2})$

$$m_1 \in \{-l, \dots, l\}$$

$$m_2 \in \{-m_1, \dots, m_1\}$$

$d=3$; der l -te EW $\lambda(l+1)$ ist $(2l+1)$ -
 fache Entartung

$(d \geq 3) \Rightarrow$ Entartung: $\sim l^{d-2}$

$$\int E_{\Delta_g}(A)(x, x) dV_g(x) = \# \text{ der EW in } \Lambda \leq \Lambda_1^{\alpha}$$

bekommt man / kann man abschätzen

$$\text{durch } \|E_{\Delta_g}(A)\|_{L^1, L^\infty}$$

\hookrightarrow gebe Aufschluß wie viele EW in einem
 fest gewählten Fenster liegen, also
 wie stark sie clustern.

Sogge - Hangzhou: lectures on eigenfunctions of
 Laplace

Sogge - Fourier Integrals in Classical Analysis.

Cuenin - From Spectral cluster to uniform resolvent
 estimates on compact manifolds
 arXiv 2011.07254

hatte gesehen: Resolventenabschätzungen $\Rightarrow \|E_{\Delta}(A)\|_{p, p'}$
 ??

$$\text{Jetzt: } \|(-\Delta - z)^{-1}\|_{L^p(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \leq |z|^{-1 + \frac{d}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})}$$

$$\|f\|_{L^{p'}} \leq \|\nabla f\|_2 \leq \|df\|_{L^p} \quad p \in \left[\frac{2d}{d+2}, \frac{2(d+1)}{d+3} \right]$$

$$p' = \frac{2d}{d+2} \quad (\text{Sobolev})$$

\uparrow
 gleichmäßig im
 Imaginärteil von z

TS / spectral cluster \Rightarrow Resolventen

bisher TS / spectral \Leftrightarrow Im (Resolvente)

\hookrightarrow Poissonkern
("sichon", z.B. LP-Basis)

$$\operatorname{Re} \frac{1}{x-d-i\epsilon} = \frac{x-d}{(x-d)^2 + \epsilon^2}$$

$\rightarrow \operatorname{sgn}(x-d)$

\Leftrightarrow Hilberttransf.

Thm 3.19 (Kenig-Ruiz-Sogge '87)

Seien $d \geq 3$, $p \in \left[\frac{2d}{d+2}, \frac{2(d+1)}{d+3} \right]$, d.h. $\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} \in \left[\frac{2}{d+1}, \frac{2}{d} \right]$

$$\rightarrow \|(-\Delta - z)^{-1}\|_{L^p, L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \leq |z|^{-1 + \frac{d}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} \right)}$$

($d=2$ auch ok, s.h. z.B. Frank eigenvalue bounds I)
1 < $p \leq 6/5$ 2010

(Vgl. mit $\|(-\Delta - z)^{-1}\|_{L^2, L^2} = |\operatorname{Im}(z)|^{-1}$, was sicher nicht
gltm in $\operatorname{Im} z$ ist, im
Gegensatz zu Thm 3.19)

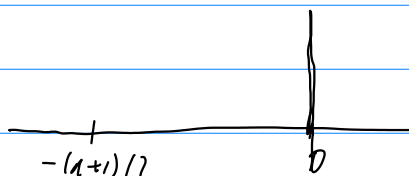
$$(-\Delta - z)^{-1}: L^p \rightarrow L^{p'}; (-\Delta - z)^{-\frac{1}{2}}: L^p \rightarrow L^2$$

Beweis Genügt $|z|=1$: $\|(-\Delta - z)^{-\frac{1}{2}}\|_2^2 = \int \frac{|\hat{f}(\xi)|^2}{\xi^2 - z} d\xi = |z|^{-1} \int \frac{|\hat{f}(\xi)|^2}{\xi^2 - z} d\xi$

Definiere $m_\lambda(\xi) = (\xi^2 - z)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{e^{i\lambda \xi^2}}{\Gamma(\lambda + d/2)}$

$(-\Delta - z)^{-1}$ korrespondiert zu $\lambda = -1$
 $\lambda \in \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \in \left[-\frac{d+1}{2}, 0 \right] \right\}$

$\int \hat{f}(\lambda \xi)$
 $= g_\lambda$



Auf rechem Rand: $\|m_{iy}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \lesssim 1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \|(-\Delta - z)^{iy}\|_{L^2, L^2} \lesssim 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Für $L^1 \rightarrow L^\infty$ -Schranke an $(-\Delta - z)^d$ brauchen wir den Integralkernel

$$|k|^{-(d+2)}$$

Gel'fand-Schilov:

$$\hat{m}_d(x) = \frac{e^{-|x|^2} |x|^{d+1}}{\Gamma(-d) \Gamma(\frac{d}{2} + d)} \cdot \left(\frac{z}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}(d + \frac{d}{2})}$$

$K_{\frac{d+1}{2}}(\sqrt{|z|} |k|)$
 $|k|^{-d-d/2} \quad |k|^{-\frac{d}{2} - \text{Re } d}$
 bei 0

Warum ist $\|\hat{m}_d\|_{L^\infty} \lesssim 1$?

Abramowitz-Stegun
(DLMF)

- $|e^{z^2} \nu K_\nu(w)| \lesssim |w|^{-|\text{Re}(w)|}, \quad |w| \leq 1, \quad \text{Re } w > 0$

- $|K_\nu(w)| \lesssim e^{-\text{Re}(w)} |w|^{-1/2}, \quad |w| \geq 1, \quad \text{Re } w > 0$
kann durch Paley-Wiener gesehen werden

- $K_\nu = K_{-\nu}$

Setzen $\nu = -a + iy$ mit $a \in [\frac{d}{2}, \frac{d+1}{2}]$,
 $\nu = \frac{d}{2} + d = \frac{d}{2} - a + iy$, d.h. $\text{Re } \nu \in [-\frac{1}{2}, 0]$
 $w = \sqrt{|z|} \cdot |x|$ mit $|z| = 1$, d.h. $|w| = |x|$

\Rightarrow Schranken für K_ν einsetzen (mit $K_\nu = K_{-\nu}$)

$$|k| = -a + iy \quad |\hat{m}_d(x)| \lesssim e^{c|a|y^2} \frac{|x|^{-a}}{\Gamma(a-iy) \Gamma(\frac{1}{2} + iy)} \left(\frac{1}{|x|^2}\right)^{(a-a)/2} |x|^{-1/2}$$

$$\lesssim |x|^{a - \frac{d+1}{2}} \cdot e^{y^2} \quad ; \text{ was beschränkt ist, falls } a = \frac{d+1}{2}$$

$$\Rightarrow \|(-\Delta - z)^{-\frac{d+1}{2} + iy}\|_{L^1, L^\infty} \lesssim e^{y^2} \quad \square$$

Bem Verallgemeinerung $f((-\Delta)^{\alpha/2} - z)^{-1}$ möglich
 ebenfalls durch explizite Ausdrücke für Integralern
 von $(-\Delta)^{\alpha/2} - z)^{-1} \rightarrow |z|^{-1 + \frac{d}{2\alpha}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})}$
 Huang-Yao-Zheng (2018)

Folgt Verallgemeinerung Δ Schattenideale

Thm 3.20 (URS - Schatten) $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p'}$

Sei $d \geq 2$, $q \in \left\{ \begin{array}{l} [4/3, 3/2] \quad d=2 \\ [\frac{d}{2}, \frac{d+1}{2}] \quad d \geq 3 \end{array} \right.$

$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ gilt

$$\frac{(d-1)(d+1)}{d-1} = d+1$$

$$(1) \|W_1 (-\Delta - z)^{-1} W_2\|_{\gamma^{(d-1)q/(d-q)}(L^2(\mathbb{R}^d))} \leq |z|^{-1 + \frac{d}{2q}} \|W_1\|_{L^q} \|W_2\|_{L^{q'}}$$

Weiter gilt für $\gamma \geq \frac{1}{2}$, $\delta(z) := d \operatorname{dist}(z, [0, \infty))$

$$(2) \|W_1 (-\Delta - z)^{-1} W_2\|_{\gamma^{2(\gamma + d/2)}} \leq \delta(z)^{-1 + \frac{(d+1)/2}{2(\gamma + d/2)}} |z|^{-\frac{1}{2(\gamma + d/2)}}$$

Beweis \downarrow $W_1^{a-it} (-\Delta - z)^{-a+it} W_2^{a-it}$, $t \in \mathbb{R}$

Für $a=0$ haben wir $\|W_1^{-it} (-\Delta - z)^{it} W_2^{-it}\|_{L^2, L^2} \leq 1$

Für $a>0$ zeigen wir Hilbert-Schmidt-Abschätzung

$$\text{z.z. } \|W_1^{a+it} (-\Delta - z)^{-a+it} W_2^{a+it}\|_{\gamma^2} \stackrel{(*)}{\leq} c_{d,\gamma} e^{c_{d,\gamma} t^2} \|W_1\|_{4ad}^a \|W_2\|_{\frac{4ad}{d-1+2a}}^a$$

$a \in [\frac{d}{2}, \frac{d+1}{2}]$ (wie oben)

\rightarrow wenn $(*)$ gilt, folgt (1) mittels komplexer Interpolation in Schattenideale

Für (x): $\int |W_1(x)|^{2a} |W_2(y)|^{2a} \underbrace{\left|((-\Delta - z)^{-a+it})(x, y)\right|^2}_{\lesssim e^{t^2} \text{ falls } a = \frac{d+1}{2}}$

(3.10)

$$\lesssim \|W_1\|_{2a}^{2a} \|W_2\|_{2a}^{2a} \cdot e^{t^2}, \text{ falls } a = \frac{d+1}{2}$$

$$|(-\Delta - z)^{-a+it}(x, y)| \lesssim |x-y|^{a - \frac{d+1}{2}} e^{t^2} \quad a \in \left[\frac{d}{2}, \frac{d+1}{2}\right]$$

\Rightarrow mit Hardy-Littlewood-Sobolev $\| | \cdot |^{-\gamma} x f \|_q$

$\lesssim \|f\|_p$

$\frac{1}{q} = \frac{\gamma}{d} + \frac{1}{p}$

$$e^{t^2} \int |W_1(x)|^{2a} |W_2(y)|^{2a} |x-y|^{a - \frac{d+1}{2}} dx dy$$

$$\stackrel{\text{HLS}}{\lesssim} \|W_1\|_{\frac{4ad}{d-1+2a}}^{2a} \|W_2\|_{\frac{4ad}{d-1+2a}}^{2a}, \quad a \in \left[\frac{d}{2}, \frac{d+1}{2}\right]$$

\rightarrow zeigt Hilbert-Schmidt-Schranke (x) und damit (1)

Für (2) interpolieren wir zwischen (1) mit $q = \frac{d+1}{2}$,
wobei $(d-1)q / (d-q) = d+1$ wird
mit der Operatornormabschätzung

$$\gamma = \infty \quad \cong \|W_1 (-\Delta - z)^{-1} W_2\|_{L^2, L^2} \lesssim \|W_1\|_{L^\infty} \|W_2\|_{L^\infty} \|(-\Delta - z)^{-1}\|_{L^2, L^2}$$

$$\lesssim \|W_1\|_{L^\infty} \|W_2\|_{L^\infty} \delta(z)^{-1} \quad \square$$

Bemerkung Analoge Abschätzungen gelten für $(-\Delta + V - z)^{-1}$
mittels Resolventenformel \rightarrow Frank-Sabiz 2017

$$\sum_{d \geq 4} = \sum_1^2 + \sum_2^2 + \sum_3^2 - \sum_4^2 - \sum_5^2 - \dots - \sum_d^2 \quad \text{"signierter Pankovbild"}$$

Exkurs

$d\Sigma$... Lebesgue-Flächenmaß

$d\sigma$... Leraymaß

Flächenmaße: Falls S $(d-1)$ -dimensionale Hyperfläche in \mathbb{R}^d gegeben

durch den Graph einer Fkt $\xi_d = \varphi(\xi_1, \dots, \xi_{d-1})$, dann $\equiv \varphi(\xi')$

Warum stimmen beide Ausdrücke überein? ist Lebesguemaß $d\Sigma_S = \sqrt{1 + |\nabla \varphi|^2} d\xi'$

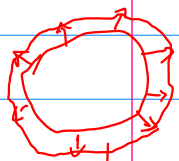
Falls $S = \{ \xi \in \mathbb{R}^d : \varphi(\xi) = 0 \} \Rightarrow d\Sigma_S = \frac{|\nabla \varphi(\xi)|}{|\partial \varphi / \partial \xi_d|} d\xi'$

also insb. $d\sigma_S := \frac{d\Sigma_S}{|\nabla \varphi|} = \frac{d\xi'}{|\partial \varphi / \partial \xi_d|}$ (Leray-Maß) "kanonisches Maß" (Stiefel)

formal mit Kettenregel und $\xi_d = \varphi(\xi')$: $\frac{\partial \xi_d}{\partial \xi'_i} = \nabla \varphi$

$$\frac{|\nabla \varphi(\xi)|^2}{|\partial \varphi / \partial \xi_d|^2} = \sum_{j=1}^{d-1} \frac{|\partial \varphi / \partial \xi_j|^2}{|\partial \varphi / \partial \xi_d|^2} = 1 + \sum_{j=1}^{d-1} \left| \frac{\partial \varphi / \partial \xi_j}{\partial \varphi / \partial \xi_d} \right|^2$$

$$= 1 + |\nabla \varphi|^2$$



$d\xi = dt \otimes d\sigma_S$ Begriff in Gelfand-Shilov I mit Vorsicht..

Warum überhaupt Leraymaß? (\rightarrow Yafaev S. 105-111)

$S_t := \{ \xi \in \mathbb{R}^d : \varphi(\xi) = t \}$ mit Leb.-maß $d\Sigma_t$, $d\sigma_t = \frac{d\Sigma_t}{|\nabla \varphi|}$

$\Rightarrow d\xi = dt \otimes d\sigma_t$ wo $d\xi$ das d -dim Leb.-maß auf \mathbb{R}^d reellen dt das 1-dim " " auf \mathbb{R}^1

\Rightarrow Für einen Fouriermultiplikator $\mathcal{P}(-i\nu)$ mit Symbol $\mathcal{P}(\xi)$ gilt für jede beliebige messbare Fkt. $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (z.B. $\mathbb{1}_{\mathcal{P}(\xi) \in \Lambda}$)

$$\langle f, \mathcal{F}(\mathcal{P}(-i\nu)) f \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} d\xi |\hat{f}(\xi)|^2 \mathcal{F}(\mathcal{P}(\xi))$$

Federer - Geometric measure theory & course
(Mathik - Fourier Analysis & Hausdorff Dimension) $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathcal{F}(t) \int_{S_t} d\sigma_{S_t}(\xi) |\hat{f}(\xi)|^2$$

Yafaev - Scattering Theory (Kap 2.1) Spektralprojektor $\langle f, E_{\mathcal{P}(\cdot)}(\Lambda) f \rangle = \int dt \int_{S_t} d\sigma_{S_t}(\xi) |\hat{f}(\xi)|^2 = \int_{\mathcal{P}(\xi) \in \Lambda} d\xi |\hat{f}(\xi)|^2$

Exkurs Ende

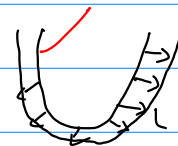
$$\xi_{d+1}^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots - \xi_{d-2}^2 - \xi_{d-1}^2 - \xi_d^2 \quad \text{signierter Kegel}$$

3.5 Tomas-Stern für quadratische, nicht-kompakte Hyperflächen - Strichartz-Abschätzungen

Wir schauen nur Paraboloiden an

$$P(\xi) = 0 \Leftrightarrow (\xi')^2 = \xi_{d+1}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{d+1} &= \{ \xi = (\xi', (\xi')^2) : \xi' \in \mathbb{R}^d \} \\ &= \{ \xi \in \mathbb{R}^{d+1} : P(\xi) = 0 \} \end{aligned}$$



$$-3(\xi')^2 = \xi_{d+1} + r^3$$

$$d\xi = \det d\mu_t(\xi)$$

$$P(\xi) = (\xi')^2 - \xi_{d+1}$$

$$\frac{d\xi'}{|\partial P / \partial \xi_{d+1}|} = d\xi'$$

$d\mu_t \dots$ Leray-Flächenmaß (kanonisches Maß) $d\mu_t(\xi) = \frac{d\Sigma_t(\xi)}{|\nabla P(\xi)|}$, wobei $d\Sigma_t$ das auf \mathbb{P}^{d+1} restringierte Lebesgue-Flächenmaß ist, und $P(\xi) = (\xi')^2 - \xi_{d+1}$; d.h. $|\nabla P(\xi)| = |2\xi', -1|$

$$d\mu_t(\xi) = d\Sigma_t(\xi) / (|2\xi'|^2 + 1)^{1/2} = d\xi'$$

\Rightarrow Wir definieren Fourierrestriktions- bzw. erweiterungsoperatoren bzgl. des Leray-Maßes $d\mu_t(\xi)$

Wie im Stern-Beweis definieren wir eine holomorphe Familie von Faltungsoperatoren

$$(G_z^{(r)}, \varphi) := g(z) \int_{\mathbb{R}^{d+1}} (P(\xi) - r)_+^z \varphi(\xi) d\xi$$

$$S_t = \{ \xi \in \mathbb{R}^{d+1} : P(\xi) = t \}$$

$$\stackrel{\text{wäre bzgl. } \varphi}{=} g(z) \int_{-\infty}^{\infty} dt (t-r)_+^z \int_{S_t} d\mu_t(\xi) \varphi(\xi)$$

wie auf S. 20-21: $(G_{-r}^{(r)}, \varphi) = \int d\mu_{t=r}(\xi) \varphi(\xi)$, d.h. $G_{-r}^{(r)} = d\mu_r$ (s. Lem 3.10)

$$(F_S^* g)(x) = \int_{\mathbb{P}^{d+1}} d\mu_0(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} g(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\xi'}{1} e^{2\pi i (x' \cdot \xi' + x_d (\xi')^2)} g(\xi', (\xi')^2)$$

$$|\partial P / \partial \xi_{d+1}| = 1 \quad d\mu_0(\xi) \text{ auf } \mathbb{P}^{d+1} \longrightarrow \frac{d\xi'}{|\partial P / \partial \xi_{d+1}|} \text{ auf } \mathbb{R}^d$$

→ Wiederholung von Steins Beweis zeigt

$$\|F_S^* F_S\|_{L^p(\mathbb{R}^{d+1}) \rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^{d+1})} \lesssim 1 \quad \forall p \in \left[1, \frac{2(d+2)}{d+4}\right]$$

30.6.21

s.d. allgemeine hinreichende Kriterien von Keel-Tao (1998)
↳ Verallgemeinerung f. $(-i\Delta)^{\alpha/2}, (i\Delta)^{\alpha/2} + V$: Mizutani-Yao + Referenzen
darin

Thm 3.23 (Strichartz-Abschätzung für $e^{it\Delta}$ via Tomas-Stein)

Sei $u(x,t)$ eine Lösung d. inhomogenen, freien Schrödingergleichung in $d \in \mathbb{N}$ Raumdimensionen, sprich

$$\begin{cases} i\partial_t u(x,t) = -\Delta_x u(x,t) + g(x,t) \\ u(x,0) = f(x), \quad t=0 \end{cases}$$

$n = d+1$

Angenommen, $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^{d+1})$ mit $p = \frac{2(n+1)}{n+3}$, wobei $n = d+1$
 $\Rightarrow u \in L^q(\mathbb{R}^{d+1})$ mit $q = 2(n+1)/(n-1)$ und

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^{d+1})} \lesssim \|f\|_{L^2_x} + \|g\|_{L^p_{x,t}}$$

Beweis Mit Duhamel, $u(x,t) = \int_0^t ds (e^{i(t-s)\Delta} g(\cdot, s))(x) ds + (e^{it\Delta} f)(x)$

$t = x_n$
 $x \cdot \xi + \frac{x_n}{2i} \xi^2 = X \cdot \left(\xi, \frac{\xi^2}{2i}\right)$
 $X = (x, t) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{d+1}$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^d} d\xi e^{+2iix \cdot \xi + it\xi^2} \widehat{f}(\xi) \\ &= \left(\widehat{f}_{\mathbb{P}^d}^* \widehat{f}\right)(x,t) \in L^q_{x,t}(\mathbb{R}^n) \\ &\text{mit } q = 2(n+1)/(n-3), \text{ sofern } f \in L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \\ &\text{wg Tomas-Stein-Strichartz für } \mathbb{P}^{n-1} \\ &\text{wo } \mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{P}^d = \{(\xi, \dots, \xi_{n-1}, \omega) \in \mathbb{R}^n : \omega = \frac{\xi^2}{2i}\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|u\|_{L^q_{x,t}} \leq \underbrace{\left\| \int_0^t ds (e^{i(t-s)\Delta} g(\cdot, s))(x) \right\|_{L^q_{x,t}}}_{\equiv (*)} + \underbrace{\|F_{\mathbb{P}^{n-1}}^* f\|_{L^q_{x,t}}}_{\lesssim \|f\|_{L^2_x(\mathbb{R}^d)}}$$

Um den ersten Summanden zu behandeln, interpolieren wir zwischen $\|e^{it\Delta} h\|_{L_x^2} = \|h\|_{L_x^2}$ und $\|e^{it\Delta} h\|_{L_x^\infty} \lesssim |t|^{-d/2} \|h\|_{L_x^1}$

d.h. $\|e^{it\Delta} h\|_{L_x^q} \lesssim |t|^{-r} \|h\|_{L_x^{q'}}$ wobei $r = \dots = \frac{d}{d+2}$

$\Rightarrow (*) \leq \left\| \int_0^t ds \|e^{i(t-s)\Delta} g(\cdot, s)\|_{L_x^{q'}} \right\|_{L_t^q}$ ↑ für $q = \frac{2(d+2)}{d}$

$\leq \left\| \int_0^t ds |t-s|^{-d/(d+2)} \|g(\cdot, s)\|_{L_x^{q'}} \right\|_{L_t^q}$ ✓ $\theta(t-s)$

$\leq \left\| \int_0^\infty ds |t-s|^{-d/(d+2)} \|g(\cdot, s)\|_{L_x^{q'}} \right\|_{L_t^q}$
Faltung $1 \cdot |t-s|^{-d/(d+2)} * \|g(\cdot, s)\|_{L_x^{q'}}$

Hardy-Littlewood-Sobolev in \mathbb{R}^d

$\| | \cdot |^{-d/(d+2)} \|_{L_x^{(d+2)/2}} \cdot \|g\|_{L_x^{q'}} = \|g\|_{L_x^p}$ ⇔

$1 + \frac{1}{p} = \frac{1}{q'} + \frac{2}{d}$

\uparrow
 $g \in L_x^{q'}$

d.h. $\frac{d}{d+2} \cdot \frac{q'}{2} \stackrel{!}{=} 1 \Leftrightarrow q' = \frac{2(d+2)}{d} = \frac{2(n+1)}{n-1}$ ✓
 $n = d+1$

Lemma Homogene duale Strichartz \Rightarrow kanonisches Strichartz

Bemerkung: für $d=2$ gilt: $\left\| \int_0^\infty ds e^{is\Delta} F(s) \right\|_{L_x^2(\mathbb{R}^2)} \stackrel{(*)}{\lesssim} \|F\|_{L_{x,t}^{4/3}(\mathbb{R}^{2+1})}$

$\frac{2(d+2)}{d}$

$\Rightarrow \|e^{it\Delta} f\|_{L_{x,t}^4} \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$

Beweis $\|e^{it\Delta} f\|_{L_{x,t}^4} = \sup_{\substack{F \in L_{x,t}^{4/3} \\ \text{normiert}}} |\langle F, e^{it\Delta} f \rangle_{L_{x,t}^2}| \stackrel{?}{\lesssim} \|f\|_{L_x^2}$

$= \int_{\mathbb{R}^{2+1}} dx dt \overline{F(x,t)} \cdot (e^{it\Delta} f)(x)$

$= \int_0^\infty dt \langle e^{-it\Delta} F(t), f \rangle_{L_x^2} + \int_{-\infty}^0 dt$

$$= \left\langle \int_0^\infty dt e^{-it\Delta} F(t) \right\rangle_{L^2_x} + \dots$$

$$\stackrel{1.)}{\leq} \left\| \int_0^\infty dt e^{-it\Delta} F(t) \right\|_{L^2_x} \|f\|_{L^2_x} + \left\| \int_0^\infty dt e^{-it\Delta} F(t) \right\|_{L^2_x} \|f\|_{L^2_x}$$

Voraussetzung \rightarrow

$$\stackrel{(*)}{\leq} \|F\|_{L^{4/3}_{x,t}} \|f\|_{L^2_x}$$

\in

1.7.21

Anwendung von Strichartz-Abschätzungen in nicht linearen Evolutionsgleichungen anhand des Beispiels der nicht linearen Schrödingergleichungen (NLS)

Genauer: Massekritische NLS in $d=2$

$$\left(\begin{array}{l} + \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} i\partial_t u + \Delta u = \lambda |u|^2 u, \quad d \in \mathbb{C} \\ u(t=0, \cdot) = f(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}^2) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} u = u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^2 \\ t \in \mathbb{R} \end{array}$$

massekritisch? L^2 -invariante Skalierung: $\mu > 0$
 $u_\mu(x, t) = \mu^{-d/2} u(x/\mu, t/\mu^2)$

\hookrightarrow löst auch die freie Schrödingergl. (ohne Inhomogenität)

$$|u_\mu|^2 u_\mu = \mu^{-3d/2} u\left(\frac{x}{\mu}, \frac{t}{\mu^2}\right)$$

$$\partial_t u_\mu = \mu^{-d/2-2} \partial_t u\left(\frac{x}{\mu}, \frac{t}{\mu^2}\right)$$

$$\Delta u_\mu = \mu^{-d/2-2} \Delta u\left(\frac{x}{\mu}, \frac{t}{\mu^2}\right)$$

$$\mu^{-3d/2} = \mu^{-d/2-2} \quad \text{falls } d=2$$

\Rightarrow einfaches L^2 -invariant-lassendes Skalieren erlaubt es uns nicht die Kopplung λ der Inhomogenität / Nicht-linearität "wegzuschabern"

Ziel massenkritische NLS ist global wohlgestellt (kein Blow-up) falls $|d| \ll 1$. Das ist eine Konsequenz der Dispersion der Schrödingergleichung.

Veranschaulicht: Angenommen $-\Delta$ wäre von der Gleichung abwesend

$$\begin{cases} i\partial_t u = b |u|^2 u \\ u(0) = f \end{cases} \Rightarrow u(t) = (|u(0)|^{-2} - 2at)^{-1/(2a)} \frac{u(0)}{|u(0)|}$$

$$-id = a + ib \quad \text{Im } b = a$$

\Rightarrow Blow-up in endlicher Zeit, falls $\text{Im } b > 0$

nämlich zur Zeit $|u(0)|^{-2} / (2a)$

\Rightarrow Konsequenz aus Fehlen der Dispersion von $e^{it\Delta}$ und der Nichtlinearität $|u|^2 u$, die eine Feedbackschleife erzeugt, die $u(t)$ rapide in t wachsen lässt.

\Leftarrow $-\Delta$ sorgt dafür, dass die "großen" Teile von $u(t)$ nach $|x| \rightarrow \infty$ wegpropagieren.

Thm 3.24 (2d-masskritische NLS ist wohlgestellt)

Existenz

1) Sei $\|f\|_{L_x^2} = 1$. Falls $|d|$ klein genug ist, dann gibt es eine globale Lösung $u(t)$ mit $\|u\|_{L_x^2} \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ und $\|u\|_{L_{x,t}^4} \leq 1$ (dispersive Abschätzung)

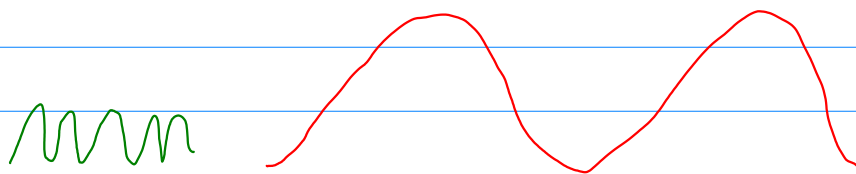
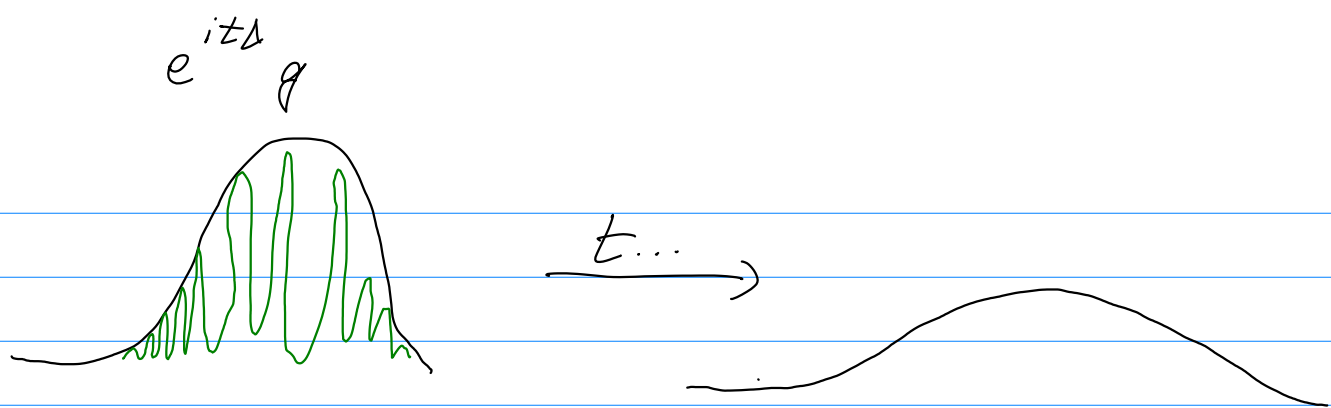
$$\frac{2k(k+2)}{d} \\ \stackrel{k=2}{=} 4$$

Eindeutigkeit + Stetigkeit

2) Die Lösung ist unter den gegebenen Anfangsdaten eindeutig und hängt stetig von den Anfangsdaten ($\|f\|_{L_x^2}$) ab

Streuung

3) Die Lösung streut, d.h. $\exists f_+ \in L_x^2(\mathbb{R}^2)$, so dass $\|u(t) - e^{it\Delta} f_+\|_{L_x^2} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$



$$(e^{it\Delta} g)(x) = \int e^{it\xi^2 + i\xi \cdot x} \hat{g}(\xi) d\xi$$

Wellen mit unterschiedlichen Frequenzen haben unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten / Phasengeschwindigkeiten
 \rightarrow hochfrequente Wellen überholen niedrigfrequente Wellen
 \Rightarrow Paket läuft auseinander und Amplitude wird kleiner \Leftrightarrow "Dispersion"

Quantifizierung $\|u(\cdot, t)\|_{L_x^\infty} \lesssim t^{-1/2}$
 (Anq. $\|u(\cdot, t)\|_{L_x^2} = 1$)

gemischte $\|u\|_{L_x^p L_t^q}$ Normen quantifizieren Dispersion nur im Raum-Zeit-Mittel

Fritz John - PDE oder J. Rauch - PDE

Beweis
Wir schauen uns nur Lösungen der Duhamelformel an

$$u(x,t) = e^{it\Delta} f + i\lambda \int_0^t ds e^{i(t-s)\Delta} (|u|^2 u)(s)$$

(freie Schrödinger)

Existenz und Eindeutigkeit für kleine $|\lambda|$.

Um eine Lösung zu bestimmen, gehen wir iterativ vor und hoffen, dass wir mit Fixpunktsätzen Existenz und Eindeutigkeit bekommen: Kritik In welchem Banachraum können wir Kontraktion beweisen? (trial-error)

Zu Nullter Ordnung sollte Lsg durch $u_0(x,t) = e^{it\Delta} f$.
Mit wachsender Zeit wird Nichtlinearität wichtiger
 \Rightarrow verbessere Ansatz zu

$$u_1(x,t) = e^{it\Delta} f + i\lambda \int_0^t ds e^{i(t-s)\Delta} (|u_0|^2 u_0)(s)$$

etc. ;

definiere $u_{k+1} = N u_k$

$$\text{mit } (Nu)(t) = e^{it\Delta} f + i\lambda \int_0^t ds e^{i(t-s)\Delta} (|u|^2 u)(s)$$

Ziel Finde einen Banachraum X , sodass $N: X \rightarrow X$ eine Kontraktion ist. \rightarrow Banach-Fixpunktsatz liefert Existenz & Eindeutigkeit.

hoffnung $X = L^4_{x,t}$ wg Strichartz-Abschätzung für Lösungen inhomogener Schrödingergleichungen.

Zeige also:

- $\|N(u) - N(v)\|_{L^4_{x,t}} \leq \|u - v\|_{L^4_{x,t}}$
- $\|u_0\|_{L^4_{x,t}} \leq 1$

$$\|u_0\|_{L^4_{x,t}} = \|e^{it\Delta} \psi\|_{L^4_{x,t}} \lesssim \|\psi\|_{L^2} = 1 \text{ (Strichartz)}$$

$$\Rightarrow \|N(u) - N(v)\|_{L^4_{x,t}} = |d| \left\| \int_0^t ds e^{i(t-s)\Delta} (|u|^2 u - |v|^2 v) \right\|_{L^4_{x,t}}$$

$\stackrel{1-1}{\lesssim} |u|^2 |u-v| + |v|^2 |u-v|$
 $\stackrel{2}{\lesssim} C_{\|u\|_4, \|v\|_4} \|u-v\|_{L^4_{x,t}}$

Konsequenz aus der retardierte Strichartz-Ungleichung

\Rightarrow für $|d| \ll 1$ ist RHS < 1 , dh Banach FP
 anwendbar \Rightarrow Existenz & Eindeutigkeit.

Homogene Strichartz: $\|e^{it\Delta} \psi\|_{L^4_{x,t}} \lesssim \|\psi\|_{L^2_x}$

7.7204

Duale homogene Strichartz: $\left\| \int_0^\infty e^{is\Delta} F(s) ds \right\|_{L^2_x} \lesssim \|F\|_{L^{4/3}_{x,t}}$

\Rightarrow Retardierte Strichartz: $\left\| \int_0^t ds e^{i(t-s)\Delta} F(s) \right\|_{L^4_{x,t}} \lesssim \|F\|_{L^{4/3}_{x,t}}$

$$\Rightarrow \left\| \int_0^t ds e^{i(t-s)\Delta} (|u|^2 u - |v|^2 v) \right\|_{L^4_{x,t}} \lesssim \left\| \underbrace{|u|^2 u - |v|^2 v}_{\stackrel{1-1}{\lesssim} |u-v|(|u|^2 + |v|^2)} \right\|_{L^{4/3}_{x,t}}$$

$$2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}$$

$$\lesssim \| |u-v| (|u|^2 + |v|^2) \|_{L^{4/3}_{x,t}}$$

$$\lesssim \|u-v\|_{L^4_{x,t}} \left(\|u\|_{L^4_{x,t}}^2 + \|v\|_{L^4_{x,t}}^2 \right)$$

$$\lesssim C_{\|u\|_4, \|v\|_4} \|u-v\|_{L^4_{x,t}}$$

\Rightarrow wenn $|d| \ll 1$, dann ist

$$\|N(u) - N(v)\|_{L^4_{x,t}} \leq d \cdot C_{\|u\|_4, \|v\|_4} \|u-v\|_{L^4_{x,t}} < 1$$

$\Rightarrow N$ ist Kontraktion auf $X = \{u \in L^4_{x,t} : \|u\|_{L^4_{x,t}} < C\}$

\Rightarrow Mit Banach'schem FP-Satz folgt Existenz, Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit der iterativ mit Duhamel konstruierten Lsg. $u(x,t)$.
 Des Weiteren gilt $\|u\|_{L_{x,t}^4} \leq 1$.

Verbleibt: Retardiertes Strichartz, $\|u(t)\|_{L_x^2} \leq 1$, Streuung.

$$\begin{aligned}
 L^2: \quad \|u(t)\|_{L_x^2} &\leq \|e^{it\Delta} f\|_{L_x^2} + \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} (|u|^2 u)(s) ds \right\|_{L_x^2} \\
 &= \|f\|_{L_x^2} \\
 &\leq \left\| \int_0^t ds e^{-is\Delta} |u|^2 u(s) ds \right\|_{L_x^2} \\
 &\stackrel{?}{\leq} \left\| \int_0^\infty ds e^{-is\Delta} |u|^2 u(s) ds \right\|_{L_x^2} \\
 &\stackrel{\text{dual homog. Strichartz}}{\leq} \| |u|^2 u \|_{L_{x,t}^{4/3}} = \|u\|_{L_{x,t}^4}^3
 \end{aligned}$$

Streuung: Finde $f_+ \in L^2(\mathbb{R}^2)$ sodass

$$\|u(t) - e^{it\Delta} f_+\|_{L_x^2} \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty?$$

$$u(t) = e^{it\Delta} f + i \int_0^t ds e^{i(t-s)\Delta} |u|^2 u$$

$$\rightarrow \text{motiviert: } f_+ = f + i \int_0^\infty e^{-is\Delta} |u|^2 u$$

$$\Rightarrow \|u(t) - e^{it\Delta} f_+\|_2 = \|i\| \left\| \int_0^\infty e^{i(t-s)\Delta} |u|^2 u \mathbb{1}_{[t, \infty)}(s) ds \right\|_{L^2}$$

$$\stackrel{\text{dual homog. Strich.}}{\leq} \|i\| \underbrace{\| |u|^2 u \|_{L_{x,t}^{4/3}}}_{\xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \text{ mit monotoner Konvergenz.}}$$

\rightarrow zeigt Streuung

Verbleibt Strichartz-Abschätzungen zu zeigen

$$\begin{array}{l}
 (\sim TT^* \quad \text{homog.} \quad L_x^2 \rightarrow L_{x,t}^4 \\
 \text{dual homog.} \quad L_{x,t}^{4/3} \rightarrow L_x^2 \\
 \text{ret.} \quad L_{x,t}^{4/3} \rightarrow L_{x,t}^4
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \swarrow \\
 \swarrow \\
 \swarrow
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{mittels Dualität (HA)} \\
 \text{mittels Dualität}
 \end{array}$$

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} F(s) \right\|_{L_{x,t}^4} \lesssim \|F\|_{L_{x,t}^{4/3}}$$

folgt aus pluriweisen Abschätzungen für $e^{it\Delta}(x-y)$

Retardierte \Rightarrow dual homogene:

$$\begin{aligned}
 \left\| \int_0^\infty ds e^{is\Delta} F(s) \right\|_{L_x^2}^2 &= \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds \langle e^{it\Delta} F(t), e^{is\Delta} F(s) \rangle_{L_x^2} \\
 &= \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds \langle F(t), e^{i(t-s)\Delta} F(s) \rangle_{L_x^2}^{(\mathbb{1}_{s < t} + \mathbb{1}_{t < s})}
 \end{aligned}$$

Wg Symmetrie genügt es $s < t$ zu betrachten. Dann ist RHS

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} dx \int_0^\infty dt \overline{F(t, x)} \int_0^t ds (e^{i(t-s)\Delta} F(s))(x) \right|$$

$$\stackrel{\text{Hölder in } (x,t)}{\leq} \|F\|_{L_{x,t}^{4/3}} \left\| \int_0^t ds e^{i(t-s)\Delta} F(s) \right\|_{L_{x,t}^4}$$

Retardiert Strichartz $\|F\|_{L_{x,t}^{4/3}}^2$; das zeigt ret. Strichartz \Rightarrow dual homog. Strichartz

Beweis von retard. Strichartz

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} F(s) \right\|_{L_{x,t}^4} = \left(\int_0^\infty dt \left\| \int_0^t ds e^{i(t-s)\Delta} F(s) \right\|_{L_x^4}^4 \right)^{1/4}$$

$$\stackrel{\delta\text{-Ugl.}}{\leq} \left(\int_0^\infty dt \left(\int_0^\infty ds \left\| e^{i(t-s)\Delta} F(s) \right\|_{L_x^4}^4 \right)^4 \right)^{1/4}$$

$$\|e^{it\Delta}\|_{L^2 \rightarrow L^2} = 1 \quad \|e^{it\Delta}\|_{L^1 \rightarrow L^\infty} \lesssim |t|^{-d/2} = |t|^{-1}$$

$$\Rightarrow \|e^{it\Delta}\|_{L_{x,t}^{4/3} \rightarrow L^4} \lesssim |t|^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \|e^{i(t-s)\Delta} F(s)\|_{L_x^4} \lesssim |t-s|^{-1/2} \|F(s)\|_{L_x^{4/3}}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \left(\int_0^\infty |t-s|^{-1/2} \|F(s)\|_{L_x^{4/3}} \right)^4 dt$$

$$1 + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \| | \cdot |^{-1/2} * \|F(\cdot)\|_{L_x^{4/3}} \|_{L_t^4}^4$$

$$\stackrel{HLS}{\leq} \| \|F(t)\|_{L_x^{4/3}} \|_{L_t^{4/3}} = \|F\|_{L_{x,t}^{4/3}} \quad \square$$

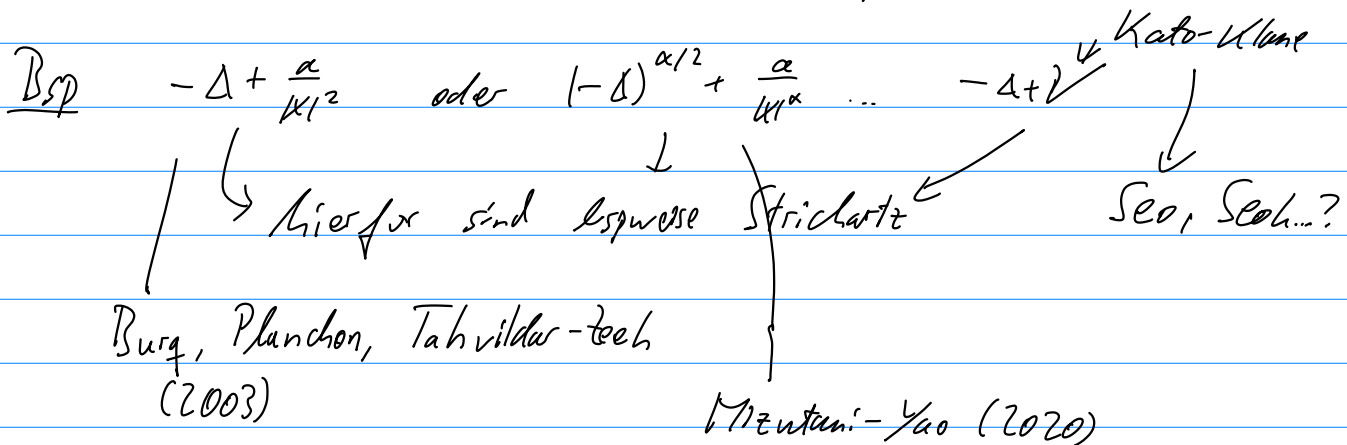
\Rightarrow Alle drei Strichartz-Abschätzungen lassen sich aus $L^1 \rightarrow L^\infty$ -Schranken für $e^{it\Delta}$ herleiten

\Rightarrow Keel-Tao ('98) abstrahierten diese Beobachtung

\rightarrow Krux: $L^1 \rightarrow L^\infty$ Schranken für $\exp(itA)$ für allgemeine s.a. Operatoren A schwierig herzuleiten.

$$(i\partial_t + \Delta + V) \psi = \overset{\text{Nichtlinearität}}{F(\psi)} \quad \Rightarrow \text{es bräuhete Kern-Abschätzungen für } \exp(it(\Delta+V)) \dots$$

\uparrow
 $L_{loc}^{d/2}$



Exkurs Äquivalente Formulierungen der Restriktionsvermutung S glatt, ~~getrennt~~, (kompakt)

Beh (1) $\| (f|_S)^\vee \|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|f\|_{L^p(S)}$ $q > \frac{2d}{d-1}$, $q = \frac{(d+1)p'}{d-1}$

\Rightarrow (2) $\| (f|_S)^\vee \|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|f\|_{L^\infty(S)}$ $q > \frac{2d}{d-1}$

\Rightarrow (3) $\| (f|_S)^\vee \|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|f\|_{L^q(S)}$ $q > \frac{2d}{d-1}$

Bew Hölder: (1) \Rightarrow (2) und (3) \Rightarrow (2)

Falls (2) \Rightarrow (3), dann folgt (1) \Leftrightarrow (2): dazu interpolieren wir

$\left. \begin{array}{l} F_S^* : L^1 \rightarrow L^\infty \text{ (trivial)} \\ (2) \ F_S^* : L^q \rightarrow L^q \quad \forall q > \frac{2d}{d-1} \end{array} \right\} \text{ falls } q = q_0 = \frac{2d}{d-1} \text{ dann } p = \frac{2d}{d-1}$
 \Rightarrow (1)

Wir müssen (2) \Rightarrow (3) zeigen; dazu dualisieren wir und zeigen

$F_S : L^p \rightarrow L^{q,\infty} \Rightarrow F_S : L^q \rightarrow L^q$
 $p > q \geq 1$

Matthia Sec. 19

\hookrightarrow TK Annahmen $1 \leq p \leq 2$ und

$L^p \rightarrow L^{1,\infty}$ $\sigma_S(\{ \xi \in S : |\hat{f}(\xi)| > \lambda \}) \lesssim \lambda^{-1} \|f\|_p$

$L^p \rightarrow L^{q,\infty}$ $\Rightarrow \sigma_S(\{ \xi \in S : |\hat{f}(\xi)| > \lambda \}) \lesssim \lambda^{-p} \|f\|_p^p$

und damit (Marcinkiewicz) $\| \hat{f}_S \|_q \lesssim \|f\|_q \quad \forall q < p$
 (mit $F_S : L^1 \rightarrow L^1$)

Bew Schritt 1: Sei $d > 0$ und $f_1, f_2, \dots \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mit

$$F: \ell^p L^p \rightarrow \ell^\infty L^{p/(p+1)}$$

$$\sum_j \|f_j\|_p^p \leq 1$$

$$\text{Beh } \sigma(\{\xi \in S: \sup_j |\hat{f}_j(\xi)| > \lambda\}) \leq \lambda^{-p/(p+1)}$$

$$\text{Bew: } g_\epsilon(x) = \sum_{j \geq 1} \epsilon_j f_j(x) \text{ mit } \{\epsilon_j\}_{j \in \mathbb{N}} \text{ Rademacher ZV}$$

$$\sigma(\{\xi \in S: \sup_j |\hat{f}_j(\xi)| > \lambda\}) = \int_{\{\xi: \sup_j |\hat{f}_j(\xi)| > \lambda\}} d\sigma(\xi) \cdot \frac{2}{2}$$

Beh f_j gilt:

$$P(\{\epsilon: |\hat{g}_\epsilon| > \lambda\}) \geq \frac{1}{2}$$

$$\hat{g}_\epsilon = \underbrace{\hat{f}_j}_a + \underbrace{\sum_{\ell \neq j} \hat{f}_\ell}_b$$

$$\max\{|a+b|, |a-b|\} > |a|$$

$$\leq 2 \int_{\{\xi: \sup_j |\hat{f}_j(\xi)| > \lambda\}} d\sigma \cdot P(\{\epsilon: |\hat{g}_\epsilon| > \sup_j |\hat{f}_j(\xi)|\})$$

Fubini + constraint vereine

$$\leq 2 \int dP(\epsilon) \sigma(\{\xi \in S: |\hat{g}_\epsilon(\xi)| > \lambda\})$$

$$\cdot (\mathbb{1}_{\|g_\epsilon\|_p > \lambda^{\theta p}} + \mathbb{1}_{\|g_\epsilon\|_p < \lambda^{\theta p}})$$

$$\leq 2 \lambda^{-\theta p} \int dP(\epsilon) \|g_\epsilon\|_p^p + \lambda^{-1} \int_{\|g_\epsilon\|_p < \lambda^\theta} dP(\epsilon) \|g_\epsilon\|_p \leq \lambda^{-1}$$

$$= \int dx \mathbb{E} \left| \sum_j \epsilon_j f_j \right|^p$$

$$\stackrel{\text{Khintchine}}{\sim} \int dx \left(\sum_j |f_j|^2 \right)^{p/2}$$

$$\leq \sum_j \|f_j\|_p^p \leq 1$$

$$\leq \lambda^{-\theta p} + \lambda^{-1} \xrightarrow{\text{optimiere in } \theta = \frac{1}{p+1}} \lambda^{-p/(p+1)}$$

$$\Rightarrow \text{ Falls } \sum_j \|f_j\|_p^p \leq 1 \Rightarrow \sigma(\{\xi \in S: \sup_j |\hat{f}_j(\xi)| > \lambda\}) \leq \lambda^{-p/(p+1)}$$

Schritt 2 Bew Für alle $\gamma \in (0, 1)$ \exists Borelmenge $B \subseteq S$ mit $\sigma(B) \leq \gamma$

$$\sigma(\{\xi \in S \setminus B : |\hat{f}(\xi)| > M\}) \leq \gamma^{-\frac{1}{p+1}} \cdot M^{-p} \|f\|_p^p \quad (+)$$

schaut so aus wie was
wir wollen; wir nehmen
später $\gamma = 1/2$

Konstruktiv Bew Definiere $M \equiv C^{\frac{1}{p}} \cdot \gamma^{-\frac{1}{p+1}}$ und bezeichne mit \mathcal{B}
die Familie aller Borelmengen $B \subseteq S$ mit der
Eigenschaft, dass es $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mit $\|f\|_p \leq 1$, sodass

$$|\hat{f}(\xi)|^p \sigma(B) > M^p \quad (*)$$

Sei \mathcal{U} die Familie aller disjunkten Teilfamilien von \mathcal{B} .
Ordne \mathcal{U} gemäß Inklusion \Rightarrow mit Zorn gibt es eine
maximale Teilfamilie $\{B_j\} \in \mathcal{U}$

Seien nun $f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ die zu den B_j korrespondieren
und (*) erfüllen und $c_j = \sigma(B_j)^{1/p}$

Sei $B := \cup B_j$ (die Menge, die die Behauptung liefern wir)

Jetzt zeigen wir (+) falls $x \in B$, dann $x \in B_j$
für ein j , d.h. (*) $c_j |\hat{f}_j(\xi)| > M$ ($\xi \in B_j$), d.h.

$$\Rightarrow B \subseteq \{\xi \in S : \sup_j c_j |\hat{f}_j(\xi)| > M\}$$

Weiter gilt $\sum \|c_j f_j\|_p^p = \sum \sigma(B_j) \|f_j\|_p^p \leq \sigma(S) \leq 1$

\Rightarrow Schritt 1 anwendbar.

$$\Rightarrow \sigma(B) \leq \sigma(\{\xi : \sup_j c_j |\hat{f}_j(\xi)| > M\}) \\ \leq M^{-p(p+1)} = \gamma$$

Angenommen es gäbe $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda > 0$, so dass
 $\sigma(\{\xi \in S \setminus B : |\hat{f}(\xi)| > \lambda\}) > M^p \lambda^{-p} \|f\|_p^p$

Dann gilt für $g := f / \|f\|_p$ und

erfolgt $B' \cap B = \emptyset \leftarrow B' = \{\xi \in S \setminus B : |\hat{g}(\xi)| > \lambda / \|f\|_p\}$

$\Rightarrow B' \cap B_j = \emptyset \quad \forall j \Rightarrow \sigma(B') = \sigma(\{\xi \in S \setminus B : |\hat{g}(\xi)| > \lambda\}) > M^p \lambda^{-p} \|f\|_p^p$

$\Rightarrow \sigma(B') / |\hat{g}(\xi)|^p > M^p \quad \swarrow$ zur Maximalität der B_j bzw. $B = \bigcup_j B_j$

D.h. bedeutet unsere Annahme war falsch, d.h. wir haben für gegebenes $y \in (0, 1)$ eine Borelmenge $B \subset S$ gefunden, sodass

$\sigma(\{\xi \in S \setminus B : |\hat{f}(\xi)| > \lambda\}) \leq y^{-p} \lambda^{-p} \|f\|_p^p \quad \square$

Schritt 3 Seien $E, F \subset S^{d-1}$ Borelmengen. Dann gibt es $g_0 \in \mathcal{O}(d)$, sodass

$\sigma(E \cap g_0(F)) = \sigma(E) \cdot \sigma(F)$

Beweis Sei θ_d das Haar-Maß auf $\mathcal{O}(d)$, dann ist $\mathcal{O}(d) \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $g \mapsto \sigma(E \cap g(F))$ ist stetig

$\Rightarrow \exists g_0 \in \mathcal{O}(d)$, sodass $\int \sigma(E \cap g(F)) d\theta_d(g) \stackrel{(*)}{=} \sigma(E \cap g_0(F)) \quad \forall \xi \in S$

Als Nächstes beobachtet man, dass \forall die Abbildung

$A \mapsto \sigma_d(\{g \in O(d) : \xi \in g(A)\})$ ist ein orthogonal
 invariantes ω -Maß auf S^{d-1}
 \Rightarrow wg. Eindeutigkeit von ω -Maßen folgt dass
 dieses Maß gerade mit σ übereinstimmt.

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \sigma(E \cap g_0(F)) &\stackrel{(*)}{=} \int \sigma(E \cap g(F)) d\sigma_d(g) \\
 &= \int \mathbb{1}_{E \cap g(F)}(\xi) d\sigma(\xi) d\sigma_d(g) \\
 \stackrel{\text{Fubini}}{=} &\int_E d\sigma(\xi) \underbrace{\sigma_d(\{g \in O(d) : \xi \in g(F)\})}_{\sigma(F)} \\
 &= \sigma(E) \cdot \sigma(F) \quad \square
 \end{aligned}$$

Jetzt zum Beweis des Theorems ($L^p \rightarrow L^{p, \infty}$ Schranke)
 Sei also $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\|f\|_p = 1$, $\lambda > 0$, $E = \{\xi \in S^{d-1} : |\hat{f}(\xi)| > \lambda\}$

Für $\eta = \frac{1}{2}$ gibt es nach Schritt 2 eine Borelmenge $B \subset S^{d-1}$

$$(**) \quad \sigma(\{\xi \in S^{d-1} \setminus B : |\hat{f}(\xi)| > \lambda\}) \leq \lambda^{-p} \|f\|_p^p, \quad \sigma(B) \leq \frac{1}{2}$$

gilt auch für B ersetzt durch $g_0(B)$ Mit Schritt 3 gibt es $g_0 \in O(d)$, sodass

$$\sigma(E \cap g_0(B)) = \sigma(E) \sigma(B) \leq \frac{1}{2} \sigma(E)$$

$$\Rightarrow \sigma(E \cap g_0(S^{d-1} \setminus B)) \geq \frac{1}{2} \sigma(E)$$

$$\Rightarrow \sigma(E) \leq 2 \sigma(E \cap g_0(S^{d-1} \setminus B))$$

$$\begin{aligned}
 &\leq 2 \sigma(E \cap S^{d-1} \setminus g_0(B)) \\
 &= 2 \sigma(\{\xi \in S^{d-1} \setminus g_0(B) : |\hat{f}(\xi)| > \lambda\}) \\
 &\leq \lambda^{-p} \|f\|_p^p \quad \square
 \end{aligned}$$