→ Stein (1993), Kap VIII (Wolff) 29.4.21

2 Oszillatorische Integrale der ersten Art

$$\| \hat{f}|_S \|_{L^q(S)} \lesssim \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

$$\to \| (g\, d\sigma)^\vee \|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \| g \|_{L^{q'}(S)}$$

$$(g\,d\sigma)^\vee(x) = \int_S g(\xi)\, e^{2\pi i x \cdot \xi}\, d\sigma(\xi) \qquad \int_S d\sigma(\xi)\, e^{2\pi i x \cdot \xi}$$

Wie verhält sich die Fouriertransformation von Flächenmaßen?

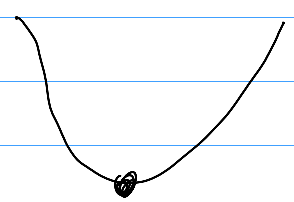
2.1 Oszillatorische Integrale in $d=1$

$$I(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda \phi(x)}\, \psi(x)\, dx$$

$\psi \in C^\infty(\mathbb{R} : \mathbb{C})$ .. Amplitude (oft ist ψ kompakt getragen)

$\phi \in C^\infty(\mathbb{R} : \mathbb{R})$ .. Phase

Frage Wie verhält sich $I(\lambda)$ für $\lambda \to \infty$?



2.1.1 Lokalisierung (Phase wird nie stationär)

Damit meinen wir, dass die Asymptotik von $I(\lambda)$ nur durch die Punkte bestimmt werden kann, wo $\phi'(x) = 0$.

Behauptung 2.1.1 $\psi \in C_c^\infty(a,b)$, $\psi(a) = \psi(b) = 0$, $\phi \in C^\infty((a,b))$ mit $\phi'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

$\Rightarrow \forall N \in \mathbb{N}$ gilt $|I(\lambda)| \lesssim_{\psi,\phi,N} \lambda^{-N}$.

Bew Mittels partieller Integration

$$\int_a^b dx \; e^{i\lambda\phi(x)} \psi(x)$$

Finde Differentialoperator D, der $D e^{i\lambda\phi(x)} = e^{i\lambda\phi(x)}$ erfüllt.

$$(Df)(x) = \frac{1}{i\lambda\phi'(x)} \frac{df}{dx} \quad \text{erfüllt} \quad D e^{i\lambda\phi} = e^{i\lambda\phi}$$

$$({}^tD g)(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{g}{i\lambda\phi'(x)}\right)$$

$$\langle \overset{C_c^\infty}{g}, D\overset{C_c^\infty}{f} \rangle_{\mathcal{S},\mathcal{S}'} = \int g(x) \frac{1}{i\lambda\phi'} f'(x) = \int \partial_x\left(\frac{g}{i\lambda\phi'}\right) f = \langle {}^tD g, f \rangle$$

$$|I(\lambda)| = \left| \int_a^b dx \, (D^N e^{i\lambda\phi}) \psi(x) \right|$$

$$= \left| \int_a^b dx \; e^{i\lambda\phi} ({}^tD)^N \psi(x) \right|$$

$\lesssim_{\psi,\phi} \lambda^{-N}$, da alle Integrale wg $\psi \in C_c^\infty$, $\phi \in C^\infty$, $\phi' \neq 0$ existieren

$\boxtimes$

Bemerkung Argument verwendete, dass $\psi \in C_c^\infty((a,b))$.

Falls $\psi(a) \neq \psi(b) \neq 0$ ist Abfall höchstens $1/\lambda$.

Gegenbsp $$\int_a^b e^{i\lambda x} dx = \frac{e^{i\lambda b} - e^{i\lambda a}}{\lambda}$$

HA Finde Kriterien für ψ und ϕ, mit $\psi(a), \psi(b) \neq 0$, sodass doch ein λ^{-N}-Abfall möglich ist.

2.1.2 Skalieren

Angenommen, wir wüssten nur $\left|\frac{d^{(k)}\phi}{dx^k}\right| \geq 1$ und wir wollten eine Abschätzung für $\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}\,dx$, die nicht von a und b abhängt.

Bsp $(a,b) = (-1,1)$, $\phi = x^k$; Skalieren $x \mapsto x\cdot\lambda^{1/k}$

zeigt, dass höchstens $\lambda^{-1/k}$-Abfall erwartbar.

$$\int_{-1}^{1} e^{i\lambda x^k}\,dx = \underbrace{\int_{-\lambda^{-1/k}}^{\lambda^{-1/k}} e^{i\lambda x^k}\,dx}_{\sim \lambda^{-1/k}} + \underbrace{\int_{\lambda^{-1/k}}^{1} e^{i\lambda x^k}\,dx + \int_{-1}^{-\lambda^{-1/k}} e^{i\lambda x^k}\,dx}_{\substack{\text{nichtstationäre Phase} \sim \lambda^{-1} \\ \text{(einmal partiell integrieren)}}}$$

Behauptung 2.1.2 (van der Corput)

Sei $\phi \in C^\infty((a,b):\mathbb{R})$ mit $|\phi^{(k)}(x)| \geq 1 \;\forall x \in (a,b)$. Angenommen

(i) $k \geq 2$ oder

(ii) $k = 1$ und $\phi'(x)$ ist monoton

Dann $\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}\,dx\right| \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{unabhängig} \\ \text{von } \phi,\, a, b, \lambda}}{c_k}\, \lambda^{-1/k}$

Bemerkung Im Fall $k = 1$ ist die Schranke $|\phi'| > 1$ alleine nicht ausreichend. HA $\to$ Gegenbsp.

5.5.21

Beweis $k = 1$, $\phi'(x)$ monoton.

$(Df)(x) = \frac{1}{i\lambda\phi'(x)}\partial_x f$; $De^{i\lambda\phi} = e^{i\lambda\phi}$; $(D^t g)(x) = \partial_x\left(\frac{g}{-i\lambda\phi'}\right)$

$$\int_a^b D e^{i\lambda\phi(x)} \cdot 1 \, dx = \underbrace{\int_a^b dx \left(D^t(1)\right) e^{i\lambda\phi(x)}}_{} + \underbrace{\left(i\lambda\phi'\right)^{-1}\Big|_a^b}_{\overset{|\cdot|}{\leq} 2\lambda^{-1}}$$

$$\overset{|\cdot|}{=} \left| \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} \partial_x \left(\frac{-1}{i\lambda\phi'} \right) dx \right| \leq \frac{1}{\lambda} \int_a^b dx \left| \partial_x \frac{1}{\phi'(x)} \right|$$

ϕ' monoton $\Downarrow$ $\frac{1}{\phi'}$ monoton $\Big\}$ $\partial_x \frac{1}{\phi'}$ hat VZ

$$= \frac{1}{\lambda} \left| \int_a^b dx \, \partial_x \frac{1}{\phi'} \right| = \frac{1}{\lambda} \left| \frac{1}{\phi'(b)} - \frac{1}{\phi'(a)} \right| \leq \frac{2}{\lambda}.$$

$\to$ zeigt Beh. für $k = 1$.

$k \geq 2$ mittels Induktion, $k \mapsto k+1$

OBdA $\phi^{(k+1)}(x) \geq 1$, $x \in (a,b)$ (ansonsten ersetze $\phi \mapsto -\phi$)

(1) (2) (3)

Sei $c \in [a,b]$ der Punkt, wo $|\phi^{(k)}|$ minimal wird

Betrachte nur Fall (3); (1) und (2) analog

$$\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} dx = \underbrace{\int_a^{c-\delta} e^{i\lambda\phi} dx}_{(i)} + \underbrace{\int_{c-\delta}^{c+\delta} e^{i\lambda\phi} dx}_{(ii)} + \underbrace{\int_{c+\delta}^{b} e^{i\lambda\phi}}_{(iii)}$$

für $\delta > 0$ so klein, dass $a < c - \delta < c + \delta < b$.

(i) bzw. (iii): können wir Induktionsvoraussetzung anwenden

$|\phi^{(k+1)}(x)| \geq 1$ $\quad$ $|\phi^{(k)}(x)| \geq \delta$

$\left((\delta^{\frac{1}{k}}x)^k\right)^{(k)} \sim \delta$ und erhalten $\left|\int_a^{c-\delta} e^{i\lambda\phi}\,dx\right| \underset{\substack{| \\ x \mapsto x/\delta^{1/k}}}{\lesssim} \lambda^{-1/k}\cdot\delta^{-1/k}$

(ii) $\left|\int_{c-\delta}^{c+\delta} e^{i\lambda\phi}\,dx\right| \leq 2\delta$

$\rightarrow$ insgesamt erhalten wir $\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi}\,dx\right| \lesssim \delta + (\lambda\delta)^{-1/k}$

$\rightarrow$ optimiere in δ, also wo $\delta = (\lambda\delta)^{-1/k} \Leftrightarrow \delta = \lambda^{-1/(k+1)}$

$\Rightarrow \left|\int_a^b e^{i\lambda\phi}\right| \lesssim \lambda^{-1/(k+1)}$

__Korollar 2.1.3__ Seien $\phi \in C_c^\infty((a,b):\mathbb{R})$, $\psi \in C^\infty((a,b):\mathbb{C})$

und $|\phi^{(k)}(x)| \geq 1 \quad \forall x \in (a,b)$ und

(i) $k=1$ und ϕ' monoton.
(ii) $k \geq 2$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)\right| \leq \underset{\substack{| \\ \text{unabh. von } \phi, a, b, \lambda}}{C_k} \lambda^{-1/k}\left[|\psi(b)| + \int_a^b |\psi'(x)|\,dx\right]$$

__Beweis__ HA

Jetzt Asymptotiken oszillatorischer Integrale mittels stationärer Phase.

Beh. 2.1.4 Sei $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}:\mathbb{R})$, $h \geq 2$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\phi(x_0) = \phi'(x_0) = \dots = \phi^{(h-1)}(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad \phi^{(h)}(x_0) \neq 0.$$

Sei $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}:\mathbb{C})$ mit $\operatorname{supp}\psi \ni x_0$ hinreichend klein. Dann gilt

$(1-iw)^{-1/2}$

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)\,dx \sim \lambda^{-1/h}\sum_{j\geq 0} a_j \lambda^{-j/h}, \quad \text{wobei}$$

a_j nur von endlich vielen Ableitungen von ϕ und ψ bei x_0 abhängen und die Notation "$\sim$" bedeutet, dass für alle $N, r \in \mathbb{N}_0$ gibt es $C_{\phi,\psi,r,N} > 0$ s.d.

$$\left| \frac{d^{(r)}}{d\lambda^r}\left[I(\lambda) - \lambda^{-1/h}\sum_{j=0}^{N} a_j \lambda^{-j/h} \right] \right| \leq C_{\phi,\psi,r,N} \cdot \lambda^{-\frac{N+1}{h}-r}, \quad \lambda \gg 1.$$

Bem Wir betrachten nur $h = 2$. In diesem Fall ist

$$\phi(x) = \frac{\phi''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + O((x-x_0)^3) \qquad a_0 = \left(\frac{2i\pi}{\phi''(x_0)}\right)^{1/2}\psi(x_0).$$

(falls $\phi = x^2$, dann $a_0 = \psi(x_0) \cdot c_0^{(0)}$

Beweis Nur f. $h = 2$.

Zunächst $\phi(x) = x^2$. $\to$ Zerlege Untersuchung in drei Schritte

sehr grobe Idee:
$$\int \underline{e^{i\lambda x^2} e^{-x^2}} \; \frac{e^{x^2}\psi(x)}{\sum b_j x^j}$$

$x \mapsto x/(1-i\lambda)^{-1/2}$

$\to$ **Schritt 1:** $\ell \in \mathbb{N}_0$: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} e^{-x^2} \cdot x^\ell \, dx \sim \lambda^{-\frac{\ell+1}{2}} \sum_{j\geq 0} c_j^{(\ell)} \lambda^{-j}$

$x \mapsto (1-i\lambda)^{-1/2} x$

$$(1-i\lambda)^{-(\ell+1)/2} \underbrace{\int dx\, e^{-x^2} x^\ell}_{c_\ell} = c_\ell \lambda^{-(\ell+1)/2} \underbrace{(\lambda^{-1}-i)^{-1/2}}_{\text{in Potenzreihe entwickeln}}$$

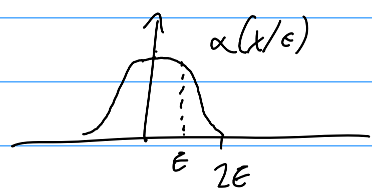
<u>Schritt 2</u> $\eta \in C_c^\infty$, $\ell \in \mathbb{N}_0$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit $g(x)=0$ f. $|x| \ll 1$.

a) $\left|\int e^{i\lambda x^2} \eta(x) x^\ell \, dx\right| \lesssim_\eta \lambda^{-(\ell+1)/2}$

b) $\forall N \in \mathbb{N}$ $\left|\int e^{i\lambda x^2} g(x)\, dx\right| \lesssim \lambda^{-N}$

Bew. v. a) und b).

Zu a): Zerlege Problem in $|x|<\epsilon$ und $|x|>\epsilon$ für ein zum Schluß zu optimierendes $\epsilon > 0$.



$\alpha \in C_c^\infty$ mit $\alpha(x) = \begin{cases} 1 & |x|<1 \\ [0,1] & |x| \in [1,2] \\ 0 & |x|>2 \end{cases}$

$$\int e^{i\lambda x^2} \eta(x) \left(\alpha\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + 1 - \alpha\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right) x^\ell \, dx$$

$|x|<\epsilon$ $\quad \left|\int e^{i\lambda x^2} \eta(x)\, \alpha\left(\frac{x}{\epsilon}\right) x^\ell dx\right| \le \int dx\, |x|^\ell \alpha\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \eta(x)$

$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx\, x^\ell \sim \epsilon^{\ell+1}$ $\quad \lesssim_\alpha \|\eta\|_\infty \cdot \epsilon^{\ell+1}$ Beitrag vom Regime stationärer Phase

$|x|>\epsilon$: nicht-stationäre Phase → partielle Integration mit

$\phi = x^2$ $\quad$ Differentialoperator $Df = \frac{1}{2i\lambda x} \partial_x f$; $D e^{i\lambda x^2} = e^{i\lambda x^2}$

→ nach N-facher partieller Integration erhalten wir

$$\int \underbrace{D^N e^{i\lambda x^2}}_{e^{i\lambda x^2}} \eta(x) \left(1 - \alpha\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right) x^\ell \qquad {}^tD\, g = -\partial_x \left(\frac{g}{i\lambda x}\right)$$

keine Randterme da $\eta \in C_c^\infty$ $\overset{?}{=} \int e^{i\lambda x^2} ({}^tD)^N \left[\eta(x)\left(1-\alpha\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right) x^\ell\right]$

$\partial_x x^{\ell-1} = x^{\ell-2}$

$\partial_x x^{\ell-2-1} = x^{\ell-4}$!

$$|\cdot| \lesssim \lambda^{-N} \int_{|x|>\epsilon} x^{\ell-2N} \underset{N>\frac{\ell+1}{2}}{\sim} \lambda^{-N}\cdot \epsilon^{\ell-2N+1}$$

$\rightarrow$ zusammen $\left|\int e^{i\lambda x^2} x^{\ell} \eta(x)\,dx\right| \lesssim_{\eta,\ell,N} \min_{\epsilon>0} \epsilon^{\ell+1} + \lambda^{-N}\epsilon^{\ell-2N+1}$

$$\underset{\text{optimieren in } \epsilon}{\sim} \lambda^{-(\ell+1)/2}$$, wie gewünscht ✓

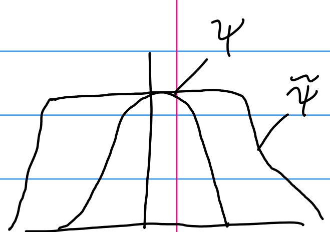
$\epsilon^{\ell+1} = \epsilon^{\ell+1-2N}\cdot\lambda^{-N}$

$\Leftrightarrow \epsilon = \lambda^{-1/2}$

d) $\left|\int e^{i\lambda x^2} g(x)\,dx\right| \lesssim_{g,N} \lambda^{-N}$ analog (nicht-stationäre Phase)

<u>Schritt 3</u> Kombiniere Schritt 1 + Schritt 2

$$\int e^{i\lambda x^2} e^{-x^2} \underbrace{e^{x^2}\psi(x)}_{P_N + x^{N+1}R_N = \sum_{j=0}^{N} b_j x^j + x^{N+1}R_N(x)} \tilde{\psi}(x)$$



$\tilde{\psi} \in C_c^{\infty}$

$\tilde{\psi}|_{\operatorname{supp}\psi} = 1$

$$= \sum_{j=0}^{N} b_j \int e^{i\lambda x^2} e^{-x^2} x^j + \underbrace{\int e^{i\lambda x^2} x^{N+1} R_N(x) e^{-x^2} \tilde{\psi}(x)}_{\lambda^{-(N+2)/2}}$$

$$+ \underbrace{\int e^{i\lambda x^2} e^{-x^2} P(x) \left(1-\tilde{\psi}(x)\right)}_{\lesssim \text{"}\lambda^{-\infty}\text{" (nicht-stationäre Phase)}}$$

Jetzt zum allgemeinen Fall $\phi(x)$ mit $\phi(x_0) = \phi'(x_0) = 0$, $\phi''(x_0) \neq 0$.

$\rightarrow$ Für $|x-x_0| \ll 1$ entwickeln wir

$\phi(x) = \frac{\phi''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + O((x-x_0)^3)$, d.h. für ein $\epsilon(x) \in C^1$ die $\epsilon(x) = O(|x-x_0|)$ erfüllt schreiben wir

$$\phi(x) = \frac{\phi''(x_0)}{2}(x-x_0)^2\left[1+\epsilon(x)\right].$$

Wähle eine Umgebung $U \ni x_0$ so klein, dass $\phi'(x) \neq 0$ falls $x \in U$, $x \neq x_0$

Sei $y = (x-x_0)\,[1+\epsilon(x)]^{1/2}$ für $x \in U$

$\rightarrow$ Wg Annahme an U ist $U \rightarrow V$, $x \mapsto y$ mit $\frac{\phi''(x_0)}{2} y^2 = \phi(x)$

ein C^1-Diffeo wobei V eine kleine Umgebung um 0.

$\rightarrow \int e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)\,dx = \int \exp\left(i\lambda \frac{\phi''(x_0)}{2} y^2\right)\tilde{\psi}(y)\,dy$

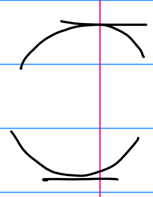
mit $\tilde{\psi}(y) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}\tilde{\psi} \subseteq V$

$\rightarrow$ Fall wo $\phi(x) = x^2$ ist kann angewandt werden.

$\rightarrow$ durch Skalieren $y \mapsto \sqrt{2}\,(\phi''(x_0))^{-1/2}$ ist Konstante $a_0 = \left(\frac{2\pi i}{\phi''(x_0)}\right)^{1/2}$ ersichtlich $\boxtimes$

$\rightarrow$ Bsp Besselfkt.

$$J_m(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ir\sin\theta}\, e^{-im\theta}\, d\theta, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$



mit $\lambda = r$ $\phi(x) = \sin x$ $\psi(x) = e^{-imx}$.

$\rightarrow J_m(r) = O(r^{-1/2})$ für $r \to \infty$. (v.d. Corput, da Sinus ~ quadratisch bei $x = \pi/2$)

mit Asymptotik $J_m(r) = r^{-1/2} \sum a_j^{(m)} r^{-j} e^{ir} + \sum b_j^{(m)} r^{-j} e^{-ir}$

$x_0 = \pi/2, \frac{3\pi}{2}$ führender Term gerade $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, r^{-1/2} \cos\left(r - \frac{\pi m}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(r^{-3/2})$

$\hookrightarrow \sum_{x_0} \psi(x_0)\cdot\sqrt{\frac{2\pi i}{1}} = \sqrt{2\pi i}\,\left(e^{-im\pi/2+ir} - e^{-ir+im\pi/2}\right)\cdot\frac{r^{-1/2}}{2\pi} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, r^{-\frac{1}{2}}\cos(\dots)$

Für andere Regime → WKB-Analyse
(Olver, Barcelo-Ruiz-Vega, Córdoba)
1968 1997 2016
↓
Abramowitz-Stegun

6.5.2021

2.2 Oszillatorische Integrale in $d \geq 2$

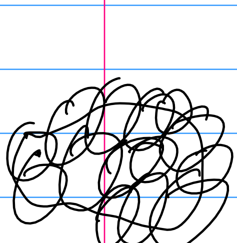
Def $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ hat bei x_0 einen kritischen Punkt, falls $(\nabla\phi)(x_0) = 0$

Beh 2.2.1 (Lokalisierung) Seien $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d : \mathbb{C})$ (Amplitude)
$\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d : \mathbb{R})$ (Phase)
so, dass keine kritischen Punkte von ϕ in supp ψ liegen.

$$\Rightarrow \forall N \in \mathbb{N}: \quad I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\lambda\phi(x)} \psi(x)\, dx = O_{N,\psi,\phi}(\lambda^{-N}).$$

Bew $\forall x_0 \in \text{supp}\, \psi \;\exists B_{x_0}$ (klein) und $\xi \in S^{d-1}$ so, dass $(\nabla\phi)(x_0) \cdot \xi > 0$
Da $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ überdecken wir supp ψ mit endlich vieler solcher Kugeln. Zerlege dementsprechend

$$\psi = \sum_{k=1}^{K} \psi_k \text{, wobei } \psi_k \text{ auf solchen Kugeln getragen sind}$$



$$\to \text{betrachte in } I(\lambda) = \sum_{k=1}^{K} \int e^{i\lambda\phi(x)} \psi_k(x)\, dx \text{ jeden}$$

Summanden einzeln und rotiere im k-ten Summanden Koordinatensystem so, dass z.B. x_1-Richtung mit $\xi \in S^{d-1}$ (von oben) übereinstimmt

$$\rightarrow \int e^{i\lambda\phi(x)}\psi_k(x)dx = \int dx_2 .. dx_d \underbrace{\left(\int dx_1\ e^{i\lambda\phi(x)}\psi_k(x)\right)}_{\text{Beh 2.1.1 anwendbar, da } \partial_1\phi \geq c > 0.}$$

$$\rightarrow \forall N: \int e^{i\lambda\phi(x)}\psi_k(x)dx = O_{\psi,\phi,N}(\lambda^{-N})$$ ⊡

Beh 2.2.2 (Scaling) Sei $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d : \mathbb{C})$ mit $\operatorname{supp}\psi \subseteq B_0(1)$ und sei $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d : \mathbb{R})$ so, dass es einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^d$ gibt mit $|\alpha| = \sum_j^d \alpha_j = k$

$$|\partial_x^\alpha \phi| \geq 1 \quad \text{auf } \operatorname{supp}\psi$$

$$\left|\int e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)\,dx\right| \leq c_k(\phi)\,\lambda^{-1/k}\left[\|\psi\|_\infty + \|\nabla\psi\|_{L^1}\right]$$

beschr. solange auch $\|\phi\|_{C^{k+1}} < \infty$

Bem Die Behauptung ist nicht optimal: sei $d=2$, $\phi(x) = x_1 \cdot x_2$
$\rightarrow$ Behauptung würde einen $\lambda^{-1/2}$ - Abfall geben,
$\Rightarrow$ nicht optimal im Hinblick auf nächste Behauptung, wo wir „quadratische Phasen" anschauen werden und in d Dimensionen einen $\lambda^{-d/2}$ - Abfall bekommen.

Beweis $|\partial^k\phi| > 1 \qquad |(\xi\cdot\nabla)^k\phi| > 1$ (dann $d=1$ Resultat anwenden)

$|\partial_x^\alpha \phi| > 1$

Raum der reellen homogenen Polynome vom Grad k in $\mathbb{R}^d$ mit Dimension $n(k,d)$ hat z.B. die Basis

- $\{x^\alpha : |\alpha| = k\}$
- $\{(\xi^j \cdot x)^k : (\xi_j)_{j=1}^{n(k,d)}\}$ für gewisse $(\xi_j)_{j=1}^{n(k,d)} \in S^{d-1}$

$\Rightarrow$ Falls also $|(\partial_x^\alpha \phi)(x_0)| \geq 1$, dann gilt es $\xi = \xi(x_0) \in S^{d-1}$ und ein $a_k > 0$, sodass $|((\xi \cdot \nabla)^k \phi)(x_0)| \geq a_k$

Insbesondere gilt $|((\xi \cdot \nabla)^k \phi)(x)| \geq \frac{a_k}{2}$ (Dreiecksungl. + Mittelwertsatz) falls $|x - x_0| < \|\phi\|^{-1}_{C^{k+1}}$

$|\phi^{(k)}(x) - \phi^{(k)}(x_0)| \leq \|\phi\|_{C^{k+1}} |x - x_0|$

$\Rightarrow$ Wir zerlegen $\operatorname{supp} \psi$ in Kugeln B_k mit Radi kleiner als $\text{const} \|\phi\|^{-1}_{C^{k+1}}$.

$\rightarrow$ Zerlege $\psi(x) = \sum_{k=1}^{K} \psi_k(x)$ wie im Beweis von Beh 2.2.1

und betrachte einen festen Summanden und rotiere Koordinatensystem v. $\int e^{i\lambda\phi} \psi(x) dx$ so, dass x_1-Richtung mit $\xi \in S^{d-1}$ übereinstimmt

$$\int e^{i\lambda\phi(x)} \psi_k(x) = \int dx_2 .. dx_d \left(\int dx_1 \; e^{i\lambda\phi(x)} \psi_k(x) \right)$$

$|(\xi_1 \cdot \partial_1)^k \phi| > a_k$

$\rightarrow$ $d=1$ - Resultat anwendbar.

(Beh 2.1.2)

$$\left| \int_{\mathbb{R}} dx_1 \; e^{i\lambda\phi(x)} \psi_k(x) \right| \leq c_k \cdot (a_k \cdot \lambda)^{-1/k} \left(\|\psi_k\|_\infty + \|\nabla \psi_k\|_{L^1} \right)$$

$\rightarrow$ integrieren über die restlichen $d-1$ Koordinaten zeigt Behauptung. ☒

<u>Lemma</u> Polynome der Form $(\xi \cdot x)^k$ $(\xi \in \mathbb{R}^d)$ bilden Basis des Raums der homogenen reellen Polynome vom Grad $k \in \mathbb{N}$.

<u>Bew</u> Betrachte inneres Produkt $\langle P, Q \rangle = \sum_{|\alpha|=k} \alpha! \; a_\alpha b_\alpha$

$$P(x) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha x^\alpha, \quad Q(x) = \sum_{|\alpha|=k} b_\alpha x^\alpha.$$

$$Q(\partial_x)(P) = \langle P, Q \rangle$$

Angenommen, P wäre bzgl. dieses inneren Produkts orthogonal zu allen $(\xi \cdot x)^k$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$. Das bedeutet

$$(\xi \cdot \nabla)^k P = 0$$

$$\|$$

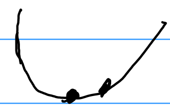
$$\partial_t^k \underbrace{P(t \cdot \xi)}_{\sum a_\alpha (t\xi)^\alpha} \qquad \Rightarrow P = 0 \qquad \boxtimes$$

<u>Def</u> Sei $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d : \mathbb{R})$ mit kritischem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Dann heißt x_0 heißt nicht-entartet, falls

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{i,j=1}^d \quad \text{invertierbar ist.}$$

<u>Bem</u> Durch Taylor-Entwicklung ist ersichtlich, dass nicht-entartete kritische Punkte sogar isoliert sein.

x nahe bei x_0 (nicht-entartet, kritisch), dann ist x nicht kritisch.



<u>Satz 2.2.3</u> (Asymptotiken für quadratische Phasen)

Angenommen $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d : \mathbb{R})$, $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d : \mathbb{C})$, sodass $\operatorname{supp} \psi$ nur einen nicht-entarteten, kritischen Punkt x_0 von ϕ beinhaltet.

$$\Rightarrow \int e^{i\lambda\phi(x)} \psi(x) \underset{\text{asympt. Notation}}{\sim} \lambda^{-d/2} \sum_{j=1}^{\infty} a_j \lambda^{-j},$$

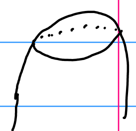
wobei die a_j nur von endlich vielen Ableitungen von ψ, ϕ bei x_0 abhängen.

Außerdem $a_0 = \sqrt{2\pi} \prod_{j=1}^{d} (-i\mu_j)^{-1/2}$, wobei

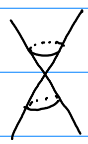
$D^2\phi(x_0) \cong \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & \ddots \; -1 \end{pmatrix}$

$(\mu_j)_{j=1}^d$ die Eigenwerte von $\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right)_{i,j=1}^d$ sind.

Beweis Verfahre wie in $d=1$. Zuerst schauen wir quadrat. Phasen $Q(x) = \sum_{j=1}^m x_j^2 - \sum_{j=m+1}^d x_j^2$ $\quad m \in [0, d]$



$m = 0$



$m = 1$ (Kegel)

Schritt 1 $\quad d=1$. $\int e^{i\lambda x^2} x^\ell e^{-x^2} dx \sim \lambda^{-1/2-\ell/2} \sum c_j^{(\ell)} \lambda^{-j}$

$d \geq 2$: $\int e^{i\lambda Q(x)} x^\ell e^{-x^2} dx \sim \lambda^{-d/2 - |\ell|/2} \sum_{j=1}^{\infty} c_j(m,\ell) \lambda^{-j}$

Beweis wie in $d=1$ durch Faktorisieren $x^\ell = x_1^{\ell_1} \cdots x_d^{\ell_d}$

$e^{i\lambda Q} = e^{i\lambda x_1^2} \cdots e^{i\lambda x_m^2} e^{-i\lambda x_{m+1}^2} \cdots e^{-i\lambda x_d^2}$

$$\prod_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}} dx_j \, e^{\pm i\lambda x_j^2} e^{-x_j^2} x_j^{\ell_j} = \prod_{j=1}^d (1 \mp i\lambda)^{-(1+\ell_j)/2}$$

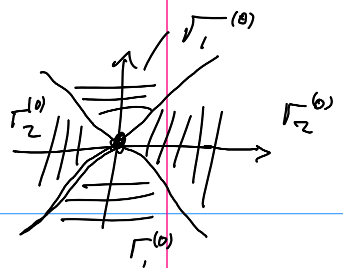
$$= \prod_{j=1}^d \lambda^{-(1+\ell_j)/2} \underbrace{(\mp i + \lambda^{-1})}_{\text{Reihe wie in } d=1}$$

$$\prod_{j=1}^d \lambda^{-(1+\ell_j)/2} = \lambda^{-(d+|\ell|)/2}.$$

Schritt 2 $\quad \left| \int e^{i\lambda Q(x)} \eta(x) x^\ell dx \right| \lesssim_{\eta,\ell} \lambda^{-(d+\ell)/2}$ $\quad \forall \eta \in C_c^\infty$.

$\left| \int e^{i\lambda Q(x)} g(x) dx \right| \lesssim \lambda^{-N}$ $\quad \forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mit $g(x) = 0$ f. $|x| \ll 1$.

Idee: Wieder zurückführen auf $d=1$, durch



Lokalisieren auf Umgebungen der Koordinatenachsen.

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{j=1}^{d} \Gamma_j^{(0)} \quad \text{mit} \quad \Gamma_j^{(0)} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x_j|^2 \geq \frac{|x|^2}{d}\}$$

$\Gamma_1^{(0)} : x_1^2 > \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \Leftrightarrow x_1^2 > x_2^2$

Γ_2 $\quad x_2^2 > x_1^2$

Seien weiter $\Gamma_j = \{x \in \mathbb{R}^d : |x_j|^2 > \frac{|x|^2}{2d}\}$

→ Zerlege damit $1 = \sum_{j=1}^{d} \Omega_j(x)$, wobei die Ω_j abseits des Ursprungs glatt und homogen vom Grad 0 sind mit supp $\Omega_j \subseteq \Gamma_j$.

→ Zerlege $\int e^{i\lambda Q(x)} x^\ell \eta(x)\,dx = \sum_{j=1}^{d} \int e^{i\lambda Q(x)} x^\ell \eta(x) \Omega_j(x)$

→ Schaue Summanden einzeln an und wiederholen die d=1-Strategie (size-estimates nahe 0 und nicht-stationäre Phase weit weg)

$D f = \frac{1}{i\lambda\phi'} \partial_x f \qquad (D_j f)(x) = (\pm 2 i \lambda x_j)^{-1} \partial_j f$

Mit $|x_j| > \frac{|x|}{\sqrt{2d}}$ in Γ_j $\quad ({}^t D_j)^N \Omega_j = \lambda^{-N} |x|^{-2N}$.

$\partial\left(\frac{\Omega}{|x|}\right) \sim |x|^{-2}$

$\partial\left(\frac{\Omega}{|x|^3}\right) \sim |x|^{-4}$

Schritt 3 Kombiniere Schritt 1 + Schritt 2 wie in d=1

Um von $Q(x)$ auf $\phi(x)$ zu kommen substituieren wir wieder Variablen, also

$$\to y = (x - x_0)\,(1 + \epsilon(x))^{1/2}$$
$$(\phi(x) = c \cdot (x - x_0)^2 \,(1 + \epsilon(x)))$$

$y = y(x)$ ist wg Morse-Lemma ein C^1-Diffeomorphismus welcher $\phi(x)$ in $\sum_{j=1}^{m} y_j^2 - \sum_{j=m+1}^{d} y_j^2$ transformiert

wobei m gerade der Index der quadratischen Form, die zu $\underbrace{\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right)_{i,j=1}^{d}}_{=M}$ gehört

$\exists$ Ähnlichkeitstransf. U s.d. $UMU^{-1} = \begin{array}{c} m \times m \\ \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{matrix} & \\ \hline & \begin{matrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & \ddots \end{matrix} \end{array}\right) \\ (d-m-1)\times(d-m) \end{array}$

$\longrightarrow$ Stein 1993 (Harmonic Analysis Kap VIII)

Morse $\overset{C^\infty}{\phi}(x_0) = \nabla\phi(x_0) = 0$, $\left(\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}\right)(x_0)\right)_{i,j=1}^{d}$ nicht entartet

$\exists$ C^1-Diffeo, der $\phi(x)$ in $Q(x)$ überführt.

Bew OBdA $x_0 = 0$. $\phi(x) = \sum_{i,j=1}^{d} \phi_{ij}(x)\, x_i x_j$ f. $|x| < 1$. (*)

$\phi_{ij} = \phi_{ji}$ glatt.

Insb. ist $\phi_{ij}(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}\right)(0)$

($\phi(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\phi(tx)\,dt = \underbrace{\int_0^1 (1-t)\underbrace{\frac{d^2}{dt^2}\phi(tx)}\,dt}$

(*) folgt durch Ausführen von Ableitung und Integration der rechten Seite)

Per Induktion: Angenommen es gäbe Variablen $y_1, \dots, y_d$ sodass

$$\phi(y) = \pm y_1^2 \pm y_2^2 \pm \dots \pm y_{r-1}^2 \pm \sum_{j,k\geq r} \tilde{\phi}_{jk}(y)\, y_j y_k$$

mit $\tilde{\phi}_{jk}(0) \neq 0$, also insb. $\tilde{\phi}_{jk}(y) \neq 0$, $|y| \ll 1$.

Führe neue Variablen $y_1', \dots, y_d'$ ein mit

$$y_j' = y_j \text{ falls } j \neq r$$

$$y_r' = (\pm \tilde{\phi}_{rr}(y))^{1/2} \left[y_r + \sum_{j>r} \frac{y_j \tilde{\phi}_{jr}(y)}{\pm \tilde{\phi}_{rr}(y)} \right]$$

$$\Rightarrow \phi(y') = \pm(y_1')^2 \pm \dots \pm (y_r')^2 + \sum_{j,k\geq r+1} \tilde{\tilde{\phi}}_{jk}(y')\, y_j' y_k'$$

$$\phi_{rr}(y_r)^2 = \left[\frac{y_r'}{\pm\phi_{rr}(y)^{1/2}} - \sum_{j>r} \frac{y_j \tilde{\phi}_{jr}(y)}{\pm \tilde{\phi}_{rr}(y)} \right]^2 \phi_{rr}(y)$$

$$= (y_r')^2 + \sum_{j,k>r} \frac{y_j y_k \tilde{\phi}_j(y) \tilde{\phi}_{kr}(y)}{\phi_{rr}(y)}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{- 2 \tilde{\phi}_{rr}(y) \cdot \sum_{j>r} \frac{y_r' y_j \tilde{\phi}_{jr}(y)}{\pm \tilde{\phi}_{rr}(y)^{3/2}}}$$

$$\sum_{j>r} (\phi_{jr}(y) + \phi_{rj}(y))\, y_r y_j = \underbrace{2 \sum_{j>r} \tilde{\phi}_{jr}(y)\, y_j}\left(\frac{y_r'}{\pm \phi_{rr}^{1/2}(y)} - \sum_{k>r} \frac{y_{kr} \tilde{\phi}_{kr}(y)}{\phi_{rr}(y)} \right)$$

$\boxed{=}$

<u>Fouriertransformation v. Flächenmaßen</u> <u>19.5.2021</u>

Sei M eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit (MF) in $\mathbb{R}^d$ und sei $S \subseteq M$ offen, glatt $m = d-1$

Sei $d\sigma$ das auf S induzierte Lebesguemaß in $\mathbb{R}^d$

Sei $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp}\psi \cap S \subseteq K$ kompakt.

$d\mu(\xi) = \psi(\xi)\, d\sigma(\xi)$ auf S getragenes Borelmaß

<u>Frage</u> Verhalten von $(d\mu)^\vee(x) = \int d\mu(\xi)\, e^{2\pi i x\cdot\xi}$ für $|x| \to \infty$?

<u>Bsp</u> $S^{d-1} = S$ $\quad (d\sigma)^\vee(x) = \int_{S^{d-1}} d\sigma(\xi)\, e^{2\pi i x\cdot\xi}$

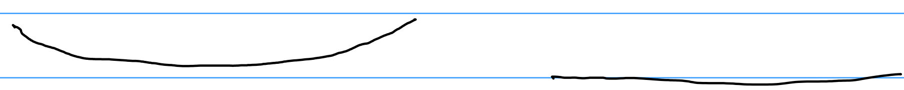
$$= \ldots = 2\pi\, |x|^{-(d-2)/2} J_{\frac{d-2}{2}}(|x|)$$

$$= O\left(|x|^{-(d-1)/2}\right)$$

S ... Ausschnitt einer Koordinatenebene

$\xi' = (\xi_1, \ldots \xi_{d-1})$ $\quad S = \{ \xi = (\xi', \xi_d) \in \mathbb{R}^d : \xi_d = 0,\ |\xi'| \leq 1 \}$

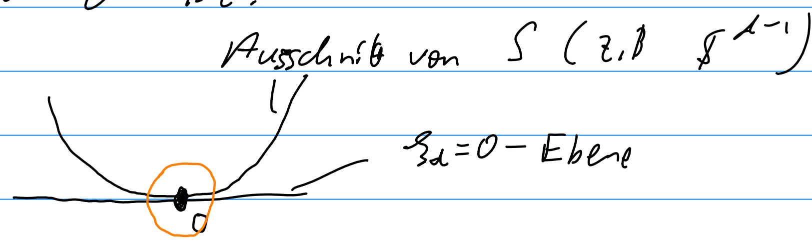
kein Abfall in x_d - Richtung !



Fouriertransformation v. Flächenmaßen mit nicht-verschwindender Krümmung.

Angenommen, Gauß-Krümmung v. S verschwindet nirgends.

Sei $\xi_0 \in S$ beliebig: rotiere und transliere den umgebenden $\mathbb{R}^d$ von S so, dass in neuen Koordinaten $\xi_0 = \vec{0}$ und dass die Koordinatenebene $\xi_d = 0$ gerade die Tangentialebene von S bei 0 ist.



Lokal, also nahe des Ursprungs kann S durch den Graphen $\xi_d = \phi(\xi_1 \dots \xi_{d-1})$, wobei $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\phi(0) = (\nabla\phi)(0) = 0$ und alle Eigenwerte von $\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\right)_{ij}(0)$ alle von 0 verschieden. Die Eigenwerte $(\nu_k)_{k=1}^{d-1}$ v. $\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi_i\partial\xi_j}(0)$ heißen Hauptkrümmungen von S bei 0

und $\prod_{k=1}^{d-1} \nu_k$ heißt Gaußsche Krümmung von S bei 0.

Theorem 2.2.4 (FT v. Flächenmaßen)

Sei S eine glatte Hyperfläche in $\mathbb{R}^{d-1}$ mit nirgends verschwindender Gauß-Krümmung

Sei $d\mu = \psi \, d\sigma$ wie eben

$\psi \in C_c^\infty$, $d\sigma$ Flächenmaß auf S

$$\Rightarrow \quad |(d\mu)^\vee(x)| \lesssim (1+|x|)^{-(d-1)/2}$$

Beweis $\quad n \equiv d-1$

Wg Kompaktheit können wir S (lokal) als Graphen $x_{n+1} = \phi(x_1 \dots x_n)$ auffassen mit

$$d\sigma = (1 + |\nabla\phi|^2)^{1/2} \, dx_1 \dots dx_n$$

$$(*) \quad \left| \int d\xi_1 \dots d\xi_n \underbrace{(1+|\nabla\phi|^2)^{1/2} \psi(\xi_1 \dots \xi_n, \phi(\xi_1 \dots \xi_n))}_{\equiv \tilde{\psi}} \exp\Big(2\pi i \underbrace{\Big(\sum_{j=1}^n x_j \cdot \xi + x_{n+1} \cdot \phi(\xi')\Big)}_{\equiv \lambda \cdot \Phi(\xi,\eta)}\Big) \right|$$

$$\lesssim_{\phi,\psi} (1+|x|)^{-n/2} \quad ?$$

$\lambda \equiv |x|, \qquad \Phi(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^n \xi_j \cdot \eta_j + \eta_{n+1} \phi(\xi_1 \dots \xi_n)$

$x = \lambda \cdot \eta, \quad \eta \in S^n$

$$(*) = \left| \int d\xi_1 \ldots d\xi_n \quad \tilde{\Psi}(\xi_1 \ldots \xi_n) \exp(2\pi i \lambda \, \Phi((\xi_1, \ldots \xi_n), \eta)) \right| \overset{?}{\lesssim} \langle \lambda \rangle^{-n/2}$$

Fallunterscheidung: 1) $\eta \in S^n$ $\quad \eta = (0, \ldots, 0, 1) \equiv \eta_N$ (Nordpol)

2) $\eta = (0, \ldots 0, -1) = \eta_S$

3) $\eta \in S^n$ im Komplement

Zu 1) $\nabla_\xi \Phi(\xi, \eta_N)\big|_{\xi=0} = 0 = \Phi(0, \eta_N)$

Wg $\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\right)(0, \eta_N) \neq 0$ gibt es für η nahe η_N

eine eindeutige Funktion $\xi = \xi(\eta)$ mit

$$\nabla_\xi \Phi(\xi, \eta)\Big|_{\xi = \xi(\eta)} = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\right)(\xi(\eta), \eta) \neq 0$$

für η nahe η_N

$\Rightarrow$ falls supp $\tilde{\Psi}$ klein genug (um ξ) ist, können wir stationäre Phase (Behauptung 2.2.3) verwenden

$\Rightarrow$ gibt den gewünschten $|x|^{-n/2}$-Abfall.

Zu 2) Analog

Zu 3) $\nabla_\xi \Phi(\xi, \eta) = (\eta_1 \ldots \eta_n) + \eta_{n+1} \nabla_\xi \phi(\xi)$

Da $\nabla \phi(\xi) = O(\xi)$ f $\xi \to 0$, $(|\nabla \phi(\xi)| \geq c)$

und $|(\eta_1, \ldots, \eta_n)| \geq c' > 0$,

gibt es $\tilde{\Psi} \in C_c^\infty$ so, dass Träger von $\tilde{\Psi}$ so klein ist, dass $|\nabla_\xi \Phi(\xi, \eta)| \geq c''$

$\Rightarrow$ nicht-stationäre Phase (Beh 2.2.1) anwendbar

$\Rightarrow$ $|x|^{-N}$-Abfall für jedes $N \in \mathbb{N}$. $\boxtimes$

Bemerkungen (1) Asymptotik von $\widehat{d\mu}(x)$ durch Hlawka (1950), Herz (1962)

$$\widehat{d\mu}(x) = a(x)\, e^{-2\pi i \bar{\xi}(x)\cdot x} + e(x)$$

$e \in S^{-\infty}$, d.h. $e(x) \in C^\infty$ und $|e(x)| \leq C(1+|x|)^{-N}$ $\forall N \in \mathbb{N}$

Hier ist $\operatorname{supp} \psi$ so klein, dass es für alle $x \in \mathbb{R}^d \setminus 0$ höchstens ein $\bar{\xi}(x) \in S$ mit Normalenvektor $\nu_{\bar{\xi}}$, der in x-Richtung zeigt.

$$a(x) \in C^\infty, \quad |a(x)| \lesssim (1+|x|)^{-(d-1)/2}$$

$$a(x) = |x|^{-(d-1)/2} \psi(\bar{\xi}(x)) \cdot |K(\bar{\xi}(x))|\, e^{-i\pi n/4} \underbrace{\text{mod } S^{(d+1)/2}}_{\text{Terme die mind } |x|^{-(d+1)/2} \text{ abfalle}}$$

$\xi_1^2 - \xi_2^2 - \dots \xi_d^2$

wobei $|K(\bar{\xi}(x))|$ die Gaußkrümmung v. S bei $\bar{\xi}(x)$ und n den Überschuß der Zahl der positiven gegenüber der Zahl der negativen Krümmungen bei $\bar{\xi}(x)$ bezeichnen.

(2) Flächen mit endlichem Typ. (Details z.B. in Stein)

Angenommen, nur $k \in \{1, \dots d-1\}$ Krümmungen verschwinden nicht

$\Rightarrow$ $|(d\mu)^\wedge(x)| \lesssim (1+|x|)^{-1/k}$ (Littmann 1963)

($d=3$ gut verstanden; bessere Abschätzungen verfügbar, sh. Ikromov–Müller 2017; $d \geq 4$?)