Fourierrestriktion & Anwendungen

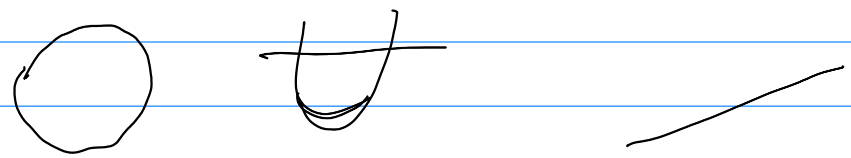
16.4.21

$f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, messbar

$f \in L^1$ $\quad (\mathcal{F}f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{2\pi i x\cdot\xi}\,dx$

Riemann-Lebesgue-Lemma: $\hat{f} \in C_\infty$, d.h. stetig und im ∞ abfallend,
d.h. $|\hat{f}(\xi)| \to 0$, $|\xi| \to \infty$.

$f \in L^2 \Rightarrow \mathcal{F} f \in L^2$, $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$.



→ falls $f \in L^1 \Rightarrow \hat{f}|_S$ sinnvoll definiert, z.B. pktweise, falls S eine glatte Kodimension-1-Mannigfaltigkeit ist.

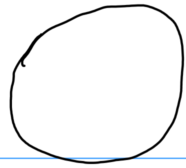
→ andererseits können Fkt.en in $L^2(\mathbb{R}^d)$ nicht sinnvoll restringiert werden, da L^2 Äquivalenzklasse von Fkten ist, die auf Lebesgue-Nullmengen voneinander verschieden sein können.

$L^1 \quad |x|^{-d} \qquad L^2 \quad |x|^{-d/2}$

Spurlemma (Sobolew) $\quad \int |f(x)|^2 (1+|x|^2)^{\frac{1}{2}+\epsilon}\,dx < \infty$, $\epsilon > 0$

$A \le C_\epsilon B$
$\Leftrightarrow A \lesssim_\epsilon B$

$\Rightarrow \|\hat{f}|_S\|^2_{L^2(S)} \lesssim_{d,\epsilon} \int |f|^2 (1+|x|^2)^{\frac{1}{2}+\epsilon}$



$$\| \hat{f}|_S \|_{L^q(S)} \lesssim_{d,S} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

$$q = 2, \qquad p = \frac{2(d+1)}{d+3}$$

heute: Restriktionsvermutung für $d=2$ bewiesen ($\sim$ 70er, Hörmander, Zygmund), aber für $d \geq 3$ weitestgehend offen.

$$\begin{cases} i\partial_t \Psi(t,x) = -\Delta \Psi(t,x) \\ \Psi(t=0, x) = f(x) \end{cases} \qquad \Psi(t,x) = (e^{it\Delta} f)(x)$$

$t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^d$, $\operatorname{supp} \hat{f}$ kompakt

$$= \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i (x\cdot\xi + t\cdot\xi^2)} \hat{f}(\xi)\,d\xi$$

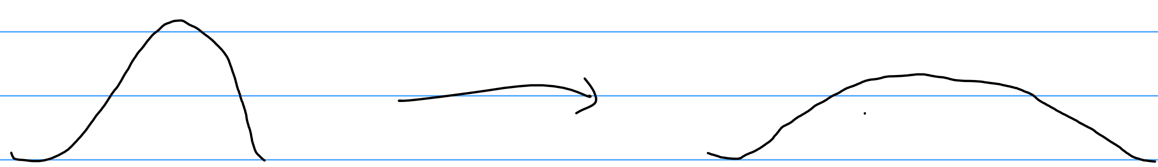
$$\| \hat{f}|_S \|_{L^q(S)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \iff \|(g\,d\sigma)^\vee\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|g\|_{L^{q'}(S)}$$

$$(g\,d\sigma)^\vee(x) = \int_S d\sigma_S(\xi)\, g(\xi)\, e^{2\pi i x\cdot\xi}$$

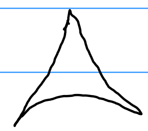
$$\|\Psi(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = \|e^{it\Delta} f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \lesssim |t|^{-d/2} \|f\|_{L^1}$$

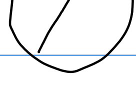
$$e^{it\Delta}(x-y) = \text{const}\; t^{-d/2}\, e^{i|x-y|^2/at}$$

$$\|\Psi\|_2 = \|f\|_2$$



$\Psi(t=0) = f$





$(\int d\sigma)^\wedge$

Wolff – Lecture notes on harmonic analysis (Kap 1–5)

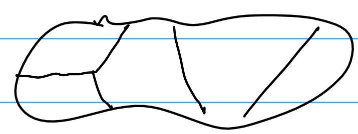
1 Unschärfeprinzipien

$$f \in L^1(\mathbb{R}^d), \quad \hat{f}(\xi) = (\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx$$

Sei μ ein endliches, komplexwertiges Borelmaß auf $\mathbb{R}^d$, also ein Element von $M(\mathbb{R}^d)$, ausgestattet mit der Norm

totale Variation $\|\mu\| \equiv |\mu|(E) := \sup_{\pi} \sum_{A} |\mu(A)| \quad \forall E \in \Sigma$

E: Borelmenge; π: abzählbare Partitionen von E in disjunkte Teilmengen A; Σ: Borel-σ-Alg. in $\mathbb{R}^d$.



Fouriertransformation solcher Maße ähnlich definiert

$$\hat{\mu}(\xi) = \int d\mu(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}$$

Insb. ist $L^1(\mathbb{R}^d) \subseteq M(\mathbb{R}^d)$ mittels der Identifikation

$$f \mapsto d\mu = f\,dx$$

dx: Lebesguemaß

Bsp z.B. 1) $f(x) = e^{-\pi x^2} \to \hat{f}(\xi) = e^{-\pi \xi^2}$

$$x^2 = \langle x, \mathbb{1} x\rangle \;;$$

2) → HA: T invertierbare, symmetrische $d\times d$-Matrix mit komplexen Einträgen und $\mathrm{Re}(T) \geq 0$

$$\mathcal{F}\left(e^{-\pi\langle x, Tx\rangle}\right)(\xi) = \left(\det T^{-1}\right)^{1/2} e^{-\pi\langle \xi, T^{-1}\xi\rangle}$$

$\mathrm{Re}(A) = \frac{A+A^*}{2}$

$A \geq 0$
$\Updownarrow$
$\langle \varphi, A\varphi \rangle \geq 0$
$\forall \varphi \in \mathbb{R}^d$.

(Bem Menge dieser Matrizen ist konvex $\Rightarrow \exists!$ analytischen Zweig von $A \mapsto (\det A)^{1/2}$ s.d. $(\det A)^{1/2} > 0$, falls $A > 0$)

3) Sei δ_a das bei $a \in \mathbb{R}^d$ zentrierte Dirac-Maß, d.h

$$\delta_a(\underset{\text{Borelmenge}}{E}) = \begin{cases} 1 & a \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\hat{\delta}_a(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \, \delta_a(x) = e^{-2\pi i a \cdot \xi}.$$

<u>Prop 1.1</u> Sei $\mu \in M(\mathbb{R}^d)$, dann gilt $\|\hat{\mu}\|_{L^\infty} \leq \|\mu\| = |\mu|(\mathbb{R}^d)$ und $\hat{\mu}$ ist stetig

<u>Bew</u> $|\hat{\mu}(\xi)| \leq \int d|\mu|(x) = |\mu|(\mathbb{R}^d)$; $\hat{\mu}(\xi+h) = \int \underbrace{e^{-2\pi i x \cdot (\xi+h)}}_{\to e^{-2\pi i x \cdot \xi}} d\mu(x) \underset{\text{majorisiert}}{\to} \hat{\mu}(\xi)$

Grundlegende Eigenschaften

(1) $f_\tau(x) := f(x-\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}^d$

$$\Rightarrow \widehat{f_\tau}(\xi) = \int dx\, e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x-\tau) \qquad x \mapsto x+\tau$$
$$= e^{-2\pi i \tau \cdot \xi} \hat{f}(\xi)$$

(2) $\mathcal{F}\left(e^{2\pi i \tau \cdot x} f(x)\right)(\xi) = \hat{f}(\xi - \tau)$

(3) $T: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ linear, invertierbar ($T \in SO(d)$ z.B.)

$$(f \circ T)^\wedge(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} dx\, e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(Tx) \qquad x \mapsto T^{-1}x$$
$$= \frac{1}{|\det T|} \int_{\mathbb{R}^d} dx\, e^{-2\pi i \langle T^{-1}x, \xi \rangle} f(x)$$

$T^{-t} = (T^{-1})^t$
$$= |\det T|^{-1} \hat{f}(T^{-t}\xi)$$

- Falls $T \in O(d)$ (orthogonal), $T^T T = \mathbb{1}$, $|\det T| = 1$

d.h. $(f \circ T)^\wedge = \hat{f} \circ T$

$\Rightarrow$ Insbesondere: falls f radial, dann ist auch $\hat{f}(\xi)$ radial.

- Falls T eine Dilatation, d.h. $Tx = rx$ für ein $r > 0$

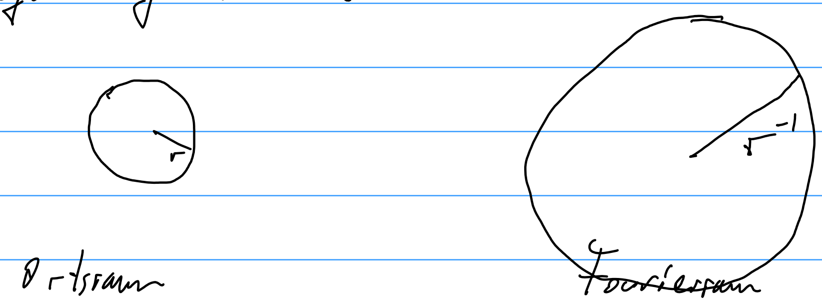
$$(f \circ T)^\wedge = r^{-d} \hat{f} \circ T^{-1}$$

$$(f \circ T)^\wedge(\xi) = r^{-d} \hat{f}(\xi / r)$$

f kompakt getragen, z.B. $\text{supp} f \subseteq B_0(1)$, $r \in (0,1)$

$\rightarrow$ $f \circ T$ in $B_0(r)$ getragen

$(f \circ T)^\wedge$ wird auf "dualen Kugeln" $B_a(1/r)$ für gewisse $a \in \mathbb{R}^d$ konzentriert sein



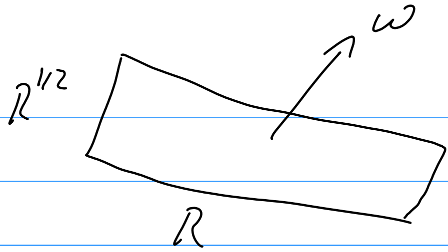
<u>Proposition 1.2</u> Sei $R > 0$ und $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ sodass $\text{supp} f \subseteq B_0(R)$

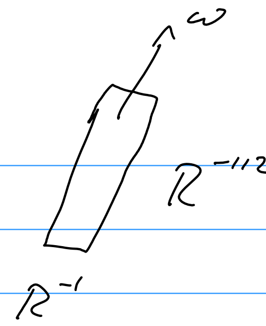
$\Rightarrow$ $\hat{f}$ ist holomorph und erfüllt

$$|\hat{f}(\xi)| \leq e^{2\pi R \cdot |\text{Im}(\xi)|} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad \text{für } \xi \in \mathbb{C}$$

$\rightarrow$ supp $\hat{f}$ kann nicht kompakt sein, es sei denn $\hat{f} \equiv 0$

Beweis HA.





$R \gg 1$; $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $x \in \mathbb{R}^d$ $\quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d}$; $|\alpha| = \sum_{j=1}^d \alpha_j$

$D_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_d}^{\alpha_d}$

Thm 1.3 (L^1-L^∞ - Bernstein-Ungleichung)

Sei $\mu \in M(\mathbb{R}^d)$ mit supp μ kompakt

$\Rightarrow \hat{\mu} \in C^\infty$ und $D_\xi^\alpha \hat{\mu} = ((-2\pi i x)^\alpha \mu)^\wedge$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d$

Weiterhin gilt: falls supp $\mu \subseteq B_0(R)$, dann gilt

$\xrightarrow{\text{quantifiziere}}$ $\quad \| D^\alpha \hat{\mu} \|_{L^\infty} \leq (2\pi R)^{|\alpha|} \|\mu\|$.

Beweis $\| D^\alpha \hat{\mu} \|_{L^\infty} \leq (2\pi R)^{|\alpha|} \|\mu\|$ folgt aus $D^\alpha \hat{\mu} = ((-2\pi i x)^\alpha \mu)^\wedge$

(und Proposition 1.2)

Zur behaupteten Gleichheit, nehmen wir an $\alpha = (1, 0, \ldots)$
Der allgemeine Fall $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ folgt durch Iteration.

$$\frac{\hat{\mu}(\xi + h e_1) - \hat{\mu}(\xi)}{h} = \int \underbrace{\frac{e^{-2\pi i x \cdot (h e_1)} - 1}{h}}_{\longrightarrow -2\pi i x \text{ pktweise}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \, d\mu(x)$$

$\xrightarrow{\text{majorisiert}} ((-2\pi i x_1)\mu)^\wedge(\xi)$, da

der Integrand beschränkt und $\|\mu\| < \infty$ sind $\quad \boxtimes$

bisher gesehen: Lokalisierung im Ortsraum

$$\Downarrow$$

Glattheit / Regularität im Fourierraum

jetzt: die Umkehrung, sprich Glattheit im Fourierraum

$$\Downarrow$$

Lokalisierung im Ortsraum

Proposition 1.4 Sei $f \in C^N$ und $D^\alpha f \in L^1$ $\forall\, 0 \le |\alpha| \le N$

$$\Rightarrow (D^\alpha f)^\wedge(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi) \quad \text{und}$$

$$|\hat{f}(\xi)| \le c_f (1+|\xi|)^{-N},$$ wobei c_f nur von $\|D^\alpha f\|_{L^1}$ $0 \le |\alpha| \le N$ abhängt.

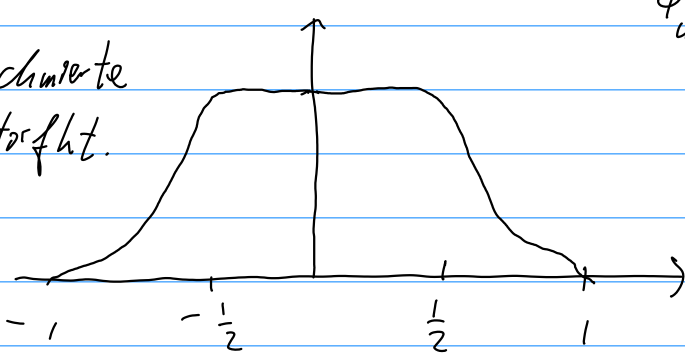
15.4.21

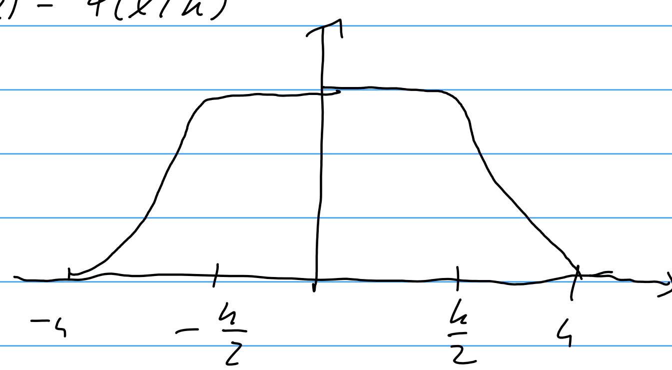
$\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d : [0,1])$, z.B. $\phi(x) = \begin{cases} 1 & |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$

radial

$$\phi_h(x) = \phi(x/h)$$

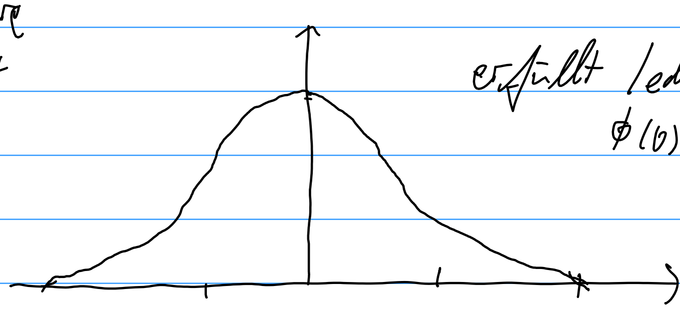
ausgeschmierte Indikatorfkt.





$$|D^\alpha \phi_h(x)| \lesssim h^{-|\alpha|} \qquad \operatorname{supp} D^\alpha \phi \subset [-\tfrac{h}{2}, h]$$

allgemeinere Bumpfkt



erfüllt lediglich $\phi(0) = 1$

ϕ bump Fkt

Lemma 1.5 $f \in C^N$, $D^\alpha f \in L^1$, $|\alpha| \le N$, $f_n = \phi_n f$

$$\|D^\alpha f - D^\alpha f_n\|_{L^1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \forall\ |\alpha| \le N$$

Bew HA.

Beweis von Prop 1.4. Ang $f \in C_c^N$ zunächst

$$(D^\alpha f)^\wedge(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi) \qquad \alpha = (1, 0, \dots 0)$$

$$\int dx\, e^{-2\pi i x \cdot \xi} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 2\pi i \xi_1 \hat{f}(\xi)$$

zur Abschätzung: $\sum_{|\alpha| \le N} \xi^\alpha \sim (1+|\xi|)^N$

$$\Rightarrow |\hat{f}(\xi)| \lesssim (1+|\xi|)^{-N} \sum_{|\alpha| \le N} \|D^\alpha f\|_{L^1}$$

(mittels Riemann-Lebesgue, Prop 1.1)

Jetzt entfernen wir den kompakten Träger.

$$\|(D^\alpha f)^\wedge - (D^\alpha f_n)^\wedge\|_{L^\infty} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$ mit Riemann-Lebesgue + Lemma 1.5

$$\|\hat{f} - \widehat{f_n}\|_{L^\infty} \to 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f_n}}_{= (D^\alpha f_n)^\wedge} \to (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}$$

$\square$

Stein-Shakarchi II, Rudin,

Bemerkung 1.6 Wir verstärken Prop 1.3 – 1.4 in $d=1$ mit Hilfe von Funktionentheorie in $d=1$

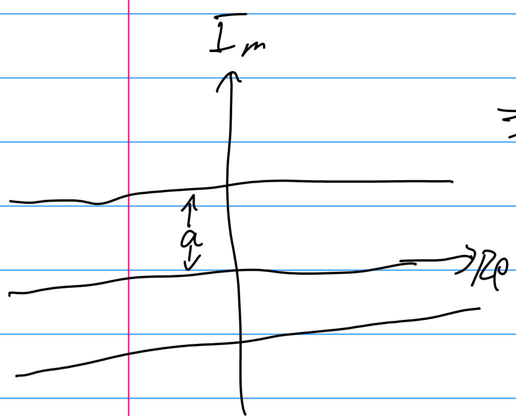
Lokalisierung
$\Downarrow$
Glattheit

(i) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ super-exponentiell fallend, d.h.

$$|f(x)| \lesssim_{f,M} e^{-M|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ M>0$$

$\Rightarrow$ $\hat{f}$ lässt sich analytisch zu einer Fkt fortsetzen, die ganz (holomorph auf $\mathbb{C}$) ist.

(ii) Ang. $f \in L^1$ mit $|f(x)| \lesssim_{f,a} e^{-2\pi a|x|}$ für ein $a>0$ und alle $x \in \mathbb{R}$



$\Rightarrow$ $\hat{f}$ lässt sich analytisch zu einer Fkt fortsetzen, die holomorph auf dem Streifen

$$S_a = \{ z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < a \}.$$

Die Umkehrung ist auch wahr, d.h.

Thm Angenommen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die sich holomorph auf S_a ($a>0$) fortsetzen lässt und

$$|f(z)| \lesssim \frac{1}{(1+|x|)^{1+\epsilon}}, \quad z = x+iy,\ |y|<a,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow |\hat{f}(\xi)| \lesssim e^{-2\pi b|\xi|} \quad \forall\, 0 \le b < a,$$

Bsp $e^{-\pi z^2}$, $\dfrac{a}{a^2+z^2}$ (Komplexe Wärmeleitungskerne)

$e^{t\Delta}$ $\qquad$ $e^{-t|p|}$

Bew $b=0$ ✓ (Riemann-Lebesgue)

$$b>0: \int f(x-\underset{\mathbb{C}}{w})\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx = e^{-2\pi i \xi w}\underbrace{\int f(x)\, e^{-2\pi i x\xi}\,dx}_{\hat f(\xi)}$$

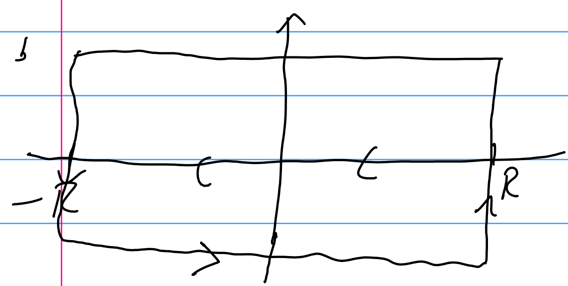
$w=\pm ib$

$$\int f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_{-R\to R}} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx$$

Analog

$$e^{+2\pi i w\cdot\xi}\int f(x-w)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi} = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_{-R-w\to R-w}} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx$$

$$\overset{\text{Cauchys Integralsatz}}{=} \lim_{R\to\infty} \underline{\int_{\gamma_{-R\to R}}} + \underline{\int_{\gamma_{R\to R-w}}} + \underline{\int_{\gamma_{-R-w\to -R}}}$$



$$\int_{\gamma_{R\to R-w}} dz\; e^{-2\pi i z\xi} f(z) \qquad z=R-wt,\quad t\in(0,1)$$

$$= w\int_0^1 dt\; e^{-2\pi i\xi\cdot R+2\pi i w t\xi}\,\underbrace{f(R-wt)}_{|\cdot|\lesssim R^{-1-\epsilon}} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

$\operatorname{Im} w>0$

$$\Rightarrow \int f(x-w)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx = e^{-2\pi i w\cdot\xi}\int f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx$$

$$\to w=\pm ib \Rightarrow e^{\mp 2\pi b\xi}\hat f(\xi) = (f(\cdot\mp ib))^\wedge(\xi)$$

$$\Rightarrow |\hat f(\xi)| \lesssim e^{\pm 2\pi b\xi}\|f\|_{L^1}$$

□

Thm (Paley-Wiener)

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig mit $|f(x)| \lesssim \frac{1}{(1+|x|)^{1+\epsilon}}$ und $M \geq 0$

Dann sind äquivalent

(i) $\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq [-M, M]$

(ii) f kann analytisch zu einer ganzen Fkt fortgesetzt werden und die Fortsetzung erfüllt

$$|f(z)| \lesssim_f e^{2\pi M |z|}$$

(iii) f kann analytisch zu einer ganzen Fkt fortgesetzt werden u. erfüllt

$$|f(z)| \lesssim_f e^{2\pi M |\operatorname{Im}(z)|}.$$

Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii) ✓ (Prop. 1.2)

(iii) $\Rightarrow$ (ii) ✓

(iii) $\Rightarrow$ (i) Wir nehmen die stärkere Vorraussetzung

$$|f(z)| \lesssim \frac{e^{2\pi M |\operatorname{Im} z|}}{(1+|z|)^{1+\epsilon}} \quad \text{an}$$

$$\hat{f}(\xi) = e^{-2\pi b \xi} \int f(x-ib)\, e^{-2\pi i x \cdot \xi}\, dx, \quad \xi, b \in \mathbb{R}$$

mit komplexer Variablensubstitution wie oben, die durch den Abfall $(1+|z|)^{-1-\epsilon}$ gesichert ist.

$\to \quad |\hat{f}(\xi)| \leq e^{-2\pi b \xi + 2\pi M \cdot b}$

$\Rightarrow$ für $b \to \pm\infty$ verschwindet RHS für $\begin{matrix} \xi > M \\ \xi < -M \end{matrix}$

Jetzt werden wir den helfenden Faktor $(1+|z|)^{-1-\epsilon}$ los, indem wir eine regularisierte Version betrachten

$$f_\delta(z) = \frac{f(z)}{(1-i\delta z)^{1+\epsilon}}$$

ist holomorph für $\operatorname{Im} z > 0$, falls $\delta > 0$

$\Rightarrow$ wg Holomorphie und des helfenden Faktors $(1-i\delta z)^{-1-\epsilon}$ können wir wie oben argumentieren und erhalten, dass

$$\hat{f}_\delta(\xi) = 0 \text{ für } \xi < -M$$

$$|\hat{f}(\xi)| = |\underline{\hat{f}(\xi) - \hat{f}_\delta(\xi)} + \underline{\hat{f}_\delta(\xi)}|$$

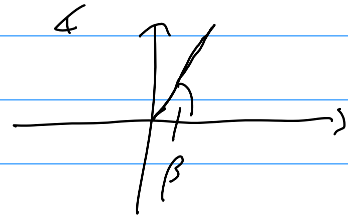
(erst "$\xi \to \pm\infty$", dann $\delta \to 0$)

$$|\hat{f}(\xi) - \hat{f}_\delta(\xi)| \leq \int |f(x)| \left| 1 - \frac{1}{(1-i\delta x)^{1+\epsilon}} \right| \xrightarrow{\delta \to 0} 0$$

mit majorisierter Konvergez.
(Analog durch Ersetzen von $(1-i\delta x)$ durch $(1+i\delta x)$ folgt $\hat{f}(\xi) = 0$ f. $\xi > M$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) mittels Phragmén-Lindelöff

Ang $F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist holomorph für $\arg z \in (\alpha, \beta)$, $\alpha < \beta < \alpha + 2\pi$ und stetig auf den Rändern



Angenommen $|F(z)| \leq 1$ auf den Rändern des Sektors und

$$|F(z)| \lesssim_c \exp(c \cdot |z|^a) \quad \forall c > 0$$

$$a \in \left(0, \frac{\pi}{\beta - \alpha}\right)$$

$\Rightarrow |F(z)| \leq 1$ im Inneren des Sektors. ┘

($\operatorname{Im} z > 0$ hier, Anwenden von Phragmén-Lindelöf in unserer Situation
$\operatorname{Im} z < 0$ analog)

$$F(z) = f(z)\, e^{+2\pi i M z} \quad \Rightarrow \quad |F(z)| \leq 1, \quad z = iy$$
$$|F(z)| \leq 1, \quad z = x$$
$x, y \in \mathbb{R}$

(Erinnere an Vorraussetzung $|f(z)| \lesssim \begin{cases} e^{2\pi M y} & \text{falls } z = iy \\ 1 & \text{"} \quad z = x \end{cases}$)

Da $|F(z)| < e^{2\pi M |z|}$ ist Phragmén-Lindelöf anwendbar
$\Rightarrow |F(z)| < 1$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im} z > 0$
(Winkel unseres Sektors $= \pi/2 \rightarrow e^{c|z|^\alpha}$ mit $a < \frac{\pi}{\pi/2} = 2$ wäre sogar erlaubt)
$\Rightarrow f(z) < e^{+2\pi M |\operatorname{Im} z|}$ $\square$

Fourier-Inversion, Plancherel, L^p

Faltung $(\phi * f)(x) = \int \phi(x-y)\, f(y)\, dy = (f * \phi)(x)$

$$\operatorname{supp} \phi * f \subseteq \operatorname{supp} \phi + \operatorname{supp} f = \{x + y : x \in \operatorname{supp} \phi,\ y \in \operatorname{supp} f\}$$

Obiges Integral sinnvoll, wenn z.B.

- $\phi \in C_c$, $f \in L^1_{loc} \rightarrow \phi * f \in C^0$ (stetig)
- $\phi \in L^p$, $f \in L^q \Rightarrow \|f * \phi\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^q} \|\phi\|_{L^p}$

for $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ $\quad 1 \leq p, q \leq r \leq \infty$

Lemma 1.7 Sei $\phi \in C_c^\infty$, $f \in L^1_{loc} \Rightarrow f * \phi \in C^\infty$ mit
$$D^\alpha(\phi * f) = (D^\alpha \phi) * f$$

- Falls $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \varphi * \psi \in \mathcal{S}$

- Fouriertransf und Faltung wechselwirken wie folgt

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\,\hat{g}\,, \quad f, g \in L^1$$

$$\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}\,, \quad f, g \in \mathcal{S} \quad \left(\text{oder z.B. } \underset{1 \le p < \infty}{f \in L^p,\ g \in L^{p'}}\right)$$

Fourierinversion: Angenommen, wir kennen die Fourierkoeffizienten $\hat{f}(\xi)$ von $f \in L^1$. Unter welchen Annahmen an f oder $\hat{f}$ können wir f aus $\hat{f}$ rekonstruieren?

Sprich: Wann gilt die Inversionsformel

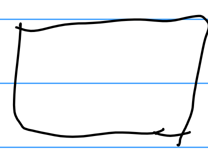
$$f(x) = \int \hat{f}(\xi)\, e^{2\pi i x \cdot \xi} \quad ?$$

21.04.21

Zusammenhang mit Bochner–Riesz

$$\lim_{R \to \infty} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\, \mathbb{1}_{|\xi| < R}\, e^{2\pi i x \cdot \xi}}$$

$|\xi_1| < R_1,\ |\xi_2| < R_2 \ldots$



$$\text{"} = \mathbb{1}_{|D| < R}\, f \text{"}$$

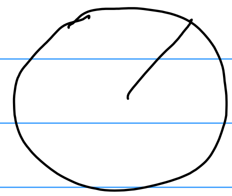
$$= \left(\mathbb{1}_{|\cdot| < R}\, \hat{f}\right)^{\vee}$$

FAP I (Prinzip d. glm Beschränktheit)

Ang $T_R f \xrightarrow{R \to \infty} Tf$ in L^p für alle $f \in \mathcal{D}\ (\mathcal{S}, C_c)$ dicht in L^p und ein $T: \mathcal{D} \to L^p$ beschr.

Dann sind äquivalent: (i) $\|T_R f\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{L^p}$ $\forall R>0,\ f\in L^p$

(ii) $T_R f \xrightarrow{R\to\infty} Tf$ in L^p $\forall f\in L^p$

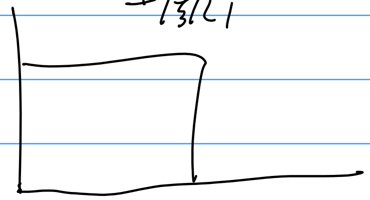


Fefferman: (1970'er)

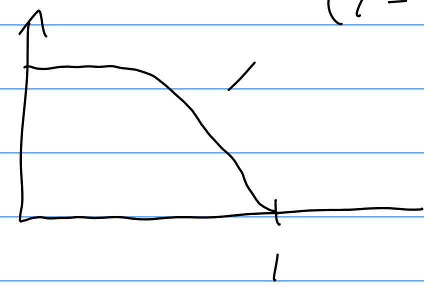
Kugelmultiplikator $\mathbb{1}_{|\xi|<1}$

ist L^p-beschr. nur, wenn $p=2$.

$\mathbb{1}_{|\xi|<1}$



$(1-\xi^2)_+^\delta$, $\delta>0$



Heute: einfacheres Problem

Thm 1.8 Angenommen $f,\ \hat{f}\in L^1$

$$\Rightarrow f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\, e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi \quad \text{für fast alle } x\in\mathbb{R}^d.$$

Lemma 1.9 ("Baby-Parseval") Seien $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, dann

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{\mu}(x)\, d\nu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\nu}(x)\, d\mu(x)$$

Beweis $\quad LHS = \int d\nu(x) \int d\mu(\xi)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi} = RHS$

mit Fubini-Tonelli. $\square$

Lemma 1.10 Sei $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $\int \phi = 1$, $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-d} \phi(\frac{x}{\epsilon})$

a) Falls $f \in L^p$, dann $\|f * \phi_\epsilon - f\|_p \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0$

b) Falls $f \in C_\infty$, dann $f * \phi_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \to 0} f$ glm.

Bew v. Thm 1.8

$$\underbrace{I_\epsilon(x) \equiv \int \hat{f}(\xi)\, e^{2\pi i x\cdot\xi}\, e^{-\pi\epsilon^2\xi^2}\, d\xi}$$

$$\xrightarrow[\epsilon \to 0]{} \int \hat{f}(\xi)\, e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

mit majorisierter Konvergez, da $\hat{f} \in L^1$

$$I_\epsilon(x) = \langle \hat{f}, e^{2\pi i\langle x, \cdot\rangle}\, e^{-\pi\epsilon^2(\cdot)^2} \rangle_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}$$

$$= \langle f, \mathcal{F}(\text{— " —}) \rangle$$

$$\int e^{2\pi i x\cdot\xi}\, e^{-\pi\epsilon^2\xi^2}\, e^{-2\pi i y\cdot\xi}\, d\xi$$

$$\overset{\xi \mapsto \xi/\epsilon}{=} \underbrace{\epsilon^{-d}\, e^{-\pi\epsilon^{-2}(x-y)^2}}_{\equiv \phi_\epsilon(x-y)} \quad \text{... Approximation der Eins}$$

$I_\epsilon(x) = (f * \phi_\epsilon)(x) \longrightarrow f(x)$ in L^1, d.h. pktweise f. ü.

$$I_\epsilon(x) \longrightarrow \begin{cases} f(x) & \text{für fast alle } x \\ \int e^{+2\pi i x\cdot\xi}\, \hat{f}(\xi)\, d\xi & \forall\, x \end{cases}$$

$\Rightarrow \int \hat{f}(\xi)\, e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi \longrightarrow f(x)$ f. ü. $\quad \square$

Thm 1.4 (FT auf $\mathcal{S}$)

- $\mathcal{F}_1 : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ist stetig und surjektiv.
- Parseval-Identität, d.h.

$$\int \overline{f(x)}\, g(x)\,dx = \int \overline{\hat{f}(\xi)}\, \hat{g}(\xi)\,d\xi$$

für alle $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Bew Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, d.h. $f \in L^1$, $\hat{f} \in L^\infty$, aber auch

$D^\alpha x^\beta f \in \mathcal{S}$, d.h. mit Thm 1.3, Prop 1.4

folgt, dann $\underbrace{\widehat{D^\alpha x^\beta f}}_{(2\pi i)^{|\alpha|}(-2\pi i)^{|\beta|}\, \xi^\alpha D_\xi^\beta \hat{f}\ \in L^\infty} \in L^\infty$ (Riemann-Lebesgue)

$\|\xi^\alpha D_\xi^\beta \hat{f}\|_\infty$
$\leq \|D^\alpha x^\beta f\|_{L^1}$ $\Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}$. ($\to$ Stetigkeit von $\mathcal{F}_1 : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$)
$\lesssim \|f\|_{\mathcal{S}}$

- Surjektivität: Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Aus Fourierinversion (Thm 1.8)

folgt $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$ f.ü.
$\quad = F(x)$

$\hat{F} = g \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad \hat{\hat{F}}(x) = \underbrace{F(-x)}_{= f(x)} = \hat{g}(x)$

- Parseval: $\int \overline{f(x)}\, g(x) = \int \overline{f(x)}\, \hat{\hat{g}}(-x)$
$f, g \in \mathcal{S}$

$$= \int \overline{f(-x)}\, \hat{\hat{g}}(x)$$

Lemma 1.9 $\overset{\text{}}{=} \int \hat{g}(x)\, \mathcal{F}\left(\overline{f(-\cdot)}\right)(x)$

(Rechnung) $= \int \hat{g}(x)\, \overline{\hat{f}(x)}$ $\square$

→ Parseval zeigt, dass $\mathcal{F}$ eine L^2-Isometrie auf $\mathcal{S}$.

(→ man kann Parseval auch f. $L^1 \cap L^2$ zeigen)

→ mit Dichtheit von $\mathcal{S}$ in L^2 gibt es eine eindeutige Fortsetzung der $\mathcal{F}_1|_{\mathcal{S} \cap L^2}$-Fouriertransformation auf ganz L^2

Thm 1.12 (Plancherel) Es gibt eine eindeutige Fouriertransformation $\mathcal{F}_2 : L^2 \to L^2$, s.d. $\mathcal{F}_2 f = \mathcal{F}_1 f$, falls $f \in \mathcal{S}$.

Weiter gelten (1) $\mathcal{F}_2$ ist unitär
(2) $\mathcal{F}_2 f = \mathcal{F}_1 f \quad f \in L^1 \cap L^2$

Bew Existenz, Eindeutigkeit und L^2-Isometrie folgen aus Thm 1.11.

$\to \operatorname{ran} \mathcal{F}_2 = L^2$ Zur Unitarität: $\operatorname{ran}(\mathcal{F}_2)$ ist abgeschlossen durch Isometrie, d.h. es genügt zu zeigen, dass $\operatorname{ran} \mathcal{F}_2$ dicht in L^2. Aber das folgt aus

$\mathcal{F}_2|_{\mathcal{S}} = \mathcal{F}_1|_{\mathcal{S}}$ und, dass $\mathcal{F}_1|_{\mathcal{S}}$ auf $\mathcal{S}$ surjektiv abbildet, sowie der Tatsache, dass $\mathcal{S} \subseteq L^2$ dicht.

Verbleibt $\mathcal{F}_2|_{L^1 \cap L^2} = \mathcal{F}_1|_{L^1 \cap L^2}$ zu zeigen.

Das folgt aus Gleichheit auf $\mathcal{S}$ sowie Dichtheit von $\mathcal{S}$ in $L^1 \cap L^2$

(Approximiere $L^1 \cap L^2 \ni f \xleftarrow[n\to\infty]{L^1 \cap L^2} g_n \in \mathcal{S}$, woraus folgt

$\hat{g}_n \longrightarrow \hat{f}$ glm. (wg Riemann-Lebesgue) und $\hat{g}_n \longrightarrow \hat{f}$ in L^2 wg Unitarität von $\mathcal{F}_2$.)

$\square$

Bemerkungen 1) Alle "grundlegende" Formeln, die wir für $\mathcal{F}$, gezeigt haben, gelten auch für $\mathcal{F}_2$.

2) (2) aus Thm 1.12 erlaubt uns die FT auf $L^1 + L^2$ fortzusetzen, d.h. falls $f \in L^1$, $g \in L^2$,

dann $\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}$

$\rightarrow$ insbesondere folgt Parseval für $f+g \in L^1 + L^2$

$$\int \widehat{(f+g)}\, \psi = \int (f+g)\, \hat{\psi}, \quad \psi \in \mathcal{S}.$$

$\rightarrow$ $L^1 + L^2$ ist relativ groß, insbesondere ist
- $L^p \subseteq L^1 + L^2$ für $p \in [1,2]$
- $|x|^{-\alpha}$ $\alpha \in (d/2, d)$

(→ Hörmander I, Kap 7)

$\rightarrow$ Im Prinzip ist FT auch auf $\mathcal{S}'$ definierbar, wir schauen uns hier nur temperierte Funktionen an, d.h. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ s.d.

$$\int |f(x)| \, (1+|x|)^{-N} dx < \infty \text{ für ein } N, \text{ d.h.}$$

f darf maximal polynomiell im ∞ wachsen.

Def (Temperierte Fouriertransf) Angenommen f, g sind temperierte Fkt.en, dann heißt g temperierte FT von f, falls

$$\int_{\mathbb{R}^d} g \phi = \int_{\mathbb{R}^d} f \hat{\phi} \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

Bemerkung Für gegebenes f (temperiert) ist dieses g eindeutig, wg der Dichtheitseigenschaften von $\mathcal{S}$ und ähnlichen Argumenten wie oben.

Bsp $0 < \mathrm{Re}(\alpha) < d$, $h_\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha/2)}{\pi^{\alpha/2}} |x|^{-\alpha}$

$$\widehat{h_\alpha}(\xi) = h_{d-\alpha}$$

$$\int dx\, e^{2\pi i x\cdot\xi} |x|^{-\alpha} \overset{x \to x/|\xi|}{=} |\xi|^{\alpha-d} \underbrace{\int dx\, e^{2\pi i x\cdot e_\xi} |x|}_{\text{Zahl wg Symmetrie}}$$

Heuristik

$t \mapsto t/|\xi|^{-2}$ $\quad h_\alpha(\xi) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} t^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\pi t|\xi|^2}$

$$\int d\xi\, e^{2\pi i x\cdot\xi} \int_0^\infty \frac{dt}{t} t^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\pi t|\xi|^2}$$

$$= \int_0^\infty \frac{dt}{t} t^{\alpha/2} \cdot t^{-d/2} e^{-\pi x^2/t} \qquad t \mapsto 1/t$$

$$= \int_0^\infty \frac{dt}{t} t^{(d-\alpha)/2} e^{-\pi t x^2} = h_{d-\alpha}(x)$$

$$\mathbb{1}_{|x|<N_1} \mathcal{F}(D) \mathbb{1}_{|x|<N_2} \psi(x) = \int \mathbb{1}_{|x|<N_1} \underbrace{\check{F}(x-y)}_{\chi(x-y)} \mathbb{1}_{|y|<N_2} \psi(y)\, dy \qquad \chi(x-y) = \begin{cases} 1 & ? \\ 0 & ? \end{cases}$$

$|x| < N_1$, $|y| < N_2$

$|x-y| < N_1 + N_2$ ...

FT auf $\mathcal{S}'$ (und andere Distributionenräumen) $\to$ Hörmander I, Kap 7. Paley-Wiener-Thm.e in Abschnitt 7.3

22.4.21

Prop 1.13 (Hausdorff-Young) $\|\hat f\|_{p'} \le \|f\|_p$, $1 \le p \le 2$

Bew Interpolation (Riesz-Thorin) zw. $\|\hat f\|_\infty \le \|f\|_1$
und $\|\hat f\|_2 = \|f\|_2$ ☐

Bem 1) Konstante 1 nicht optimal → E. Lieb '83
+ Beckner

2) Warum sind Indizes notwendigerweise Hölder-konjugiert zueinander und warum $p \in [1,2]$?

$$f_\lambda(x) = f(x/\lambda) \; ; \quad \|f_\lambda\|_p = \lambda^{d/p} \|f\|_p$$

$$\hat f_\lambda(\xi) = \lambda^d \hat f(\lambda \xi) \; ; \quad \|\hat f_\lambda\|_q = \lambda^{d/q'} \|\hat f\|_q$$

$\lambda^{d/q'} \lesssim \lambda^{d/p}$ kann nur dann für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten, falls $q' = p \leadsto q = p'$

$$\omega_j \int \phi(x - x_j) e^{-2\pi i x \xi} dx = \hat\phi(\xi) e^{-2\pi i x_j \cdot \xi}$$

Zufallsvariable

Jetzt konkret: $\phi \in C_c^\infty$, $\phi_j(x) = \phi(x - x_j)$

$\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ sodass $|x_j - x_\ell| > 2 \operatorname{diam} \operatorname{supp} \phi \quad \forall j \ne \ell$

Unser Gegenbsp: $\psi = \sum_{j=1}^{N} \phi_j \cdot \omega_j$ $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{N}}^{N}$ i.i.d Rademacher

$\omega_j \in \{\pm 1\}$ mit WS $\frac{1}{2}$

$$\mathbb{E}_\omega \|\psi\|_p^p = \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^d} dx \, \Big| \sum_j \phi(x - x_j)\, \omega_j \Big|^p$$

$$= \mathbb{E} \sum_j^N \int dx \, |\phi(x-x_j)\,\omega_j|^p = N \|\phi\|_p^p$$

wg Disjunktheit der Träger der einzelnen Summanden

Jetzt im Fourierraum:

$$\mathbb{E}_\omega \Big\| \sum \omega_j \hat{\phi}_j \Big\|_{p'}^{p'} = \mathbb{E}_\omega \int d\xi \, |\hat{\phi}(\xi)|^{p'} \Big| \sum_{j=1}^{N} e^{2\pi i x_j \cdot \xi} \omega_j \Big|^{p'}$$

$$\equiv (*)$$

Khintchine-Ungleichung: $\mathbb{E}_\omega \Big| \sum a_j \omega_j \Big|^p$

$A \sim B \Leftrightarrow A \lesssim B \lesssim A$ $\sim_p \Big(\sum_j |a_j|^2 \Big)^{p/2}$ $a_j \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow (*) \sim_{p'} \int d\xi \, |\hat{\phi}(\xi)|^{p'} \Big(\sum_j^N 1 \Big)^{p'/2} = N^{p'/2} \|\hat{\phi}\|_{p'}^{p'} .$$

$\rightarrow$ Zusammengefasst $N^{1/2} \underbrace{\|\hat{\phi}\|_{p'}}_{\sim 1} \lesssim_p N^{1/p} \underbrace{\|\phi\|_p}_{\sim 1}$

$\rightarrow$ Für $N \to \infty$ kann Ungl. nur wahr sein, falls $p \leq 2$.

Jetzt mehr zu L^p-artigen Unschärfeprinzipien

<u>Prop 1.14</u> (L^2-Bernstein) Sei $f \in L^2$ mit $\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq B_0(R)$ für ein $R > 0$. $\Rightarrow f \in C^\infty$ und $\|D^\alpha f\|_2 \leq (2\pi R)^{|\alpha|} \|f\|_2 \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d$

<u>Beweis</u> $\|D^\alpha f\|_2 \underset{\text{Plancherel}}{=} \|(2\pi \xi)^\alpha \hat{f}\|_2 \leq (2\pi R)^{|\alpha|} \underbrace{\|\hat{f}\|_2}_{= \|f\|_2}$ ☐

Jetzt zu L^p: z.B. mittels Multiplikatortheoremen (Mikhlin, Hörmander), die sagen:

„Falls $F \in H^s_{loc}(\mathbb{R}^d)$ für ein hinreichend großes $s = s(d)$ mit $\|F(\lambda \,\cdot)\underset{C_c^\infty}{\varphi}\|_{H^s} \lesssim_{F,\varphi} 1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+$

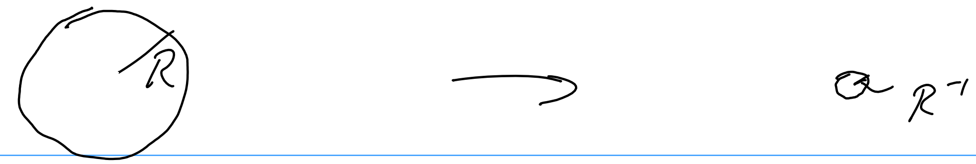
$\Rightarrow \|F(D)\|_{L^p(\mathbb{R}^d), L^p(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{F,d} 1$

$F(\xi) = \xi^\alpha \cdot \underset{C_c^\infty}{\chi(\xi)}$

<u>Hier</u> Falls $\hat{f}$ kompakt getragen, dann kann f als Faltung $f * \phi$ mit $\phi \in \mathcal{S}$ darstellen.

<u>Lemma 1.15</u> Angenommen $f \in L^1 + L^2$ mit $\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq B_0(R)$, dann $\exists\, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mit $f = f * \phi^{R^{-1}}$

wobei $\phi^{R^{-1}}(x) = R^d \phi(Rx)$



$\text{supp}\,\hat{f} \subset B_0(R)$ $\qquad\qquad$ $f \sim$ konst auf $B_0(R^{-1})$

Bem Dazu konstruieren wir $\phi \in \mathcal{S}$ so, dass $\hat{\phi}(\xi) = 1$ falls $|\xi| < 1$ und $\hat{\phi}(\xi) = 0$, falls $|\xi| > 2$

$$\widehat{\phi^{R^{-1}}}(\xi) := \hat{\phi}(\xi/R) \rightarrow \phi^{R^{-1}}(x) = R^d \phi(Rx)$$

$$\hat{f} - \hat{f} \cdot \widehat{\phi^{R^{-1}}} = 0 \Rightarrow f = f * \phi^{R^{-1}}$$

Prop 1.16 (L^p-Bernstein für Kugeln)

Sei $f \in L^1 + L^2$ mit $\text{supp}\,\hat{f} \subseteq B_0(R)$

$\Rightarrow$ (1) $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^d$ und $p \in [1,\infty]$ gilt $\|D^\alpha f\|_p \lesssim R^{|\alpha|} \|f\|_p$

(2) $\forall\, 1 \leq p \leq q \leq \infty$ gilt $\|f\|_q \underset{\forall R>0}{\lesssim} R^{d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|f\|_p$

Bem (2) wird oft in PDE-Literatur als Bernsteinungleichung bezeichnet.

$|x|^{-\alpha \cdot q}$ $\qquad$ $(\alpha > 0)$

Große Lebesgueindizes $\hat{=}$ Regularität

$\frac{1}{p} \geq \frac{1}{q} \rightarrow$ niedrige Lebesgueintegrierbarkeit wird auf hohe Lebesgueintegrierbarkeit verbessert und diese „Kosten" werden quantifiziert durch $R^{d(1/p - 1/q)}$. Tatsächlich helfen diese Kosten, falls $R < 1$ (d.h. falls nur niedrige Frequenzen präsent)

<u>Beweis</u> Da $\hat{f}$ kompakt getragen, schreiben wir (Lemma 1.15)

$$f = f * \phi^{R^{-1}} \qquad (\phi \in \mathcal{S}, \quad \phi^{R^{-1}}(x) = R^d \phi(Rx))$$

$$\|D^\alpha f\|_p = \|D^\alpha f * \phi^{R^{-1}}\|_p = \|f * (D^\alpha \phi^{R^{-1}})\|_p$$

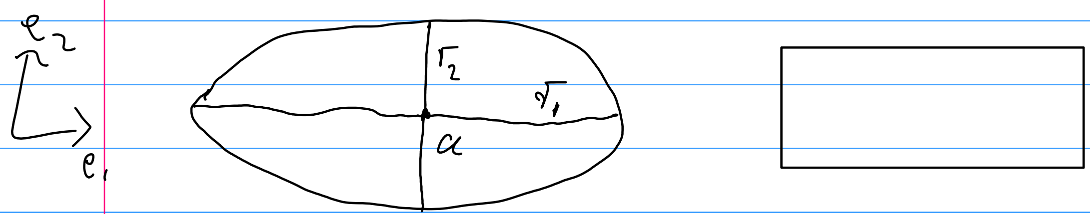
$$\underset{\text{Young}}{\le} \|f\|_p \, \|D^\alpha \phi^{R^{-1}}\|_{L^1} \underset{\text{rechne}}{\lesssim} R^{|\alpha|} \|f\|_p .$$

$1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$

$$\|f\|_q = \|f * \phi^{R^{-1}}\|_q \underset{\text{Young}}{\le} \|f\|_p \, \|\phi^{R^{-1}}\|_r$$

$$\lesssim \dots \lesssim \|f\|_p \cdot R^{d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \qquad \square$$

→ Jetzt für allgemeinere Geometrien, z.B Ellipsoiden



Ellipsoiden: $E = \{ x \in \mathbb{R}^d : \sum_{j=1}^{d} \frac{|(x-a)e_j|^2}{r_j^2} \le 1 \}$

$a \in \mathbb{R}^d$ .. Zentrum des Ellipsoids
$e_j \in \mathbb{R}^d$ .. Hauptachsen
$r_j \in \mathbb{R}_+$ .. Länge d. Hauptachsen

dualer Ellipsoid: hat selbe Hauptachsen, aber Längen sind reziprok zu ursprünglichen Längen.

zentriert bei $b \in \mathbb{R}^d$

↳ $E^* = \{ x \in \mathbb{R}^d, \sum_{j=1}^{d} \frac{|(x-b)e_j|^2}{(r_j^*)^2} \le 1 \}$, $r_j r_j^* = 1$.

$$R^{d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \sim |B_0(R)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$$

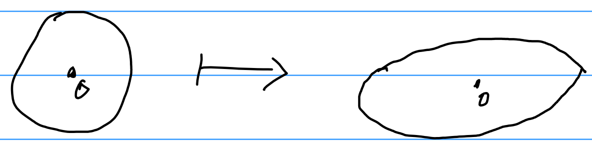
Ellipsoid

Prop 1.17 (Bernstein f. Ellipsoiden) Sei $f \in L^1 + L^2$ mit $\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq E$

$$\Rightarrow \quad \|f\|_q \lesssim |E|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_p \qquad 1 \leq p \leq q \leq \infty.$$

Bew Sei $h \in \mathbb{R}^d$ das Zentrum von E und sei

$$T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \qquad \text{linear}$$
$$B_0(1) \mapsto E - h$$



$S := T^{-t}$, dh. $T = S^{-t}$ und führen

$$f_1(x) = e^{-2\pi i h \cdot x} f(x)$$

$$g = f_1 \circ S \qquad \text{(Erinnerung}$$

$$\widehat{f_1 \circ S} = \hat{f}_1 \circ S^{-t} \frac{1}{|\det S|}$$

$$= |\det T| \cdot \hat{f}(\cdot + h) \circ T)$$

$$\hat{g}(\xi) = |\det T|\, \hat{f}(T(\xi + h))$$

$\hat{g}$ ist getragen auf Einheitskugel

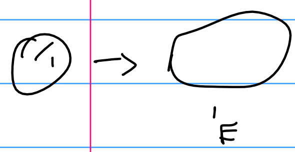
$\rightarrow$ Prop 1.16 anwendbar auf g

$g = f_1 \circ S \qquad \rightarrow \quad \|g\|_q \lesssim \|g\|_p$

$f_1(x) = f(x)e^{-2\pi i h x}$ Andererseits $\|g\|_q = \|f_1 \circ S\|_q = |\det S|^{-1/q} \, \|f\|_q$

$S^{-t} = T$ $\qquad = |E|^{1/q} \, \|f\|_q$

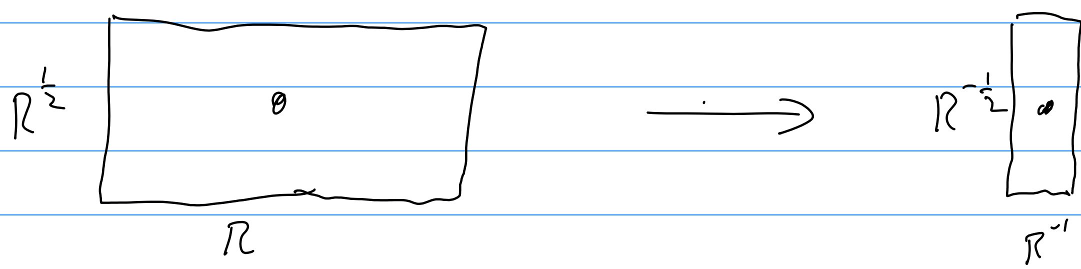
$|\det T| = |E|$ Analog $\|g\|_p = |E|^{1/p} \|f\|_p$



⇒ Kombination mit $\|g\|_q \lesssim \|g\|_p$ gibt

$$\|f\|_q \lesssim |E|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_p \qquad \square$$

Jetzt noch zu einer punktweisen Version



$\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq B_{R, R^{\frac{1}{2}}}$ $\qquad$ f konstant auf dualen Boxen

Falls $\hat{f} \sim$ reelle Indikatorfkt. auf Box, reell ⇒ f fokussiert auf dualer Box, zentriert um 0

$\hat{f} \sim$ reelle Indikatorfkt mal Phase ⇒ f fokussiert auf translierter dualer Box

⇒ Allgemeine komplexe Indikatorfkt müssen erst in "Frequenzen" zerlegt werden.

$$\underbrace{\hat{f}_1}_{\text{Periodisch}}(\xi) = \sum_{x \in \text{Zentren der dualen Boxen}} \langle e^{2\pi i \langle x, \cdot \rangle}, \hat{f} \rangle \, e^{2\pi i x \cdot \xi} \, \mathbb{1}_{\operatorname{supp} \hat{f}}(\xi)$$

Prop 2.18 (locally constant lemma)

Sei $f \in L^1 + L^2$ mit $\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq E$ (Ellipsoid)

$\Rightarrow$ Für jeden dualen Ellipsoiden E^* und jedes $z \in E^*$

gilt $$|f(z)| \lesssim \frac{1}{|E^*|} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \phi_{E^*}(x)\, dx$$

$E = \{x \in \mathbb{R}^d : \sum \frac{(x_j - h_j)^2}{r_j^2} \leq 1\}$

wobei $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ auf E^* konzentriert ist, im Sinne, dass zB

$$\phi_{E^*}(x) = \left(1 + \sum_j \frac{|(x - h^*) e_j|^2}{(r_j^*)^2}\right)^{-N}$$

falls h^* Zentrum von E^* bezeichnet

29.4.21

Beweis Zunächst $E = B_0(1) = E^*$

$\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq \underset{E}{\overset{\parallel\parallel}{B_0(1)}} \Rightarrow$ Schreibe $f = \Psi * f$ für $\Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

mit $\hat{\Psi}(\xi) = 1, \ |\xi| \leq 1$

Sei $z \in B_0(1) = E^*$: $|f(z)| \leq \int |f(x)||\Psi(z-x)|\, dx$

$$\lesssim_N \int |f(x)| \, (1 + |x - z|)^{-N} = (*)$$

$$|x - z| \geq \big||x| - |z|\big| \overset{|z| < \frac{|x|}{2}}{\geq} |x|/2$$

$$(*) \lesssim \int_{|x|>2|z|} |f(x)| \underline{(1+|x|)^{-N}} \, dx + \int_{|x|<2} |f(x)|$$

$z \in B_0(1)$

$\hookrightarrow$ ist von der Form, wie es in der Prop behauptet wird

$$\sim \int_{\mathbb{R}^d} f(x) (1+|x|)^{-N} dx .$$

Sei jetzt E beliebiger Ellipsoid, zentriert bei 0 mit dualem Ellipsoid E^*, zentriert bei $h^* \in \mathbb{R}^d$.

$$T : E^* - h^* \to B_0(1)$$

$$g(z) = f(T^{-1}z + h^*), \quad z \in B_0(1)$$

$$\hat{g}(\xi) = |\det T| \, e^{2\pi i h^* \cdot \xi} \hat{f}(\underbrace{T^t \xi}_{})$$

$\in E \Leftrightarrow \xi \in T^{-t}E$

$\Leftrightarrow \xi \in B_0(1)$

$\Rightarrow$ mit vorigem Ergebnis $|g(y)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)| \phi(x) \, dx$

mit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, z.B. $\phi = (1+|x|)^{-N}$.

$$\Rightarrow |f(T^{-1}z + h^*)| \leq \int |f(T^{-1}x + h^*)| \phi(x) \, dx$$

$$= |\det T| \int |f(x)| \, \phi(Tx - h^*) \, dx$$

$T : E^* - h^* \to B_0(1)$

$|\det T| = \frac{1}{|E^*|}$

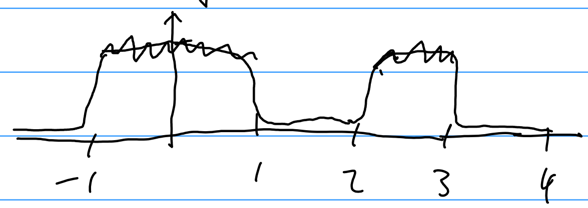
$$= \frac{1}{|E^*|} \int |f(x)| \, \phi_{E^*}(x) \, dx$$

da $\phi(Tx - h^*)$ auf $E^* \sim$ const ist und abseits von E^* rapide abfällt. $\square$

$\hat{f}$ radial, reell

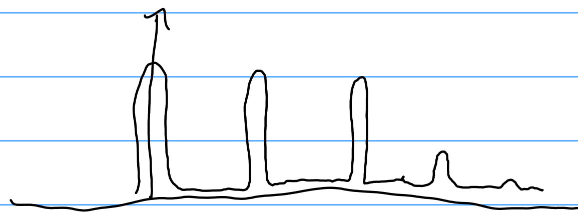
<u>Bemerkung</u> $\operatorname{supp}(\hat{f}) \subset [-1,1] \equiv I$, $\hat{f} \in C^\infty$ $\rightarrow f \in \mathcal{S}$

$\|f\|_{L^1} = \text{const}$



$|f(z)| \leq \int |f(x)| |\phi(x)|\, dx$

$z \in (-1,1) + k$, $k \in \mathbb{R}$



Peaks werden kleiner, da $f \in \mathcal{S}$

Peaks haben vll maximal erlaubte Höhe; aber sie können nicht zu dünn sein, da sich ansonsten die Fläche unter den Peaks nicht zu $\|f\|_{L^1}$ aufsummieren kann.

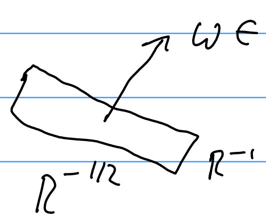
$\mathcal{F}(\chi_{B_0(1)})$ wird auf $B_0(1)$ konstant sein und abseits davon abfallen (folgt aus stationärer Phase)

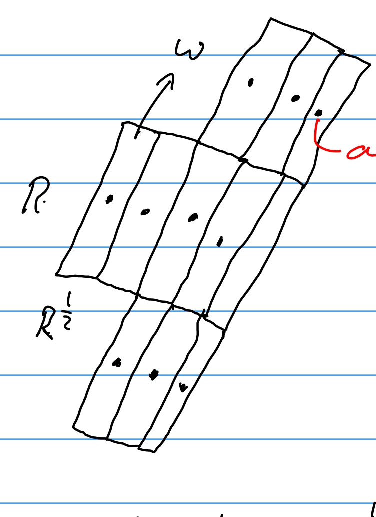
radial, reell

$C_c^\infty(B_0(1))$

<u>Bem</u>

$R \gg 1$





Box E hat Seitenlängen $R^{-\frac{1}{2}} \times R^{-\frac{1}{2}} \times \ldots \times R^{-1}$

$\operatorname{supp} \hat{f} \subseteq E$ (diese Box) ; E^* hat Seitenlängen $R^{\frac{1}{2}} \times \ldots \times R^{\frac{1}{2}} \cdot R$

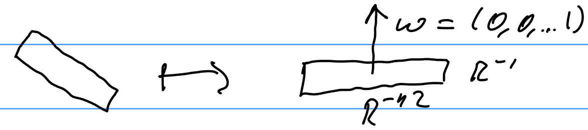
Zentren der dualen Boxen E^* werden mit $a \in \mathbb{R}^d$.

$\{E^*_a\}_{a \in \Pi_\omega}$ Familie dualer Boxen, die $\mathbb{R}^d$ pflastert

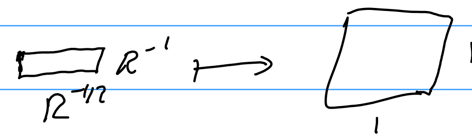
$\bigcup_{a \in \mathbb{R}^d} E^*_a = \mathbb{R}^d$. $\qquad$ Π_ω ... Sammlung aller Zentren $\overset{\mathbb{R}^d}{a}$ der dualen Boxen, die $\mathbb{R}^d$ pflastern

$$\hat{f} = \varphi \circ T \quad \text{wobei} \quad T = DR \quad \text{wobei} \quad R \in SO(d)$$

die Box E rotiert



und $D = \begin{pmatrix} R^{1/2} & & & \\ & \ddots & & \\ & & R^{1/2} & \\ & & & R \end{pmatrix}$



$\varphi \in C_c^\infty\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d\right)$

<u>Idee</u> Setze $\hat{f}$ periodisch fort und entwickle in Fourier-reihe

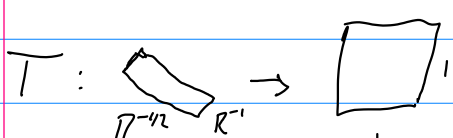
$$\hat{f}(\xi) = \sum_{a \in \Pi_\omega} f_\omega(a)\, e^{2\pi i a \cdot \xi} \qquad (*)$$

für gewisse Koeffizienten $f_\omega(a)$.

Herleitung von $(*)$:

übliche Fourierreihe von 1-peridischen Funktionen. $\quad \varphi(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \underbrace{\langle e^{2\pi i \langle \cdot, n \rangle}, \varphi \rangle_{L^2}}_{\check{\varphi}(n) = \int_{(-1/2,1/2)^d} \varphi(\xi) e^{-2\pi i n \cdot \xi} d\xi} e^{2\pi i \xi \cdot n}$

$a \in \Pi_\omega \qquad \langle e^{2\pi i \langle a, \cdot \rangle}, \hat{f} \rangle_{L^2} = \int d\xi \, (\varphi \circ T)(\xi)\, e^{2\pi i a \cdot \xi}$



$$= \frac{1}{|\det T|} \int d\xi \, \varphi(\xi) e^{2\pi i \langle T^{-t} a, \xi \rangle}$$

$$= |\det T|^{-1} \check{\varphi}(\underbrace{T^{-t} a}_{\in \mathbb{Z}^d}), \text{ falls } a \in \Pi_\omega$$

$\Rightarrow$ multipliziere mit $|\det T| \cdot e^{2\pi i\langle \xi, T^{-t} a\rangle}$ und summiere über $a \in \Pi_w$

$$\varphi(\xi) = \sum_{a\in\Pi_w} \check{\varphi}(T^{-t}a)\, e^{2\pi i\langle \xi, T^{-t}a\rangle} = |\det T| \sum_{a\in\Pi_w} \langle e^{2\pi i\langle a,\cdot\rangle}, f\rangle_{L^2} \cdot e^{2\pi i\langle \xi, T^{-t}a\rangle}$$

$\xi \mapsto T\xi$: $$f(\xi) = (\varphi\circ T)(\xi) = |\det T| \sum_{a\in\Pi_w} \langle e^{2\pi i\langle a,\cdot\rangle}, f\rangle_{L^2}\, \underline{\underline{e^{2\pi i\langle \xi, a\rangle}\mathbb{1}_E}}$$

bestätigt $(*)$ mit $f_w(a) = |\det T| \langle e^{2\pi i\langle a,\cdot\rangle}, f\rangle_{L^2}$.

$\Rightarrow$ Fouriertransformiere!

$$f(x) = |\det T| \sum_{a\in\Pi_w} \langle e^{2\pi i\langle a,\cdot\rangle}, f\rangle_{L^2}\, \chi_{E^*}(x-a)$$

wobei $\chi_{E^*}(x) = (\mathcal{F}^{-1}\mathbb{1}_E)(x)$