Oszillatorische Integrale der ersten Art (Stein)

Studium des asymptotischen Verhaltens von $I(\lambda) := \int e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)$ für $\lambda \to \infty$.

Drei einfache Prinzipien bestimmen dieses Verhalten:

(i) Der Hauptbeitrag zu $I(\lambda)$ kommt von den kritischen Punkten von ϕ.
Nimmt man zudem an, dass es nur einen einzigen kritischen Punkt gibt, so kann man die vollständige Asymptotik von $I(\lambda)$ bestimmen. Dieses ist qualitativ durch die exakte Ordnung des Verschwindens von ϕ' bestimmt.
Des Weiteren gibt es einen universellen Abfall von $I(\lambda)$, der mit der Asymptotik konsistent ist.

1 Oszillatorische Integrale der ersten Art in 1D

$$I(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)\,dx$$

$\phi \in C^\infty(\mathbb{R}:\mathbb{R})$ … Phase

$\psi \in C^\infty(\mathbb{R}:\mathbb{C})$ – manchmal nimmt man zusätzlich an, dass ψ kompakt getragen ist.

Allgemeine Eigenschaften können durch Lokalisierung, Scaling und Asymptotiken dargestellt werden.

1.1 Lokalisierung (Phase wird nie stationär)

Damit meint man, dass die Asymptotik von $I(\lambda)$ durch die Punkte bestimmt wird, an denen $\phi'(x) \neq 0$, wenn ψ dort auf (a,b) kompakt getragen ist. Der Beweis dieses Fakts folgt aus folgender Behauptung:

Behauptung 1 Seien $\phi \in C^\infty((a,b))$, $\psi \in C_c^\infty((a,b))$ mit $\phi'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$, dann
$(x \in \operatorname{supp}(\psi))$

$$I(\lambda) = O(\lambda^{-N}) \text{ f. } \lambda \to \infty \quad \forall N \geq 0.$$

Beweis Sei D der durch $Df(x) = \left(i\lambda\phi'(x)\right)^{-1} \frac{df}{dx}$ definierte Differentialoperator und

${}^tD$ der Transponierte ${}^tDf(x) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{i\lambda\phi'(x)}\right)$. D erfüllt

$D^N e^{i\lambda\phi} = e^{i\lambda\phi} \ \forall N$ und durch partielle Integration hat man

$$\int_a^b e^{i\lambda\phi}\psi dx = \int_a^b D^N e^{i\lambda\phi}\psi dx = \underbrace{\int_a^b e^{i\lambda\phi} ({}^tD)^N \psi \, dx}_{O(\lambda^{-N}), \text{ da alle Integrale wg } \phi, \psi \in C^\infty \text{ existieren}}$$

Bemerkung • Durch Variablentransformation $x \mapsto \phi(x)$ erhält man die bekannte Aussage, dass Bump-Funktionen und Schwartz-Fkt im Fourierraum schnell abfallen.

• Verschwindet ψ nicht nahe der Endpunkten a, b, so dürfen die Randterme der partiellen Integration nicht vergessen werden. In diesem Fall bekommt man höchstens einen λ^{-1}-Abfall, wie folgendes Bsp zeigt.

$$\int_a^b e^{i\lambda x} dx = \frac{e^{i\lambda b} - e^{i\lambda a}}{i\lambda}$$

λ^{-N}-Abfall kann man nur noch bekommen, wenn die Randterme sich gegenseitig wegheben, also, wenn $\phi^{(k)}(a) = \phi^{(k)}(b)$ und $\psi^{(k)}(a) = \psi^{(k)}(b)$ $\forall k$

• Lokalisierungsprinzip: asymptotisches Verhalten von $I(\lambda)$ wird durch die kritischen Punkte von ϕ und den Beiträgen an den Endpunkten a, b des Intervalls bestimmt.

1.2 Scaling

(2)

Angenommen, wir wüssten für ein fixes k, dass $\left|\frac{d^k\phi}{dx^k}\right| \geq 1$ und wir wollten eine Abschätzung von $\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}dx$, die nicht von den Endpunkten a, b abhängt.
Durch Skalieren $x \mapsto \lambda^{-1/k}x$ sieht man, dass die best-mögliche Abschätzung durch $O(\lambda^{-1/k})$ gegeben ist.

Behauptung 2 (Van der Corput)

Sei $\phi \in C^\infty((a,b);\mathbb{R})$ mit $|\phi^{(k)}(x)| \geq 1 \;\; \forall x \in (a,b)$. Dann kann man

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}dx\right| \leq c_k \lambda^{-1/k}$$

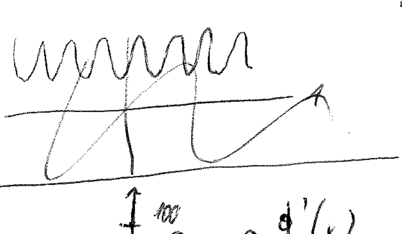
abschätzen, wenn

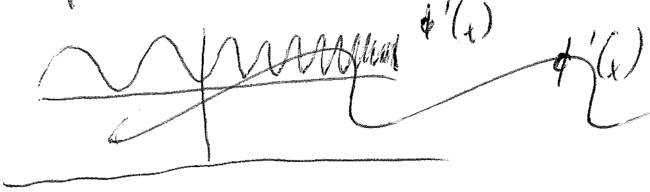
(i) $k \geq 2$ oder

(ii) $k = 1$ und $\phi'(x)$ monoton ist.

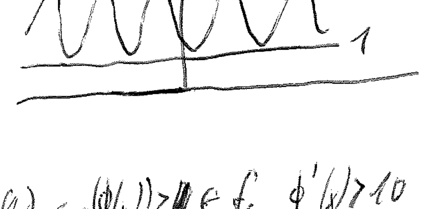
[Bemerkung: man erhält damit eine ähnliche Abschätzung von $\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx\right|$, wenn ψ an den Endpunkten nicht verschwindet)

Bemerkung
- Im Falle $k=1$ genügt keine einfache untere Schranke an $|\phi'|$. Sei z.B. $\phi' \geq 1$ und $\lambda = 1$ und angenommen, $\phi'(x)$ oszilliert so, dass $\phi'(x)$ groß ist, wenn $\cos(\phi(x)) < 0$ ist und $\phi(x)$ ~~groß~~ ist, klein ist, wenn $\cos(\phi(x)) > 0$. Dann ist das Gebiet, wo $\cos\phi(x) > 0$ ist deutlich größer, als das Gebiet, wo $\cos\phi(x) < 0$ ist womit der reelle Teil von $\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}$ für $b \to \infty$ nicht mehr beschränkt ist.





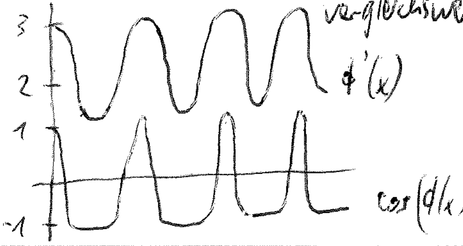
$\phi'(x)$ wird immer-



$\phi'(x)$ groß: $\phi(x)$ wächst stark $\Rightarrow$ Intervall wo $\cos\phi < 0$ ist ist sehr klein
$\hookrightarrow \hat{=}$ Intervall wo $\cos\phi < 0$

$\phi'(x)$ klein $\phi(x)$ wächst langsam $\Rightarrow \cos\phi$ oszilliert langsam $\Rightarrow$ Intervall, wo $\cos\phi > 0$ vergleichsweise groß
$\hookrightarrow \hat{=}$ Intervall, wo $\cos\phi > 0$

$$\begin{cases} \cos(\phi(x)) > 0 \text{ f. } \phi'(x) > 10 \\ \cos\phi(x) \lessgtr 0 \text{ f. } \phi'(x) \in (1,2) \end{cases}$$



$\phi'(x) = 2 + \cos(2x)$
$\phi(x) = 2x + \frac{1}{2}\sin(2x) = 2x + \cos(x)\sin(x)$

Beweis • Wir betrachten zunächst $k=1$, $\phi'(x)$ monoton und definieren wieder D durch $Df(x) = (i\lambda\phi'(x))^{-1}\frac{df}{dx}$, sodaß $De^{i\lambda\phi} = e^{i\lambda\phi}$; $\left(({}^tDf)(x) = -d_x\left(\frac{f}{i\lambda\phi'}\right)\right)$

$$\int_a^b e^{i\lambda\phi}dx = \int_a^b D(e^{i\lambda\phi})dx = \int_a^b e^{i\lambda\phi}\,{}^tD(1)\,dx + \underbrace{(i\lambda\phi')^{-1}e^{i\lambda\phi}\Big|_a^b}_{|\cdot| \overset{\Delta}{\leq}_{|\phi'|\geq 1} \frac{2}{\lambda}} \leq \frac{3}{\lambda}$$ ~~max~~, denn

ϕ' monoton $\Rightarrow \frac{1}{\phi'}$ monoton

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi}\,{}^tD(1)dx\right| = \left|\int_a^b e^{i\lambda\phi}\frac{1}{i\lambda}\left(\frac{1}{\phi'(x)}\right)'dx\right| \leq \frac{1}{\lambda}\int_a^b\left|\left(\frac{1}{\phi'(x)}\right)'\right|dx = \frac{1}{\lambda}\left|\int_a^b\left(\frac{1}{\phi'(x)}\right)'dx\right|$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left|\frac{1}{\phi'(b)} - \frac{1}{\phi'(a)}\right| \leq \frac{1}{\lambda}$$

$\left|\frac{\phi'(a)-\phi'(b)}{\phi'(a)\phi'(b)}\right| \leq 1$, $\leq |\phi'(a)-\phi'(b)| \leq 1$

• Für $k\geq 2$ per Induktion: $k=2$: wie eben. Schritt $k\to k+1$ und wir nehmen an, dass $\phi^{(k+1)}(x)\geq 1$ $\forall x\in[a,b]$ (andernfalls ersetzen wir $\phi(x)$ durch $-\phi$).

Sei $x=c$ der (eindeutige) Punkt, wo $|\phi^{(k)}(x)|$ minimal wird. (i) Ist $\phi^{(k)}(c)=0$, so ist außerhalb des Intervalls $(c-\delta, c+\delta)$ $|\phi^{(k)}(x)|\geq\delta$ (und im Falle $k=1$ ist ϕ' monoton) (weg. $|\phi^{(k+1)}(x)|\geq 1$)

Wegen der Induktionsvoraussetzung ist $\left|\int_a^{c-\delta}e^{i\lambda\phi}dx\right| \leq c_k(\lambda\delta)^{-1/k}$ und analog (und Skalieren da $|\phi^{(k)}|\geq\delta$ nicht $|\phi^{(k)}|\geq 1$)

$$\left|\int_{c+\delta}^b e^{i\lambda\phi}dx\right| \leq c_k(\delta\lambda)^{-1/k}$$

Da $\left|\int_{c-\delta}^{c+\delta}e^{i\lambda\phi}dx\right|\leq 2\delta$ ist insgesamt $\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi}dx\right|\leq\frac{2c_k}{(\lambda\delta)^{1/k}}+2\delta$

(ii) Ist $\phi^{(k)}(c)\neq 0$, so ist c (der Punkt, wo $\phi^{(k)}$ minimal wird) einer der Endpunkte, da $|\phi^{(k+1)}(x)|\geq 1$ und mit einem ähnlichen Argument sieht man, dass $\frac{c_k}{(\delta\lambda)^{1/k}}+\delta$ das Integral beschränkt.

Der $(k+1)$-Fall folgt in beiden Situationen, wenn man $\delta = \frac{1}{\lambda^{1/(k+1)}}$ setzt, denn ist

$$\frac{2c_k\lambda^{\frac{1}{(k+1)k}}}{\lambda^{1/k}} + \frac{2\cdot 1}{\lambda^{1/(k+1)}} = \frac{2c_k+2}{\lambda^{1/k+1}} \Rightarrow c_{k+1} = 2c_k+2, \text{ mit } c_1=3 \text{ folgt}$$

$$c_k = 5\cdot 2^{k-1}-2$$

$\frac{1}{k}-\frac{1}{(k+1)k} = \frac{k+1-1}{k(k+1)} = \frac{1}{k+1}$

Korollar Sei $\phi \in C^\infty((a,b);\mathbb{R})$ mit $|\phi^{(k)}(x)| \geq 1 \quad \forall x \in (a,b)$, und außerdem gelte
(i) $k=1$ und ϕ' monoton oder
(ii) $k \geq 2$

Dann: $\left| \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx \right| \leq c_k \lambda^{-1/k} \left[|\psi(b)| + \int_a^b |\psi'(x)|\, dx \right]$

Beweis Schreibe $\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)\,dx$ als $\int_a^b F'(x)\psi(x)\,dx$ mit $F(x)=\int_a^x e^{i\lambda\phi(t)}dt$ und integriere partiell und verwende obiges Ergebnis $|F(x)| \leq c_k\lambda^{-1/k} \quad \forall x \in [a,b]$

$$\to \left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)\right| = \left| F(b)\psi(b) - \underbrace{F(a)}_{0}\psi(a) - \int_a^b F(x)\psi'(x)dx \right|$$

$$\overset{\Delta}{\leq} |\psi(b)| c_k \lambda^{-1/k} + c_k\lambda^{-1/k}\int_a^b |\psi'(x)|dx$$

1.3 Asymptotiken

Beim Prinzip der Lokalisierung sahen wir bereits, dass das asymptotische Verhalten von $I(\lambda)$ nur von den kritischen Punkten von ϕ und dem Träger von ψ abhängt. Betrachten wir nun solche ψ, deren Träger nur einen kritischen Punkt beinhalten, so wird die Asymptotik vom kleinsten $k \geq 2$ bestimmt, für das $\phi^{(k)}(x_0) \neq 0$ gilt.

Behauptung 3 (Methode der stationären Phase)

Sei $k \geq 2$ und $\phi(x_0) = \phi'(x_0) = \dots = \phi^{(k-1)}(x_0) = 0$ und $\phi^{(k)}(x_0) \neq 0$. Ist ψ in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 getragen, so ist

$$I(\lambda) = \int e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx \sim \lambda^{-1/k} \sum_{j=0}^{\infty} a_j \lambda^{-j/k}$$

(a_j hängen nur von endlich vielen Ableitungen von ϕ und ψ in x_0 ab.
für $k=2$ ist $a_0 = \left(\frac{2\pi}{-i\phi''(x_0)}\right)^{1/2}\psi(x_0)$)

im Sinne, dass $\forall N \in \mathbb{N}_0,\ r \in \mathbb{N}_0$:

$$\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^r \left[I(\lambda) - \lambda^{-1/k}\sum_{j=0}^{N} a_j\lambda^{-j/k} \right] = O(\lambda^{-r-(N+1)/k}) \text{ für } \lambda \to \infty$$

Bemerkung
- Für $k \in 2\mathbb{N}$ ist $a_j = 0 \quad \forall j \in 2\mathbb{N}-1$
- Ohne die Bed. $\phi(x_0)=0$ ist für $k=2$, $\lambda=1$: $\int e^{i\phi(x)}\psi(x)dx = e^{i\phi(x_0)}\left(\frac{2\pi}{-i\phi''(x_0)}\right)^{1/2}\psi(x_0)$

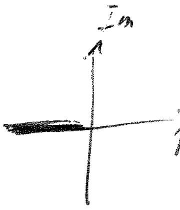
Beweis 1) $k=2$ → drei Schritte: Zunächst Spezialfall $\phi(x)=x^2$

Schritt 1: Man stellt fest, dass $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x^2} x^l e^{-x^2}\,dx \underset{x \mapsto \frac{x}{\sqrt{\lambda}}}{\sim} \lambda^{-(l+1)/2} \sum_{j=0}^{\infty} c_j^{(l)} \lambda^{-j}}$ $\forall\, l \in \mathbb{N}_0$

Für ungerade l verschwindet das Integral wg. Punktsymmetrie identisch

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\overbrace{(1-i\lambda)x^2}^{z^2}} x^l\,dx \underset{x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-i\lambda}}}{=} (1-i\lambda)^{-(l+1)/2} \int_{-\infty}^{\infty} x^l e^{-x^2}\,dx$$

$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-i\lambda}}$ erlaubt wg e^{-x^2}-Abfall um die $(1-i\lambda)^{1/2}\cdot\mathbb{R}$-Kontur durch $\mathbb{R}$ zu ersetzen



Hier haben wir dann $z^{-(l+1)/2}$ als Hauptzweig im Schlitz $\mathbb{R}^-$ von $\mathbb{C}$ fixiert

$\Rightarrow (1-i\lambda)^{-(l+1)/2} = \lambda^{-(l+1)/2}(\lambda^{-1}-i)^{-(l+1)/2}$ für $\lambda>0$. Die Potenzreihenentwicklung von $(w-i)^{-(l+1)/2}$ auf der Kreisscheibe $|w|<1$ gibt die Asymptotik

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} x^l e^{-x^2}\,dx \sim \lambda^{-(l+1)/2} \sum_{j=0}^{\infty} c_j^{(l)} \lambda^{-j}.$$

Schritt 2 Nächste Beobachtung: für $\eta \in C_c^\infty$ und $l \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\boxed{\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x^2} x^l \eta(x)\,dx\right| \le A_N \lambda^{-(l+1)/2}}$$

Sei dazu $\alpha \in C_c^\infty$, sodass $\alpha(x) = \begin{cases} 1 & |x|\le 1 \\ \in [0,1] & |x| \in [1,2] \\ 0 & |x| \ge 2 \end{cases}$ und füge $\alpha-\alpha$ ein:

$$\int e^{i\lambda x^2} x^l \eta(x)\,dx = \underbrace{\int e^{i\lambda x^2} x^l \eta(x)\alpha\left(\frac{x}{\epsilon}\right)dx}_{|\cdot| \overset{x \mapsto \epsilon x}{\le} \epsilon^{l+1}\int_{|x|\le 1} x^l \eta(x)\,dx \le \text{const}\,\epsilon^{l+1}} + \int e^{i\lambda x^2} x^l \left(1-\alpha\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right)dx \quad \text{für ein } \epsilon>0.$$

Führe D so ein, dass $Df(x) = \frac{1}{2i\lambda x}\frac{df}{dx}$ und ${}^tDf(x) = -\frac{1}{2i\lambda}\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{2x}\right)$, dann ist $D^N e^{i\lambda x^2} = e^{i\lambda x^2}$ und mittels N-facher partieller Integration ist das zweite Integral

$$\left|\int e^{i\lambda x^2} ({}^tD)^N \Big[x^l \eta(x) \underbrace{\left(1-\alpha\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right)}_{\ne 0 \text{ für } \left|\frac{x}{\epsilon}\right| > 1}\Big]dx\right| \le \frac{C_N}{\lambda^N}\int_{|x|\ge\epsilon} x^{l-2N}\,dx = C_N' \lambda^{-N}\epsilon^{l-2N+1}$$

$d_x x^{l-1} = x$

für $l-2N<-1$

$\Leftrightarrow N > \frac{l+1}{2}$

4

$\Rightarrow$ zusammengefasst: $\left|\int e^{i\lambda x^2} x^l \eta(x)\,dx\right| \le c_N \left[\epsilon^{l+1} + \lambda^{-N}\epsilon^{l-2N+1}\right]$ $\quad a(l+1) = -N + a(l-2N+1)$

Setzte $\epsilon = \lambda^{-1/2}$ $\Rightarrow \left|\int e^{i\lambda x^2} x^l \eta(x)\,dx\right| \le c_N \lambda^{-(l+1)/2}$ $\left(N > \frac{l+1}{2}\right)$ $\quad a(2N-1) = -N \quad a = \frac{N}{1-2N}$

Ähnlicherweise erhält man durch partielle Integration auch, dass $\boxed{\int e^{i\lambda x^2} g(x)\,dx = O(\lambda^{-N})}$ $\forall N \geq 0$ für $g \in \mathcal{S}$ und $g = 0$ nahe des Ursprungs.

Schritt 3 Beweis der Behauptung $\phi(x) = x^2$. Dazu

$$\int e^{i\lambda x^2} \psi(x)\,dx = \int e^{i\lambda x^2} e^{-x^2}\left[e^{x^2}\psi(x)\right]\tilde{\psi}(x)\,dx, \text{ wobei } \tilde{\psi}(x) = 1 \text{ auf } \operatorname{supp}(\psi),\ \tilde{\psi} \in C_c^\infty$$

Für $N \in \mathbb{N}$ lautet die Taylor-Entwicklung von $e^{x^2}\psi(x)$

$$e^{x^2}\psi(x) = \sum_{j=0}^{N} b_j x^j + x^{N+1} R_N(x) = P(x) + x^{N+1} R_N(x) \longrightarrow \text{ins Integral einsetzen}$$

$$\underbrace{\sum_{j=0}^{N} b_j \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x^2} e^{-x^2} x^j\,dx}_{a)} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x^2} x^{N+1} \overbrace{R_N(x)\, e^{-x^2}\tilde{\psi}(x)}^{\eta(x)}\,dx}_{b)} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x^2} \overbrace{P(x)\, e^{-x^2}\left[\tilde{\psi}(x) - 1\right]}^{0 \text{ auf und in der Nähe des Trägers von } \psi}\,dx}_{c)}$$

a) $\downarrow$ benutze Schritt 1

b) $\downarrow$ benutze Schritt 2

c) $\downarrow$ benutze $\int e^{i\lambda x^2} g(x) = O(\lambda^{-N})$ $\wedge\ g \in \mathcal{S}$

$$= \sum_j b_j \underbrace{\sum_i c_i^{(j)} \lambda^{-i}}_{\lambda^{-(j+1)/2}} + \text{const}\, \lambda^{-\frac{N}{2}-1} + \text{const}\, \lambda^{-N} \qquad ///$$

Nun zum allgemeinen Fall $\phi(x) \neq x^2$ unbedingt für $k = 2$.

$\boxed{\phi(x) = c(x-x_0)^2 + O(|x-x_0|^3)}$ und mit $c \neq 0$ setze $\boxed{\phi(x) = c(x-x_0)^2\left[1+\epsilon(x)\right]}$, wobei ($c$ ist gerade $\phi''(x_0)$)

$\epsilon \in C_{loc}^\infty$ mit $\epsilon(x) = O(|x-x_0|)$, weshalb $|\epsilon(x)| < 1$ für x nahe x_0 und $\phi'(x) \neq 0$ für $x \neq x_0$ nicht zu nahe bei x_0. Wähle nun eine Umgebung U von x_0, sodass diese beiden Bedingungen erfüllt sind. und sei $\boxed{y = (x-x_0)\left[1+\epsilon(x)\right]^{1/2}}$. Dann ist die Abbildung $U \to V$, $x \mapsto y$, wo V eine Umgebung von $y = 0$ ist ein C^1-Diffeomorphismus und man Koordinaten transformieren.

$$\int e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)\,dx = \int e^{i\lambda c y^2}\tilde{\psi}(y)\,dy \quad \text{mit } \tilde{\psi} \in C_c^\infty,\ \operatorname{supp}(\psi) \subseteq U + \tilde{\psi} = 1.$$ Damit kann man auf diesem Gebiet den Spezialfall $\phi(x) = x^2$ verwenden

~~$k \neq 2$~~ $k > 2$: beruht auf $\int e^{i\lambda x^k} e^{-x^k} x^l\,dx = c_{kl}(1-i\lambda)^{-(l+1)/k}$ dann wie oben.

1.4 Beispiele

1.4.1 Besselfunktionen

$m \in \mathbb{Z}^+$: $J_m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ir\sin\theta} e^{-im\theta} d\theta$ von der Form $I(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} \psi(x) dx$

mit $\lambda = r$, $\phi(x) = \sin x$, $\psi(x) = e^{-im\theta}$

Im Intervall $[0, 2\pi]$ ist $\phi'(x) = 0$ für $x \in \{\pi/2, 3\pi/2\}$, und dort ist $\phi'' \overset{-\sin x}{=} \pm 1$.

Zerlegung der Eins: $1 = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$ mit $\psi_1 = 1$ nahe $\frac{\pi}{2}$ mit kleinem Träger um $\frac{\pi}{2}$

$\psi_2 = 1$ nahe $\frac{3\pi}{2}$ — " — $\frac{3\pi}{2}$

$$\Rightarrow J_m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ir\sin\theta} \underbrace{(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3)}_{} e^{-im\theta} d\theta$$

verwende, dass $\left| \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} \psi_{1/2}(x) e^{-im\theta} dx \right| \leq c_k \lambda^{-1/k} \left[|\psi(b)| + \int_a^b |\psi'(x)| dx \right]$

für $k=2$. Für ψ_3: $k=1$

$$\Rightarrow J_m(r) = O(r^{-1/2}) \text{ f. } r \to \infty.$$

Genauer: mit Behauptung 3 aus der Methode der stationären Phase verschwindet ~~die~~ ϕ' einmal auf supp ψ_1 und einmal auf supp ψ_2 $\Rightarrow$ Fall $k=2$ anwendbar

Auf supp ψ_3 ist $\phi' \neq 0 \Rightarrow O(r^{-N})\ \forall N \geq 0$

$$\Rightarrow \boxed{J_m(r) = r^{-1/2} \sum_{j=0}^{\infty} a_j r^{-j} e^{ir} + r^{-1/2} e^{-ir} \sum_{j=0} b_j r^{-j}}$$ für geeignete Koeffizienten a_j, b_j

Hauptterm: $\boxed{J_m(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, r^{-1/2} \cos\left(r - \frac{\pi m}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(r^{-3/2})}$

Die Besselfunktionen können auch für $m \in \mathbb{R}$ definiert werden. (5)

Für $m > -\frac{1}{2}$: $J_m(r) = \frac{(r/2)^m}{\Gamma(m+\frac{1}{2})\pi^{1/2}} \int_{-1}^{1} e^{irt}(1-t^2)^{m-1/2}\,dt$ [illegible]

$\hookrightarrow$ stimmt mit ursprünglicher Definition überein [illegible] ($m=0$ [illegible])

des weiteren gehorchen beide Definitionen der Rekursionsrelation

$$\frac{d}{dr}\left(r^{-m} J_m(r)\right) = -r^{m} J_{m+1}(r)$$

1.4.2 Riemann-Singularität

Betrachte eine Distribution, die auf $\mathbb{R}^+$ getragen ist und für kleine x mit $e^{i/x} x^{-\gamma}$ übereinstimmt. Abseits des Ursprungs wird sie modifiziert, sodass sie dort glatt und kompakt getragen ist.

Betrachte $0 \leq \gamma < 2$ (typischer Fall) $\longrightarrow$ FT: betrachte im Wesentlichen: $\int e^{ix\cdot\xi} e^{i/x} x^{-\gamma} dx$

und definiere dies durch $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{1} e^{ix\cdot\xi} e^{i/x} \underbrace{x^{-\gamma}}_{\text{gefährlich}} dx = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{1} e^{ix\cdot\xi} \frac{d}{dx}\left(e^{i/x}\right) i x^2 x^{-\gamma} dx.$

Eine partielle Integration zeigt, dass der Limes tatsächlich existiert, ~~$(\frac{d}{dx}(e^{ix\cdot\xi} x^{2-\gamma})$~~

denn $\underbrace{-e^{ix\cdot\xi} e^{i/x} x^{2-\gamma}\Big|_{\varepsilon}^{1}}_{|\cdot| \leq \text{const}_\xi \ \forall \varepsilon > 0} + \underbrace{\int_{\varepsilon}^{1} i e^{i/x}\left[i\xi x^{2-\gamma} + (2-\gamma)x^{1-\gamma}\right] e^{ix\cdot\xi}\,dx}_{\text{nochmal partiell integrieren wie eben} \Rightarrow \text{keine Singularität mehr bei } x=0.}$

Wir werden nun folgende Asymptotik für die Fouriertransformierte zeigen

$$\boxed{\int_0^1 e^{ix\cdot\xi} e^{i/x} x^{-\gamma} dx = \sqrt{\pi i}\, e^{2i\sqrt{\xi}} \cdot \xi^{-\frac{3}{4}+\frac{\gamma}{2}} + O(\xi^{-1+\gamma/2}) \text{ f. } \xi \to \infty}$$

Die Asymptotik für $\xi \to \infty$ ist deshalb so interessant, da $x^{-\gamma}$ umso singulärer (also nicht-glatter) am Ursprung wird je größer $|\gamma|$ wird, was im Fourierraum keinen Abfall, sondern Anstieg im Unendlichen bedeutet. Des Weiteren ~~[illegible]~~ oszilliert $e^{i/x}$ zum Ursprung hin immer schneller, was auch großen Frequenzen entspricht.

Mit $\phi(x) = x^{-1} + x\cdot\xi$ und $\psi(x) = x^{-\gamma}$ ist

$$\cancel{\xi e^{\lambda x}} \quad \int_0^1 e^{i/x} e^{ix\xi} x^{-\gamma}\, dx = \int_0^1 e^{i\phi(x)}\psi(x)\,dx$$

, d.h. unser Entwicklungsparameter λ entspricht gerade dem Impuls/Frequenz ξ. Die kritischen Punkte der oszillierenden Phase sind durch $\phi'(x) = -x^{-2} + \xi = 0$ bestimmt, also, wenn $x = x_0 = \xi^{-1/2}$, wohingegen

$$|\phi''(x_0)| = |2x_0^{-3}| = |2\xi^{3/2}| > 1 \quad \text{für } \cancel{\xi \gg} \ \cancel{\xi \to \infty} \ |\xi| > 2^{-2/3}$$

Aus der Entwicklung $\int e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x) \sim \lambda^{-1/2}\sum_{j=0}^{\infty} a_j \lambda^{-j/2}$ mit $x_0 \in \operatorname{supp}\psi$ sieht man, dass der Hauptterm $\xi^{-3/4+\gamma/2}$ gerade hieraus folgte, wenn ϕ und ψ bei $x=0$ regulär wären

$$\left(a_0 = e^{i\phi(x_0)}\left(\frac{2\pi}{-i\phi''(x_0)}\right)^{1/2}\psi(x_0) = e^{i(\xi^{1/2}+\xi^{1/2})}\cdot\sqrt{2\pi}\,\sqrt{i}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,\xi^{-3/4}\cdot\xi^{\gamma/2}\right)$$

Wir behandeln das Problem etwas genauer, indem wir um x_0 lokalisieren, also schreiben

$$\int_0^1 e^{i/x + ix\cdot\xi}\psi(x) = I_1 + I_2 + I_3 = \int_0^a \dots + \int_a^b \dots + \int_b^1 \dots$$

, wobei (a,b) ein kleines Intervall um ~~x_0~~ ist. $x_0 = \xi^{-1/2}$ ist. Wir können z.B. $a = \xi^{-1/2}/2$ und $b = \frac{3}{2}\xi^{-1/2}$ wählen

- $x \in [b,1]$: $\phi'(x) = -x^{-2} + \xi \geq \frac{5}{9}\xi$ ⇒ verwende $\left|\int_b^1 e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)\,dx\right| \le c_k\lambda^{-1/k}\left[|\psi(1)| + \int_b^1 |\psi'(x)|\,dx\right]$

  $\Rightarrow I_3 \overset{k=1}{=} O(\xi^{-1} + \xi^{-1}\cdot\xi^{\gamma/2}) = O(\xi^{\frac{\gamma}{2}-1}) \hat{=}$ Fehlerterm $\hat{=}$ Ct

- $x \in [0,a]$: $\phi'(x) = -x^{-2} + \xi \le -\frac{3}{4}x^{-2}$, $\phi''(x) = 2x^{-3}$

  $$\Rightarrow I_1 = \int_0^a \left(\frac{d}{dx}e^{i\phi(x)}\right)\frac{1}{i\phi'(x)}x^{-\gamma} \underset{1}{=} -e^{i\phi(a)}\frac{1}{i\phi'(a)}a^{-\gamma} - \int_0^a e^{i\phi(x)}\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{-\gamma}}{i\phi'(x)}\right) = O(a^{2-\gamma}) = O(\xi^{\frac{\gamma}{2}-1})$$

  1: $\gamma \in [0,2)$ ⇒ Randterm bei 0 wird durch $\phi'(x)^{-1}$ kontrolliert

- $x \in (a,b)$: wir könnten wieder $\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)\right| \le c_k\lambda^{-1/k}\left[|\psi(b)| + \int_a^b |\psi'(x)|\,dx\right]$ mit $k=2$ anwenden, sowie $\phi''(x) = 2x^{-3} \geq \text{const}\,\xi^{3/2}$ anwenden, um ~~$I_2 = O(\xi^{\dots})$~~ $I_2 = O(\xi^{\gamma/2 - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}})$ zu erhalten

Um die exakte Konstante der Asymptotik zu erhalten, muss man das Verhalten bei (6)

x_0 genauer studieren und auf die Asymptotik $\int e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx \sim \lambda^{-1/2}\sum_{j=0} a_j \lambda^{-j/2}$ zurückgreifen

Die Strategie ist es die Phase $\phi(x)$ um den kritischen Punkt x_0 zu entwickeln. Dazu führen wir

$$y=\xi^{1/2}(x-x_0):\ [a,b]=\{x: |x-x_0|\le \frac{\xi^{-1/2}}{2}\} \xrightarrow{\text{Linear}} [-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}]$$ ein. Außerdem definieren wir

$dx = |\xi|^{-1/2}dy$

$\lambda\Phi(y) := \phi(x)-\phi(x_0)$, d.h. $\Phi(y)=\lambda^{-1}[\phi(y\xi^{-1/2}+x_0)-\phi(x_0)]$ ein, wobei λ hier noch

$[\phi(x)=\phi(x_0)+\phi'(x')(x-x_0)]$

bestimmt werden muss. Wir wählen im Folgenden λ so, dass $\Phi''(0)=1$ ist, d.h.

$$\lambda^{-1}\phi''(x_0)\cdot\xi^{-1} = \lambda^{-1}\xi^{-1}\cdot 2\xi^{3/2} \overset{!}{=} 1 \Rightarrow \underline{\lambda = 2\xi^{1/2}}.$$

Man prüft, dass es $\forall k=0,1,\dots$ $c_k>0$ gibt, sodass $|\Phi^{(k)}(y)|\le c_k$ $\forall y\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ und insbesondere

$\Phi''(y)\ge c>0$ für $y\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

Darüberhinaus sind $\Phi(0)=\Phi'(0)=0$, wohingegen $\Phi'(\frac{1}{2})=\frac{5}{18}$ und $\Phi'(-\frac{1}{2})=-\frac{3}{2}$.

Def $\Psi(y)=\xi^{-\gamma/2}x^{-\gamma}$, dann ist $\underset{x=x_0=\xi^{-1/2}}{\overset{\Leftrightarrow}{\Psi(0)=1}}$, wohingegen $|\Psi^{(k)}(y)|\le c_k$ $(k=0,1,\dots)$, $y\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

Mit diesen Ersetzungen können wir das Integral so umschreiben

$$\int_a^b e^{i\phi(x)}x^{-\gamma}dx = e^{i\phi(x_0)}\cdot\xi^{\gamma/2-1/2}\int_{-1/2}^{1/2} e^{i\lambda\Phi(y)}\Psi(y)\,dy \quad \text{mit } \lambda=2\xi^{1/2},\ \phi(x_0)=x_0^{-1}+x_0\xi=2\sqrt{\xi}$$

und wir können das Ergebnis über die Asymptotik von $I(\lambda)$ verwenden. Dazu splitten wir noch $\Psi(y)=\Psi_0(y)+\Psi_1(y)$, wobei $\Psi_1\in C_c^\infty([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}])$ und $\mathrm{supp}(\Psi_0)\subseteq U(-\frac{1}{2})\cup U(\frac{1}{2})$ [Umgebungen um die Endpunkte]

In der Bemerkung hatten wir gesehen, dass f. Ψ_1 der führende Term durch

$$e^{i\Phi(y_0)}\left(\frac{2\pi}{-i\Phi''(y_0)}\right)^{1/2}\Psi(y_0) \underset{y_0=0}{\overset{\Phi(0)=0}{=}} \sqrt{\frac{2\pi}{-i}}\cdot\lambda^{-1/2} = \sqrt{2\pi i}\,\lambda^{-1/2}$$ gegeben ist, wohingegen mit

dem Scaling-Argument $\int_{-1/2}^{1/2} e^{i\lambda\Phi(y)}\Psi_0(y)dy = c_1\lambda^{-1}$

$$\Rightarrow \int_a^b e^{i\phi(x)}x^{-\gamma}dx = e^{2i\sqrt{\xi}}\xi^{\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}}\Big[\underset{\text{v. }\Psi_0}{c_1}\xi^{-1/2}+\sqrt{2\pi i}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\xi^{-1/4}\Big]$$

✓

Essenz zur Bestimmung der Asymptotik von $I(\lambda) = \int_\Omega e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)\,dx$

~~• Bestimme alle kritischen Punkte x_j, wo $\phi^{(k)}(x_j)$ $\phi^{(k_j-1)}(x_j) =$~~

• Bestimme alle kritischen Punkte x_j, wo $\cancel{\phi^{(k_j-1)}(x_j) = 0}$ $\phi(x_j) = \phi'(x_j) = \dots \phi^{(k_j-1)}(x_j) = 0$

und lokalisiere um diese Punkte, schreibe also $\psi(x) = \sum_j \Big[\underbrace{\chi_j(x_j)\psi(x)}_{\psi_{1j}(x)} + \underbrace{(1-\chi_j(x))\psi(x)}_{\psi_{2j}(x)}\Big]$

wobei $\underset{C_c^\infty \text{ z.B.}}{\chi_j(x)} = \begin{cases} 1 & x \in [x_j-\beta, x_j+\beta] \\ \in [0,1] & x \in [x_j-\beta', x_j+\beta'] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $(\beta' > \beta)$

• Für ψ_{1j} verwende: $\int e^{i\lambda\phi(x)}\psi_{1j}(x)\,dx \sim \lambda^{-1/k_j}\sum_\ell a_\ell \lambda^{-\ell/k_j}$ ~~und im Fall ϕ~~

und im Spezialfall $k=2$ ist die führende Ordnung durch $e^{i\phi(x_j)}\left(\frac{2\pi}{-i\phi''(x_j)}\right)^{1/2}\psi_{1j}(x_j)$ gegeben

• Für ψ_{2j} unterscheide zwei Fälle:

– ψ_{2j} hat in Ω kompakten Träger $\Rightarrow$ (Localization): $\int\limits_{= [\tilde a_j, \tilde b_j]} e^{i\lambda\phi(x)}\psi_{2j}(x)\,dx = O(\lambda^{-N})\ \forall N \geq 0$

– $|\psi_{2j}^{(\ell_j)}(x)| \geq 1$ oder $|\psi_{2j}'(x)| \geq 1$ und ψ_{2j}' ist monoton $\forall x \in supp(\psi_{2j})$, so verwende (Scaling)

$\left|\int e^{i\lambda\phi(x)}\psi_{2j}(x)\,dx\right| \leq c_{\ell_j}\lambda^{-1/\ell_j}\left[|\psi_{2j}(\tilde b_j)| + \int_{\tilde a_j}^{\tilde b_j} |\psi_{2j}'(x)|\,dx\right]$

2 Oszillatorische Integrale erster Art – mehrere Variablen ($n \geq 2$)

Leider können nicht alle Methoden aus dem eindimensionalen Fall verallgemeinert werden.

Behauptung 4 (Lokalisierung)

Sei $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n : \mathbb{R})$, sodaß ϕ keine kritischen Punkte in $\operatorname{supp}(\psi)$ hat.

Dann ist $I(\lambda) = \int e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)\,dx = O(\lambda^{-N})$ f. $\lambda \to \infty$ $\forall N \geq 0$.

Beweis Wir zerlegen $\psi = \sum_k \psi_k$, wobei die ψ_k auf Bällen um Punkte $x_0 \in \operatorname{supp}(\psi)$ getragen sein sollen. Für alle $x_0 \in \operatorname{supp}(\psi)$ gibt es einen Einheitsvektor ξ und einen Ball $B(x_0)$ um x_0 zentriert, sodass $\xi \cdot (\nabla\phi)(x_0) \geq c > 0$ $\forall x \in B(x_0)$.

Mit $I(\lambda) = \sum_k \int e^{i\lambda\phi(x)}\psi_k(x)\,dx$ genügt es die Abschätzung für jeden Summanden einzeln zu verifizieren.

Wir wählen nun das Koordinatensystem so, dass ~~x_0~~ z.B. x_1 entlang ξ zeigt.

$$\int e^{i\lambda\phi(x)}\psi_k(x)\,dx = \int \Big(\underbrace{\int e^{i\lambda\phi(x_1,\dots,x_n)}\psi_k(x_1,\dots,x_n)\,dx_1}_{O(\lambda^{-N}) \text{ nach Behauptung 1 per partieller Integration}}\Big)\,dx_2\dots dx_n$$

▨

Behauptung 5 (Scaling – etwas abgeschwächt leider)

Sei $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(\psi) \subseteq B_0(1)$ (Einheitskugel)

Sei $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n : \mathbb{R})$ sodaß für $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| > 0$ $|\partial_x^\alpha \phi| \geq 1$ auf $\operatorname{supp}(\psi)$ gilt. Dann ist

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)\,dx\right| \leq c_k \lambda^{-1/k}\left[\|\psi\|_{L^\infty} + \|\nabla\psi\|_{L^1}\right], \text{ wo } k = |\alpha|,\ c_k = c_k(\phi) \text{ (von } \lambda \text{ und } \psi \text{ unabh.)}$$

und c_k ist solange beschränkt, wie $\|\phi\|_{C^{k+1}}$ beschränkt bleibt.

Beweis Wir betrachten den reellen, linearen Raum der homogenen Polynome vom Grad k on $\mathbb{R}^n$. Die Dimension werde mit $d(k,n)$ bezeichnet. Eine natürliche Basis ist z.B. $\{x^\alpha : |\alpha| = k\}$. Doch gibt es auch Einheitsvektoren $\xi^1, \dots, \xi^{d(k,n)}$, sodass auch $(\xi^j \cdot x)^k$ $(j = 1 \dots d(k,n))$ eine Basis ist. (Beweis unten)

Ist also $|\partial_x^\alpha \phi(x_0)| \geq 1$ für ein α mit $|\alpha| = k$, so gibt es auch einen Einheitsvektor $\xi = \xi(x_0)$, sodaß $|(\xi \cdot \nabla)^k \phi(x_0)| \geq a_k > 0$ und insbesondere, da $\|\phi\|_{C^{k+1}} < \infty$ auch $|(\xi \cdot \nabla)^k \phi(x)| \geq a_k/2$ $\forall x \in B(x_0)$ (Mittelwertsatz), wobei Radius $(B(x_0)) = \text{const} \|\phi\|_{C^{k+1}}^{-1}$

Als Nächstes überdecken wir $\mathbb{R}^n$ durch Bälle von diesem Radius und finden eine entsprechende Zerlegung der Eins $1 = \sum \eta_j(x)$, $0 \leq \eta_j \leq 1$, $\sum |\nabla \eta_j| \leq b_n$, wobei $\text{supp}(\eta_j) \subseteq B(x_j)$. Für $\psi_j = \psi \cdot \eta_j$ ist
$\int e^{i\lambda \phi(x)} \psi(x) dx = \sum_j \int e^{i\lambda\phi(x)} \psi_j(x) dx$. und wir schätzen dann Letzteres ab.

Wieder drehen wir das KS-Koordinatensystem so, dass die x_1-Achse parallel zu obigem ξ liegt, dann ist

$$\int e^{i\lambda\phi(x)} \psi_j(x) dx = \int \left(\int e^{i\lambda\phi(x_1 \dots x_n)} \psi_j(x_1 \dots x_n) dx_1 \right) dx_2 \dots dx_n$$ und verwenden

(Scaling) in 1d für $$\left| \int e^{i\lambda\phi(x_1 \dots x_n)} \psi_j(x_1 \dots x_n) dx_1 \right| \leq c_k (a_k \lambda)^{-1/k} \left[\|\psi\|_{L^\infty} + \int \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x_1 \dots x_n) \right| dx_1 \right]$$

Integrieren über die restlichen Koordinaten gibt die Behauptung.

Bemerkungen •) Die Abschätzung ist (außer für $k=1$, sh. Lokalisierung) alles andere als optimal. Z.B. für $\phi(x) = x_1 \cdot x_2$ erhält man lediglich einen $\lambda^{-1/2}$-Abfall, wohingegen der wahre Abfall wie λ^{-1} geht (später)

Lemma Polynome der Form $(\xi\cdot x)^k$ $(\xi\in\mathbb{R}^n)$ spannen ebenfalls den linearen Raum der reellen homogenen Polynome vom Grad k auf.

Beweis Betrachte das positiv definite innere Produkt $\langle P,Q\rangle := \sum_{|\alpha|=k} \alpha!\, a_\alpha b_\alpha$ auf diesem Raum, ~~wo~~ wobei $P=\sum_\alpha a_\alpha x^\alpha$, $Q=\sum_\alpha b_\alpha x^\alpha$ und bemerke

$\langle P,Q\rangle = [Q(\frac{\partial}{\partial x})](P)$.

Angenommen, P wäre orthogonal zu allen $(\xi\cdot x)^k$, so wäre also

$(\xi\cdot\partial)^k(P)=0 \ \forall \xi\in\mathbb{R}^n$, d.h. $(\frac{\partial}{\partial t})^k P(t\xi)=0 \ \forall\xi\in\mathbb{R}^n$. Dies kann aber nur dann so sein, wenn $P\equiv 0$. ▨

Sollten ϕ kritische Punkte im Träger von ψ besitzen, so müssen wir zwei Fälle untersuchen.

2.1 Nicht-entartete kritische Punkte

Angenommen, x_0 wäre ein kritischer Punkt von ϕ und die symmetrische $n\times n$-Matrix $\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j}\right](x_0)$ wäre invertierbar, so heißt x_0 nicht-entartet. In diesem Fall ist x_0 in der Tat ein isolierter kritischer Punkt.

Behauptung 6 (Asymptotiken)

Angenommen $\phi(x_0)=0$ und x_0 ist auch ein nicht-entarteter kritischer Punkt von ϕ. Ist ψ in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 getragen, so ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)\,dx \sim \lambda^{-n/2}\sum_{j=0}^{\infty} a_j\lambda^{-j}$$

f. $\lambda\to\infty$, wobei die a_j nur von endlich vielen Ableitungen von ϕ und ψ bei x_0 abhängen. Insbesondere ist

$$a_0=\psi(x_0)\,(2\pi)^{n/2}\prod_{j=1}^{n}(i\mu_j)^{-1/2},$$

wobei $\mu_1\dots\mu_n$ die EW von $\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j}\right)(x_0)$ sind.

Beweis Wie in 1D zeigen wir die Behauptung zunächst für $\phi(x) = Q(x) = \sum_{j=1}^{m} x_j^2 - \sum_{j=m+1}^{n} x_j^2$ für fixes $m \in [0, n]$. Das Analogon von

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x^2} x^l e^{-x^2} dx \sim \lambda^{-(l+1)/2} \sum_{j=0}^{\infty} c_j^{(l)} \lambda^{-j}$$ ist

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda Q(x)} e^{-|x|^2} x^l dx \sim \lambda^{-n/2 - |l|/2} \sum_{j=0}^{\infty} c_j^{(n)}(m, l) \lambda^{-j}},$$ wobei $l \in \mathbb{N}_0^n$ und

$x^l = x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n}$. Wegen Symmetrie verschwindet das Integral, wenn wenigstens ein l_j ungerade ist.

Wir zerlegen dazu das Integral wie folgt.

$$\prod_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\lambda x_j^2} e^{-x_j^2} x_j^{l_j} dx_j = \prod_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{l_j} dx \cdot (1 \mp i\lambda)^{-1/2 - l_j/2},$$ wobei

partielle wir alle, bis auf die j-te Integration (bzw. β) ausgeführt haben

$$\prod_{j=1}^{n} (1 \mp i\lambda)^{-(1+l_j)/2} = \prod_{j=1}^{n} \lambda^{-(1+l_j)/2} (\lambda^{-1} \mp i)^{-(1+l_j)/2}$$

Extrahiert man daraus $\prod_{j=1}^{n} (\lambda^{-1} \mp i)^{-(1+l_j)/2}$ und entwickelt dieses um große λ (in einer Potenzreihe in λ^{-1}), erhält man die Behauptung, denn $\prod_{j=1}^{n} \lambda^{-(1+l_j)/2} = \lambda^{-(n+|l|)/2}$.

Das Analogon von $\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x^2} x^l \eta(x) dx\right| \leq A \lambda^{-(1+l)/2}$ $\forall \eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ lautet

$$\boxed{\left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda Q(x)} x^l \eta(x) dx\right| \leq A \lambda^{-(n+|l|)/2} \quad \forall \eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

Dazu betrachten wir die Kegel $\Gamma_j := \{x : |x_j|^2 \geq \frac{|x|^2}{2n}\}$ und die kleineren $\Gamma_j^{(0)} := \{x : |x_j|^2 \geq \frac{|x|^2}{n}\}$.

z.B. $n=2$:

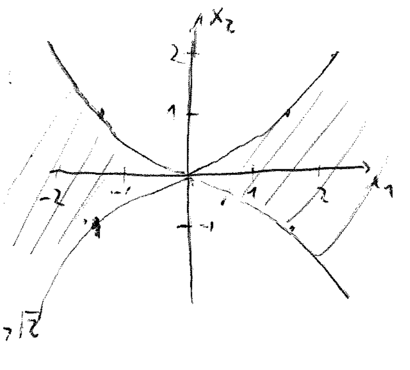
$|x|^2 = x_1^2 + x_2^2$

$x_2 = 1$

$x_1^2 \geq \frac{1+x_1^2}{2}$

$\leftrightarrow x_1^2 \geq 2 \quad |x_1| \geq \sqrt{2}$

$x_2 = \pm 2: \quad x_1^2 \geq 4$



Da $\bigcup_{j=1}^{n} \Gamma_j^{\rho} = \mathbb{R}^n$, gibt es homogene Funktionen $\Omega_1 \dots \Omega_n$ vom Grade 0, die glatt abseits des Ursprungs sind, sodass $1 = \sum_{j=1}^{n} \Omega_j(x)\ \forall x \neq 0$ mit $\mathrm{supp}(\Omega_j) \subseteq \Gamma_j$.

Dann zerlegen wir $\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda Q(x)} x^{\alpha} \eta(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda Q(x)} x^{\alpha} \eta(x) \Omega_j(x)\,dx$.

In jedem Kegel integrieren wir partiell mit dem Operator $D_j e^{i\lambda Q} = e^{i\lambda Q}$, also

$D_j f(x) = (\pm 2 i \lambda x_j)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_j}$. Mit $|x_j| \geq \frac{1}{\sqrt{n}} |x|$ in Γ_j und $|({}^{t}D_j)^{N} \Omega_j(x)| \leq c_N \lambda^{-N} |x|^{-2N}$

können wir den Beweis analog wie in 1D führen.

[Analog kann man für $\eta \in \mathcal{S}$ oder η verschwindet nahe des Ursprungs zeigen, dass

$\int e^{i\lambda Q(x)} \eta(x)\,dx = O(\lambda^{-N})\ \forall N \geq 0$]

Kombiniert man die beiden Beobachtungen, erhält man wie in 1D die Behauptung für den Spezialfall $\phi(x) = Q(x)$.

Für den allgemeinen Fall entwickeln wir wieder ϕ bis zur quadratischen Ordnung.

Das Morsesche Lemma garantiert uns, dass ~~wir~~ die Koordinatentransformation

$y = (x-x_0)(1+\epsilon(x))^{1/2}$ $\quad (\phi(x) = c(x-x_0)^2(1+\epsilon(x)))$ ein C^∞-Diffeomorphismus ist, Aber

Da $\phi(x_0) = \nabla\phi(x_0) = 0$ und x_0 nicht-entartet ist, gibt es einen C^∞-Diffeomorphismus $\psi: U_{x_0} \to U_{y_0=0}$ unter welchem ϕ in $\sum_{j=1}^{m} y_j^2 - \sum_{j=m+1}^{n} y_j^2$ transformiert wird für ein $m \in [0,n]$.

Beweis von Morse: Sei dann oBdA $x_0 = 0$ und ~~entwickle~~ verwende den ~~dafür Taylor (Restglied)~~ Mittelwertsatz 2 mal so

$$\phi(x) = \sum_{ij} x_i x_j \phi_{ij}(x),$$ wobei $\phi_{ij} \in C^\infty$ und $\phi_{ij} = \phi_{ji}$ (Schwarz). In der Tat hat man

$\phi(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\phi(tx)\,dt = \int_0^1 (1-t) \frac{d^2}{dt^2} \phi(tx)\,dt$ und die zweite Integration gibt gerade die obige Form. Insbesondere ist $\phi_{ij}(0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(0)$

Induktionshypothese: $\exists$ neue Variable $y_1 \dots y_n$ sodaß ~~$\phi(y) = \pm y_1^2 \pm \dots \pm y_{r-1}^2$~~

$\phi(y) = \pm y_1^2 \pm \dots \pm y_{r-1}^2 \pm \sum_{i,j \geq r}^{n} y_i y_j \tilde{\phi}_{ij}(y)$.

Nach einer weitere linearen Substitution in den Variablen $y_r \dots y_n$ kann man

$\tilde{\phi}_{rr}(0) \neq 0$ annehmen und daher auch $\tilde{\phi}_{rr}(y) \neq 0$ für y nahe 0.

Nun führt man $y_1' \dots y_n'$ ein sodaß $y_j' = y_j$ $\forall j \neq r$, sowie

$y_r' = \sqrt{\pm \tilde{\phi}_{rr}(y)} \left[y_r + \sum_{j > r} \frac{y_j \tilde{\phi}_{jr}(y)}{\pm \tilde{\phi}_{rr}(y)} \right]$, wobei $\pm$ das Vorzeichen von $\tilde{\phi}_{rr}(0)$ ist, sodaß $\pm \tilde{\phi}_{rr}(y) = |\tilde{\phi}_{rr}(y)|$ $\forall y$ nahe 0.

In diesen neuen Variablen geschrieben ist ϕ in der Form $\phi(y) = \pm y_1^2 \pm \dots \pm y_{rr}^2 \pm \sum_{i,j \geq r+1} y_i y_j \tilde{\phi}_{ij}(y)$,

wobei $r-1$ durch r ersetzt werde.

Man führt nun die Induktion bis $r = n$ fort und permutiert die Koordinaten dieser Darstellung von ϕ um die Behauptung zu erhalten.

3 Weitere Resultate

A Asymptotiken

3.1 Exaktere Formeln

a) Sei $\phi(x) = |x|^2$ im $\mathbb{R}^n$, dann lautet die explizite Version der Asymptotik

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda |x|^2} \psi(x)\, dx \sim \lambda^{-n/2} \sum_{j \in \mathbb{N}_0} a_j \lambda^{-j} \quad \text{mit} \quad a_j = (i\pi)^{n/2} \frac{i^j}{j!} (\Delta^j \psi)(0)$$

b) Ersetzt man $|x|^2$ durch (x, Ax), wo A eine reelle, symmetrische und invertierbare Matrix ist, so gilt die obige Asymptotik mit $a_j = \left(\frac{i\pi}{\det A}\right)^{n/2} \frac{i^j}{j!} (\Delta_A)^j \psi(0)$

mit $\Delta_A = \sum_{j,k} a^{jk} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}$ und (a^{jk}) der zu A inversen Matrix.

c) Sollte bei $\int_a^b e^{i\lambda \phi(x)} \psi(x)\, dx$ $\psi(a), \psi(b) \neq 0$ sein (und ϕ hat keinen krit. Punkt in supp), so hat man f. $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ die asymptotische Formel $\int_0^\infty e^{i\lambda x} \psi(x) \sim \sum_{j \in \mathbb{N}_0} a_j \lambda^{-j-1}$ mit

$a_j = i^{j+1} \psi^{(j)}(0)$

d) Für den allgemeineren Fall für $\mathrm{Re}(\mu) > -1$

$$\int_0^\infty e^{i\lambda x}\psi(x)\, x^{\mu}\, dx \sim \sum_{j\in\mathbb{N}_0} a_j \lambda^{-j-1-\mu} \quad \text{mit} \quad a_j = i^{j+\mu+1}\frac{j!}{\Gamma(j+\mu+1)}\psi^{(j)}(0)$$

(10)

Beweise a) Verwende $\int e^{-\pi\delta|x|^2}\phi(x)\,dx = \delta^{-n/2}\int e^{-\pi|\xi|^2/\delta}\hat{\phi}(\xi)\,d\xi$ mit $\delta = -\frac{i\lambda}{\pi}$

$$\langle e^{-\pi\delta|\cdot|^2}, \phi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle \mathcal{F}(e^{-\pi\delta|\cdot|^2}), \mathcal{F}\phi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$$

Damit erhalten wir $\int e^{i\lambda|x|^2}\psi(x)\,dx = \left(\frac{i\pi}{\lambda}\right)^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\pi|\xi|^2/\lambda}\hat{\psi}(\xi)\,d\xi$.

Die Behauptung folgt dann aus der Entwicklung $e^{-i\pi|\xi|^2/\lambda} = \sum_{j\in\mathbb{N}}\left(\frac{-i\pi|\xi|^2}{\lambda}\right)^j\frac{1}{j!}$

(Fouriertransf. zurück mit $e^{i\xi\cdot 0} \to \psi(0)$, $-\xi^2 \to \Delta$)

b) analog

d) und damit c): Erinnere an $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x^2}x^{\ell}e^{-x^2}\,dx \sim \lambda^{-(\ell+1)/2}\sum_j c_j^{(\ell)}\lambda^{-j}$

aus dem Beweis der Asymptotik nur mit dem Spezialfall aus dem Beweis der Asymptotik nur mit dem Spezialfall $\psi = \tilde{\psi}$, wo $\tilde{\psi}\in C_c^\infty$ und $\tilde{\psi} = 1$ nahe des Ursprungs. In diesem Fall hat man

$\int e^{i\lambda x}\tilde{\psi}(x)\, x^{\mu}\,dx \sim \frac{i^{\mu+1}}{\Gamma(\mu+1)}\lambda^{-\mu-1}$ f. $\lambda\to\infty$, wobei dies aus der Identität $\lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_0^\infty e^{i\lambda x}e^{-\epsilon x}x^{\mu} = \frac{i^{\mu+1}}{\Gamma(\mu+1)}\lambda^{-\mu-1}$ ~~folgt~~ und

$$\sup_{\epsilon>0}\left|\int_0^\infty e^{i\lambda x}e^{-\epsilon x}x^{\mu}[1-\tilde{\psi}(x)]\,dx\right| = O(|\lambda|^{-N}) \text{ f. } \lambda\to\infty \ \forall N>0 \text{ folgt.}$$

B) Fouriertransformation von auf Oberflächen getragenen Maßen

- Sei M eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$ und $S \subseteq M$ offen
- Sei $d\sigma$ das auf S induzierte Lebesguemaß in $\mathbb{R}^n$
- Sei $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} \psi \cap S \subseteq K$, einer kompakten Teilmenge von S.
- Sei $d\mu = \psi(x)\, d\sigma$ in $\mathbb{R}^n$, getragen auf S ein Borelmaß.
  ↳ Verhalten von $\widehat{d\mu}$ im Unendlichen? ($\to$ Zahlentheorie, Verteilung von Gitterpunkten in Gebieten von $\mathbb{R}^n$)
- Interessanter Spezialfall $S = \mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n>1)$: $\widehat{d\sigma}(\xi) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, d\sigma(x)$ hat im Unendlichen einen unerwartet schnellen Abfall $\widehat{d\sigma}(\xi) = 2\pi |\xi|^{(2-n)/2} J_{(n-2)/2}(2\pi|\xi|) = O(|\xi|^{(1-n)/2})$

Sei dazu oBdA $\xi = (\vec{0}, \xi_n)$: $\widehat{d\sigma}(\xi) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i |\xi| \cos\theta}\, d\sigma(x) = \underbrace{\int_{\mathbb{S}^{n-2}} d\sigma_{n-2}}_{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-2})} \int_0^\pi e^{-2\pi i |\xi| \cos\theta} \sin^{n-2}\theta\, d\theta$

$$\overset{\substack{u=\cos\theta \quad du=-\sin\theta \\ \downarrow}}{=} \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-2}) \int_{-1}^{1} e^{-2\pi i |\xi| u}\, a(1-u^2)^{(n-3)/2} \underset{\substack{\uparrow \\ m=(n-2)/2 \\ r=2\pi|\xi|}}{=} \left(\frac{(\pi|\xi|)^{(n-2)/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}-\frac{1}{2})}\right)^{-1} J_{(n-2)/2}(2\pi|\xi|) \cdot \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-2})$$

- Abfallverhalten hängt nicht von der Rotationssymmetrie ab, sondern von den Krümmungseigenschaften von S.

B.1 Hyperflächen mit nicht-verschwindender Gaußscher Krümmung

- Zunächst: Annahme, dass $\dim S = n-1$ und die Gaußsche Krümmung von S verschwindet an keinem Punkt.
- Sei $x_0 \in S$ beliebig; führe nun eine Rotation und Translation des S umgebenden $\mathbb{R}^n$ durch, sodaß $x_0 = \vec{0}$ und die Tangentenebene von S bei x_0 ~~ist~~ gerade die Hyperebene $x_n = 0$ ist. Dann kann die Oberfläche S nahe dem Ursprung (also x_0) durch den Graphen $x_n = \phi(x_1 \dots x_{n-1})$, wo $\phi \in C_c^\infty$ und $\phi(0) = 0$, $\nabla\phi(0) = 0$ (Satz von Dini)

Betrachte dann $\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}\right)(x_0)$ $(i,j = 1 \dots n-1)$ mit den Eigenwerten $v_1 \dots v_{n-1}$ "Hauptkrümmungen von S bei x_0". $\det\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}\right)(x_0) = \prod_{i=1}^{n-1} v_i \equiv$ "Gaußsche Krümmung von S bei x_0" oder "totale Krümmung von S bei x_0"

Satz 1 Sei S eine glatte Hyperfläche in $\mathbb{R}^n$ mit überall nicht-verschwindender Gaußscher Krümmung und sei $d\mu = \Psi d\sigma$.

Dann ist $|\widehat{d\mu}(\xi)| \leq A |\xi|^{(1-n)/2}$ f. ein $A > 0$.

Beweis Um das stationäre Phase Argument verwenden zu können, nennen wir $n = n+1$ und wg. der Kompaktheit von S können wir S als Graphen von $x_{n+1} = \phi(x_1 \dots x_n)$ auffassen, sodaß $d\sigma = (1+|\nabla\phi|^2)\, dx_1 \dots dx_n$.

Für $\Phi(x,y) = x \cdot y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j + \phi(x_1 \dots x_n) y_{n+1}$ müssen wir nur noch

$| \int e^{i\lambda\Phi(x,y)} \tilde{\Psi}(x)\, dx | \leq ~~\lambda\Psi~~ A \lambda^{-n/2}$, wobei $\lambda = |\xi| > 0$, $\xi = \lambda \overset{\text{Einheitsvektor}}{y} = \lambda(y_1 \dots y_{n+1})$

zeigen unter der Voraussetzung $\phi(0) = \nabla\phi(0) = 0$, $\det\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}\right)(x_0) \neq 0$

Fallunterscheidung: (von der Lage von $y \in \mathbb{S}^n$ abhängig)

1) y ist nahe dem Nordpol $(0, 0 \dots, 1) \equiv y_N$
2) y — " — Südpol $(0, 0 \dots, -1) \equiv y_S$
3) y liegt im Komplement auf der Einheitssphäre

AD1 • $\nabla_x \Phi(x, y_N)\big|_{x=0} = 0$. ~~Wir müssen nun noch $\nabla_x \Phi(x,y)\big|_{x=x(y)} = 0$ zeigen f. y nahe y_N~~

• Wir müssen nun noch (mit Dini) zeigen, dass es einen Zusammenhang $x = x(y)$ gibt f. y nahe y_N gibt, sodaß $\nabla_x \Phi(x,y)\big|_{x=x(y)} = 0$ ist.

Dazu muss (um Dini zu verwenden) $\det\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_j}\right)(0, y_N) \neq 0$ sein, was aber per Voraussetzung wahr ist. Dann gibt es eine hinreichend kleine Umgebung von y_N und $x=0$ sodaß $x = x(y)$ und ~~th~~ auch $\det\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_j}\right)(x(y), y) \neq 0$. Solange der Träger von $\tilde{\Psi}$ klein genug um x_0 ist, können wir stationäre Phase verwenden, was die Asymptotik in diesem Fall zeigt.

AD2 • Analog zu 1)

AD3 Per Definition ist $\nabla_x \Phi(x,\eta) = (\eta_1 \dots \eta_n) + \eta_{n+1} \nabla_x \phi(x)$

Da aber η im Komplement der Einheitssphäre liegt, ist $(\eta_1^2 + \dots \eta_n^2)^{1/2} \geq c > 0$ und $\nabla\phi(x) = O(x)$ f. $x \to 0$. $\Rightarrow |\nabla_x \Phi(x,\eta)| \geq c' > 0$, wenn $\hat{\psi}$ genügend klein um den Ursprung getragen ist $\Rightarrow$ Verwende das Scalingargument, d.h. $|\int e^{i\lambda\Phi(x,\eta)} \hat{\psi}(x) dx| = O(\lambda^{-N})$ für alle $N \in \mathbb{N}$

Bemerkung Wir haben beim stationären Phase-Argument nicht ~~ausgenutzt~~ die asymptotische Entwicklung ausgenutzt. Sei supp(ψ) so klein, dass es $\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ höchstens ein $\bar{x} = \bar{x}(\xi) \in S$ gibt mit Normaler $\nu_{\bar{x}}$, die in ξ-Richtung zeigt

$$\hat{d\mu}(\xi) = a(\xi) e^{-2\pi i \phi(\xi)} + e(\xi), \quad |\xi| \geq 1 \quad (e(\xi) \in S^{-\infty} \text{ smoothing operator})$$

Wobei ist $a(\xi) \neq 0$ nur für solche ξ, für die $\bar{x}(\xi)$ definiert ist und $\bar{x}(\xi) \in \text{supp}\,\psi$

Für solche ξ ist $\phi(\xi)$ reell und homogen vom Grade 1 und $\phi(\xi) = \bar{x}(\xi) \cdot \xi$.

Außerdem ist $a \in S^{(1-n)/2}$ $(|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \leq \langle\xi\rangle^{(1-n)/2 - |\alpha|})$ und f. $\xi \to \infty$ hat man

$$a(x,\xi) = |\xi|^{(1-n)/2} \psi(\bar{x}(\xi)) \cdot |K(\bar{x}(\xi))|^{-1/2} e^{-i\pi d/4} \mod S^{-(n+1)/2}, \text{ wobei}$$

$|K(x)|$ der ~~Wert~~ Absolutwert der Gaußschen Krümmung bei x ist und d der Überschuß der Zahl der positiven Krümmungen (ggü. der Zahl d. neg. Krümmungen) in Richtung ξ ist

C Einschränkung der Fouriertransformation

~~$\mathcal{F}: L^1 \to C^\infty$~~

~~$\cdot$ $\mathcal{F}$, definiert auf L^1~~

- $\mathcal{F}: L^1 \to C^\infty$, d.h. die Fouriertransformierte einer L^1-Fkt ist stetig und daher auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiert.
- $\mathcal{F}: L^2 \to L^2$, d.h. die FT einer L^2-Fkt ist nie besser als eine L^2-Fkt, die nur μ-fast-überall definiert werden kann und daher auf Mengen vom Maß Null beliebig ist
- Für $1 < p \leq 2$ ist (mit Hausdorff-Young) $\mathcal{F}: L^p \to L^q$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$, d.h. die FT einer L^p-Fkt scheint auf den ersten Blick ebenfalls nur fast überall definiert zu sein.
- Bemerkenswert: f. $n \geq 2$, S glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ mit angemessener Krümmung, dann gibt es $p_0 = p_0(S) \in (1,2)$, sodass jedes $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $p \in [1, p_0)$ eine ~~Fkt~~ auf S eingeschränkte Fouriertransformierte hat.

__Definition__ Sei S eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ mit induziertem Lebesguemaß $d\sigma$.

Die __L^p-Einschränkungs-Eigenschaft für S__ ist gültig, wenn es $q = q(p)$ gibt, sodaß

$$\left(\int_{S_0} |\hat{f}(\xi)|^q \, d\sigma(\xi)\right)^{1/q} \leq A_{pq}(S_0) \, \|f\|_{L^p} \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

gilt, wo $S_0 \subseteq S$ offen mit $\bar{S}_0 \subseteq S$ kompakt.

Da $\mathcal{S}$ in L^p dicht ist, kann man, wenn die Ungleichung erfüllt ist, $\hat{f}$ auf S ~~bzgl~~ $d\sigma$ fast überall bzgl $d\sigma$ definieren $\forall f \in L^p$.

__Satz__ Sei S eine glatte m-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ vom Typ k. Dann gibt es $1 < p_0 = p_0(S)$, sodaß S die L^p-Einschränkungseigenschaft mit $q=2$ und $p \in [1, p_0]$ hat. Mit einfachen Mitteln findet man $p_0 = \frac{2nk}{2nk-1}$ (später $p_0 = \frac{2n+2}{n+3}$)