Konzentrationsungleichungen (Chernoff, Hoeffding, Bernstein)

Chernoff

$(X_{j,N})_{j=1}^{N} \sim \mathrm{Ber}(p_{j,N}) \qquad \max_{j\le N} p_{j,N} \to 0$

$S_N = \sum_{j=1}^{N} X_{j,N} \qquad \mathbb{E} S_N \to \mu$

$\downarrow$

$\mathrm{Pois}(\mu)$

$$\mathbb{P}(\mathrm{Pois}(\mu) = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} e^{-\mu} \left(\frac{e\mu}{k}\right)^k$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{Pois}(\mu) \geq k) \underset{k>\mu}{\leq} e^{-\mu} \left(\frac{e\mu}{k}\right)^k$$

$$\mathbb{P}(|\mathrm{Pois}(\mu) - \mu| > \underset{\in(0,1)}{\delta}\mu) \leq 2\exp(-c\delta^2\mu)$$

Thm (Chernoff) $(X_j)_{j=1}^{N} \sim \mathrm{Ber}(p_j)$ unabhängig

$S_N = \sum_j X_j$ mit $\mathbb{E} S_N \equiv \mu$

$\Rightarrow$ $\forall\ t > \mu \quad \mathbb{P}(S_N > t) \leq e^{-\mu}\left(\frac{e\mu}{t}\right)^t$

$t < \mu \quad \mathbb{P}(S_N < t) \leq e^{-\mu}\left(\frac{e\mu}{t}\right)^t$

$t = \mu \pm \delta\mu$ $\qquad \mathbb{P}(|S_N - \mu| > \delta\mu) \leq \exp(-c\delta^2\mu), \quad \delta \in (0,1)$

Bew $\mathbb{P}(S_N > t) \underset{\lambda}{=} \mathbb{P}(e^{\lambda S_N} > e^{\lambda t})$

$$\le \min_\lambda e^{-\lambda t}\, \mathbb{E}\, e^{\lambda \sum X_j}$$

$$= \min_\lambda e^{-\lambda t} \prod \underbrace{\mathbb{E}\, e^{\lambda X_j}}_{e^\lambda p_j + 1 - p_j \le \exp(p_j(e^\lambda - 1))}$$

$$\le \min_\lambda e^{-\lambda t} \exp(\mu(e^\lambda - 1)) \qquad \square$$

Zufällige Graphen (Erdős - Rényi)

n Knoten

p WS, dass zwei Knoten verbunden

d_j Grad d. j-ten Knoten ... # eingehender Verbindungen anderen Knoten

$\underline{\quad} d \ldots \quad p(n-1)$

Prop $\mathbb{P}(\forall j = 1..n : |d_j - d| < 0{,}1 d) > 0{,}9$,

sobald $d > \text{const} \log n$ (relativ dicht)

Bew $\underbrace{\mathbb{P}(\exists j = 1..n : |d_j - d| > 0{,}1 d)}$ $\overset{?}{\le} 0{,}1$

$$\le \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(|\underset{\underset{\sum Ber(p)}{\wr}}{d_j} - d| > 0{,}1 d) \le 2 \sum_{j=1}^n e^{-\tilde{c} d}$$

$$= 2n\, e^{-\tilde{c} d} < 0{,}1$$

$d > \tilde{\tilde{c}} \log n$

ausgedünnte Graphen $d = o(\log(n))$

Subgaussche ZV $\qquad \|a\|_2^2 = \sum |a_j|^2$

$\Longrightarrow \mathbb{P}\left(\left|\sum a_j X_j\right| > t\right) \leq 2\exp\left(-c\frac{t^2}{\|a\|_2^2}\right)$

$\mathbb{P}(\underset{N(0,1)}{X} \geq t) < e^{-t^2/2}$

$\left(\mathbb{E}|X|^p\right)^{1/p} \lesssim \sqrt{p}$

$\mathbb{E}\, e^{\lambda X} = \ldots = e^{\lambda^2/2} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

<u>Beh</u> Sei X eine ZV, dann sind äquivalent mit Konstanten $K_j \leq c K_e \leq \tilde{c} K_j$

(1) $\mathbb{P}(|X| > t) \leq 2e^{-t^2/K_1^2} \quad \forall t > 0$

(2) $\|X\|_p \leq K_2\sqrt{p}$

$\Rightarrow$ (3) $\mathbb{E}\, e^{\lambda^2 X^2} \leq \exp(\lambda^2 K_3^2) \quad \lambda \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda| K_3 < 1$

$\Longrightarrow$ (4) $\mathbb{E}\, e^{X^2/K_4^2} \leq 2$

Falls $\mathbb{E}X = 0$, dann (1)-(4) auch äq. zu

(5) $\mathbb{E}\, e^{\lambda X} \leq \exp(K_5^2 \lambda^2) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

<u>Bem</u>
- Falls (3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, dann X bdd (Markov)
- (5) $\Rightarrow \mathbb{E}X = 0$

<u>Bew</u> (1) $\Rightarrow$ (2) mit layer cake

$\|X\|_p^p = p\int_0^\infty \frac{dt}{t}\, t^p\, \mathbb{P}(|X| > t) \ldots$

(2) $\Rightarrow$ (3)

$$\mathbb{E}(e^{\alpha^2 X^2}) = \mathbb{E}\left(1 + \underline{\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(\alpha^2 X^2)^p}{p!}}\right)$$

... α darf nicht zu groß sein, geom Reihe.

$$p! > p^p$$

Def X ZV heißt subgaussisch, falls

$$\|X\|_{\psi_2} := \inf\{t > 0 : \mathbb{E}(e^{X^2/t^2} - 1) \le 1\} < \infty.$$

Bem $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ konvex, $\psi(0) = 0$ $\psi(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$

$L_\psi = \{X : \|X\|_\psi < \infty\}$ mit

$$\|X\|_\psi = \inf\{t > 0 : \mathbb{E}\, \psi(\tfrac{|X|}{t}) \le 1\}$$

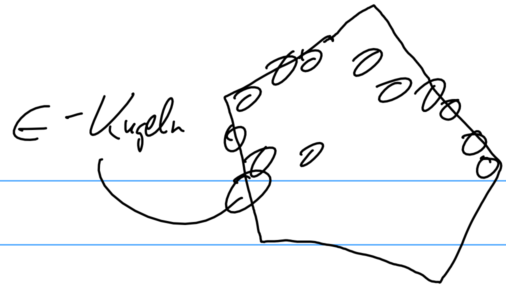
- L_ψ Banach
- $\psi_2(x) = e^{x^2} - 1$
  $\psi_1(x) = e^{|x|} - 1$
  x^p ...

- $L^\infty \subset L_{\psi_2} \underset{\text{gesehen}}{\subseteq} L^p \quad p \ge 1$

(

$$\mathbb{E}\, e^{X^2/t^2} \le e^{\|X\|_\infty^2/t^2} \le 2 \quad \text{falls } t^2 > \frac{\|X\|_\infty^2}{\ln 2}$$

$$\|X\|_{\psi_2} \le \frac{\|X\|_\infty}{\sqrt{\ln 2}}$$



diam ≤ 1

N-Polytope. $\mathbb{R}^n$

N^{c/ϵ^2} $\quad \forall\, \underline{n}$

Lem • Seien $(X_j)_{j=1}^{N}$ Folge von subgaussscher ZV, nicht notw. unabh.

$$\mathbb{E}\max_{j\le N}|X_j| \le \underset{\text{universell}}{c}\sqrt{\log N}\cdot\max_j\|X_j\|_{\psi_2}$$

• Seien $X_j \sim \mathrm{Norm.}(0,1)$ unabh.; dann

$$\mathbb{E}\max_{j=1..N}|X_j| > c\sqrt{\log N}$$

(arXiv 1511.02176, Thm 3)

Bew $\mathbb{E}X_j = 0$

$s>0$

$$\mathbb{E}\max_{j=1..N} X_j = \frac{1}{s}\,\mathbb{E}\left(\log e^{s\max X_j}\right)$$

$$\le \frac{1}{s}\log \mathbb{E}\sum_j e^{sX_j}$$

$$\overset{\text{Prop}}{\le} \frac{1}{s}\log\sum_{j=1}^{N} e^{s^2 \max_j \|X_j\|_{\psi_2}^2}$$

$$\le \frac{\log N}{s} + \frac{s^2\max\|X_j\|_{\psi_2}^2}{s}$$

optimiere für s.

$\square$

Hoeffding

$$\left\| \sum^N X_j \right\|_{\psi_2}^2 \leq C \sum^N \|X_j\|_{\psi_2}^2$$ gilt in N

X_j .. subgauss, unabh. $\mathbb{E} X_j = 0$

Bew $\mathbb{E} \exp(\lambda \sum X_j) = \dots \leq \exp(\lambda^2 \sum \|X_j\|_{\psi_2}^2)$

$\square$

Wg obiger Charakterisierung folgen

Hoeffding $\mathbb{P}(|\sum a_j X_j| > t) \leq 2 \exp\left(- \frac{c t^2}{\sum \|a_j X_j\|_{\psi_2}^2}\right)$

$$\leq 2 \exp\left(- \frac{c t^2}{\max_j \|X_j\|_{\psi_2}^2 \, \|a\|_2^2}\right)$$

X subgauss

$$\|X - \mathbb{E}X\|_{\psi_2} \leq \text{const} \, \|X\|_{\psi_2}$$

$$|\mathbb{E}X| < \mathbb{E}|X| < \|X\|_{\psi_2}.$$

Subexponentielle ZV $\quad \sum_j |g_j|^2$

Prop (1) $\mathbb{P}(|X| > t) < 2 \exp(-t/K_1)$

(2) L^p ..

(3) $\mathbb{E}^{\lambda |X|} \leq e^{K_3 \lambda} \quad 0 < \lambda < K_3^{-1}$

(4) ...

Bernstein X_j unabh. subexp

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum a_j X_j\right| > t\right) \leq 2\exp\left(-c\min\left\{\frac{t^2}{\sum \|a_j X_j\|_{\psi_1}^2}, \frac{t}{\max \|a_j X_j\|_{\psi_1}}\right\}\right)$$

vgl. Chernoff