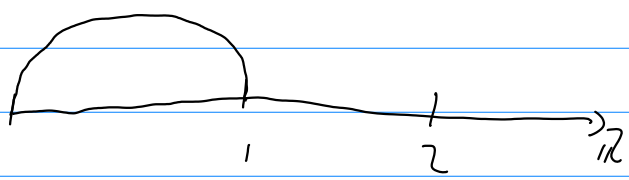


# 4 Einige Themen der Fourieranalysis

Referenz  $d=1 \rightarrow$  Krantz Kap. 1 ( $d=1$ ), Kap. 3  $d \geq 2$   
 Grafakos Kap. 3, 4  $\rightarrow D_n, T_n, L^p$ -norm.  $\rightarrow$   $L^p$ -norme

Wir betrachten den Torus  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  Konv. Transference-type Lemma (Thm 4.3.7)

$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$       $\frac{3}{2} \sim \frac{1}{2}$  auf  $\mathbb{T}$



hilft bei Identifizierung  $\mathbb{T}$  mit  $\mathbb{C} \supseteq \mathbb{S}^1 \ni e^{2\pi i x}, x \in [0, 1]$

$f$  1-periodisch

$f(x+n) = f(x), n \in \mathbb{Z}$

$\hat{f}(m) = \int_{\mathbb{T}} e^{-2\pi i m x} f(x) dx$

$= \sum_m \hat{f}(m) e^{2\pi i m x}$

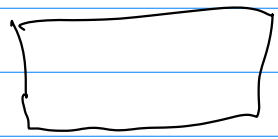
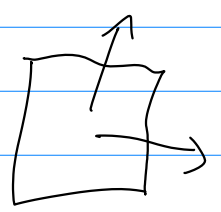
Frage In welchem Sinne konvergiert  $\sum \hat{f}(m) e^{2\pi i m x}$

$d=1$  unterscheidet sich stark von  $d \neq 1$ .

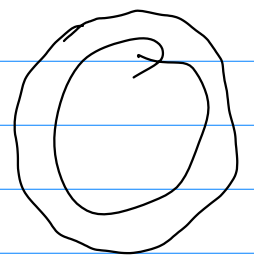
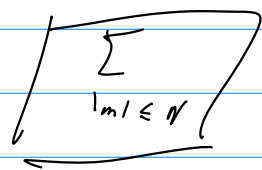
$\sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$

$d=2$

$\sum_{\substack{m_1=-N \\ m_2=-N}}^N$



$\frac{m_1}{m_2} = e$



#### 4.1 Eindimensionale Fourierreihen

1.7.2020

Behaupt

$$\hat{f}(j) = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i t j} dt$$

1)  $f \in L^1(\mathbb{T}) \Rightarrow |\hat{f}(j)| \leq 1 \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad \hat{f}(j) \rightarrow 0 \quad (|j| \rightarrow \infty)$   
(Riemann-Lebesgue)

2) Die trigonometrischen Polynome  $P(x) = \sum_m a_m e^{2\pi i m x}$   
(nur endlich viele  $a_m \neq 0$ ) sind dicht in  $L^p(\mathbb{T}), 1 \leq p < \infty$

3) Jede stetige Funktion auf  $\mathbb{T}$  ist der gleichmäßige Grenzwert von trigonometrischen Polynomen

4) Angenommen  $f \in C^h(\mathbb{T}) \Rightarrow |\hat{f}(j)| \approx (1+|j|)^{-h}$

(folgt aus partieller Integration ( $j > 1$ ))

$$\int_{\frac{j-h}{j^h}}^{\frac{j+h}{j^h}} \underbrace{e^{2\pi i x \cdot j}}_{j^h e^{2\pi i x j}} f(x) dx = \dots = \frac{(-1)^h}{j^h} \int f^{(h)}(x) e^{2\pi i x j} dx$$

$\Rightarrow$  bei partiellen Integrationen auf  $\mathbb{T}$  gibt es keine Randterme.)

$$(S_N f)(x) = \sum_{j=-N}^N \hat{f}(j) e^{2\pi i j \cdot x}$$

$$= \sum_{j=-N}^N \int_0^1 dt e^{2\pi i j(x-t)} f(t)$$

$$= \int_0^1 dt f(t) D_N(x-t) \quad \text{mit dem Dirichlet-} \\ \text{kern } D_N(t) = \sum_{j=-N}^N e^{2\pi i j t}$$

Aus Übung:  $\int_0^1 D_N(t) dt = 1 \quad \underline{\underline{\|D_N\|_{L^1(\mathbb{T})} \sim \log N}}$

$\Rightarrow L^p$ -Konvergenz folgt hier nicht unmittelbar  
(oder punktweise Konvergenz)

Theorem 4.1 Sei  $f \in L^1(\bar{h})$  differenzierbar bei  $x$ .

Dann konvergiert  $S_N f(x) \rightarrow f(x)$  gleichmäßig, d.h.  
 $|S_N f(x) - f(x)| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$

Korollar Wenn  $f$  differenzierbar ist, dann konvergiert  
 $S_N f(x)$  an jedem Punkt.

Beweis Grafhor, Krantz (S. 52)

Bemerkung Tatsächlich braucht man lediglich eine Dini-Bedingung  $\int_{|t| < |h|} |t|^{-1} (f(t+x) - f(x)) \leq 1$  (anstatt  $C^1$ )

Frage: Gilt  $S_N f \rightarrow f$  in  $L^p$ ?

Im Fourierreum ist der zu  $S_N$  gehörende Fourier-  
multiplikator gerade  $m_N(j) = \begin{cases} 1 & |j| \leq N \\ 0 & |j| > N \end{cases} = \frac{1}{2\pi} \chi_{[-N, N]}(j)$

(d.h.  $(S_N f)(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} m_N(j) \hat{f}(j) e^{2\pi i j x}$ )

Lemma 4.2 (Gewichteter Schur-Test)

Seien  $(X, \mu)$ ,  $(Y, \nu)$  Maßräume und  $0 < w(x, y)$  eine auf  
 $X \times Y$  messbare Funktion. Angenommen der Integral Kern  
 $K(x, y): X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$  erfüllt

$$\sup_{x \in X} \int_Y w(x, y)^{1/p} |K(x, y)| d\nu(y) \equiv A_1 < \infty \text{ und } \sup_{y \in Y} \int_X w(x, y)^{-1/p} |K(x, y)| d\mu(x) \equiv A_2 < \infty$$

für ein  $1 < p < \infty$  bzw.  $1 \leq p \leq \infty$  falls  $w(x, y) \equiv 1$ . Dann erfüllt der Operator, der  
durch  $Tf = \int K(x, y) f(y) d\nu(y)$  definiert ist  $\|Tf\|_{L^p(X)} \leq A_1^{1/p} A_2^{(p-1)/p} \|f\|_{L^p(Y)}$

Thm 4.3 ( $S_N f \rightarrow f$  in  $L^2$ )

Sei  $f \in L^2(\mathbb{T})$ , dann  $S_N f \rightarrow f$  in  $L^2$

Beweis Folgt aus FAP I, da  $|m_N(j)| \leq 1 \ \forall j \in \mathbb{Z}$   
 $\hookrightarrow$  (mit der Tatsache, dass  $S_N f \rightarrow f$  in  $L^2$   
 für  $f$  in einer dichten Teilmenge von  $L^2$ ,  
 z.B.  $C^\infty$  oder trigonometrische Polynome)

Thm 4.4. ( $S_N f \rightarrow f$  in  $L^p$ )

Sei  $1 < p < \infty$  und  $f \in L^p(\mathbb{T})$ . Dann  $\|S_N f - f\|_p \rightarrow 0$ .

Beweis  $\mathbb{1}_{[-N, N]}(j) = \dots = \frac{1}{2} (\operatorname{sgn}(j+N) - \operatorname{sgn}(j-N))$   
 $+ \frac{1}{2} [\mathbb{1}_{\mathbb{Z}^+} (j) + \mathbb{1}_{\mathbb{Z}^-} (j)]$

$$\Rightarrow (S_N f)(x) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} i e^{-i \cdot 2\pi N x} H(e_N f)(x) - \frac{1}{2} i e^{2\pi i N x} H(e_{-N} f)(x)$$

Rang-1-Operator mit  $+ \frac{1}{2} (P_{-N} f + P_N f)$   
 Integralform  $e^{2\pi i j(x-y)} = P_j(x, y)$

wobei  $P_j = |e_j\rangle \langle e_j|$   $e_j(x) = e^{2\pi i j \cdot x}$

$$\begin{pmatrix} a & \\ & c, d \end{pmatrix}$$

$$P_j f(x) = e_j(x) \langle e_j, f \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = e^{2\pi i j x} \cdot \hat{f}(j)$$

$$\|P_j f\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$$

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \int_0^1 \bar{f}(x) g(x) dx$$

$$\text{mit } |\hat{f}(j)| = \left| \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{2\pi i j t} dt \right| \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$$

Nebenrechnung zu (\*) oben (Satz=...)

$$\sum_j \operatorname{sgn}(j+N) \hat{f}(j) e^{2\pi i j x}$$

$$= i \sum_j (-i) \operatorname{sgn}(j+N) e^{2\pi i j x} \int_0^1 dt e^{-2\pi i t j} f(t)$$

$$\stackrel{j \mapsto j-N}{=} ; e^{-2\pi i N x} \sum_j -i \operatorname{sgn}(j) \widehat{f}(j) e^{2\pi i j x}$$

$$=: i e^{-2\pi i N x} H(e_N f)(x)$$

$$\text{mit } H(g)(x) := \sum_j (-i) \operatorname{sgn}(j) \hat{g}(j) e^{2\pi i j x}$$

Wir bringen jetzt die  $L^p(\mathbb{R}^n)$ -Beschränktheit von  $H$  in  $\mathbb{R}^d$  ins Spiel (Erinnerung:  $Hf = p.v. \frac{1}{x} * f$ )  
 $\rightarrow$  vgl. Integralkerne von  $H$  in  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{T}$

Der Integralkern von  $H$  in  $\mathbb{T}$  kann durch Abel-Summation gewonnen werden.

Behauptung

$$\mathbb{R} \quad \mathcal{R}_\varepsilon f := \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

$$\mathcal{R}_\varepsilon * f \rightarrow p.v. \frac{1}{x} * f$$

$$(Hg)(x) \stackrel{p.v.}{=} \int_{-1/2}^{1/2} f(x-t) \cot(\pi t) dt$$

Katznelson  
(Introduction  
to harmonic  
analysis)  $\rightarrow$  Kap III  
S. 72, 88-92

$$\int_0^1 \operatorname{sgn}(j) e^{2\pi i j t} dt \quad \parallel \text{im Abelsinne}$$

$$\text{Für } 0 < r < 1: \sum_j r^{|j|} \operatorname{sgn}(j) e^{2\pi i j t} \xrightarrow{r \rightarrow 1} \cot \pi t$$

Hilberttransf. in  $\mathbb{T}$      Hilberttransf. in  $\mathbb{R}$

$$\text{Da } \cot(\pi t) - \frac{1}{\pi t} = \mathcal{O}(t) \quad ( \text{Hausaufgabe} ), \quad |t| < 1/2$$

ist die Differenz zwischen diesen beiden Integralkernen

Schur  $\sup_{x,y} \int |K(x,y)| dy < \infty$  | beschränkt  $\Rightarrow$  Der zu  $\cot(\pi t) - \frac{1}{\pi t}$  gehörende Integraloperator ist wg Schur (s. Lemma 4.2)  $L^p$ -beschränkt.

$\rightarrow T: L^p \rightarrow L^p$   
 $1 < p < \infty$

Andererseits ist  $\frac{1}{\pi t} \mathbb{1}_{|t| < 1/2}$  wieder  $L^p(\mathbb{R}^d)$ -beschränkt, da der Kern dieselben Bedingungen wie  $\frac{1}{t}$  erfüllt  $\Rightarrow$  Thm 3.9 etc aus letztem Kapitel anwendbar.

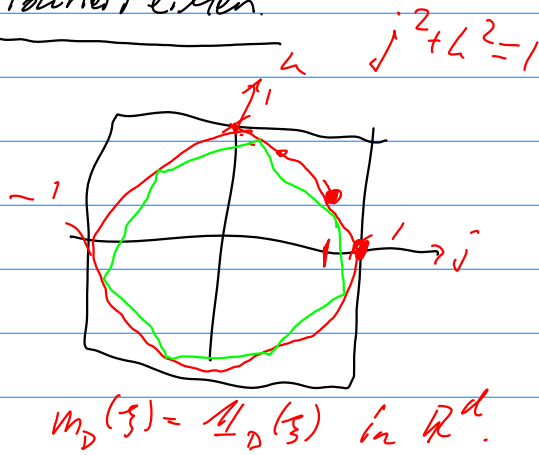
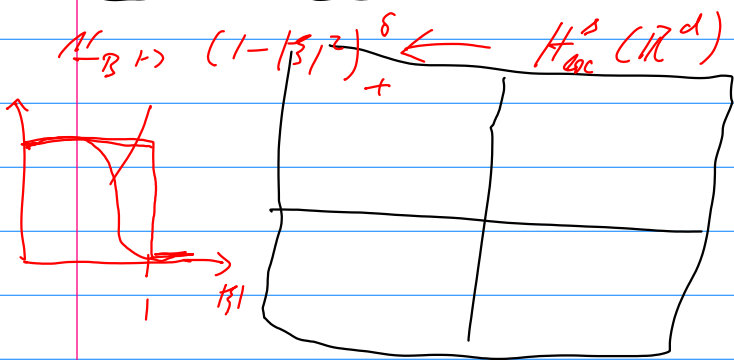
$\Rightarrow$  Integraloperator mit  $\cot(\pi t)$ , d.h. die Hilberttransf. auf  $\mathbb{T}$ , ist  $L^p(\mathbb{T})$ -beschränkt ( $1 < p < \infty$ )



In den Hausaufgaben:  $H$  ist weder  $L^1(\mathbb{R}^d)$ - noch  $L^\infty$ -beschränkt

$\Rightarrow$  Konvergenz in  $L^1(\mathbb{T})$  schlägt fehl. (wg FAP I)

4.2. Der Fall  $d \geq 2$  - multiple Fourierreihen.



$\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}^d = \mathbb{T} \times \mathbb{T} \times \dots \times \mathbb{T}$

$x \sim y \Leftrightarrow x_j \sim y_j \quad j=1-d$   
 $\Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Z}^d$

$f$  auf  $\mathbb{T}^d$  ist 1-periodisch in allen Richtungen, d.h.  
 $f(x) = f(x+m)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d, m \in \mathbb{Z}^d$

$d=2$

$f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ , d.h.  $f(e^{2\pi i s}, e^{2\pi i t}) \in L^1([0,1]) \times L^1([0,1])$

$$\Rightarrow \hat{f}(j, h) = \int_0^1 ds \int_0^1 dt e^{-2\pi i s j} e^{-2\pi i t h} f(s, t)$$

$$= \int_0^1 ds \int_0^1 dt f(s, t) e^{-2\pi i (s, t) \cdot (j, h)}$$

→ Wie sollen die  $\hat{f}(j, h) e^{2\pi i (s, t) \cdot (j, h)}$  aufsummiert werden?

$$|(j, h)| = \sqrt{j^2 + h^2} \quad (j, h \in \mathbb{Z})$$

Beispiele

\* Sphärische Summation. Sei  $R > 0$  fest.

$$(S_R^{sph} f)(x, y) = \sum_{|(j, h)| < R} \hat{f}(j, h) e^{2\pi i (j, h) \cdot (x, y)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} f(x, y)$$

? In welchem Sinne?

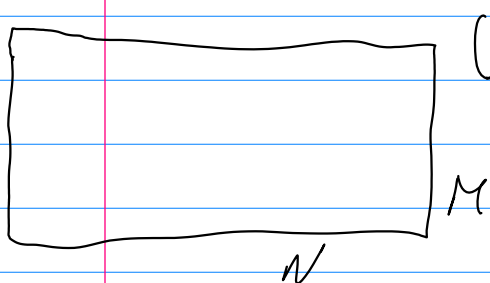
\* Quadrat-Summation. Sei  $M > 0$  fest

$$(S_M^{sq} f)(x, y) = \sum_{\substack{|j| < M \\ |h| < M}} \hat{f}(j, h) e^{2\pi i (j, h) \cdot (x, y)}$$

$$= (D_M^{(2)} * f)(x, y) \quad D_M^{(2)}(x, y) = D_M(x) D_M(y)$$

Restringierte

\* Rechteck-Summation. Sei  $E > 1$  (Exzentrizität) fest



$$(S_{M, N}^{rect} f)(x, y) = \sum_{\substack{|j| < M \\ |h| < N}} \hat{f}(j, h) e^{2\pi i (j, h) \cdot (x, y)}$$

mit  $\frac{1}{E} < \frac{M}{N} < E$

\* Unrestringierte Rechteck-Summation: hier darf  $\frac{M}{N}$  beliebig sein

\* Polygon-Summation: Fixiere ein abgeschlossenes, konvexes Polygon  $P$  mit endlich vielen Kanten in der Index-Menge  $\mathbb{Z}^2$ . Für  $\mathcal{R} \cdot P = \{(R_x, R_y) : (x, y) \in P\}$  (das  $\mathcal{R}$ -skalierte Polygon) betrachtet man

$$\left( \sum_{\mathcal{R}}^{\text{poly}} f \right)(x, y) = \sum_{(j, h) \in \mathcal{R}P} \hat{f}(j, h) e^{2\pi i(j, h)(x, y)}$$

- Quadrat-Summation ist ein Spezialfall von Polygon-Summation
- unrestrictierte Rechteck- und sphärische Summation sind "speziell"...

2.7.2020

### 4.3 Übertragungsprinzipien

Satz  $L^p(\mathbb{R}^d)$ -Beschränktheit  $\Leftrightarrow L^q(\mathbb{T}^d)$ -Beschränktheit

↑  
unter gewissen  
Voraussetzungen  
a. Multiplikatoren

von Fourtermultiplikatoren / translationsinvarianten Operatoren.

Bemerkung 4.7 Lineare, translationsinvariante,  $L^p(\mathbb{T}^d) \rightarrow L^q(\mathbb{T}^d)$ -beschränkte Operatoren  $T$  ( $1 \leq p \leq q \leq \infty$ ) können als Fourtermultiplikatoren dargestellt werden, d.h.  $(a_m)_{m \in \mathbb{Z}^d} \in \mathcal{L}^\infty$

$$(Tf)(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} a_m \hat{f}(m) e^{2\pi i m \cdot x}$$

Gradesatz 4.1 mit  $\|(a_m)_{m \in \mathbb{Z}^d}\|_{\infty} \leq \|T\|_{L^p(\mathbb{T}^d) \rightarrow L^q(\mathbb{T}^d)}$

↳ Satz 4.7 Ein linearer, translationsinvarianter Operator  $T$  ist genau dann  $L^2(\mathbb{T}^d)$ -beschränkt, wenn es eine Folge  $(a_m)_{m \in \mathbb{Z}^d} \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{Z}^d)$  sodass



$$(Tf)(x) = \sum_m a_m \hat{f}(m) e^{2\pi i m \cdot x} \quad f \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$$

$$\|T\|_{L^2, L^2} = \|(a_m)_{m \in \mathbb{Z}^d}\|_{\ell^\infty}$$

Thm 4.8 Ein linearer, translationsinvarianter Operator  $T$  ist genau dann  $L^1(\mathbb{T}^d)$ -beschränkt, genau dann, wenn es ein endliches Borelmaß  $\mu$  auf  $\mathbb{T}^d$  sodass

$$\hat{\mu}(m) = \int_{\mathbb{T}^d} d\mu(t) e^{2\pi i t \cdot m} \quad (Tf)(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \hat{\mu}(m) \hat{f}(m) e^{2\pi i m \cdot x}, \quad f \in C^\infty$$

$$\text{mit } \|T\|_{L^1, L^1} = \|\mu\|_{\text{totale Variation}}$$

Eine Funktion  $s$  auf  $\mathbb{T}^d$  heißt reguliert an einem Punkt  $j$  genau dann, wenn

$$j \text{ ist ein Lebesguepunkt} \rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-d} \int_{|t| \leq \epsilon} |s(t-j) - s(j)| = 0$$

(S. 11, Kap 2)

Außerdem heißt  $s$  genau dann reguliert, wenn  $s$  an jedem Punkt reguliert ist

Thm 4.9 Angenommen  $s$  ist eine auf jedem  $m \in \mathbb{Z}^d$  regulierte Funktion auf  $\mathbb{T}^d$ . Angenommen weiter,  $s \in M_p(\mathbb{R}^d)$  für ein  $1 < p < \infty$ .

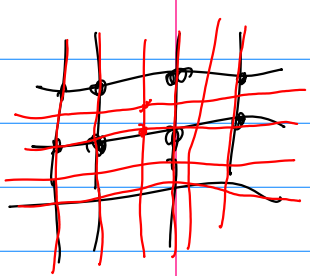
$M_p(X)$  - Menge aller Fourier-multiplikatoren auf  $X$

$$\Rightarrow (s_m)_{m \in \mathbb{Z}^d} \in M_p(\mathbb{Z}^d) \text{ mit}$$

$$\|(s_m)_{m \in \mathbb{Z}^d}\|_{M_p(\mathbb{Z}^d)} \leq \|s\|_{M_p(\mathbb{R}^d)}$$

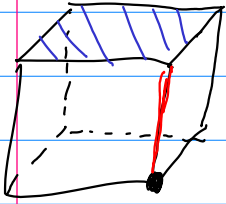
Ist ferner  $s$  (überall) reguliert, dann sind für  $\mathbb{R}^D$  alle skalaren Multiplikatoren  $(s^{(m/R)})_{m \in \mathbb{Z}^d}$  in  $M_p(\mathbb{Z}^d)$  mit

$$\sup_{R>0} \|(s^{(m/R)})_{m \in \mathbb{Z}^d}\|_{M_p(\mathbb{Z}^d)} \leq \|s\|_{M_p(\mathbb{R}^d)}$$

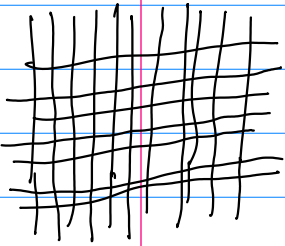


Beispiel für eine regulierte Funktion: modifizierte Indikatorfkt

$$\tilde{\chi}_{[-1,1]^d}(x_1, \dots, x_d) = \begin{cases} 1 & |x_j| < 1 \\ 2^{k-d} & (x_1, \dots, x_d) \text{ zu einer } k\text{-dimensionalen} \\ & \text{Fläche der Oberfläche von } [-1,1]^d \\ & \text{gehört.} \\ 0 & \text{wenn mind. ein } |x_j| > 1 \end{cases}$$



Thm 4.10 Angenommen  $s$  ist eine beschränkte Funktion auf  $\mathbb{R}^d$ , die über jeden Würfel Riemann-integrierbar ist. Angenommen weiter, dass die Folgen  $(s^{(m/R)})_{m \in \mathbb{Z}^d}$



in  $M_p(\mathbb{Z}^d)$  gleichmäßig im Skalierungsparameter  $R > 0$  für ein  $p \in (1, \infty)$ .

$\Rightarrow s \in M_p(\mathbb{R}^d)$  mit

$$\|s\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} \leq \sup_{R > 0} \|(s^{(m/R)})_{m \in \mathbb{Z}^d}\|_{M_p(\mathbb{Z}^d)}.$$

Korollar 4.11 Angenommen  $1 < p < \infty$ ,  $f \in L^p(\mathbb{T}^d)$ .

$$D_R^d * f = \sum_{|m_j| < R} f(\omega) e^{2\pi i m \cdot x} \quad \left\| D_R^d * f - f \right\|_{L^p(\mathbb{T}^d)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \mathbb{1}_{[-1,1]^d} \in M_p(\mathbb{R}^d)$$

$$(ii) \left\| D_R^d * f - f \right\|_{L^p(\mathbb{T}^d)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \mathbb{1}_{B_0(1)} \in M_p(\mathbb{R}^d).$$

Beweis " $\Rightarrow$ " wg FAP I ist Annahme äquivalent zu

$$\sup_{R > 0} \left\| D_R^d * f \right\|_{L^p(\mathbb{T}^d)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T}^d)}$$

$$\Leftrightarrow \sup_{R > 0} \left\| \left( \mathbb{1}_{[-1,1]^d} \right)^{(m/R)} \right\|_{M_p(\mathbb{Z}^d)} \leq 1$$

$\rightarrow$  Thm 4.10 gibt die Behauptung.

$m \in \mathbb{R}$

" $\Leftarrow$ " Zunächst ist für jedes  $R' \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$   $m \in \mathbb{Z}^d$  der Multiplikator  $\mathcal{A}_{[-1,1]^d}(\xi/R')$  ist reguliert (und sogar stetig) an jedem Punkt in  $\mathbb{Z}^d$

$\Rightarrow$  vgl. Theorem 4.9 gilt

$$\sup_{R' \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}} \|\mathcal{A}_{[-1,1]^d}(\cdot/R')\|_{M_p(\mathbb{Z}^d)} \leq \|\mathcal{A}_{[-1,1]^d}\|_{M_p(\mathbb{R}^d)}$$

$$\sum_{\substack{|m_j| < R' \\ m \in \mathbb{Z}^d}} e^{2\pi i m \cdot x} f(m) = \sum_{|m_j| < R} e^{2\pi i m \cdot x} \hat{f}(m) \quad R > 0 \Leftrightarrow \mathcal{D}_R^d * f = \mathcal{D}_{R'}^d * f$$

$$\sup_{R > 0} \|\mathcal{D}_R^d * f\|_{L^p} = \sup_{\substack{R' > 0 \\ R' \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}}} \|\mathcal{D}_{R'}^d * f\|_{L^p} \stackrel{\text{Theorem 4.9}}{\leq} \|\mathcal{A}_{[-1,1]^d}\|_{M_p(\mathbb{R}^d)} \|f\|_p$$

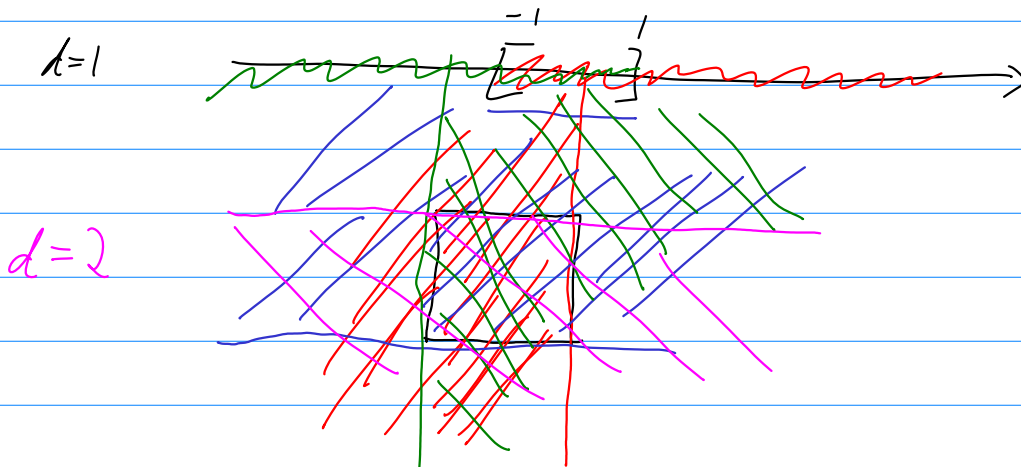
□

$\Rightarrow$  Um quadratische / sphärische  $L^p$ -Summation von Fourierreihen zu zeigen ist es hinreichend und notwendig

$$\mathcal{A}_{[-1,1]^d} \in M_p(\mathbb{R}^d) \text{ bzw. } \mathcal{A}_{B_0(1)} \in M_p(\mathbb{R}^d)$$

zu zeigen.

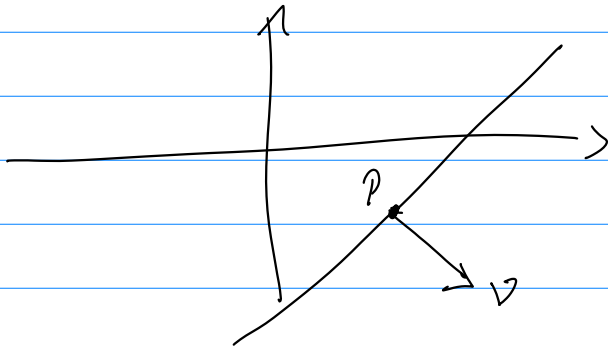
Das Quadrat <sup>in  $\mathbb{R}^2$</sup>  ist der Schnitt von vier Halbebenen



Thm 4.12 Angenommen  $P \in \mathbb{R}^2$ ,  $v \in \mathcal{S}'$ ,

$E_v := \{ \xi \in \mathbb{R}^2 : (\xi - P) \cdot v \geq 0 \}$  eine bei  $P$  beginnende Halbebene, die in Richtung  $v$  orientiert ist.

Dann ist der Operator  $f \mapsto (\mathcal{H}_{E_v} f)^\vee \in L^p(\mathbb{R}^2)$ -beschränkt für alle  $1 < p < \infty$ .



Beweis Im Folgenden seien  $1 < p < \infty$ ,  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  (allgemeine  $f$  mit Approximation argument)

OR&A  $E_v = E_{(0,1)} = \{ \xi \in \mathbb{R}^2 : \xi \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \}$  ( $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $P = (0,0)$ )

↳ da  $L^p$ -Beschränktheit von Fouriermultiplikatoren invariant unter affinen Transformationen ist.

$d=1 \rightarrow \mathcal{H}_{E_{(0,1)}}(\xi) = \frac{1}{2} (1 + i(-i \operatorname{sgn}(\xi)))$

$(\mathcal{H}_{E_{(0,1)}} f)^\vee = \frac{1}{2} (1 + i \mathcal{H}_y) f$

↑  
Hilberttransformation in  $y$ -Richtung

$1 < p < \infty$ ,  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ . Für fast alle  $x_1 \in \mathbb{R}$

definieren wir  $f_{x_1}(x_2) = f(x_1, x_2) \in L^p_{x_2}(\mathbb{R})$

$\rightarrow$  Wg Fubini,  $\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} dx_1 \|f_{x_1}\|_{L^p_{x_2}}^p$

8.7.2020

$$(\mathbb{1}_{E \setminus \hat{f}})^\vee(x_1, x_2) = \int_0^\infty d\xi_2 \int_{-\infty}^\infty d\xi_1 \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} dy_1 dy_2 f(y_1, y_2) e^{2\pi i \xi_1 (y_1 - x_1)} e^{2\pi i \xi_2 (y_2 - x_2)}$$

→

$$= \int_{\mathbb{R}} d\xi_1 \int_{\mathbb{R}} dy_1 e^{2\pi i \xi_1 (y_1 - x_1)} \int_0^\infty d\xi_2 \int_{\mathbb{R}^2} dy_2 f(y_1, y_2) e^{2\pi i \xi_2 (y_2 - x_2)}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} d\xi_1 \int_{\mathbb{R}} dy_1 e^{2\pi i \xi_1 (y_1 - x_1)} \underbrace{(\mathbb{1}_{[0, \infty)} \hat{f}_{y_1})^\vee(x_2)}_{\text{definiert f\"ur fast alle } y_1, \text{ da } f_{y_1} \in L^p, \text{ und } \rho_n \in L^p_{x_2}} \quad (*)$$

definiert f\"ur fast alle  $y_1$ , da  $f_{y_1} \in L^p$ , und  $\rho_n \in L^p_{x_2}$   
 LP-Beschr. d. Herzbeutsumf

$$\text{Mehr ist wahr: } \int_{\mathbb{R}} \|\mathbb{1}_{[0, \infty)} \hat{f}_{y_1}\|_{L^p_{x_2}}^p dy_1 \lesssim \int dy_1 \|f_{y_1}\|_{L^p_{x_2}}^p = \|f\|_p^p. \quad (**)$$

$$\Rightarrow \mathbb{1}_{[0, \infty)} \hat{f}_{y_1} \in L^p_{y_1, x_2}(\mathbb{R}^2)$$

⇒ Insbesondere ist f\"ur fast alle  $x_2 \in \mathbb{R}$  die Funktion

$$y_1 \mapsto F_{x_2}(y_1) = (\mathbb{1}_{[0, \infty)} \hat{f}_{y_1})^\vee(x_2) \in L^p_{y_1}(\mathbb{R})$$

$$\text{Vgl (***) ist } \int dx_2 \|F_{x_2}\|_{L^p_{y_1}}^p = \int dy_1 \|(\mathbb{1}_{[0, \infty)} \hat{f}_{y_1})^\vee(x_2)\|_{L^p_{x_2}}^p \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^p. \quad (***)$$

⇒ Wie k\"onnen RHS von (\*) umschreiben

analog zu Fourierreihe

$$(\mathbb{1}_{E \setminus \hat{f}})^\vee(x_1, x_2) = (*) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} d\xi_1 \int_{\mathbb{R}} dy_1 F_{x_2}(y_1) e^{2\pi i \xi_1 (y_1 - x_1)} e^{-\epsilon |\xi_1|^2}$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d\xi_1 e^{-\epsilon |\xi_1|^2} e^{-2\pi i \xi_1 x_1} \checkmark F_{x_2}(\xi_1)$$

$$= \mathbb{F}_{x_2}(x_1) \in L^p(\mathbb{R}^2)$$

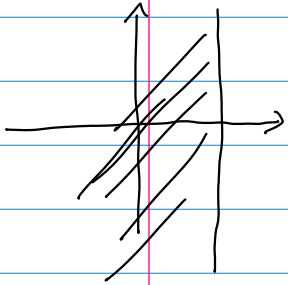
$$\Rightarrow \text{wg (***)} \text{ ist } \|(\mathbb{1}_E \hat{f})^\vee\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq A_2 \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$$

Operatornorm der  
Hilberttransformation  $\square$

Thm 4.13 Wir haben Quadrat-Summen von Fourierreihen  
in  $L^p(\mathbb{R}^2)$ ,  $1 < p < \infty$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{|m|, |n| < R} \hat{f}(m, n) e^{2\pi i(k \cdot m + y \cdot n)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} f \text{ in } L^p.$$

Beweis Folgt aus  $L^p$ -Beschränktheit von  $T_1 \circ T_2 \circ T_3 \circ T_4$   
mit  $T_j f = (\mathbb{1}_{E_j} \hat{f})^\vee$



$$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (-1, 0) \cdot [(x, y) - (1, 0)] \geq 0\}$$

$$E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (1, 0) \cdot [(x, y) - (-1, 0)] \geq 0\}$$

$$E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (0, -1) \cdot [(x, y) - (0, 1)] \geq 0\}$$

$$E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (0, 1) \cdot [(x, y) - (0, -1)] \geq 0\}$$

$$E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4 = Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|, |y| < 1\}$$

Da jeder einzelne Multiplikator  $T_j$   $L^p$ -Beschränkt ist,  
ist es auch die Komposition  $\square$

Bemerkung Diese Argumente sind verallgemeinerbar auf höhere  
Dimensionen

2) Verallgemeinerung auf abgeschlossene, konvexe Polygone

$d \in \mathbb{N} \rightarrow$  Genauer gesagt: Sei  $P$  ein abgeschlossenes, konvexes Polygon in  $\mathbb{R}^2$  (bzw.  $\mathbb{R}^d$ ) mit nicht-leerem Inneren  $\Rightarrow \mathbb{1}_P$  ist  $L^p(\mathbb{R}^2)$  - (bzw.  $L^p(\mathbb{R}^d)$  -) beschränkt für  $1 < p < \infty$ . Insbesondere gilt Polygonsumimation  $\sum_{(m,n) \in \mathbb{R}P} e^{2\pi i(mx+ny)} \hat{f}(m,n) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} f$  in  $L^p$ .

3) Rechteck-Sumimation unterscheidet sich von Polygon-Sumimation, wenn Konvergenz im punktwesen Sinn diskutiert wird

$\rightarrow$  C. Fefferman \*  $\lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{(m,n) \in \mathbb{R}P} e^{2\pi i(mx+ny)} \hat{f}(m,n) = f(x,y)$   
( $d=2$  !!)  
punktwese f. z.

\*  $\exists$  ein Gegenbeispiel für

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{|m| < M \\ |n| < N}} e^{2\pi i(mx+ny)} \hat{f}(m,n) = f(x,y)$$

$$4) \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{|(m,n)| < R} e^{2\pi i(mx+ny)} \hat{f}(m,n) \text{ in } L^p? \\ |(m,n)| = \sqrt{m^2 + n^2}$$

Im nächsten Abschnitt sehen wir, dass eine Approximation der Kreisscheibe durch Polygone nicht funktionieren kann

## 4.5 Kugel-Multiplikator-Problem

$(1 - |z|^2)_+$  in  $d=2$  hinreichende Bedingung  
Bochner-Riesz-Mittel für  $L^p$ -Beschr.  
= notwendige Bedingungen (AA)

$S$  hat codim  $\geq 1$

Bochner-Riesz  
↓  
Krümmung  
von  $S$

↓  
Verbindung zu Fourierrestriction  
in  $d=2$  von Fefferman-  
Stein

$$\| \hat{f} |_{S^1} \|_{L^2(S^1)} \approx \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$$

beruhen extrem auf Krümmung (d.h. Geometrie)  
der Mannigfaltigkeit  $S$

$$\int_S d\sigma(x) e^{2\pi i x \cdot \xi} \sim \langle x \rangle^{-(d-1)/2}$$

$$\rightarrow \| \hat{f} |_{S^1} \|_{L^2} \approx \| f \|_{L^p} \quad \text{mit dem TT}$$

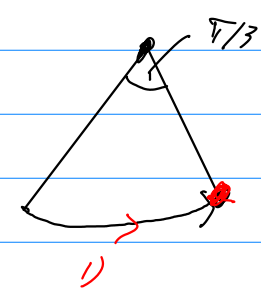
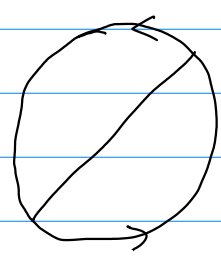
Kreismultiplikator: Krümmung hilft nicht!  
→ Problem: Kreis hat zu viele Tangenten



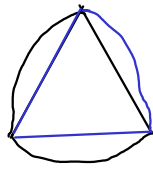
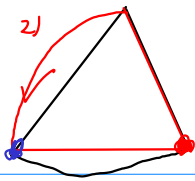
Feffermans Gegenbsp (für  $L^p$ -Beschr. von  $\mathcal{H}_{B_0(1)}$ )

verwendet die Tatsache, dass Mengen, die eine  
unendlich dünne Nadel der Länge 1 enthalten,  
beliebig kleines Maß haben können (Besicovitch)

→ Kahane - Nadel - Problem





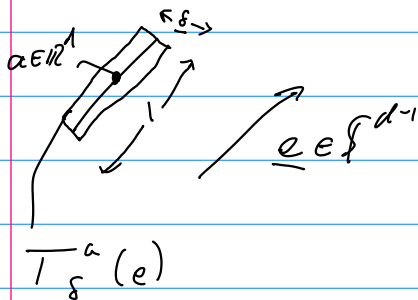


Definition Eine Kahya- / Besicovitch-Menge  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  ist eine kompakte Menge, die eine unendliche Einheitsnadel in jeder Richtung enthält. D.h.

$$\forall e \in S^{d-1} \exists x \in \mathbb{R}^d : x + te \in E \quad \forall t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

→ Besicovitch: Das Maß von Kahya-Mengen hat keine untere Schranke in jeder Dimension  $d$ .

Kahya-Mengen-Vermutung → Moderne Fragestellung: • Haben Kahya-Mengen notwendigerweise Hausdorffdimension  $d$ ?  
(in  $d=2$  gelöst; in  $d \geq 3$  offen)



• Quantitativer  $L^p$ -Beschränktheit von Kahya-Maximalfunktion

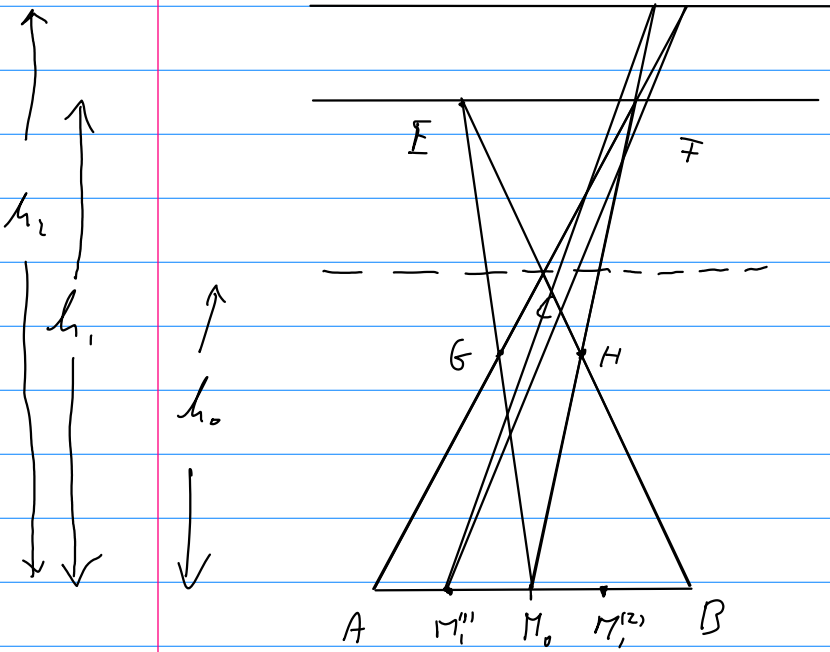
$$f_s^*(e) := \frac{1}{|T_s^a(e)|} \int_{T_s^a(e)} |f|$$

Kahya-Maximal-Vermutung → Frage  $\forall \epsilon > 0 \exists C_\epsilon \forall p \geq d ? \quad \|f_s^*\|_{L^p(S^{d-1})} \leq C_\epsilon \delta^{-\epsilon} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$

Kahya-Maximal-Vermutung  $\Rightarrow$  Kahya-Mengen-Vermutung

## 4.5.1 Sprößen von Dreiecken

$$|EGC| = \frac{b_1}{2} \frac{(h_1 - h_0)^2}{2h_1 - h_0}$$



•  $AMF$  und  $BME$  heißen Sprösse von  $ABC$

•  $AMF \cup BME$  heißt gesprossene / gehäufte Figur von  $ABC$  und wir schreiben  $\text{spr}(ABC)$

• offensichtlich ist  $\text{spr} ABC \supseteq ABC$

• Die Mengendifferenz  $\text{spr} ABC \setminus ABC$  nennen wir Ohren der gehäuften Figur; hier  $EGC \cup FCH$

Fixiere:  $AB \equiv b_0 = \epsilon \quad M_0 C = h_0 = \epsilon$

Jetzt geben wir uns eine Folge von Höhen  $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$  vor, nämlich

$$h_j = \epsilon \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{j+1} \right)$$

→ Youtube → Charles Fefferman: The Kakeya needle problem

$$ABC \equiv \Lambda$$

9.7.2020

Die Sprößlinge von  $\Lambda$ , sprich  $AMF \equiv \Lambda_1$ ,  
 $BME \equiv \Lambda_2$

haben Höhen  $h_1$ , und Basis  $b_1 = b_0 / 2$

→ Wende Prozedur auf  $\Lambda_1$  und  $\Lambda_2$  an  $\Rightarrow$  4 Sprösse

$\Lambda_1$  zerfällt zu  $\Lambda_{11}$  und  $\Lambda_{12}$  } haben Höhe  $h_2$  und  
 $\Lambda_2$  — " —  $\Lambda_{21}$  und  $\Lambda_{22}$  } Basis  $b_2 = b_0 / 4$

⋮

→ nach  $k$  mal Spritzen haben wir  $2^k$  Spröcke  
 $\Lambda_{\Gamma_1, \dots, \Gamma_k}$   $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k \in \{1, 2\}$  mit Basis  $2^{-k} b_0$  und  
 Höhe  $h_k$

→ Maß der finalen Figur ausrechnen

$$E(\epsilon, k) = \bigcup_{j=0}^k \bigcup_{\Gamma_1, \dots, \Gamma_j=1} \Lambda_{\Gamma_1, \dots, \Gamma_j}$$

$$|E(\epsilon, k)| = \frac{\epsilon^2}{2} + \sum_{j=1}^k 2^j \cdot \frac{b_{j-1}}{2} \frac{(h_j - h_{j-1})^2}{2h_j - h_{j-1}}$$

$$2h_j - h_{j-1} > \epsilon$$

$$\leq \frac{\epsilon^2}{2} + \sum_{j=1}^k 2^j \frac{2^{-(j-1)} \epsilon}{2} \frac{(\epsilon/(j+1))^2}{\epsilon}$$

$$= \frac{\epsilon^2}{2} + \epsilon^2 \sum_{j=1}^k (j+1)^{-2} \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{6} - 1\right) \epsilon^2$$

Da  $h_k \sim \epsilon \log k$ , können wir  $k$  so groß wählen, dass  
 $h_k \sim 1$  ( $k \sim e^{1/\epsilon}$ ) und, das Maß von  $E(\epsilon, k)$  ist  
 glm. in  $k$  durch  $\epsilon^2$  beschränkt

→ Lösung des vereinfachten Minkowski-Problems durch  
 Zusammenheften dieser Figuren

### 4.5.2 Das Gegenbeispiel

Lemma 4.14 (Meyer) Seien  $(v_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \delta^{d-1}$  und

$H_j := \{x \in \mathbb{R}^2 : x \cdot v_j \geq 0\}$  zugehörige Halbebenen.

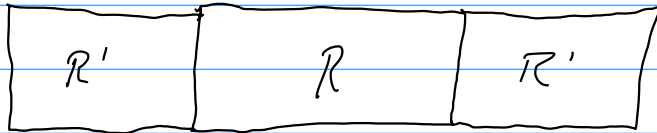
$$(S_{H_j} f)(x) := (\mathbb{1}_{H_j} f)^{\vee}(x)$$

Angenommen der Disk-Multiplikator  $f \mapsto Tf = (\mathbb{1}_{B_0(1)} f)^{\vee}(x)$   
 ist  $L^p(\mathbb{R}^2)$ -beschränkt für ein  $1 < p < \infty$  mit Operator-  
 norm  $B_p$ . Dann gilt die Abschätzung

$$\left\| \left( \sum_j |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq P_p \left\| \left( \sum_j |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \quad (*)$$

Ziel Littlewood-Paley - Abschätzung (\*) widerlegen.

Gegenbsp basiert auf obiger Konstruktion ( $\rightarrow$  Perron, Schönberg)



$R$  ... gegebenes Rechteck  
 $R'$  ... Kopie von  $R$ , die an die kurzen Seiten von  $R$  angeklebt wird.

Thm 4.15 (Schönberg)

Sei  $\delta > 0$  vorgegeben. Dann gibt es eine Menge  $E \subseteq \mathbb{R}^2$  messbar und eine endliche Familie von Rechtecken  $R_j \subseteq \mathbb{R}^2$  mit den Eigenschaften

(i) die  $R_j$  sind paarweise disjunkt

(ii)  $\frac{1}{2} < |E| < 3/2$

(iii)  $|E| < \delta \sum_j |R_j|$

(iv)  $|E \cap R_j| \geq \frac{1}{12} |R_j|$

Beweis Wir verwenden obige Konstruktion und beginnen mit einem gleichschenkligen Dreieck  $ABC$

$A = (0, 0)$ ,  $B = (1, 0)$  und  $C$  so, dass  $ABC$  gleichschenkelig wird und Höhe 1 hat.

Für gegebenes  $\delta$  sei  $h \in \mathbb{N}$  so, dass  $h+2 \geq e^{1/\delta}$

Für dieses  $h$  setzen wir  $E \equiv E(1, h)$

$\uparrow$   
 Figur von oben

$$\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} < \frac{3}{2}$$

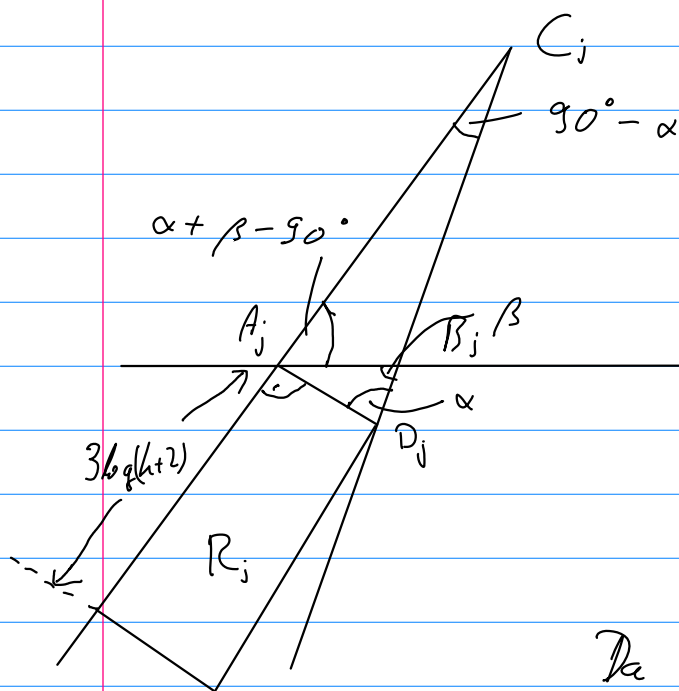
⇒ wg obiger Rechnung gilt

$$\frac{1}{2} < |E| < \frac{3}{2} \Rightarrow \underline{(ss)}$$

Zu (iv): Wir betrachten einen Keimling  $A_j B_j C_j$  mit Basis  $[j \cdot 2^{-h}, (j+1) \cdot 2^{-h}] \equiv [0, 1]$ ,  $j \in \{0, \dots, 2^h - 1\}$

$A_j = (j \cdot 2^{-h}, 0)$ ,  $B_j = ((j+1) \cdot 2^{-h}, 0)$ ,  $C_j$  die Spitze, sodass der Keimling  $A_j B_j C_j$  die Höhe

$$h_h = \sum_{\ell=1}^k \frac{1}{\ell} \in (\log(h+2), 1 + \log(h+1)) \quad \text{hat,} \\ \subseteq (\log(h+2), 2 \log(h+2)) \quad (*)$$



$R_j$  Rechteck mit Länge  $3 \log(h+2)$  und Breite  $A_j D_j$

Wir zeigen jetzt  $|R_j' \cap E| > \frac{|R_j|}{12}$

Zunächst:  $\max\{A_j C_j, B_j C_j\} \leq \frac{\sqrt{5}}{2} h_h$  und wg Symmetrie so wlog  $A_j C_j > B_j C_j$

$$\text{Da } \frac{\sqrt{5}}{2} h_h < \frac{3}{2} h_h \stackrel{(*)}{<} 3 \log(h+2)$$

$$\Rightarrow R_j' \supseteq A_j B_j C_j$$

$$\text{Weiter } |R_j' \cap E| \geq |A_j B_j C_j| = \frac{1}{2} h_h \cdot 2^{-h}$$

$$\stackrel{(**)}{>} 2^{-h-1} \log(h+2) \quad (**)$$

Jetzt rechnen wir die Breite von  $R_j$  aus.

Mit Sinus-Satz angewandt  $A_j B_j D_j$  folgt

$$|A_j D_j| = 2^{-h} \cdot \frac{\sin \angle A_j B_j D_j}{\sin \angle A_j D_j B_j} = 2^{-h} \frac{\sin \angle A_j B_j D_j}{\cos \angle A_j C_j B_j}$$

$$\leq \frac{2^{-h}}{\cos(\angle A_j C_j B_j)}$$

Jetzt mit Cosinus-Satz

$$\cos \angle A_j C_j B_j = \frac{|A_j C_j|^2 + |B_j C_j|^2 - |A_j B_j|^2}{2 |A_j C_j| |B_j C_j|}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} h_n > |A_j C_j|, |B_j C_j| > h_n \Rightarrow \frac{2h_n^2 - (2^{-h})^2}{\frac{5}{2} h_n^2} > \frac{4}{5} - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}$$

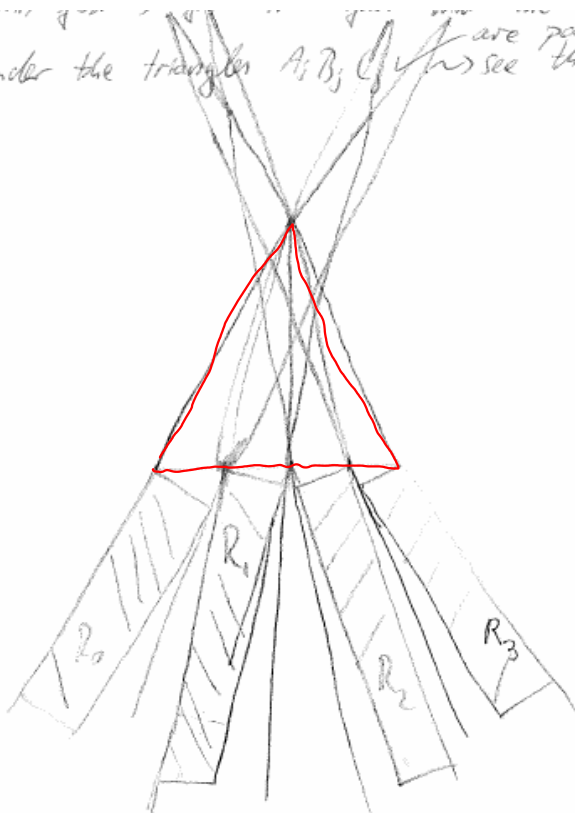
$$h_n > \log(h+2) > 2^{-h-1}$$

$$\Rightarrow \text{einsetzen in } |A_j D_j| \leq \frac{2^{-h}}{\cos \angle A_j C_j B_j} \leq 2^{-h+1} = |A_j B_j| \cdot 2$$

$$\Rightarrow \text{wfg } |R_j' \cap E| > 2^{-h-1} \log(h+2) = \frac{1}{12} 2^{-h+1} \cdot 3 \log(h+2)$$

$$> \frac{|R_j|}{12} \quad // \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{(iv)}}$$

under the triangles  $A_i B_j C_j$  are past  
see the



zu (i) Die  $R_j$  sind alle

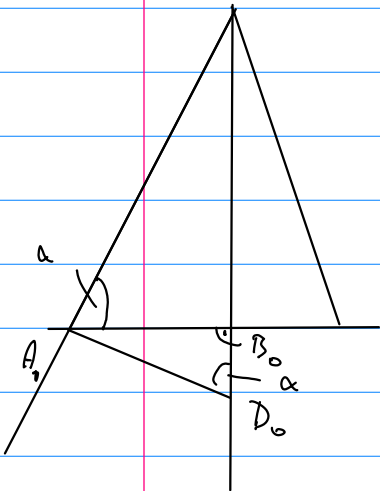
paarweise disjunkt, da die  
 $A_j B_j C_j$  und die Regionen  
"unterhalb" der  $A_i B_j C_j$  paar-  
weise disjunkt voneinander  
sind

(durch Verlängerung der Scheitel)

$$\text{zu (iii): } |E| \leq \varepsilon \sum_j |R_j|$$

$$\underline{\text{Ziel}} \sim |R_j| \geq 2^{-h} \log k$$

$$\text{Mit Sinussatz } \frac{|A_j D_0|}{\sin \angle A_j B_j D_j} = \frac{2^{-h}}{\sin \angle A_j D_j B_j}$$



$$|A_j D_0| \geq 2^{-h} \sin \angle A_j B_j D_j$$

$$= 2^{-h} \cos \angle A_j D_0 B_j$$

$$\geq 2^{-h} \cos \angle A_0 D_0 B_0 = 2^{-h} \frac{\sqrt{5}}{2 \cdot 2} > 2^{-h-1}$$

$$\Rightarrow |R_j| > 2^{-h-1} \cdot 3 \log(k+2)$$

$$\Rightarrow \left| \bigcup_{j=0}^{2^h-1} R_j \right| \stackrel{R_j \text{ disjunkt}}{\leq} \sum_{j=0}^{2^h-1} |R_j| \geq 2^{h-1} \cdot 2^{-h-1} \cdot 3 \log(k+2)$$

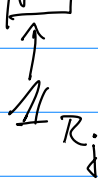
$$\begin{aligned} &\Rightarrow |E| \log h+2 \\ &|E| < 3/2 \end{aligned}$$

Wahl von  $h$   
 $h+2 > e^{1/8}$   
 $\log h \geq 1/8$

$$\Rightarrow |E| < 1/8 \quad \square$$

Ziel

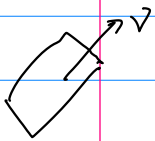
$$\left\| \left( \sum_j |S_{H_j} \mathbb{1}_R|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \lesssim \left\| \left( \sum \mathbb{1}_{R_j} \right)^{1/2} \right\|_p, \text{ verletzen}$$



↓  
 Meyer gibt  
 $\| \mathbb{1}_{R_j} \uparrow \|_p \geq \| \mathbb{1}_R \|_p$

15.7.2020

Behauptung 4.16 (Punktweise untere Schranke an Rechtecksmultiplikatoren im  $x$ -Raum)

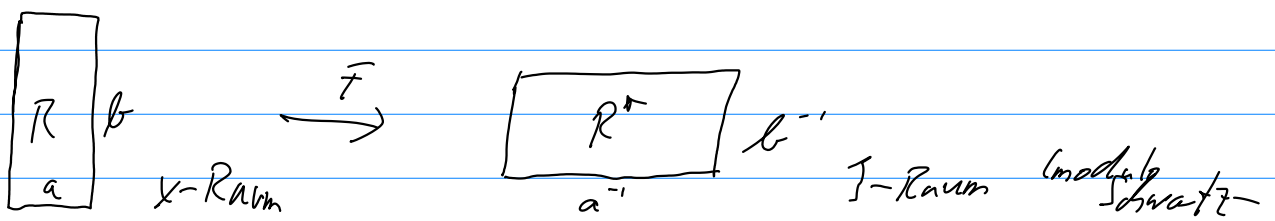


Sei  $R \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Rechteck bei  $0$  zentriert mit Orientierung  $v \in S^1$ . Sei  $H_v = \{x \in \mathbb{R}^2 : x \cdot v \geq 0\}$  mit Fouriermultiplikator  $S_H$   $\left[ (S_H \mathbb{1}_R)(x) = \left( \mathbb{1}_{H_v} \uparrow \right)^v \right]$ .

Dann gilt  $|(S_H \mathbb{1}_R)(x)| \geq \frac{1}{10} \mathbb{1}_{R'}(x)$

Bemerkung Durch Anwenden von Translationen gilt die Aussage für jedes translatierte Rechteck

Beweis Wg Rotationsinvarianz sei oBdA  $R = [-a, a] \times [-b, b]$  mit  $0 < a < b$  und  $v = (0, 1)$ .





$$\begin{aligned} \mathbb{1}_R &= \mathbb{1}_{[-a,a]}(x_1) \cdot \mathbb{1}_{[-b,b]}(x_2) \quad (\text{Aufgabe}) \\ (\mathcal{H} \mathbb{1}_R)(x) &= \mathbb{1}_{[-a,a]}(x_1) \cdot \left( \mathbb{1}_{[-b,b]} \mathbb{1}_{[0,\infty)} \right)^\vee(x_2) \\ &= \mathbb{1}_{[-a,a]}(x_1) \cdot \left( \frac{1+i\mathcal{H}}{2} \mathbb{1}_{[-b,b]} \right)(x_2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |(\mathcal{H} \mathbb{1}_R)(x)| \approx \mathbb{1}_{[-a,a]}(x_1) \cdot \frac{1}{2} |\mathcal{H} \mathbb{1}_{[-b,b]}(x_2)|$$

(mit Übung 5.2)  $\approx \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{[-a,a]}(x_1) \left| \log \left| \frac{x_2+b}{x_2-b} \right| \right|$



$x \in R'$ , d.h.  $x_1 \in [-a,a]$ ,  $x_2 \in [b, 3b] \vee [-3b, -b]$

$\Rightarrow$  Einsetzen liefert Behauptung  $\square$

Thm 4.17 (Fefferman - Unbeschränktheit des Kugelmultiplikators)

Sei  $d \geq 2$ , dann ist  $(\mathbb{1}_{B_0(1)} \hat{f})^\vee \in L^p$ -beschr. nur, wenn  $p=2$ . ( $1 \leq p \leq \infty$ )

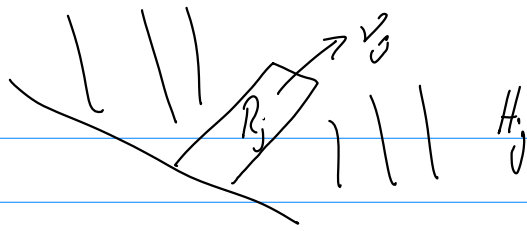
Übung 7.3

Beweis Wg de Leeuw, genügt es  $d=2$  zu betrachten

Wg Dualität genügt es außerdem  $p > 2$  zu betrachten.

Angenommen wir hätten  $\|(\mathbb{1}_{B_0(1)} \hat{f})^\vee\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_p$ .

Für  $\delta > 0$  seien  $E$  und die Rechtecke  $R_j$  wie in Lemma 4.15. Sei  $f_j = \mathbb{1}_{R_j}$



Mit Behauptung 4.17 folgt

$$\sum_j \int_E |S_{H_j} \chi_{R_j}|^2 \stackrel{\text{Prop 4.17}}{\leq} \sum_j \int_E \frac{1}{100} \chi_{R_j'}(x) dx$$

$$= \frac{1}{100} \sum_j |E \cap R_j'| \stackrel{\text{Lemma 4.15}}{\geq} \frac{1}{1200} \sum |R_j| \quad (*)$$

Anderserseits folgt aus Hölder

$$\begin{aligned} \int_E \sum |S_{H_j} \chi_j|^2 &\leq |E|^{\frac{p-2}{p}} \left\| \left( \sum_j |S_{H_j} \chi_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{p/2} \\ &\leq B_p^2 |E|^{\frac{p-2}{p}} \left\| \left( \sum_j |\chi_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p/2} \\ &= B_p^2 |E|^{\frac{p-2}{p}} \left( \sum |R_j| \right)^{2/p} \\ &\leq B_p^2 \cdot \delta^{\frac{p-2}{p}} \sum |R_j| \end{aligned}$$

$\rightarrow$  wähle  $\delta$  so klein, dass  $B_p^2 \delta^{\frac{p-2}{p}} \geq \frac{1}{1200}$   $\Downarrow$   $\square$

Gilt Bochner - Riesz - Summierbarkeit?  $\left( \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|m| < R} \left(1 - \frac{|m|^2}{R^2}\right) \hat{f}(m) e^{2\pi i m x} \right)$

$\Leftrightarrow (1 - |\xi|^2)_+^{\delta}$   $L^p$ -beschränkt?

sind in  $H_{loc}^s(\mathbb{R}^d)$ , wenn  $\delta > s - \frac{1}{2}$ ,  $s > \frac{d}{2}$

# 4.6 Littlewood-Paley - Theorie und Multiplikatortheoreme

$$\langle \xi \rangle^m \text{ s.d. } K(x, y) = \int a(\xi, \eta) e^{2\pi i y \cdot \xi} d\xi$$

Mikhlin-Multiplikator-Theorem.

$m$  ist Symbol 0-ter Ordnung

$\downarrow$  NDOs  $\alpha \in S_{1,0}^m$

$\Rightarrow a \in C_c^\infty$   
 $| \partial_x^\alpha \partial_y^\beta a(x, y) |$

Annahmen: a)  $m \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$  und beschränkt mit  $| \partial_x^\alpha m(\xi) | \leq A_\alpha |\xi|^{-|\alpha|}$   $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$

b)  $m \in C^l(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$  mit  $l = \lceil d/2 \rceil$   
 $| \partial_x^\alpha m(\xi) | \leq \tilde{A}_\alpha |\xi|^{-|\alpha|}$   $0 \leq |\alpha| \leq l$

## Theorem 4.18 (Mikhlin)

a) Unter Annahme a) stimmt der zugehörige Integralkern  $K$  abseits des Ursprungs mit einer Funktion überein, die in  $C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$  ist und

$$\left( \frac{1}{|\xi|} \right)^{\uparrow} = |\xi|^{-d+b}$$

$$| \partial_x^\alpha K(x) | \leq \tilde{A}_\alpha |x|^{-d-|\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ erfüllt}$$

b) Unter Annahme b) stimmt der zugehörige Integralkern mit einer lokal integrierbaren Funktion abseits des Ursprungs überein, die

$$\int_{|x| > 2|y|} |K(x-y) - K(x)| dx \leq A, \quad y \neq 0$$

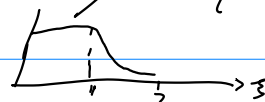
erfüllt (Hörmanders Bedingung)

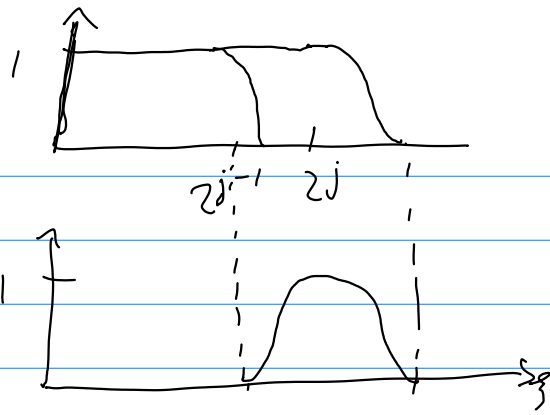
→ Zusammen mit Maschinente aus Kapitel 3 folgt, dass  $(|\cdot|^{-b})^\vee$   $L^p$ -beschr. ist.

Beweis a) Wir zerlegen den Multiplikator dyadisch.

Dazu sei  $\gamma \in C_c^\infty(\widehat{\mathbb{R}}^d)$  sodass  $\gamma(\xi) = \begin{cases} 1 & |\xi| < 1 \\ 0 & |\xi| > 2 \end{cases}$

Fourierraum



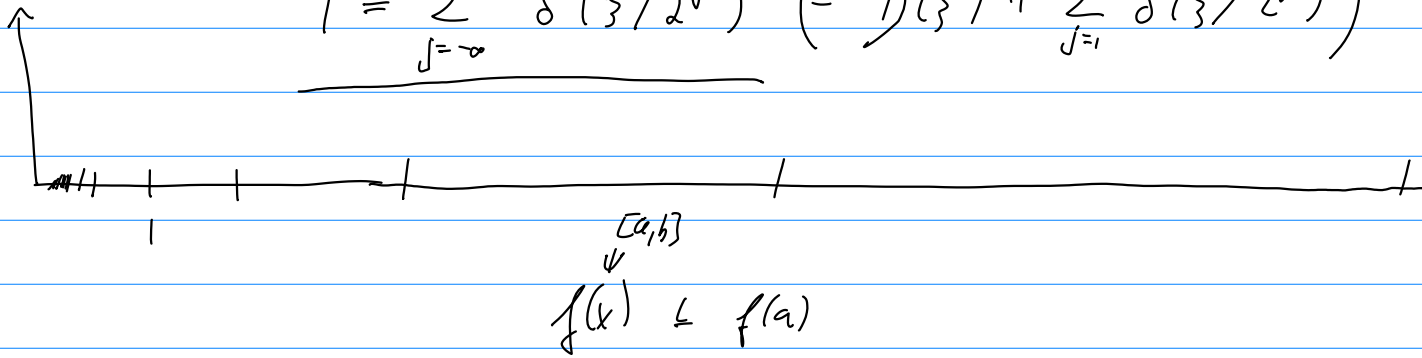


$$\eta(\xi/2^j) - \eta(\xi/2^{j-1})$$

$$\delta(\xi) = \eta(\xi) - \eta(2\xi) = \begin{cases} \neq 0 & |\xi| \in [\frac{1}{2}, 2] \\ 0 & |\xi| \in [0, \frac{1}{2}] \cup [2, \infty) \end{cases}$$

Damit zerlegen wir die Eins, d.h.

$$1 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(\xi/2^j) \quad (= \eta(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} \delta(\xi/2^j))$$



$$\Rightarrow m(\xi) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} m(\xi) \delta(\xi/2^j) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} m_j(\xi)$$

$$\Rightarrow \text{zugehörige Integralreihe} \quad K_j(x) := \int m_j(\xi) e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

Da  $\sum m_j \rightarrow m$  für  $\xi \neq 0$  (punktweise) konvergiert

sicher  $\sum K_j \rightarrow K$  im  $\mathcal{S}'$ -Sinne.

$$\Rightarrow |\partial^\alpha K(x)| = \sum_j |\partial^\alpha K_j| \quad \text{genügt.}$$

$x \neq 0$

$$|\partial_x^\alpha K_j| = \left| \partial_x^\alpha \int m_j(\xi) e^{-2\pi i x \xi} \right| \frac{|x|^\alpha}{|x|^\alpha}$$

$$= |x|^{-M} \left| |x|^M \partial_x^\alpha \int m(\xi) \delta(\xi/2^j) e^{-2\pi i x \xi} \right|$$

$$= |x|^{-M} \left| |x|^M \int m(\xi) \xi^\alpha \delta(\xi/2^j) e^{-2\pi i x \xi} \right|$$

beide Summanden gehen wie  $2^{j(\alpha-1)}$ , wenn  $|\xi| \sim 2^j$

$$= c \cdot |x|^{-M} \left| \int m(\xi) \xi^\alpha \delta(\xi/2^j) \left( \partial_\xi^M e^{-2\pi i x \xi} \right) d\xi \right|$$

$$\underbrace{|x|^{-\alpha-1} \delta(\xi/2^j)}_{+ 2^j |x|^\alpha \delta(\xi/2^j)}$$

$$= c |x|^{-M} 2^{j(\alpha-1+M+d)}$$

$$\int_{|\xi| \in [2^j, 2 \cdot 2^j]} \sim 2^{j \cdot d}$$

$$\int_0^{\log(1/|x|)} e^y dy = \frac{1}{|x|}$$

$$2^j \sim \frac{1}{|x|}$$

$$\sum_{2^j < \frac{1}{|x|}} \uparrow \uparrow \uparrow$$

$M=0$  - Ergebnis

$$+ \sum_{2^j > \frac{1}{|x|}} \uparrow \uparrow \uparrow$$

$M \geq d + \alpha$

kleine Frequenzen  $\sum_{2^j < \frac{1}{|x|}} |2^j K_j| \lesssim \sum_{2^j < \frac{1}{|x|}} 2^{j(\alpha+d)} = |x|^{-d-\alpha}$

große Frequenzen  $\sum_{2^j > \frac{1}{|x|}} |\partial_x^\alpha K_j| \lesssim |x|^{-M} \sum_{2^j > \frac{1}{|x|}} 2^{j(\alpha+d-M)} = |x|^{-d-|x|}$

↓  
Oszillationen führen zu Abfall in  $j$ .  
(durch partielle Integration)  $\Rightarrow$  zeigt a)

b) Anstatt partiell zu integrieren, verwenden wir Plancherel

Zunächst,  $|x|=M$   $\int |(-2\pi i x)^\alpha K_j|^2 dx = \int_{|\xi| \sim 2^j} |2_\xi^\alpha m_j(\xi)|^2 d\xi$

$$\Rightarrow \int | |x|^\alpha K_j(x) |^2 \leq 2^{j(\alpha-2M)} \quad 0 \leq M \leq |x|$$

|  $\Gamma_{d/2}$  |

Mit Schwarz, für  $a > 0$  ( $a = 2^{-j}$ )

$$\int_{|k| < a} |K_j(k)| \leq 2^{j d/2} \cdot a^{d/2}$$

$\uparrow$   
 $m=0$

(\*)  $\int_{|k| > a} |K_j(k)| dx \stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} \sqrt{\int_{|k| > a} |K_j(k)|^2 dx} \sqrt{\int_{|k| > a} |k|^{-2m} dx} \quad m > \frac{d}{2}$

$$\stackrel{m=|l|}{\leq} 2^{j(d/2 - |l|)} \cdot a^{d/2 - l}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} |K_j(k)| dx \leq c (2^{j d/2} a^{d/2} + 2^{j(d/2 - |l|)} \cdot a^{d/2 - l})$$

optimiere in  $a$ ,  $\bar{a} = \text{const}$  für  $a = 2^{-j}$ .

$\Rightarrow$  mit gleichen Argumenten bekommt man

$$\int_{|x| < a} |K_j(x)| dx \leq \text{const} \cdot 2^{k_j} \quad \text{für alle } x, j.$$

$\Rightarrow |a|=1 \rightarrow$  Mittelwertsatz

$$\rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} |K_j(x+h) - K_j(x)| \leq |h| \cdot 2^j$$

$$\Rightarrow \int_{|x| > 2|y|} |K(x-y) - K(x)| dx \leq \sum_j \int_{|x| > 2|y|} |K_j(x-y) - K_j(x)|$$

$$\equiv \sum_{2^j < \frac{1}{|y|}} + \sum_{2^j > \frac{1}{|y|}}$$

$$\sum_{2^j < \frac{1}{|y|}} \int_{\mathbb{R}^d} |K_j(x-y) - K_j(x)| \leq |y| \sum_{2^j < \frac{1}{|y|}} 2^j = 1$$

$$\sum_{2^j > \frac{1}{|y|}} \int_{|x| > 2|y|} |K_j(x-y) - K_j(x)| \stackrel{\Delta}{\leq} \sum_{2^j > \frac{1}{|y|}} \int_{|k| > 1/|y|} |K_j(k)|$$

$$\leq \sum_{2^j > \frac{1}{|y|}} 2^{j(d/2 - \alpha)} |y|^{\frac{d}{2} - \alpha} = 1$$

(\*) mit  $a = |y|$



16.7.2020

Frage  $|\partial_x^\alpha K(x)| \leq |x|^{-\alpha-\epsilon}$   
 $\rightarrow$  hinreichende / notwendige Bedingungen für  $\hat{K} \in \mathcal{L}^\infty$ ?

$\rightarrow$  Charakterisierung verwendet folgende

Definition (standard-bump-Funktion)

Sei  $N \in \mathbb{N}$  fest ( $N > d/2$  reicht). Dann heißt  $\phi \in C^\infty$  eine normierte standard-bump-Funktion, wenn  $\text{supp } \phi \subseteq B_0(1)$  und  $|\partial_x^\alpha \phi| \leq 1 \quad \forall 0 \leq |\alpha| \leq N$

Für gegebenes  $\phi$  schreiben wir  $\phi_R \equiv \phi(\cdot/R)$

Prop. 4.18 (Notwendiges und hinreichendes Kriterium für  $L^2$ -Beschränktheit von sing. Integraloperatoren)

Sei  $K$  ein distributioneller Integralkern, der abseits von  $D$  mit einer Funktion übereinstimmt, die  $|\partial_x^\alpha K(x)| \leq A, |x|^{-\alpha}$  für  $0 \leq |x| \leq 1$  erfüllt.

Dann ist  $\hat{K}$  genau dann beschränkt, wenn es eine Konstante  $A > 0$  gibt, sodass  $|\langle K, \phi_R \rangle| \leq A$  für alle normierten bump-Funktionen  $\phi$  und  $R > 0$ .

Beweis " $\Leftarrow$ " Angenommen  $\hat{K}$  ist beschränkt.

$$\phi_R(x) = \phi(x/R) \Rightarrow \text{dann } |\langle K, \phi_R \rangle_{SS} \cdot 1| = \left| \int \hat{K}(\xi) \hat{\phi}_R(\xi) d\xi \right|$$

$$\hat{\phi}_R(\xi) = \mathcal{R}^d \hat{\phi}(R \cdot \xi) \quad = \left| \int \hat{K}(\xi/R) \hat{\phi}(\xi) d\xi \right|$$

$$\phi \in C_c^\infty \quad \leq \|\hat{K}\|_\infty \|\hat{\phi}\|, \quad \approx \|\hat{K}\|_\infty$$

" $\Rightarrow$ " zz  $\|\hat{K}\|_\infty \leq 1$ ; dazu zerlegen wir  $K = K_0 + K_\infty$ ,

$$\text{wobei } K_0(x) = K(x) \eta(x), \quad \eta \in C_c^\infty, \text{ mit}$$

$$\eta = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{K} = \hat{K}_0 + \hat{K}_\infty \quad \text{ist eine Funktion in } L'_{loc}$$

$\hat{K}_0$  ist FT von kompakt getragener Distribution und damit  $C^\infty$  (Hörmander I - Thm 7.1.14)  
 $\hat{K}_\infty$  ist FT einer  $L^2$ -Fkt mit  $|K_0| \leq \langle x \rangle^{-d}$

$$\text{Jetzt zeigen wir } |\hat{K}(\xi)| \leq B(A, A) \quad 1 \leq |\xi| \leq 2 \quad (*)$$

Das genügt mit einem Dilatationsargument, denn:

angenommen (\*) gilt, dann betrachten wir  $K^{(\epsilon)}$ ,  $\epsilon > 0$  definiert durch  $\langle K^{(\epsilon)}, \phi \rangle = \langle K, \phi_{1/\epsilon} \rangle$ , d.h.

$$K^{(\epsilon)}(x) = \epsilon^{-d} K(x/\epsilon); \text{ d.h. wenn } K \text{ die Schranken}$$

$$|\partial_x^\alpha K(x)| \leq A_1 |x|^{-d-|\alpha|}$$

$$|\langle K, \phi_R \rangle| \leq A \quad \Rightarrow \text{dann erfüllt auch } K^{(\epsilon)} \text{ diese}$$

Schranken und zwar mit denselben Konstanten, gln. in  $\epsilon$



$\Rightarrow$  (\*) impliziert  $|\hat{K}(\xi)| \in B(A, A) \quad 1 < |\xi| \leq 2, \quad \epsilon > 0$

$\Rightarrow |\hat{K}(\xi)| \in B(A, A)$

genügt (\*) zu zeigen. Dazu schauen wir  $K_0$  und  $K_\infty$  getrennt an.

$$\frac{1}{|\xi|} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{K}_\infty(\xi) = \frac{1}{|\xi|} \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\partial_{x_j} K_\infty(x)}_{|\xi|^{-d-1}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \leq C/|\xi| \leq C \quad |\xi| \in [1, 2]$$

$\Rightarrow \| \hat{K}_\infty \|_{L^\infty} (1 \leq |\xi| \leq 2)$

$$\hat{K}_0(\xi) = \langle \overset{\text{PK}}{K_0}, e^{-2\pi i \langle \cdot, \xi \rangle} \rangle_{\xi, \xi'} = \langle K, \psi_\xi \rangle \quad (**)$$

mit  $\psi_\xi(x) = \eta(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi}$

Aber  $\psi_\xi$  ist eine normierte Bump-Funktion, d.h.

$|(*)| \leq 1$  per Annahme. □

Theorem 4.13 (Hörmander - Multiplikator - Theorem für Fouriermultiplikatoren)

Sei  $m \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$  und angenommen  $m$  erfüllt für ein  $s > \frac{d}{2}$

$$\sum_{0 \leq |\alpha| \leq s} \sup_{\lambda > 0} \underbrace{\lambda^{-d} \| \lambda^{|\alpha|} D^\alpha \beta(\cdot/\lambda) m(\cdot) \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2}_{\| D^\alpha \beta(\cdot) m(\cdot) \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2} < \infty, \quad \beta \in C_c^\infty$$

$\xi \rightarrow \lambda \xi$

$\frac{\partial}{\partial \xi}$   
 $\sup_{\lambda} \| \lambda^{|\alpha|} D^\alpha \beta(\cdot/\lambda) \|_{L^\infty} < \infty$   
 $\Leftrightarrow m \in H_{loc}^{s, \text{loc}}(\mathbb{R}^d)$

$\Rightarrow$  Für alle  $p \in (1, \infty)$  ist  $T_m f = (m \hat{f})^\vee$

$L^p$ -beschränkt mit  $\|T_m f\| \leq A_p \|f\|_p$

und ist weak-type  $(1,1)$ , d.h.  $\|T_m f\|_{L^{1,\infty}} \leq A \|f\|_1$

→ Grundlegende Idee: dyadische Zerlegung von  $m$ ,

wobei "hoch" und "tief" Frequenzen gesondert betrachtet werden

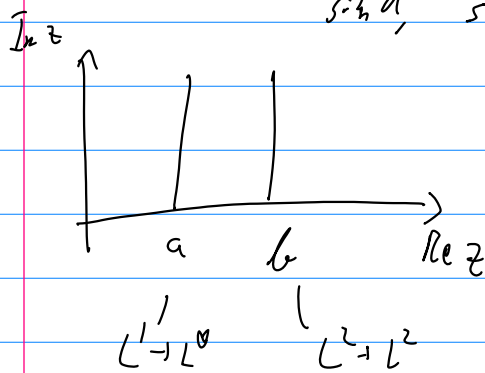
hier müssen Oszillationen ausgenutzt werden

"hoch" und "tief" hängt von der Längenskala der  $B_h$  (genauer gesagt, des Trägers  $\Omega_h$ )

Beispiele für Multiplikatoren, die Hörmanders Bedingung erfüllen

•  $m \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  mit  $|\partial_\xi^\alpha m| \leq |\xi|^{-\alpha}$ .

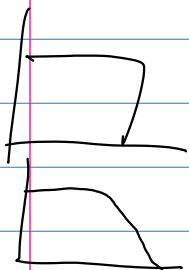
• Multiplikatoren, die homogen vom imaginären Grad sind, sprich  $m(b\xi) = \lambda^{i\alpha} m(\xi) \quad \lambda \in \mathbb{R}$   
 $\uparrow$   
 $C_b^\infty$



$$T(z) = (1 - \Delta)^z \quad \text{Re } z > 0$$

• Bochner - Riesz  $(1 - |\xi|^2)_+^\delta \quad \delta > s - \frac{1}{2}, s > \frac{d}{2}$

$$\Leftrightarrow \sum_{|m| < R} \left(1 - \frac{|m|^2}{R^2}\right)_+^\delta \hat{f}(m) e^{2\pi i m x} \text{ konv. in } L^p$$



→ Littlewood-Paley - Theorie.

$$\|A^{s/2} f\|_p \sim \left\| \left( \sum_{N \in \mathbb{Z}^d} |W^{s/2} P_N f|^2 \right)^{1/2} \right\|_p$$

$$p=2 \quad \langle f, A^{s/2} f \rangle = \int \lambda^{s/2} \hat{f} d\mu_f(\lambda)$$

$$d\mu_f^{(A)} = \langle f, dE_A(\lambda) f \rangle \quad \sum_n \delta_{x_n}$$

Hier: Baby-Version, wo  $A = |\rho|$ ,  $\lambda = 0$

$$\beta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \text{supp } \beta \subseteq \left[ \frac{1}{2}, 2 \right],$$

$$1 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \beta(\xi/2^j)$$

→ assoziiere dazu Littlewood-Paley-Projektionen  $P_j$

$$(P_j f)^\wedge(\xi) = \beta(\xi/2^j) \hat{f}(\xi)$$

→ definiere Littlewood-Paley- / Quadratfunktion

$$Sf = \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} |P_j f|^2 \right)^{1/2}$$

Thm 4.20 (Littlewood-Paley-Ungleichungen) (LP)

Sei  $1 < p < \infty \Rightarrow \exists A_p > 0$ , sodass

$$A_p^{-1} \|Sf\|_p \stackrel{(1)}{\leq} \|f\|_p \leq A_p \|Sf\|_p$$

LP-Ungl.

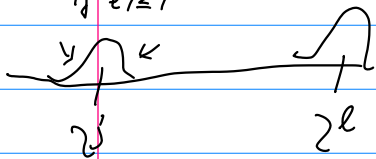
↑  
umgekehrte (LP)-Ungl.

# Beweis (Hauptzutat: Hörmunders Thm)

Wir zeigen zunächst (1)  $\Rightarrow$  (2) mittels Dualität

$$\langle \overset{1}{v}_g, \overset{1}{v}_f \rangle_{L^2} = \int \bar{g} f dx = \sum_{\substack{j,e \\ |j-e| \leq 1}} \int \overline{(P_e g)(x)} (P_j f)(x) dx$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j,e} P_j P_e \\ & \sim \sum_{j,e} \beta\left(\frac{j}{2^e}\right) \beta\left(\frac{e}{2^j}\right) \\ & = \sum_{\substack{j,e \\ |j-e| \leq 1}} \beta\left(\frac{j}{2^j}\right) \beta\left(\frac{e}{2^e}\right) \end{aligned}$$



$$\stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} \int dx \sqrt{\sum_{j,e} |(P_e g)(x)|^2 \mathbb{1}_{|j-e| \leq 1}}$$

$$\sqrt{\sum_{j,e} |(P_j f)(x)|^2 \mathbb{1}_{|j-e| \leq 1}}$$

Holder in  $S_x$

$$\leq \|Sg\|_p \|Sf\|_p \stackrel{(1)}{\leq} \|g\|_p \|Sf\|_p$$

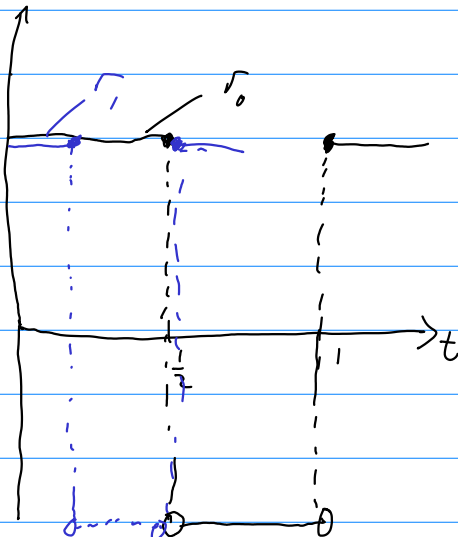
$\Rightarrow$  wg Dualität der  $L^p$ -Räume gilt damit (2).

Jetzt (2)  $\Rightarrow$  (1), sprich  $\|Sf\|_p \leq \|f\|_p$  mittels  
Khinchin's Ungleichung, mit Rademacher-Fkten.

$$r_0(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases} \quad \text{und periodisch fortgesetzt}$$

$$r_j(t) = r_0(2^j t)$$

$\Rightarrow r_j(t)$  sind orthonormal  
in  $L^2([0,1])$



Für  $F(t) = \sum_j g_j r_j(t) \in L^2([0,1])$  ist wg Khinchin's  
auch  $F \in L^p([0,1])$  mit

Steen-Singular Integral (Appendix D)  $\rightarrow A_p^{-1} \|F\|_{L^p} \leq \|F\|_{L^2([0,1])} = \left(\sum_j |k_j|^2\right)^{1/2} \leq A_p \|F\|_{L^p([0,1])}$

Definiere  $(T_t f)^\wedge(\xi) = m_t(\xi) \hat{f}(\xi)$   
 $= \sum_j \sigma_j(t) \beta(\xi/2^j) \hat{f}(\xi)$

Wg. Khinchine

$$\sqrt{\sum_j |\beta(\xi/2^j) \hat{f}(\xi)|^2} \leq \left(\int |T_t f|^\wedge(\xi)|^p dt\right)^{1/p}$$

$\Rightarrow$  analog im  $x$ -Raum erhält man

$$\sqrt{\sum_j |P_j f|^2} \leq \left(\int |T_t f|(x)|^p dt\right)^{1/p} \quad \int dx$$

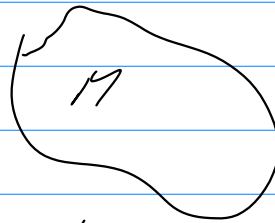
$$\Rightarrow \|S f\|_p \leq \int_0^1 dt \int dx |T_t f|(x)|^p$$

$$\int_0^1 dt \|f\|_p^p \leq \|f\|_p^p \quad \square$$

$T_t: L^p \rightarrow L^p$   
 wg. Hormander

Werbung

$$(-\Delta)|_M$$



kompatte Resolvente

kompat

Sage  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Hörseminar} \\ \text{Lectures on} \\ \text{eigenfunctions} \\ \text{of the Laplacian} \end{array} \right. \rightarrow N(\lambda) \sim \underbrace{\lambda^{d/2}}_{\uparrow} + \underbrace{\left[ \lambda^{\frac{d-1}{2}} \right]}_{\uparrow} + \dots$

$\{d_n\}_n \quad d_n \rightarrow \infty$  wie abh. von  $d_n$  im  $d$

Reed-Simon I, Teschl  $\rightarrow$  Spektraltheorie auf  $L^2(\mathbb{R}^d)$

$$\sigma = \sigma_{ac} \cup \sigma_{sc} \cup \sigma_{pp}$$

$$H = H_{ac} \oplus H_{sc} \oplus H_{pp}$$

Eigenfunktentwicklung

Kap 14

Körner II  $\rightarrow$   $-\Delta \rightarrow FT$   
 $-\Delta + V \Big|_{H_{ac}} \rightarrow$  distorted FT  
 Yafaev (Analytical scattering theory)

22.7.20

4.7. Hörmander - Spektralmultiplikator - Theorem für Schrödingeroperatoren

$$H = -\Delta + V \text{ in } L^2(\mathbb{R}^d) \quad V \geq 0 \text{ (L'loc)}$$

↑  
 geht aus der Friedrichs-Erweiterung der zugehörigen quadratischen Form, die z.B. auf  $C_c^\infty$  definiert ist, hervor;

Spektralsatz in Hilberträumen garantiert, dass beschränkte Fkt.en  $F \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$  von  $H$  wieder  $L^2$ -beschränkt sind

$$F(H) = \int_{\sigma(H)} F(\lambda) dE_H(\lambda) \quad \|F(H)\| \leq \|F\|_\infty$$

Frage  $L^p$ -Beschränktheit von  $F(H)$  für welche  $F$ ?

W. Hebisch 1990

Theorem 4.21 Sei  $s > d$ ,  $V \geq 0$ ,  $H = -\Delta + V$  wie oben. Sei  $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$  fest und  $F$  messbar, beschränkt auf  $\mathbb{R}$  mit

$$\sup_{t > 0} \|w(\cdot) F(t \cdot)\|_{H^{(s+1)/2}(\mathbb{R})} < \infty$$

$\Rightarrow$  Dann ist  $F(H)$  (zunächst mit Spektralsatz auf  $L^2(\mathbb{R}^d)$  definiert)  $L^p$ -beschränkt ( $1 < p < \infty$ ) und vom schwachen  $L'$ -Typ, sprich

$$\|F(H)\|_{L^p \rightarrow L^p}, \|F(H)\|_{L^1 \rightarrow L^{\infty}} \lesssim \|F\|_{H_{loc}^{s+1/2}}$$

### 4.7.1 Calderón-Zygmund-Theorie.

(Wie üblich: genügt weak-type  $(1,1)$  zu zeigen  
 $\rightarrow$  Marcinkiewicz-Interpolation mit strong-type  $(2,2)$   
+ Dualität)

$$\{x : |(F(H)f)(x)| > d\} \stackrel{!}{\lesssim} d^{-1} \|f\|, \quad d > 0.$$

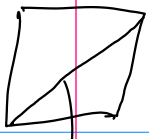
$\rightarrow$  Calderón-Zygmund-Lemma, d.h.  $\mathbb{R}^d = F \dot{\cup} \Omega$ ,

wobei  $\Omega = \dot{\bigcup}_i Q_i$ ,  $\{Q_i\}$  dyadische Würfel.

(mit  $|f| \lesssim d$  auf  $F$ ).

$$f = g + \sum_i b_i, \quad \text{supp } b_i \subseteq Q_i$$

mit  $|g(x)| \lesssim d$ ,  $\frac{1}{|Q_i|} \int |b_i| \lesssim d$ ,  $\sum |Q_i| \lesssim \frac{\|f\|}{d}$ .



$$\psi(d) := e^{-d}, \quad \psi_{h_i}(d) := e^{-2^{2h_i} d}$$

$$h_i := \log_2(\text{diam } Q_i / \sqrt{d})$$

diam  $Q_i$

$$\sim \sqrt{2^{2h_i}} \cdot \sqrt{d}$$

getrape auf  $Q_i$

! Längenskala der  $b_i$  ist gerade  $2^{h_i}$

$$\rightarrow \text{zerlegen } F(H)f = \sum_i F(H)b_i + F(H)g$$

hier müssen die Oszillationen der  $(1-\psi_{h_i})b_i$  gut ausgenutzt werden  $= \sum_i F(H)(1-\psi_{h_i}(H))b_i$  (1) } richtig schreiben  
 $+ F(H)\left(\sum_i \psi_{h_i}(H)b_i + g\right)$  (2)

$L^2$ -Theorie (Spektralsatz)  
 + size estimates

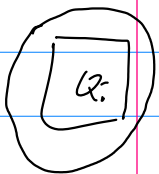
$$\psi_{h_i}(\Delta) = e^{-2^{2h_i}(-\Delta)}$$

$\rightarrow$  charakteristische Längenskala  
 Impulsraum ist gerade

$2^{-h_i}$   $\rightarrow$  wir nutzen

unscharfprinzip gut aus!

$\rightarrow L^{1,\infty}$ -Abschätzung von (1)+(2) mittels Chebyshev.



$$\Omega^* = \bigcup_i Q_i^*, \quad Q_i^* \text{ Kugel um } Q_i \text{ mit Radius } 2\sqrt{d} \text{ diam } Q_i$$

$$\{x \in \Omega^* \cup (\Omega^*)^c \mid |F(H) \sum_i (1-\psi_{h_i}(H))b_i(x)| > \lambda\}$$

$$\leq |\Omega^*| + \frac{1}{\lambda} \sum_i \int_{\mathbb{R}^d \setminus Q_i^*} |F(H)(1-\psi_{h_i}(H))b_i(x)| dx$$



$$\leq \frac{\|f\|_1}{\delta} + \frac{1}{\delta} \left( \sum_i \|b_i\|_{L^1} \right) \sup_i \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus Q_i^*} dx |F(\mathcal{H})(1 - \chi_{i^*}(\mathcal{H}))(x, y)|$$

Jetzt zu (2)  $\rightarrow$  mit Chebyshev (in  $L^2$ -Version)

$$|\{x: |F(\mathcal{H}) \left( \sum_i \chi_{i^*}(\mathcal{H}) b_i + g \right)(x)| > \delta\}|$$

$$\leq \delta^{-2} \|F(\mathcal{H}) (\dots)\|_{L^2}^2$$

$$\stackrel{|f| \leq 1}{\leq} 2 \delta^{-2} \|F\|_\infty \left( \underbrace{\|g\|_2^2}_{\leq \delta \|f\|_1} + \left\| \sum_i \chi_{i^*}(\mathcal{H}) b_i \right\|_2^2 \right)$$

$$\leq \|F\|_\infty \left[ \frac{\|f\|_1}{\delta} + \frac{1}{\delta^2} \left\| \sum_i \chi_{i^*}(\mathcal{H}) b_i \right\|_2^2 \right]$$

$\rightarrow$  Zusammengefasst: es verbleibt zu zeigen, dass

$$(1^*) \quad \left\| \sum_i \chi_{i^*}(\mathcal{H}) b_i \right\|_2 \leq \sqrt{\delta} \|f\|_1$$

$$(2^*) \quad \sup_i \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus Q_i^*} dx |F(\mathcal{H})(1 - \chi_{i^*}(\mathcal{H}))(x, y)| \leq \|F\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$$

4.7.2. Einschluss Wärmeleitungshern.

$$e^{tA}(x) = \text{const } t^{-d/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{t}\right)$$

Träger  $A, B$  von unten beschränkte lineare Operatoren

$$e^{-t(A+B)} = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \left( e^{-tA/n} e^{-tB/n} \right)^n$$



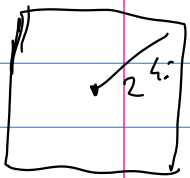
### 4.7.3 Size estimates - Abschätzung (1\*)

Proposition 4.22  $V > 0$ ,  $\chi_{Q_i}(x) = e^{-2^{hi} |x|} \Rightarrow (1^*)$   
 $\|\chi_{Q_i}\|_{L^2} \leq d \|f\|_1$

Beweis

Betrachte zunächst festen Würfel  $Q_i$  mit Zentrum  $y_0$  und Radius/Durchmesser  $2^{hi}$ .

$\rightarrow$  Für  $x \in \mathbb{R}^d$  und  $y \in Q_i$  haben wir mit  $\Delta$ -Ungl.



$$1 + 2^{-hi} |x - y| \leq 1 + 2^{-hi} |x - y_0| + \underbrace{2^{-hi} |y - y_0|}_{\leq 1}$$

$$\leq 1 + 2^{-hi} |x - y_0|$$

$$\leq 1 + 2^{-hi} |x - y|$$

$$\Rightarrow (*) \quad 1 + 2^{-hi} |x - y| \sim 1 + 2^{-hi} |x - y_0|, \quad x \in \mathbb{R}^d, y \in Q_i$$

pl.t.weise  
 Abschätzung

$$|\chi_{Q_i}(x)| \lesssim \int_{Q_i} 2^{-hi d} (1 + 2^{-hi} |x - y|)^{-d-2} |f(y)| dy$$

$$\|f\|_1 \leq d |Q_i| \|f\|_1$$

$$\lesssim d |Q_i| \cdot 2^{-hi d} (1 + 2^{-hi} |x - y_0|)^{-d-2}$$

$$|Q_i| = \int_{Q_i} dy$$

$$\stackrel{(*)}{\sim} d \cdot 2^{-hi d} \int dy (1 + 2^{-hi} |x - y|)^{-d-2} \mathbb{1}_{Q_i}(y)$$

$$f_\epsilon = e^{-d \phi(x/\epsilon)}$$

Approx  $\alpha 1$

$$= d \cdot (2^{-hi d} (1 + 2^{-hi} | \cdot |)^{-d-2} * \mathbb{1}_{Q_i})(x)$$

Sup  $|f_\epsilon * f| \lesssim M f$

(Thm 2.6)

Für  $h \in L^2$  haben wir mit Thm 2.6

$$\langle h, 2^{-hi d} (1 + 2^{-hi} | \cdot |)^{-d-2} * \mathbb{1}_{Q_i} \rangle$$

$$= \langle 2^{-ki d} (1 + 2^{-ki})^{-d-2} * h, \chi_{Q_i} \rangle$$

Thm 2.6

$$\lesssim \langle Mh, \chi_{Q_i} \rangle$$

$$(17h)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^d} \int_{B_r(x)} |h| dx$$

$$\Rightarrow \| \sum \chi_{Q_i} b_i \|_2^2 = \sup_{h \in L^2, \|h\|=1} |\langle h, \sum \chi_{Q_i} b_i \rangle|$$

$$\leq \sup_{h \in L^2} |\langle Mh, \sum \chi_{Q_i} \rangle|$$

$$M: L^2 \rightarrow L^2$$

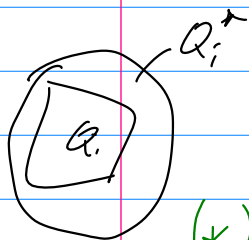
$$\leq \sup_{h \in L^2} \|Mh\|_2 \| \sum \chi_{Q_i} \|_2 \leq \|M\|_2 \| \sum \chi_{Q_i} \|_2$$

$$\sum |a_i| \leq \frac{\|f\|_1}{b} \leq \sqrt{\sum |a_i|} \leq \sqrt{\|f\|_1} \quad \square$$

### 4.7.4 Ausnutzen der Oszillationen - Beweis von (2\*)

$\hat{=}$  Zusammenfassung

vorher Abschwächen  $\rightarrow$  Behauptung 4.23 Sei  $V > 0, s > d$ ,  $F$  erfüllt Bed von Thm. 4.21 ( $\sup_{t>0} \|w(\cdot) F(z \cdot)\|_{H^{s+1}(R^d)} < \infty$ )



Angenommen, wie hätten

$$\sup_x \sup_y \int_{R^d \setminus B_y(r)} |F(1 - \Phi_r)(H^{1/2})(x, y)| \leq \|F\|_\infty + \|F\|_{H^{s+1}(R^d)}$$

$\uparrow$   
 $h_i$   
 $\downarrow$

$\log_2 \text{diam } Q_i$

mit  $\Phi_r(t) = e^{-t^2}$ , Dann ist  $F(H^{1/2})$   $L^p$ -beschr und vom schwachen  $(1,1)$ -Typ., d.h

$$\|F(H^{1/2})\|_{L^p, L^p}, \|F(H^{1/2})\|_{L^1 \rightarrow L^\infty} \leq \|F\|_\infty + \|F\|_{H^{s+1}(R^d)}$$

Bemerkungen • Lehn Problem  $F$  durch  $F \circ (\cdot)^{1/2}$  zu ersetzen, da  $F \circ (\cdot)^{1/2}$  auf  $\mathbb{R}_+$  dieselben Bedingungen des Theorems 4.21 erfüllt

$\Rightarrow$  TLM folgt durch Abbild  $F \mapsto F \circ (\cdot)^2$

• Begründung für Ersetzung:  $r$  (und später  $R$ )

können als echte Längenskalen verstanden werden, denn für  $V=0$  ist

$$F_r(h) = e^{-(r|h|)^2}$$

$$F_r(H^{1/2}) = e^{-(r|H|)^2}$$

Behauptung 4.24 Sei  $R > 0$ ,  $s > 0$ ,  $V > 0$   
Dann gilt für alle  $\epsilon > 0$

22.7.20

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^d} \int |F(H^{1/2})(x, y)|^2 (1 + R|x-y|)^s dx \leq R^d \|F(R \cdot)\|_{H^{\frac{s+1+\epsilon}{2}}(\mathbb{R})}^2$$

$$F \in H^{(s+1+\epsilon)/2}(\mathbb{R}), \quad \text{supp } F \subset [R/4, R].$$

Beweis von (\*) unter der Annahme, dass Prop 4.24 wahr ist

Sei  $0 \neq w \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ ,  $\text{supp } w \subset [1/4, 1]$ , sodass

$$1 = \sum w(2^{-n} \cdot), \quad \delta \in \mathbb{R}_+$$

$$w_n \equiv w(2^{-n} \cdot)$$

$\rightarrow$  zerlege  $F(1 - \Phi_r)(H^{1/2}) = \sum w_n F(1 - \Phi_r)(H^{1/2})$

Zusammen mit  $\int_{\mathbb{R}^d(B_y(r))} (1 + R|x-y|)^{-\tilde{s}} dx \lesssim R^{-d} (1+rR)^{d-\tilde{s}}$ ,  $\tilde{s} > d$

mit  $\tilde{s} > d$ ,  $s > \tilde{s}$

$$\sup_{r \in \mathbb{R}_+} \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |w_n F(1 - \Phi_r)(H^{1/2})(x, y)| dx$$

$$R = 2^n \leq \sup_{r \in \mathbb{R}} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} |w_n F(1 - \Phi_r)(H^{1/2})(x, y)|^2 (1 + 2^n |x - y|)^{\tilde{s}} dx}$$

$$\sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} dx (1 + 2^n |x - y|)^{\tilde{s}}}$$

Beh 4.24

$$\lesssim \sup_{r \in \mathbb{R}_+} 2^{nd/2} \|w_n F(1 - \Phi_r)(2^n \cdot)\|_{H^{\frac{s+1}{2}}} 2^{-nd/2} (1 + 2^n r)^{\frac{d-\tilde{s}}{2}}$$

$$t = \frac{s+1}{2} \quad \|w_n F(1 - \Phi_r)(2^n \cdot)\|_{H^t(\mathbb{R})} \lesssim \|w_n F(2^{2n} \cdot)\|_{H^t(\mathbb{R})}$$

$$h = \Gamma t$$

$$1 - \Phi(2^n r)$$

$$\|1 - \Phi_r(2^n \cdot)\|_{C^k[\frac{1}{4}, 1]}$$

$$= 1 - e^{-(2^n r)^2} \leq \|w(\cdot) F(2^n \cdot)\|_{H^t(\mathbb{R})} \cdot \frac{(2^n r)^2}{1 + (2^n r)^2}$$

$$\leq \min\{1, (2^n r)^2\}$$

$$\sim \frac{(2^n r)^2}{1 + (2^n r)^2}$$

$$\sup_{r \in \mathbb{R}_+} \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |F(1 - \Phi_r)(H^{1/2})(x, y)| dx$$

$$\lesssim \sup_{r \in \mathbb{R}_+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(2^n r)^2}{1 + (2^n r)^2} \|w F(2^n \cdot)\|_{H^{\frac{s+1}{2}}} \cdot (1 + 2^n r)^{\frac{d-\tilde{s}}{2}}$$

$$\lesssim \|F\|_{H^{\frac{s+1}{2}}} \sup_{r \in \mathbb{R}_+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(2^n r)^2}{1 + (2^n r)^2} (1 + 2^n r)^{\frac{d-\tilde{s}}{2}} \quad \tilde{s} > d$$

$$\lesssim \begin{cases} 1 & 2^n r \gg 1 \\ 2^n r & 2^n r \ll 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{matrix} (2^n r)^{\frac{d-\tilde{s}}{2}} \\ 1 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 2^n r \\ 2^n r \ll 1 \end{matrix}$$

$$\lesssim \|F\|_{H^{\frac{s+1}{2}}}$$



Beweis von Beh 4.24  $\checkmark$  unter Voraussetzung, dass Beh. 4.28 gilt  $\rightarrow$  Hauptidee  $\underbrace{\text{Fourierreihe}}_{\text{für } F}$

Definiere  $G(d) \equiv F(\mathbb{R}d^{1/2}) e^d \in H_{loc}^{\frac{s+1+\epsilon}{2}}$

$$\begin{aligned} F(d^{1/2}) &= G(\mathbb{R}^{-2}d) e^{-\mathbb{R}^{-2}d} \\ &= e^{-\mathbb{R}^{-2}d} \int \hat{G}(\tau) e^{i\tau \cdot \mathbb{R}^{-2}d} d\tau \end{aligned}$$

mit Fouriertransformationen

$$F(H^{1/2})(x, y) = \int \hat{G}(\tau) \exp(- (1-i\tau)\mathbb{R}^{-2}H)(x, y) d\tau$$

$\uparrow$   
komplex dilatierter Wärmeleitungs-kern (Mischung aus Wärmeleitung + Schrödinger)

$\rightarrow$  an dieser Stelle verwenden wir die Glattheit von  $\bar{F}$  (und damit  $G$ ), um den  $e^{-(1-i\tau)\mathbb{R}^{-2}H}$  plattweise zu kontrollieren.

$\rightarrow$  jetzt zum Beweis der Abschätzung in Beh 4.24

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |F(H^{1/2})(x, y)|^2 (1 + \mathbb{R}|x-y|)^{-3} dx \right)^{1/2}$$

$$\stackrel{\text{Minkowski}}{\leq} \int d\tau \hat{G}(\tau) \left( \int dx (1 + \mathbb{R}|x-y|)^{-3} |\exp(- (1-i\tau)\mathbb{R}^{-2}H)(x, y)|^2 \right)^{1/2}$$

$$\stackrel{\text{Beh. 4.28}}{\leq} \mathbb{R}^{d/2} \int \hat{G}(\tau) \frac{\langle \tau \rangle^{1/2}}{\langle \tau \rangle^{\frac{1+\epsilon}{2}}} d\tau$$

$$\leq \mathbb{R}^{d/2} \|G\|_{H^{\frac{s+1+\epsilon}{2}}(\mathbb{R}_+)} \approx \mathbb{R}^{d/2} \|F(\mathbb{R} \cdot)\|_{H^{\frac{s+1+\epsilon}{2}}(\mathbb{R}_+)} \square$$

Lemma 4.25 Sei  $V \geq 0$ ,  $t > 0$

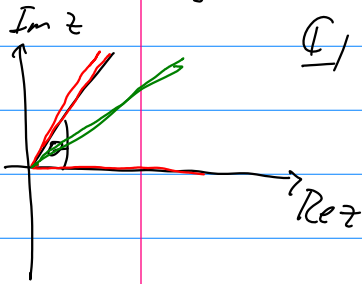
$$\sup_{y \in \mathbb{R}^d} t^{d/2} \int |e^{-tH(x,y)}|^2 dx < \infty$$

Beweis mit Trotter + Plancherel  $e^{-tH(x,y)} \leq e^{-tV(x,y)}$

$$t^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} dp e^{-2t|p|^2} < \infty. \quad \square$$

Lemma 4.26 (Phragmén-Lindelöf) Davies (Uniformly elliptic operators (19)) / Heat kernel & spectral theory

Sei  $X$  ein Banachraum mit Norm  $\|\cdot\|$  und  $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\}$   $F: \mathbb{C}_+ \rightarrow X$  holomorph. Angenommen



$$\|F(|z|e^{i\theta})\| \leq \alpha, (|z| \cos \theta)^{-\beta}$$

$$\|F(|z|)\| \leq \alpha, |z|^{-\beta} \exp(-\alpha_2 |z|^{-\alpha})$$

$$\alpha_1, \alpha_2 > 0, \beta \geq 0, 0 < \alpha \leq 2, |\theta| < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \|F(|z|e^{i\theta})\| \leq 2^\beta \alpha, (|z| \cos \theta)^{-\beta} \exp(-\frac{\alpha_2 \alpha}{2} \frac{\cos \theta}{|z|^\alpha})$$

Beweis Später

In unserem Fall sind  $\beta = d/2$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\alpha_2 = r^2$  später

Korollar 4.27 Seien  $V \geq 0$ ,  $y \in \mathbb{R}^d$ ,  $z = |z|e^{i\theta}$ ,  $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ ,  $r > 0$ .

Dann gilt  $\int_{\mathbb{R}^d |B_r(r)} dx |\exp(-zH)(x,y)|^2 \leq (|z| \cos \theta)^{-\frac{d}{2}} \exp(-\frac{r^2 \cos \theta}{2|z|})$



Beweis Sei  $\bar{F}_y : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}$

$$\bar{F}_y(z) = \left( \int e^{-z\gamma}(x,y) f(x) dx \right)^2, \quad \text{supp } f \subseteq \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \\ f \in L^2 \text{ normiert}$$

Zunächst für  $|b| < \pi/2$ ,

$$\sup_y |\bar{F}_y(z)| \leq \|e^{-z\gamma}\|_{L^2 \rightarrow L^\infty}^2 \|f\|_2^2$$

$$e^{-z\gamma} = \underbrace{e^{-\text{Re}(z)\gamma}}_{L^2 \rightarrow L^\infty} \underbrace{e^{-i\text{Im}(z)\gamma}}_{\text{Schrödinger}} \leq \underbrace{\|e^{-i\text{Im}(z)\gamma}\|_{L^2, L^2}^2}_{=1 \text{ (vg Unitarität)}} \underbrace{\|e^{-\text{Re}(z)\gamma}\|_{L^2, L^\infty}^2}_{\text{Lemma 4.26}} \|f\|_2^2$$

$$\leq (\text{Re } z)^{-d/2} \|f\|_2^2 = (|z| \cos \theta)^{-d/2} \|f\|_2^2$$

$$z \in \mathbb{R}: |\bar{F}_y(|z|)| \leq \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} |e^{-|z|\gamma}(x,y)|^2 dx \|f\|_2^2$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} |z|^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{|z|}}|^2 dx \|f\|_2^2$$

$|x-y| > r$

$$\leq \underbrace{|z|^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{r^2}{|z|}}}_{= \text{const}} \int_{\mathbb{R}^d} |z|^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{|z|}} dx \|f\|_2^2$$

$\Rightarrow$  mit Planchon-Lindelöf bekommen wir

$$\frac{a_2 x}{2} \quad |\bar{F}_y(|z|e^{i\theta})| \leq (|z| \cos \theta)^{-d/2} \exp\left(-\frac{r^2 \cos \theta}{|z|}\right) \quad \square$$

$\kappa > 1$

$a_2 = r^2$

Behauptung 4.28 Seien  $\nu \gg 0$ ,  $R > 0$ ,  $s > 0$ . Dann

$$\sup_y \int_{\mathbb{R}^d} |\exp(-(1+i\nu)R^{-2}H)(x,y)|^2 |x-y|^{-s} dx \lesssim R^{d-s} \langle \nu \rangle^{-s}$$

Beweis Wir verwenden Korollar 4.27 mit

$$z = (1+i\nu)R^{-2}, \text{ d.h. } |z| = \langle \nu \rangle R^{-2} \\ \cos \theta = \langle \nu \rangle^{-1}$$

Sei  $N \gg 1$  dyadisch, also  $N \in 2^{\mathbb{Z}}$ .

→ mit Kor 4.27 haben wir mit  $r = \frac{N \langle \nu \rangle}{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{B_y\left(\frac{N \langle \nu \rangle}{R}\right)} |\exp(-(1+i\nu)R^{-2}H)(x,y)|^2 dx$$

$$\begin{aligned} & \lesssim R^d \exp\left(-\frac{N^2 \langle \nu \rangle^2 \langle \nu \rangle^{-1}}{2R^2 \langle \nu \rangle R^{-2}}\right) \\ & \cdot \exp\left(-\frac{r^2 \cos \theta}{2|z|}\right) \lesssim R^d e^{-N^2} \leq R^d N^{-d-2} \quad (*) \end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} dx |\exp(-(1+i\nu)R^{-2}H)(x,y)|^2 |x-y|^{-s}$$

$$= \int_{|x-y| < \frac{2 \langle \nu \rangle}{R}} dx |x-y|^{-s} \left(\frac{N \langle \nu \rangle}{R}\right)^s$$

$$+ \sum_{N \in 2^{\mathbb{Z}}} \int_{\frac{N \langle \nu \rangle}{R} < |x-y| < \frac{2N \langle \nu \rangle}{R}} dx |x-y|^{-s}$$

$$\leq \left(\frac{\langle Z \rangle}{R}\right)^s \int_{\mathbb{R}^d} dx \underbrace{e^{-(1+i\epsilon)R^{-2}Z}(x,y)}_{\leq (|z/\cos\theta|)^{-d/2} = R^d} |^2$$

$$\sum_{N \in \mathbb{Z}^d} \left(\frac{N \langle Z \rangle}{R}\right)^s \int_{|x-y| > \frac{N \langle Z \rangle}{R}} dx |e^{-(1+i\epsilon)R^{-2}Z}(x,y)|^2$$

$$\leq R^d N^{-d-2} \text{ mit (A)}$$

$$\leq R^{d-s} \langle Z \rangle^s \left(1 + \sum_{N \in \mathbb{Z}^d} N^{s-d-2}\right) \underbrace{(s < d+2)}_{\uparrow \exp(-N^2)}$$

$$\sim R^{d-s} \langle Z \rangle^s$$

□

Beweis von Lemma 4.26

$$a_1, a_2 > 0$$

$$\beta > 0, \quad 0 < \alpha \leq 2$$

$$z \in \mathbb{C}, \quad |\theta| < \frac{\pi}{2}$$

$$|\bar{F}(|z|e^{i\theta})| \leq a_1 (|z| \cos\theta)^{-\beta}$$

$$z = |z|e^{i\theta}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}e^{-i\theta}$$

$$|F(|z||)| \leq a_1 |z|^{-\beta} \exp(-a_2 |z|^{-\alpha})$$

Für  $0 < \gamma < \pi/2$

$$G(z) := z^{-\beta} \bar{F}\left(\frac{1}{z}\right) \exp\left(a_2 e^{i(\frac{\pi}{2}-\gamma)\alpha} \frac{z^\alpha}{\sin\alpha\gamma}\right)$$

$$(1) |G(|z|)| \leq a_1 \exp(-a_2 |z|^{-\alpha}) \exp\left(a_2 \frac{|z|^\alpha \sin\alpha\gamma}{\sin\alpha\gamma}\right)$$

$$= a_1$$

$$(2) |G(|z|e^{i\gamma})| \leq a_1 (\cos\gamma)^{-\beta} \exp\left(\frac{a_2}{\sin\alpha\gamma} \operatorname{Re} e^{i(\frac{\pi}{2}-\gamma\alpha+\gamma\alpha)}\right)$$

$$= a_1 (\cos\gamma)^{-\beta}$$

⇒ Interpolation (3-Linien-Trim) zwischen (1) und (2)

$$0 < \theta < \gamma < \frac{\pi}{2} \quad |G(z|e^{i\theta})| \leq a_1 (\cos \gamma)^{-\beta \cdot \theta / \gamma} \leq a_1 (\cos \gamma)^{-\beta}$$

→ analog für  $\theta \in (-\gamma, 0)$

$$z = |z|e^{i\theta} \quad \theta > 0$$

$$F(z) = z^{-\beta} G\left(\frac{1}{z}\right) \exp\left(-a_2 z^{-\alpha} e^{i(\frac{\pi}{2} - \gamma\alpha) / \sin \alpha \gamma}\right)$$

$$|F(z)| \leq a_1 (|z| \cos \gamma)^{-\beta} \exp\left(-\frac{a_2 \operatorname{Re} e^{i(\frac{\pi}{2} - \gamma\alpha + \alpha|\theta|)}}{|z|^\alpha \sin \alpha \gamma}\right)$$

$$= a_1 (|z| \cos \gamma)^{-\beta} \exp\left(-\frac{a_2 \sin \alpha (\gamma - |\theta|)}{|z|^\alpha \sin \alpha \gamma}\right)$$

$$\gamma = \frac{\pi}{4} + \frac{|\theta|}{2} \quad \rightarrow \quad |\theta| < \gamma < \pi/2$$

$$\cos \gamma = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{|\theta|}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{|\theta|}{2}\right)$$

$$x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$\sin \frac{x}{2} \geq \frac{1}{2} \sin x$$

(Taylor)

$$\geq \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - |\theta|\right) = \frac{\cos \theta}{2}$$

$$\Rightarrow (\cos \gamma)^{-\beta} \leq 2^\beta (\cos \theta)^{-\beta} \quad \checkmark$$

$$\gamma = \frac{\pi}{4} + \frac{|\theta|}{2}$$

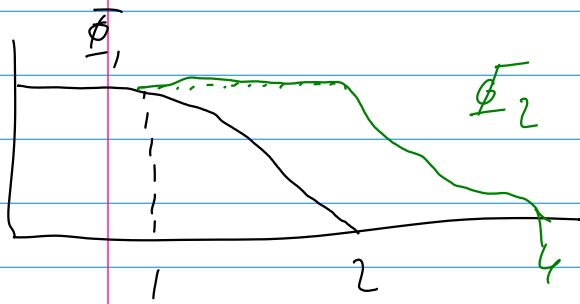
$$\frac{\sin(\alpha(\gamma - |\theta|))}{\sin \alpha \gamma} \geq \sin \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\pi}{2} - |\theta|\right) \stackrel{\alpha \leq 2}{\geq} \frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - |\theta|\right)$$

$$= \frac{\alpha}{2} \cos \theta$$

$$(*) \leq 2^\beta a_1 (|z| \cos \theta)^{-\beta} \exp\left(-\frac{a_2}{|z|^\alpha} \cdot \frac{\alpha}{2} \cos \theta\right)$$

(LP)-Abschätzungen für selbstadjungierte Operatoren  $A$  in  $L^2(\mathbb{R}^d)$  für die Hörmander-Spektraltheorie gilt ( $\rightarrow$  ex 1.1)

$\rightarrow$  Littlewood-Projektoren  $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$



$$\Phi_\lambda = \begin{cases} 1 & \lambda < 1 \\ 0 & \lambda > 2 \end{cases}$$

$$\Phi_N(\lambda) = \Phi(\lambda/N)$$

$$\Psi_N(\lambda) = \Phi\left(\frac{\lambda}{N}\right) - \Phi\left(\frac{\lambda}{N/2}\right)$$

$\Rightarrow$  Quantisiere

$$\tilde{P}_N = \Psi_N(\sqrt{A})$$



Filtere

$$P_N(\lambda) = e^{-\lambda^2/N} - e^{-\lambda^2/(N/2)}$$

Zweite Familie:  
(abuse of notation)

$$P_N = e^{-A/N} - e^{-A/(N/2)}$$

$$\rightarrow \sum_{N \in \mathbb{Z}^+} P_N(\lambda) = 1$$

(Teleskopsumme)  
("N = +\infty überbleibt")

### Thm 4.29 (LP-Abschätzungen)

Sei  $s > 0$ ,  $1 < p < \infty$  und angenommen es gibt ein Hörmander-Thm für  $A$  ( $A: \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{D}(A)$ )  
Sei  $N \geq k > \frac{s}{2}$ . Dann gilt

$$\| (\sum_{N \in \mathbb{Z}^d} |N|^s \tilde{P}_N |f|^2)^{1/2} \|_p \sim \| A^{s/2} f \|_p \sim \| (\sum_{N \in \mathbb{Z}^d} |N|^s (P_N)^k |f|^2)^{1/2} \|_p$$

Bem  $2k > s$  wird benötigt, Hörmander - Kriterium für  $P_N$  anwendbar ist.

$$e^{-\lambda^2/N} - e^{-4\lambda^2/N} \sim \lambda^2$$

$$\lambda^{-s} P_N(\lambda) \underset{(\lambda \ll 1)}{\approx} \lambda^{-s+2k} \quad k > \frac{s}{2}$$

Beweis  $f \mapsto A^{-s/2} f =: g$  wir zeigen

$$\|g\|_p \sim \|\tilde{S}g\|_p \quad \tilde{S}(g) = \sqrt{\sum_{N \in \mathbb{Z}^d} |N|^s \tilde{P}_N |A^{-s/2} g|^2}$$

$$\rightarrow \text{bzw. } \|g\|_p \sim \|Sg\|_p \quad S(g) = \sqrt{\sum_{N \in \mathbb{Z}^d} |N|^s (P_N)^k |A^{-s/2} g|^2}$$

Zunächst zeigen wir die  $(P)$ -Ungleichung, d.h. " $>_s$ "

$$|N|^s (P_N)^k A^{-s/2} =: m(\lambda) \quad \text{wobei}$$

$$(*) \quad m(\lambda) = \lambda^{-s} \left( e^{-\lambda^2} - e^{-4\lambda^2} \right)^k$$

$$= \lambda^{-s} e^{-4\lambda^2} \left( 1 - e^{-3\lambda^2} \right)^k$$

$\rightarrow$  dieses  $m$  erfüllt jede Mihlin-Bedingung

$$|\partial_\lambda^j m(\lambda)| \leq \lambda^{-s+2k-j} e^{-4\lambda^2} \quad \forall j$$

$\rightarrow$  jetzt sei  $\{\epsilon_N\}_{N \in \mathbb{Z}^d} \in \{-1, 1\}$  Rademacher-verteilt

→  $m_\epsilon(d) = \sum_{N \in \mathbb{Z}^d} \epsilon_N m(d/N)$  erfüllt immer  
 nach der Minkowski-Bedingung  $|D_j m_\epsilon(d)| \leq d^{-j}$ .

→ Erinnerung Christoffel-Ungleichung

$$\left\| \left( \sum_n |g_n|^2 \right)^{1/2} \right\|_1^p \sim \int \mathbb{E} \left\{ \left| \sum \epsilon_n g_n \right|^p \right\} dx$$

mit  $g_n = m(\sqrt{A}/N) g$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int |Sg|^p &\sim \int \mathbb{E} \left\{ |(m_\epsilon g)(x)|^p \right\} dx \\ &= \mathbb{E} \|m_\epsilon g\|_p^p \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|g\|_p^p. \end{aligned}$$

verbleibt " $\leq$ ", die umgekehrte (LP) - Ungleichung  
 mittels Dualität

$$\tilde{m}(d) := \left( \sum_{N \in \mathbb{Z}^d} m(d/N)^2 \right)^{-1} \quad \text{mit demselben } m(d) \text{ wie in } (*)$$

$$\|g\|_1 \leq \|Sg\|_p$$

Sei  $h \in L^{p'}$ , dann kriegen wir

$$\begin{aligned} |(g, h)| &= \left| \sum_n (g, m(\sqrt{A}/N)^2 \tilde{m}(\sqrt{A}) h) \right| \\ &= \left| \sum_n (m(\sqrt{A}/N) g, m(\sqrt{A}/N) \tilde{m}(\sqrt{A}) h) \right| \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} \sum_n |(Sg, S(\tilde{m}(\sqrt{A}) h))|$$

$$\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|Sg\|_p \|S(\tilde{m}(\sqrt{A}) h)\|_{p'}$$

$$\stackrel{(LP)}{\leq} \|Sg\|_p \| \tilde{m}(\sqrt{A}) h \|_{p'} \stackrel{\tilde{m} \text{ ist Multiplikator}}{\leq} \|Sg\|_p \|h\|_{p'} \quad \square$$