22.4.2020

1 L^p & interpolation

1.1 L^p & schwache L^p

(X, μ) Maßraum mit Maß μ (nicht notwendigerweise endlich)

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p} \quad \text{Norm, wenn } 1 \le p < \infty$$

$$\|f\|_\infty = \text{ess-sup}\,|f| = \inf\{B > 0 : \mu(\{x : |f(x)| > B\}) = 0\}$$

$0 < p < 1$. $\|\cdot\|_p$ ist eine Quasinorm:

$$0 < p \le \infty \qquad \|f+g\|_p \le \max\{1, 2^{(1-p)/p}\}(\|f\|_p + \|g\|_p)$$

(Hausaufgabe: Zeige: $0 < p < 1$: $\|f+g\|_p \geq \|f\|_p + \|g\|_p$, $f, g \geq 0$.

$$L^p \begin{cases} \text{Banachraum} & p \in [1, \infty] \\ \text{Quasi-Banach} & 0 < p < 1 \end{cases}$$

$$p' = \frac{p}{p-1} \qquad 1' = \infty, \quad \infty' = 1$$

Der Duale $(L^p)^*$ ist isometrisch zu $L^{p'}$ $1 \le p < \infty$

$$\|f\|_p = \sup_{\|g\|_{p'} = 1} \left| \int_X f \cdot g \, d\mu(x) \right| \qquad 1 \le p \le \infty$$

1.1.1 Verteilungsfunktion

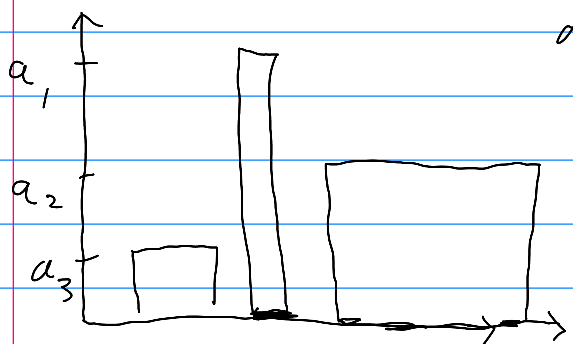
f messbar; $\quad d_f : [0, \infty) \to [0, \infty)$

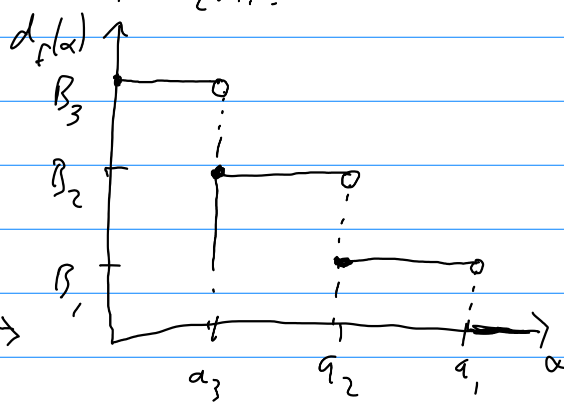
$$\alpha \mapsto d_f(\alpha) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\})$$

Beispiel 1.1.2 $\quad f(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \mathbb{1}_{E_k}(x) \qquad E_k \cap E_\ell = \emptyset,\ k \neq \ell$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad E_k \subset \mathbb{R}_+$

$a_1 > a_2 > \dots$





$d_f(\alpha) = \mu(\{x : |f(x)| > \alpha\})$

$\alpha > a_1 : \quad d_f(\alpha) = 0$

$a_1 > \alpha > a_2 : \quad d_f(\alpha) = |E_1| \equiv B_1$

$a_2 > \alpha > a_3 \quad d_f(\alpha) = |E_1| + |E_2| \equiv B_2$

$a_3 > \alpha \quad \dots$

Behauptung 1.1.3 $\quad f, g$ messbar

1) $|g| < |f| \overset{\mu\text{-f.a.}}{\Rightarrow} d_g \leq d_f$

2) $d_{cf}(\alpha) = d_f(\alpha/|c|) \qquad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

3) $d_{f+g}(\alpha + \beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta)$

4) $d_{f \cdot g}(\alpha \cdot \beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta)$

5) d_f rechtsseitig stetig

6) $|f_n| \nearrow |f| \Rightarrow d_{f_n} \nearrow d_f$.

Beweis Hausaufgabe

Beh 1.1.4 (layer-cake) $f \in L^p(X,\mu)$ $0<p<\infty$

$$\int |f|^p d\mu = \|f\|_p^p = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} d_f(\alpha)\, d\alpha$$

$\varphi \in C^1(0,\infty)$, $\varphi(0)=0$ $\int \varphi(|f|)\, d\mu(x) = \int_0^\infty \varphi'(\alpha) d_f(\alpha)$

Beweis HA.

$|x|^{-\alpha}$, α

Definition 1.1.5 (Schwache L^p-Räume)

$0<p<\infty$, $\|f\|_{p,\infty} = \inf\{C : d_f(\alpha) \leq \frac{C^p}{\alpha^p}, \alpha>0\}$

$= \sup\{\gamma\, d_f(\gamma)^{1/p} : \gamma>0\}$

$\| |x|^{-d/p} \|_{L^{p,\infty}(dx)} < \infty$. $d_{|x|^{-d/p}}(\alpha) = \mu_L(\{x : |x|^{-d/p} > \alpha\})$

$= \int dx\ \mathbb{1}_{|x|<\alpha^{-p/d}} = \alpha^{-p} |B_0(1)|$

$(x \mapsto x \cdot \alpha^{-p/d})$

$\|\cdot\|$ hat folgende Eigenschafte

$\|k \cdot f\|_{p,\infty} = |k|\ \|f\|_{p,\infty}$, $k \in \mathbb{C}$

$\|f+g\|_{L^{p,\infty}} \leq \max\{2, 2^{1/p}\} (\|f\|_{p,\infty} + \|g\|_{p,\infty})$

(Beh 1.1.3 (3))

$\left(d_{f+g}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right) \leq d_f\left(\frac{\alpha}{2}\right) + d_g(\alpha/2) \right)$

$\|f\|_{p,\infty} = 0 \Rightarrow f=0$ μ-f.ü.

⇒ $L^{p,\infty}$ ist quasinormiert (sogar Quasi-Banach, später)

Behauptung 1.1.6 ($L^p \subseteq L^{p,\infty}$)

$0<p<\infty$, $f\in L^p(X,\mu)$. $\|f\|_{p,\infty} \le \|f\|_p$.

Bew $d_f(\alpha) = \int d\mu \, \mathbb{1}_{\{x:|f|>\alpha\}} \frac{|f|^p}{|f|^p}$

$$\le \alpha^{-p} \int_{\{x:|f(x)|>\alpha\}} d\mu(x)\, |f(x)|^p \le \alpha^{-p} \|f\|_p$$

($\alpha>0$) ☐

Chintchins Ungleichung

Motivation Littlewood-Paley-Ungleichungen.

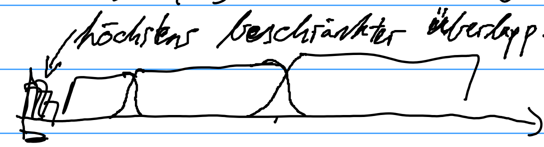
$\mathcal{L}$ linearer, dicht-definiert, s.a. Operator in $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$. ($\mathcal{L}\geq 0$)

$\|F(\mathcal{L}) f\|_p$; $\|\mathcal{L}^{s/2} f\|_p$, $s>0$

$\mathcal{L} = \int \lambda \, dE_{\mathcal{L}}(\lambda)$

$N\in 2^{\mathbb{Z}}$

$P_N(\mathcal{L}) = \Psi\left(\frac{\mathcal{L}}{N}\right)$



$[2^{-n}, 2^{1-n}]$

$\Psi = \phi\left(\frac{\mathcal{L}}{N}\right) - \phi\left(\frac{\mathcal{L}}{2N}\right)$, $\phi \in C_c^\infty$ bumps

$$\|\mathcal{L}^{s/2} f\|_p \sim \Big\| \Big(\sum_{N\in 2^{\mathbb{Z}}} |N^{s/2} P_N(\mathcal{L}) f|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_p .$$

(für $p=2$ folgt das sofort aus dem Spektralsatz; für scharfe cut-offs ist das dann der Satz von Pythagoras)

Chintchin-Ungleichung $\quad 0<p<\infty, \quad \{a_k\}_{k=1}^{N\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$

$\epsilon_k \in \{\pm 1\}$ i.i.d verteilt

$((\epsilon_k)_k$ ist Rademacher)

$$\left(\mathbb{E}\left(\left|\sum_{k=1}^N \epsilon_k a_k\right|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \sim_p \left(\sum_{k=1}^N |a_k|^2\right)^{1/2} \quad (\Rightarrow a_k = f_k(x))$$

gleichmäßig in N!! und a_k $\quad \mathbb{E}\|\sum \epsilon_k f_k\|_p^p \sim \|(\sum |f_k|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p^p$

hier nur für $p \geq 1$. [$p<1 \to$ Haagerup (1981))

Notation $a, b > 0$. $a \lesssim b \Leftrightarrow \exists c>0$ s.d. $a \leq cb$

"$\gtrsim$"

$\sim \Leftrightarrow a \leq cb \leq c'a$

Beweis $p=2$. OBdA $\sum |a_k|^2 = 1$.

$$\mathbb{E}\left|\sum \epsilon_k a_k\right|^2 = \mathbb{E}\sum_{k,k'} \epsilon_k \epsilon_{k'} a_k a_{k'}$$

$$\mathbb{E}(\epsilon_k \epsilon_{k'}) = \mathbb{E}(\epsilon_k)\mathbb{E}(\epsilon_{k'}) = 0_k \quad k \neq k'$$

$$= \sum |a_k|^2 = 1 \qquad p=2 \to \text{Gleichheit!}$$

Behauptung, es genügt "$\lesssim$" zu zeigen. $\quad X = \sum \epsilon_k a_k$

(z.z. "$\gtrsim$"

$$\mathbb{E}(X \cdot X) \leq (\mathbb{E}(|X|^p))^{1/p} \underbrace{(\mathbb{E}(|X|^{p'}))^{1/p'}}_{\lesssim 1 \text{ (per Voraussetzung)}}$$

"$\gtrsim$"

Wir zeigen jetzt $\mathbb{E}|\sum \epsilon_k a_k|^p \lesssim 1$ $\quad$ claim: $\lesssim e^{-\lambda^{2/p}/2}$

Mit layer-cake, $\mathbb{E}|\sum \epsilon_k a_k|^p = \int_0^\infty d\lambda \; \mathbb{P}(|\sum \epsilon_k a_k|^p > \lambda)$

$\Updownarrow$

$$\mathbb{P}(\underbrace{|\sum \epsilon_k a_k|^2}_{=|\sum \epsilon_k \Re(a_k)|^2 + |\sum \epsilon_k \Im(a_k)|^2} > \lambda)$$

$\Re$ Realteil

$\Im$ Imaginärteil

$$\leq \mathbb{P}(|\sum \epsilon_k \Re(a_k)|^2 > \tfrac{\lambda}{2}) + \mathbb{P}(|\sum \epsilon_k \Im(a_k)|^2 > \lambda/2)$$

Behauptung: $\mathbb{P}(|\sum \epsilon_n a_n| > \lambda) \lesssim e^{-\lambda^2/2}$ (*)

(hier $a_n \in \mathbb{R}$)

$\Rightarrow \mathbb{P}(|\sum \epsilon_n a_n|^p > \lambda) \lesssim e^{-\lambda^{2/p}/2}$

$\leq \underline{\mathbb{P}(\sum \epsilon_n a_n > \lambda)} + \mathbb{P}(\sum \epsilon_n a_n < -\lambda)$

$$(*) \Leftarrow \underline{\mathbb{P}\left(e^{\lambda \sum \epsilon_n a_n} > e^{\lambda^2}\right)} \lesssim e^{-\lambda^2/2}$$

$$\Uparrow \quad \alpha = e^{+\lambda^2}$$

$$\mathbb{P}\left(e^{\lambda \sum \epsilon_n a_n} > \alpha\right) \lesssim \frac{1}{\alpha} e^{\lambda^2/2}$$

$\Uparrow$ Chebychev

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda \sum \epsilon_n a_n}\right) \lesssim e^{\lambda^2/2} \;//$$

$$\|$$

$e^x = \sum_{\ell=0} \frac{1}{\ell!} x^\ell$

$$\mathbb{E}\left(\prod_{n=1}^N e^{\lambda \epsilon_n a_n}\right) \overset{\text{Unabhängigkeit}}{\underset{\epsilon_n}{=}} \prod \mathbb{E}\left(e^{\lambda \epsilon_n a_n}\right)$$

$\mathbb{E}(\epsilon_n^\ell) = 0$ wenn ℓ ug.

$\cosh x \leq e^{x^2/2}$

$$= \prod \cosh(\lambda \cdot a_n)$$

$$\leq \prod_{n=1}^N \exp((\lambda \cdot a_n)^2/2)$$

$$\overset{\sum |a_n|^2 = 1}{=} e^{\lambda^2/2} \;// \qquad \boxtimes$$

Hausaufgabe: Formuliere einen lesbaren Beweis.

Grafakos – Classical Fourier analysis ~~Ch~~ Kap. 1
(online verfügbar)

T. Tao – Notes on Fourier analysis (lecture 1)

1.1.3 Verallgemeinerte Hölderungleichung

23.4.2020

$L^r \subseteq L^p \cap L^q \qquad p < r < q$

Thm 1.1.14 Sei $0 < p < r < q \leq \infty$, f μ-messbar
$\Rightarrow f \in L^r$ wenn $f \in L^{p,\infty} \cap L^{q,\infty}$

$$\|f\|_r \leq \left(\frac{r}{r-p} + \frac{r}{q-r}\right)^{1/r} \|f\|_{p,\infty}^{(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})/(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \cdot \|f\|_{q,\infty}^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})/(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}$$

$d_f(\alpha) = \mu(\{x : |f| > \alpha\})$

Bew
$$\|f\|_r^r = r \int_0^\infty d\alpha \; \alpha^{r-1} d_f(\alpha)$$
$$\leq r \int_0^\infty d\alpha \; \alpha^{r-1} \min\left\{ \frac{\|f\|_{p,\infty}^p}{\alpha^p}, \frac{\|f\|_{q,\infty}^q}{\alpha^q} \right\}$$
$$= \dots$$

$\left(q = \infty \qquad d_f(\alpha) \leq \alpha^{-p} \|f\|_{p,\infty}^p \right)$ $\Box$

Wir schließen mit Faltungsungleichungen

$\| f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \qquad \frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \qquad 1 \leq p, q, r \leq \infty$

$\| f * g\|_r \lesssim_{p,q} \|f\|_p \|g\|_{q,\infty}$ (verallgemeinerte Young-Ugl.)

$\rho \dots$ Ladungsverteilung $\qquad 1 < p, q, r < \infty$

$\| \rho * \frac{1}{|\cdot|^\alpha}\|_r$ (Hardy-Littlewood-Sobolev)

$\| f * g\|_{r,\infty} \lesssim_{p,q} \|f\|_{p,\infty} \|g\|_{q,\infty} \qquad 1 < p, q, r < \infty.$
(Schwache Young-Ungleichung)

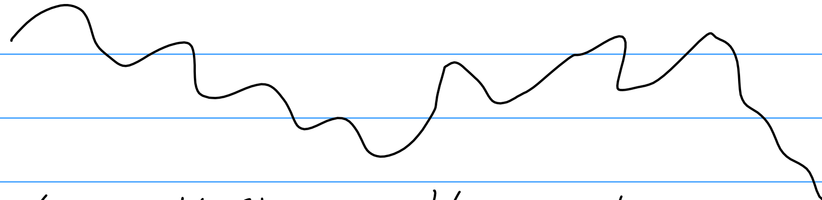
[Grafakos S. 21 Lieb-Loss
Reed-Simon 2 (S. 32)

1.2. Lorentz-Räume

sh auch Benguria
Isoperimetric inequalities for eigenvalues of the Laplacian

f messbar auf (X, μ); Wir betrachten "Umordnungen"

Sphärisch symmetrisch abfallende Umordnung



$\langle f, Hf \rangle \qquad H = -\Delta - V.$

$\langle f, -\Delta f \rangle \geq \langle f^*, -\Delta f^* \rangle$

sowohl für sph. sym. abfallende Umordnung als auch nicht-sym. abfallende Umordnung

$\langle f, Vf \rangle = \int V(x)|f|^2 \leq \int V^*(x) (|f|^2)^* = \int V^* (f^*)^2$

$A \subseteq \mathbb{R}^d$, $|A| < \infty \qquad A^* = \{x : |x| < r\}$
und $|A^*| = |A|$

$\mathbb{1}_A^* := \mathbb{1}_{A^*}. \qquad \underbrace{f^*(x)}_{\mathbb{R}^d} = \int_0^\infty dt \; \mathbb{1}^*_{|f|>t}$

(im gleichen spirit wie $|f| = \int_0^\infty dt \; \mathbb{1}_{|f|>t}$)

1.2.1 Nicht-steigende / abfallende Umordnung

Definition 1.2.1 f messbar (komplexwertig)

$$f^* : [0, \infty) \to [0, \infty]$$
$$f^*(t) = \inf\{s > 0 : d_f(s) \leq t\}$$

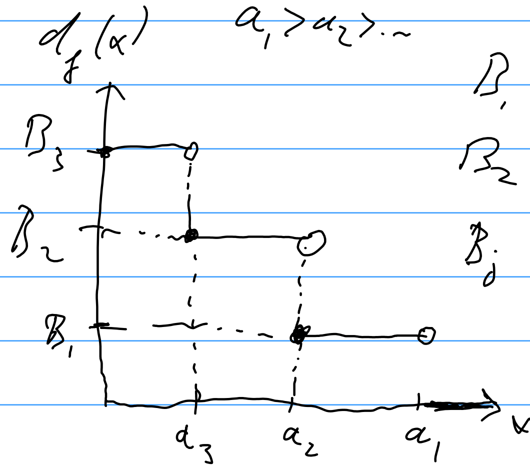
$d_f(s) = \mu(\{|f| > s\})$ nicht-steigend

Klar: • $f^*(t)$ nicht-steigend

• $\operatorname{supp} f^* \subseteq [0, \mu(X)]$

Bsp 1.2.2 $\quad f(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \mathbb{1}_{E_k} \qquad E_k \cap E_\ell = \emptyset,\ k \neq \ell \quad (a_k \in \mathbb{R}_+)$

$a_1 > a_2 > \dots$



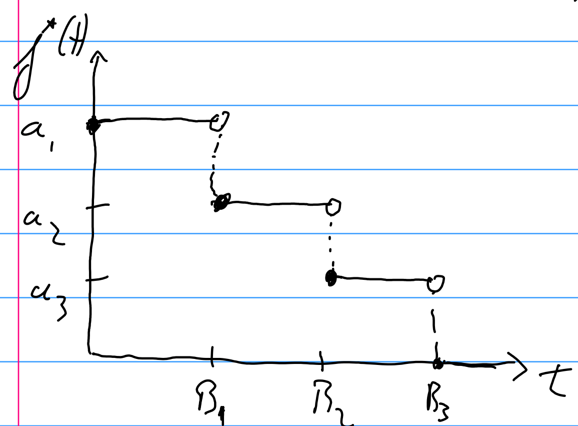
$B_1 = |E_1|$

$B_2 = |E_1| + |E_2|$

$B_j = \sum_{k=1}^{j} |E_k|$

$B_0 = 0$

$a_{N+1} = 0$



$B_0 \leq t \leq B_1$: das kleinste $s > 0$ $d_f(s) \leq t$ ist a_1

$B_1 \leq t \leq B_2$ ... a_2

$$d_f(\alpha) = \sum_{j=0}^{N} B_j \mathbb{1}_{[a_{j+1}, a_j)}(\alpha)$$

$$\Rightarrow f^*(t) = \sum_{j=1}^{N} a_j \mathbb{1}_{[B_{j-1}, B_j]}(t)$$

Bsp 1.2.3 $\quad f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{1 + |x|^p} \qquad 0 < p < \infty$$

$B_x(r) := \{y \in \mathbb{R}^d : |x-y| < r\}$

$$d_f(\alpha) = \begin{cases} |B_0(1)| \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^{d/p} & \alpha < 1 \\ 0 & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

$$f^*(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{|B_0(1)|}\right)^{p/d}} \qquad \text{(Hausaufgabe)}$$

Bsp 1.2.4 $g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$
$x \mapsto g(x) = 1 - e^{-|x|^2}$

$$d_f(\alpha) = \begin{cases} 0 & \alpha \geq 1 \\ \infty & \alpha < 1 \end{cases} \Rightarrow f^*(t) = 1 \quad t \geq 0$$

$f^*(t) = \inf\{s > 0 : d_f(s) \leq t\}$

Intergpretation f^* konserviert zwar quantitative Information aber qualitative Information ist verloren.

Beh 1.2.5 $f, g, (f_n)$ μ-messbar, $k \in \mathbb{C}$
$0 < t, s, t_1, t_2 < \infty$.

(0) f^* ist rechtsseitig stetig & abfallend

(1) $f^*(d_f(\alpha)) \leq \alpha$, $\alpha > 0$

(2) $d_f(f^*(t)) \leq t$

(3) $f^*(t) > s \Leftrightarrow t < d_f(s) \Leftrightarrow \{t \geq 0 : f^*(t) > s\} = [0, d_f(s))$

(4) $|g| \leq |f|$ μ-a.e. $\Rightarrow g^* \leq f^*$ und $|f|^* = f^*$

(5) $(kf)^* = |k| f^*$

(6) $(f+g)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2)$

(7) $(fg)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) \cdot g^*(t_2)$

(8) $|f| \leq \varliminf_{n \to \infty} |f_n|$ μ-a.e. $\Rightarrow f^* \leq \varliminf f_n^*$

(9) $|f_n| \nearrow |f|$ μ-a.e. $\Rightarrow f_n^* \nearrow f^*$

(10) $t \le \mu(\{x \in X : |f(x)| > f^*(t)\})$, falls

$$\mu(\{|f| > f^*(t) - \varepsilon\}) < \infty \text{ für ein } \varepsilon > 0$$

(11) $d_f = d_{f^*}$

(12) $(|f|^p)^* = (f^*)^p \quad (0 < p < \infty)$

(13) $\int |f|^p \, d\mu = \int_0^\infty (f^*)^p \, dt$

(14) $\|f\|_{L^\infty} = f^*(0)$

(15) $\sup_{t>0} t^q f^*(t) = \sup_{\alpha > 0} \alpha \, d_f(\alpha)^q \quad 0 < q < \infty$

Bem HA (fett angestrichene Eigenschaften)

$\|f\|_{p,\infty} = \sup_{\alpha>0} \alpha \, d_f(\alpha)^{1/p}$.

1.2.2 Lorentzräume

$|x|^{-\alpha} \notin L^p$ (aber beinahe (bis auf logs))

Def 1.2.6 f messbar, $0 < p, q \le \infty$

$$\|f\|_{L^{p,q}(X)} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} = \|t^{\frac{1}{p}} f^*\|_{L^q(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t})} & \text{für } q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) & \text{für } q = \infty \end{cases}$$

(mit Bem 1.2.5 (15) liefert dies das ursprüngliche $\|f\|_{p,\infty}$)

Einfache Eigenschaften

$$\| f(\lambda \cdot) \|_{p,q} = \lambda^{-d/p} \|f\|_{p,q}$$

$$\| |g|^r \|_{p,q} = \| g \|^r_{p \cdot r, q \cdot r}$$

$$L^{p,p} = L^p \quad \text{(isometrisch)} \quad \text{(Beh 1.2.5 (13))}$$

$\left[\cancel{L^p \leq L^q} \quad \ell^p \leq \ell^q \quad p < q \right]$

Beh 1.2.7 (Alternative Charakterisierung von $L^{p,q}$ I)

$$0 < p < \infty \quad 0 < q \leq \infty \quad \|f\|^q_{p,q} = p \cdot \int_0^\infty \left[s\, d_f(s)^{\frac{1}{p}} \right]^q \frac{ds}{s}$$

Beweis $q = \infty$ (Beh 1.2.5 (15))

$q < \infty$. zunächst $f(x) = \sum_{j=1}^N a_j \mathbb{1}_{E_j}(x)$

$$d_f(s) = \sum_{j=1}^N B_j \mathbb{1}_{[a_{j+1}, a_j)}(s) \qquad B_0 = a_{N+1} = 0$$

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^N a_j \mathbb{1}_{[B_{j-1}, B_j)}(t)$$

$$\|f\|_{p,q} = \left(\frac{p}{q}\right)^{1/q} \left[a_1^q B_1^{q/p} + a_2^q (B_2^{q/p} - B_1^{q/p}) + \ldots + a_N^q (B_N^{q/p} - B_{N-1}^{q/p}) \right]^{\frac{1}{q}}$$

$= \ldots$ stimmt mit Behauptung überein.

Für allgemeine f finden wir eine Folge nicht-negativer einfacher Funktionen, sodass

$f_n \nearrow |f|$; wg Beh 1.2.5 (9)
1.1.3 (6)

gilt auch $d_{f_n} \nearrow d_f \quad f_n^* \nearrow f^*$ ☒

Beh 1.2.8 $\quad 0<p\le\infty, \quad 0<q<r\le\infty \quad L^{p,q}\subseteq L^{p,r}$

$(L^p \subseteq L^{p,\infty})$

und insb. $\|f\|_{p,r} \lesssim_{p,q,r} \|f\|_{p,q}$ $\qquad \Big[\ \|f\|_{p,r} = \| t^{1/p} f^*\|_{L^r(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t})}$

Bew $\quad p=\infty$ trivial

$p<\infty$.

$$t^{1/p} f^*(t) = \left(\frac{q}{p}\int_0^t \Big(s^{1/p} \underbrace{f^*(t)}_{\le f^*(s)}\Big)^q \frac{ds}{s}\right)^{1/q}$$

$$\le \dots = \left(\frac{q}{p}\right)^{1/q} \|f\|_{p,q}$$

$\Rightarrow$ Beh. wenn $r=\infty$ durch $\sup_{t>0}$

$$\text{LHS} = \|f\|_{p,\infty}$$

$r<\infty$: $$\|f\|_{p,r} = \left\{\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^*(t)\right)^{r-q+q} \frac{dt}{t}\right\}^{1/r}$$

$$\le \underbrace{\|f\|_{p,\infty}^{(r-q)/r}}_{\lesssim_{p,q,r} \|f\|_{p,q}^{(r-q)/r}} \|f\|_{L^{p,q}}^{q/r} \qquad \square$$

Referenzen fuer Lorentzr\"aume: Bennett-Sharpley (1988) (S. 216),
Triebel (2001) (Abschnitt 11.6)
Referenzen fuer Interpolation: Ebenfalls Bennett-Sharpley (Kapitel 4),
Bergh-L\"ofstr\"om (1976)

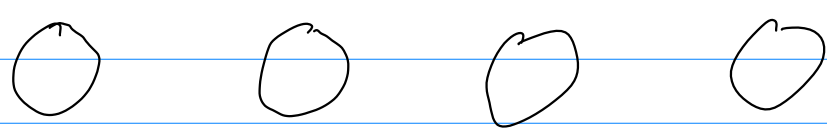
29.04.2020

$$\mathbb{E}\Big\|\sum \epsilon_n f_n\Big\|_p^p \sim \Big\|\Big(\sum |f_n|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p^p$$

$$\|\hat f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \quad p\in[1,2]$$

$$\|\hat f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \lesssim_{p,q,d} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \Rightarrow p\le 2$$

$\mathbb{R}^d$



$$\sum \epsilon_n e^{2\pi i x_j \cdot \xi} \hat{f}_n(\xi)$$

$L^{p,q}$

$$\|f\|_{p,q} = \| t^{1/p} f^*(t) \|_{L^q(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t})}$$

Frage: $L^{p,q}$ Banach? (für welche p,q?)

Im Allgemeinen nicht! Bsp $f(t) = t$ auf $[0,1]$
$g(t) = 1-t$

Ausrechnen von $\|f+g\|_{p,q}$ & $\|f\|_{p,q} + \|g\|_{p,q}$ und Annehmen der Dreiecksungleichung in $L^{p,q}$ würde auf die Ungleichung

$$\frac{p}{q} \leq 2^q \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(q/p)}{\Gamma(q+1+q/p)}$$

führen, die i.A. nicht wahr ist.

Dennoch bekommen wir eine quasi-Δ-Ugl, denn

$$(f+g)^*(t) \leq f^*\left(\tfrac{t}{2}\right) + g^*(t/2)$$

$\|t^{\frac{1}{p}}(f+g)^*\|_{L^q(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t})}$
$\leq 2^{\frac{1}{p}} \| t^{1/p} f^* + t^{1/p} g^* \|_{L^q(\frac{dt}{t})}$
$\uparrow$
$t \mapsto 2t$ $\quad \leq \ldots$ ((quasi)-Δ-Ugl in L^q)

$$\Rightarrow \|f+g\|_{p,q} \leq 2^{1/p} \cdot \max\{1, 2^{\frac{1-q}{q}}\} \left(\|f\|_{p,q} + \|g\|_{p,q}\right)$$

von quasi-Δ-Ugl. in L^q for $0<q<1$

$\Rightarrow$ Quasi-Dreiecksungleichung

$$\|f\|_{p,q} = 0 \Rightarrow f = 0 \quad \mu\text{-f.ü.} \quad \Rightarrow L^{p,q} \text{ quasi-normiert}$$

Thm 1.2.9 Seien $0 < p, q \leq \infty$. Dann sind $L^{p,q}$ Quasi-Banach.

Falls $p, q > 1$, dann sind $L^{p,q}$ normierbar, also insbesondere Banach.

Theorem 1.2.10 Echt einfache Funktionen ($\sum_{k=1}^{N} a_k \mathbb{1}_{E_k}$) sind dicht in $L^{p,q}$ für $0<p,q<\infty$

$t^{-\frac{1}{p}} \mathbb{1}_{t>0} \in L^{p,\infty}$

lässt sich nicht durch echt einfache Fkte approximieren

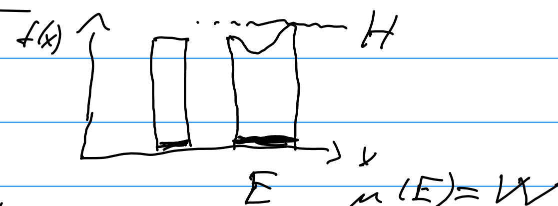
Einfache Funktionen sind dicht in $L^{p,\infty}$
($\sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbb{1}_{E_k}$)

Theorem 1.2.11 $0<p,q<\infty$ Monotone Konvergenz: $|f_n| \nearrow f$ μ-f.ü.
$\Rightarrow \|f\|_{p,q} = \lim \|f_n\|_{p,q}$

Fatou: und $\|\lim f_n\|_{p,q} \leq \underline{\lim}_n \|f_n\|_{p,q}$

Motivation: Marcinkiewicz Interpolation
T linear: $L^{p_0,1} \to L^{q_0,\infty}$, $L^{p_1,1} \to L^{q_1,\infty}$ $\Rightarrow T: L^{p,s} \to L^{q,s}$
$s \in (0,\infty)$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$

Definition 1.2.12



(1) Eine sub-Treppenfunktion der Höhe H und der Breite W ist eine Funktion die auf E getragen ist, wobei $\mu(E) \leq W$ und $|f| \leq H$ erfüllt.

Zusammengefasst: $\boxed{|f| \leq H \cdot \mathbb{1}_E}$

(2) Eine Quasi-Treppenfkt der Höhe H und Breite W ist eine Fkt f, die auf $E \subseteq X$ getragen ist und $|f(x)| \sim H$ & $\mu(E) \sim W$ erfüllt.

Zusammengefasst: $\boxed{|f| \sim H \mathbb{1}_E}$

Bemerkungen 1.2.13

(1) Aus der Binärdarstellung von $[0,1]$ sehen wir, dass jede nicht-negative sub-Treppenfkt der Höhe H und Breite W immer durch $\sum_{k\geq 2} 2^{-k} f_k$ dargestellt werden kann, wobei die f_k Indikatorfkten der Höhe 1 und Breite höchstens W.

$(f^*(t) = \mathbb{1}_{[0,|E|)}(t))$ $\quad \| \mathbb{1}_E \|_{p,q} = \text{const } |E|^{1/p}$

$$\| \text{sub-Treppefkt} \|_{p,q} = O(H \cdot W^{1/p})$$

$$\| \text{quasi-Treppefkt} \|_{p,q} \sim H \cdot W^{1/p}$$

Der Punkt ist Folgender: Jede $L^{p,q}$-Fkt kann durch eine ℓ^q-Summe von sub- bzw. quasi-Treppenfkten dargestellt werden.

Thm 1.2.14 (Charakterisierung von $L^{p,q}$ II; Tao (Lectures on Fourier Analysis I) Thm 6.6)

Sei $0 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < A < \infty$, f messbar. Dann sind die folgenden Aussagen (bis auf die involvierten impliziten Konstanten) zueinander äquivalent

(i) $\|f\|_{p,q} \lesssim_{p,q} A$

(ii) Es gibt eine Zerlegung $f = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m$, wobei f_m quasi-Treppenfkte der Höhe 2^m und vertikale dyadische Zerlegung $\updownarrow$

Breite $W_m \in [0,\infty)$ sind. Die f_m haben (paarweise) disjunkte Träger und $\| 2^m W_m^{1/p} \|_{\ell^q_m} \lesssim_{p,q} A$.

(Summation bzgl m)

(iii) Es gilt eine pktweise Schranke $|f| \le \sum_{m\in\mathbb{Z}} 2^m \mathbb{1}_{E_m}$ mit $\| 2^m \mu(E_m)^{\frac{1}{p}} \|_{\ell^q} \lesssim A$.

horizontale dyadische Zerlegung $\longleftrightarrow$

(iv) Es gilt eine Zerlegung $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n$, wobei f_n sub-Treppenfktn der Höhe H_n und Breite 2^n die disjunkten Träger haben. Darüberhinaus sind die H_n abfallend angeordnet, sodass

$$H_{n+1} \le |f_n| \le H_n \text{ auf } \operatorname{supp} f_n \text{ und}$$

$$\| H_n 2^{n/p} \|_{\ell^q_n} \lesssim A. \quad (*)$$

(v) Es gilt eine pktweise Schranke $|f| \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} H \mathbb{1}_{E_n}$ mit $\mu(E_n) \lesssim_{p,q} 2^n$ und es gilt $(*)$

Bew Sh. Thm 6.6 in Tao 1

(Nachtrag 30.4.20) ! Bemerkung: 1) Die Zahlen 2^m bzw. 2^n können durch beliebige γ_m mit $\inf_n \frac{\gamma_{m+1}}{\gamma_m} > 1$ und $\sup_n \frac{\gamma_{m+1}}{\gamma_m} < \infty$ ersetzt werden ("exp. Wachstum")
2) Für (ii), (iii) $\Rightarrow$ (i) genügt $\lim_{m\to\infty} \frac{\gamma_{m+1}}{\gamma_m} > 1$, d.h. $(\gamma_m)_m$ ist lakunär ("Lücken bildend")

Bemerkung 1.2.15 (1) Für einzelne quasi-Treppenfktn f der Höhe H, Breite W gilt $\|f\|_{p,q} \sim H W^{1/p}$ für eine Folge solcher f_n mit hinreichend variabler Höhen oder Breiten (z.B. $H_n \sim 2^n$) sehen wir

$$\| \sum f_n \|_{p,q} \sim \| H_n W_n^{1/p} \|_{\ell^q_n}$$

$\sqcap$

$|x|^{-\alpha}$
$\notin$
L^p

(2) $0<p<1$ $\quad \|\sum f_n\|_p \leq N^{\frac{1}{p}-1} \sum \|f_n\|_p$

$\Rightarrow$ Ändern in p gibt polynomielle Änderungen der $L^{p,q}$-Norm.

Angenommen $A \leq |f(x)| \leq A \cdot N$ für ein $A>0$ und N ist der Quotient zwischen der größten und kleinsten Höhe von f
$\Rightarrow$ wir sehen, dass die $\|\cdot\|_{p,q_1}$, $\|\cdot\|_{p,q_2}$ sich nur durch multiplikative Potenzen von $\underline{\log N}$ voneinander unterscheiden.

Verallg. von $\left\{ \begin{array}{l} \|f\cdot g\|_p \leq \|f\|_{p_1} \|g\|_{p_2} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \\ \|f\|_p = \sup_{\|g\|_{p'}} \left| \int fg \, d\mu \right| \end{array} \right\}$ auf $L^{p,q}$

Thm 1.2.17 (Hölder für $L^{p,q}$) (von O'Neil)

Seien $0<p, p_1, p_2<\infty$, $\quad 0<q, q_1, q_2 \leq \infty$ mit
$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$$

$$\Rightarrow \|f\cdot g\|_{p,q} \lesssim_{p,q,p_1,q_1,p_2,q_2} \|f\|_{p_1,q_1} \|g\|_{p_2,q_2}.$$

$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad \frac{1}{r}+1 = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}$

Bemerkung Analog für Young (O'Neil) $\quad 1<p,q,r<\infty$, $\quad 0<s_1, s_2<\infty$
$$\|f * g\|_{r,s} \leq \|f\|_{p,s_1} \|g\|_{q,s_2} \quad \frac{1}{s} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2}$$

Beweis (Thm 1.2.17) OBdA $\|f\|_{p_1 q_1} = \|g\|_{p_2 q_2} = 1$.

Wg Th 1.2.14$^{(v)}$ ist $|f| \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} H_n \mathbb{1}_{E_n}$ $\quad \mu(E_n) \le 2^n$

$|g| \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} H'_n \mathbb{1}_{E'_n}$ $\quad \mu(E'_n) \le 2^n$

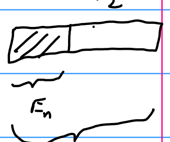
und $\|H_n 2^{n/p_1}\|_{\ell^{q_1}_n}, \|H'_n 2^{n/p_2}\|_{\ell^{q_2}_n} \lesssim 1$

$$\Rightarrow |f\cdot g| \le \sum_{n,k} H_n H'_{k+n} \mathbb{1}_{E_n \cap E'_{n+k}}$$

Wg der quasi-Δ-Ugl und Monotonie genügt es zu zeigen, dass $\|\sum_{k\ge 0} \sum_n H_n H'_{n+k} \mathbb{1}_{E_n \cap E'_{n+k}}\|_{p,q}$

$+ \|\sum_{k<0} \ldots\ldots \|_{p,q} \lesssim 1$

Überlapp hat höchstens Maß 2^n



Im Folgenden betrachten wir nur noch $k \ge 0$ (was wg Symmetrie genügt.) und fixieren k.

Angenommen, wir könnten zeigen, dass (für festes k!)

(*) $\|\sum_n H_n H'_{n+k} \mathbb{1}_{E_n\cap E'_{n+k}}\|_{p,q} \lesssim 2^{-k/p_2}$. Dann wären wir – mit Hilfe des folgenden Lemmas – fertig.

Lemma Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein quasinormierter Raum mit $\|f+g\| \le c_1(\|f\|+\|g\|)$ mit $c_1 \ge 1$. Angen. wir haben $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X$, $\|f_k\| \lesssim A\cdot c_2^{-k}$ mit $c_2 > 1$.

Dann $\|\sum_{k=1}^{N} f_k\| \leq c_3 \cdot A$, wobei c_3 lediglich von c_1 und c_2 abhängt (und weder von N, noch A!)

Bew HA

Wir zeigen jetzt den obigen claim $(*)$

Beobachte, $\mu(E_n \cap E'_{n+k}) \leq 2^n$. Wir verwenden jetzt nochmals Thm 1.2.14 (v)$\Rightarrow$(i)

Hölder in ℓ^q mit $2^{n/p} = 2^{n/p_1} \cdot 2^{n/p_2}$

$$\|\sum H_n H'_{n+k} \mathbb{1}_{E_n \cap E'_{n+k}}\|_{p,q} \lesssim \|H_n H'_{n+k} 2^{n/p}\|_{\ell^q}$$

$$\leq \underbrace{\|H_n 2^{n/p_1}\|_{\ell^{q_1}_n}}_{\overset{\text{Annahme}}{\lesssim} 1} \cdot \underbrace{\|H'_{n+k} \cdot 2^{n/p_2}\|_{\ell^{q_2}_n}}_{\underset{n \mapsto n-k}{=} 2^{-k/p_2} \underbrace{\|H'_n 2^{n/p_2}\|_{\ell^{q_2}_n}}_{\lesssim 1}}$$

direkter Beweis in Thm 4.7 in Bennett-Sharpley

30.4.2020

Thm 1.2.18 (Duale Charakterisierung von $L^{p,q}$)

Sei $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. Dann gilt für $f \in L^{p,q}$

$$\|f\|_{p,q} \sim_{p,q} \sup\left\{ \left|\int_X f g \, d\mu\right| : \|g\|_{p',q'} \leq 1 \right\}$$

Genauer: für $q = \infty$: $\|f\|_{p,\infty} \sim \sup_{0 < \mu(E) < \infty} \left\{ \left|\int f \mathbb{1}_E \, d\mu\right| \cdot \frac{1}{\mu(E)^{1/p'}} \right\}$

Bewers "$\gtrsim_{p,q}$": $\left|\int fg\right| \leq \|f \cdot g\|_{L^{1,1}} \overset{\text{Hölder}}{\lesssim} \|f\|_{p,q} \|g\|_{p',q'}$

"$\lesssim_{p,q}$": OBdA $\|f\|_{p,q} = 1$, wir finden jetzt g mit $\|g\|_{p',q'} \leq 1$ mit $\left|\int f g \, d\mu\right| \gtrsim 1$

$\|f\|_{p,\infty} = \sup_{t>0} t\, d_f(t)^{\frac{1}{p}}$ $\quad q = \infty, \quad f \geq 0$

$d_f(t) = \mu(\{x : |f| > t\})$ $\quad$ Sei $E_\lambda = \{x : f > \lambda\}$ mit $\mu(E_\lambda) < \infty$

$$\lambda\, \mu(E_\lambda)^{1/p} = \frac{1}{\mu(E_\lambda)^{1/p'}} \cdot \lambda\, \mu(E_\lambda)$$

$$\leq \frac{1}{\mu(E_\lambda)^{1/p'}} \int_X f\, \mathbb{1}_{E_\lambda}\, d\mu$$

$$\leq \sup_{0 < \mu(E) < \infty} \frac{1}{\mu(E)^{1/p'}} \int f\, \mathbb{1}_E\, d\mu$$

Falls f nicht unbedingt nicht-negativ ist, zerlegen wir

$f = u_0^+ - u_0^- + i(u_1^+ - u_1^-)$

wobei $u_i^\pm \geq 0$

z.z. $\|u_i^\pm\|_{L^{p,\infty}} \leq \sup_{0 < \mu(E) < \infty} \frac{1}{\mu(E)^{1/p'}} \left| \int_X f\, \mathbb{1}_E\, d\mu \right|$

$$u_i^\pm = e^{i\theta} \cdot f\, \mathbb{1}_F \quad \text{für ein } F \subseteq X$$

Fallunterscheidung: $\mu(E \cap F) = \emptyset$ oder nicht.

falls $\mu(E \cap F) = \emptyset$: $\frac{1}{\mu(E)^{1/p'}} \int u_i^\pm\, \mathbb{1}_E\, d\mu = 0 \leq \sup_{0 < \mu(E') < \infty} \frac{1}{\mu(E')^{1/p'}} \left| \int f\, \mathbb{1}_{E'} \right|$

falls $\mu(E \cap F) \neq \emptyset$: $\frac{1}{\mu(E)^{1/p'}} \left| \int u_i^\pm\, \mathbb{1}_{E \cap F}\, d\mu \right|$

$$= \frac{1}{\mu(E)^{1/p'}} \left| \int f e^{i\theta}\, \mathbb{1}_{E \cap F}\, d\mu \right|$$

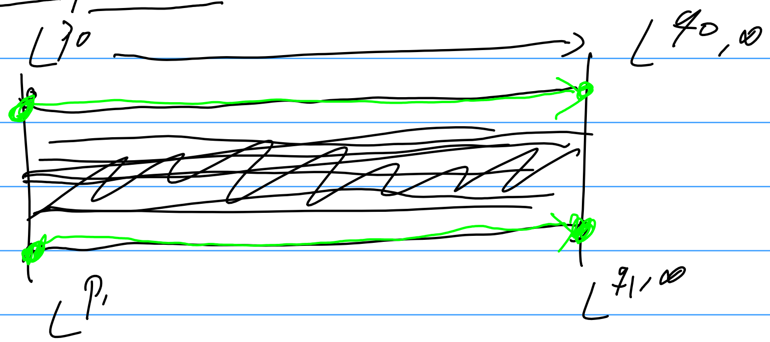
$$\leq \frac{1}{\mu(E \cap F)^{1/p'}} \left| \int f\, \mathbb{1}_{E \cap F}\, d\mu \right|$$

$$\le \sup_{0<\mu(E')<\infty} \frac{1}{\mu(E')^{1/p'}} \left| \int f \mathbb{1}_{E'} \, d\mu \right|$$

Für $q < \infty \to$ HA.

1.3 Interpolation

L^p



$(p_0 = 1, \; q_0 = \infty)$

$(p_1 = 2, \; q_1 = 2)$

(X, μ), (Y, ν) Maßräume

T : messbare Fkte aus $(X, \mu) \to$ messbare Fkte aus (Y, ν)

Definitionen T heißt linear, wenn
$$T(f+g) = Tf + Tg$$
$$T(\alpha f) = \alpha \, Tf, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$
$f, g \in$ Fkten aus (X, μ)

sublinear
$$|T(f+g)| \le |Tf| + |Tg|$$
$$|T(\alpha f)| = |\alpha| \, |Tf|$$

(quasilinear
$$|T(f+g)| \le K(|Tf| + |Tg|)$$
$$|T(\alpha f)| = |\alpha| \, |Tf| \;)$$

$0 < p, q \le \infty$

Ein sublinearer Operator T ist vom starken (p,q)-Typ wenn für alle $f \in L^p$ (oder aus einer dichten Teilmenge)
↳ (in diesem Fall gibt es eine eindeutige Fortsetzung)

$$\|Tf\|_{L^q(Y,\nu)} \lesssim_{p,q,T} \|f\|_{L^p(X,\mu)} .$$

Ein sublinearer Operator T ist vom <u>schwachen (p,q)-Typ</u> wenn $\|Tf\|_{L^{q,\infty}(Y,\nu)} \lesssim_{p,q,T} \|f\|_{L^p(X,\mu)}$.

Ein sublinearer Operator T ist vom <u>restringierten, schwachen (p,q)-Typ</u>, falls

$$\|Tf\|_{L^{q,\infty}} \lesssim_{p,q,T} H \cdot W^{1/p}$$ für alle Sub-Treppenfktn der Höhe H & Breite W

<u>Bemerkungen</u> restringierter-schwacher (p,q)-Typ ist äquivalent zu 1) $\|T\mathbb{1}_E\|_{L^{q,\infty}} \lesssim |E|^{1/p}$

(2) $\|Tf\|_{L^{q,\infty}} \lesssim \|f\|_{L^{p,1}}$).

Im Folgenden nehmen wir an, dass die Form

$$\langle |g|, |Tf| \rangle := \int_Y d\nu(y)\ |g(y)|\ |(Tf)(y)|$$

wohldefiniert ist für alle echt einfachen Fkt.en f, g mit Trägern endlichen Maßes. (Dies ist bspw. der Fall, wenn T vom restringiert schwache (p,q)-Typ ist)

<u>Hausaufgabe</u> $\|T\mathbb{1}_E\|_{L^{q,\infty}} \lesssim |E|^{1/p} \quad \forall E \subseteq X$

$$\Leftrightarrow |\langle \mathbb{1}_F, T\mathbb{1}_E \rangle| \lesssim |E|^{1/p} |F|^{1/q'}$$
$E \subseteq X$, $F \subseteq Y$

$\|f\|_p \sim \sup |\langle f, g \rangle|$

$\|Tf\|_{L^q} \lesssim \|f\|_p$ $\quad T: L^p \to L^q$

$\Leftrightarrow |\langle g, Tf \rangle| \lesssim \|g\|_{q'} \|f\|_p$

1.3.1 Reelle Interpolation

Marcinkiewicz 1 $\quad T: L^{p_i} \to L^{p_i,\infty} \quad i=0,1$

$\Rightarrow T: L^p \to L^p \quad \forall\, p \in (p_0, p_1)$

2 $\quad T$ ist vom restringiert schwachen Typ (p_i, q_i), wobei $0 < p_i, q_i < \infty$,

$p_0 \neq p_1$, $q_0 \neq q_1$

$\Rightarrow T: L^{p_\theta, r} \to L^{q_\theta, r} \quad 1 \le r \le \infty$

$q_\theta > 0$

$L^{p,q} \supseteq L^p$

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

3 $\quad T: L^{p_i} \to L^{q_i,\infty} \quad 1 \le p_i \le q_i \le \infty$

$q_0 \neq q_1, p_0 \neq p_1$

$T: L^{p_\theta} \to L^{q_\theta} \quad (r = q_\theta)$

Motivation

- Bsp für sublineare Operatoren sind Maximaloperatoren, $(T^* f)(x) = \sup_n |(T_n f)(x)|$

  z.B. $\sup_{R>0} \frac{1}{|B_x(R)|} \int_{B_x(R)} |f| = (Mf)(x)$ od. $\sup_{t>0} |e^{it\Delta} f|$

  Littlewood-Paley $\left(\sum_n |T_n f|^2\right)^{1/2}$

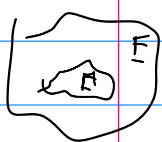
- Oft ist es nicht möglich starke (p,q)-Beschr. an den „Rändern" (z.B. $p,q=1$) zu zeigen, wie etwa bei Maximalfkt; der schwache L^p-Beschränktheit ist möglich zu zeigen;

- Anwendung von Marcinkiewicz 2
  $\to$ s. Bak-Seeger (2011)

(Erweitertes Tomas-Stein $\quad \| \hat{f}|_S \|_{L^2(S,d\sigma)} \lesssim_S \|f\|_{\underline{\underline{L^{p,2}}}(\mathbb{R}^d, dx)} \quad 1 \le p < \frac{2(d+1)}{d+3} < 2$

<u>Thm 1.3.1</u> Sei (X,μ) ein Maßraum, $0<p<\infty$, $f \in L^{p,\infty}(X)$. Dann sind äquivalent

(1) $\|f\|_{p,\infty} \lesssim A$



(2) Für jede $E \subset X$ mit $\mu(E) < \infty$ gibt es eine Teilmenge $E' \subseteq E$ sodass $\mu(E) \le 2\mu(E')$.

$$\left| \int f(x) \mathbb{1}_{E'}(x)\, d\mu(x) \right| \lesssim A \mu(E')^{1/p'}$$

<u>Beweis</u> OBdA $\|f\|_{p,\infty} = 1$, $f \ge 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1) ist fast identisch zum Beweis von Thm. 1.2.18

(1) $\Rightarrow$ (2) Sei $E \subset X$ mit $0 < \mu(E) < \infty$ und definieren $\alpha = \left(\frac{2}{\mu(E)}\right)^{1/p}$ sowie

$$E' = E \setminus \{x : f > \alpha\}.$$

$\left(1 = \|f\|_{p,\infty} = \sup_{\alpha>0} \alpha\, d_f(\alpha)^{\frac{1}{p}}\right)$ Zunächst $\mu(\{x : f > \alpha\}) \le \frac{\|f\|^p_{p,\infty}}{\alpha^p} \le \frac{\mu(E)}{2}$

$$\Rightarrow \mu(E') = \mu(E) - \mu(\{f > \alpha\}) > \frac{\mu(E)}{2}$$

Verbleibt zu bestimmen $\int f \mathbb{1}_{E'}$.

$$\int f \mathbb{1}_{E'} \underset{f<\alpha \text{ auf } E'}{\le} \alpha\, \mu(E') \underset{\text{setze } \alpha \text{ ein}}{=} \left(\frac{2}{\mu(E)}\right)^{1/p} \mu(E')$$

$\leq 2^{1/p} \mu(E')^{1/p'}$ ▨

$\mu(E) \geq \mu(E')$

$T:$ Fkt auf $X \to$ Fkt Y

Abkürzung: Σ_c ... Menge aller einfachen Funktionen mit Trägern endlichen Maßes.

Behauptung 1.3.2 Seien $0 < p, q \leq \infty$, $A > 0$, T sublinear. Dann sind äquivalent:

(i) $\| Tf \|_{L^{q,\infty}} \lesssim_{p,q} A \cdot H \cdot W^{1/p}$ für alle Sub-Treppenfkten f mit Höhe H & Breite W in Σ_c

(ii) Für jedes $F \subseteq Y$ endlichen Maßes gilt es eine Teilmenge $F' \subseteq F$ mit $\nu(F') \geq \nu(F)/2$ sodass für alle $E \subseteq X$ endlichen Maßes gilt

$$\langle 1\!\!1_{F'}, |T 1\!\!1_E| \rangle = \int_Y |(T 1\!\!1_E)(y)| \, 1\!\!1_{F'}(y) \, d\nu(y) \lesssim A \mu(E)^{1/p} \nu(F')^{1/q'}.$$

$\boxed{\begin{aligned} &\| T 1\!\!1_E \|_{L^{q,\infty}} \leq |E|^{1/p} \\ &\Updownarrow \\ &|\langle 1\!\!1_F, T 1\!\!1_E \rangle| \leq |E|^{1/p} |F|^{1/q'} \end{aligned}}$ $\uparrow$ $q \geq 1$

6.5.2020

Bemerkungen Für $q > 1$ kann (2) ersetzt werden durch $|\langle 1\!\!1_F, T 1\!\!1_E \rangle| \lesssim |E|^{1/p} |F|^{1/q'}$ (vgl. Hausaufgabe Aufgabe 2.4)

Beweis (1) $\Rightarrow$ (2) folgt aus Prop. 1.3.1

(2) $\Rightarrow$ (1). Wir nehmen zunächst an, dass f die Form $f_N = \sum_{j=0}^{N} 2^{-j} 1\!\!1_{E_j}$ mit $\mu(E_j) \leq W$.

Wir zeigen jetzt $\| T f_N \|_{L^{q,\infty}} \lesssim A \cdot W^{1/p}$ gleichmäßig in N

Lemma $\|g_j\| \le 2^{-j} \Rightarrow \|\sum_{j=1}^N g_j\| \lesssim 1$ glm in N

$\rightarrow$ es genügt zu zeigen, dass $\|T \mathbb{1}_{E_j}\|_{q,\infty} \lesssim A W^{\frac{1}{p}}$.

Dazu: Sei $F \subseteq Y$ (mit $\nu(F) < \infty$). Per Voraussetzung gibt es $F' \subseteq F$ mit $\nu(F') \geq \nu(F)/2$, sodass

$$\int \mathbb{1}_{F'}(y) |(T\mathbb{1}_E)(y)| \, d\nu(y) \lesssim A \mu(E)^{1/p} \nu(F')^{\frac{1}{q'}}.$$

Thm 3.1

$\|f\|_{p,\infty} \lesssim A$

$\Updownarrow$

$\int f \mathbb{1}_F \lesssim A\mu(F)^{1/p'}$

Wg Thm 1.3.1 sind wir für solche Funktionen f_N fertig. ($\Rightarrow \|T\mathbb{1}_{E_j}\|_{q,\infty} \lesssim A \mu(E_j)^{1/p} = A W^{1/p}$)

Jetzt einfache Subtreppenfkten f der Höhe H und Breite W:

$$f = \sum_{j=1}^{M} a_j \mathbb{1}_{E_j} \quad \text{mit paarweise disjunkten } E_j$$
(mit $\mu(E_j) < W$ natürlich)

1, $3/4$, $2/3$, $\frac{1}{2}$, 0

Wg Homogenität & Sublinearität können wir annehmen, dass $0 \le f \le 1$. Wg der Binärdarstellung von Zahlen in $[0,1]$ zerlegen wir

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \cdot d_j(x), \quad d_j \forall \in \{0,1\} \quad \text{und}$$

approximieren f durch $f_N(x) = \sum_{j=0}^{N} 2^{-j} d_j(x) = \sum_{j=0}^{N} 2^{-j} \mathbb{1}_{F_j}(x)$ bis auf "Genauigkeit" 2^{-N}, d.h.

$$f(x) - f_N(x) = \sum_{j=0}^{M} b_{j,N} \mathbb{1}_{E_j}(x) \text{ mit } b_{jN} \le 2^{-N}$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0: \|Tf\|_{L^{q,\infty}} \lesssim \underbrace{\|Tf_N\|_{q,\infty}}_{\lesssim AW^{1/p}} + \underbrace{\|T(f-f_N)\|_{q,\infty}}_{\lesssim \| \sum_{j=1}^{M} b_{jN} |T\mathbb{1}_{E_j}| \|_{q,\infty}} \lesssim AW^{\frac{1}{p}} + \epsilon$$

$$\lesssim 2^{-N} \Big\| \sum_{j=1}^{M} |T \mathbb{1}_{E_j}| \Big\|_{q,\infty} < \epsilon$$

für hinreichend großes N. $\square$

Proposition 1.3.3 (Baby-Interpolation)

Seien $0 < p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$, T sublinear und vom restringiert schwachen Typ (p_i, q_i) mit Konstanten A_i

$\Rightarrow$ T ist vom restringiert schwache Typ (p_θ, q_θ)

für alle $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$ $(0 < \theta < 1)$

mit Konstante $A_\theta = A_0^{1-\theta} A_1^{\theta}$, d.h.

$\|Tf\|_{L^{q_\theta,\infty}} \lesssim A_\theta \cdot H \cdot W^{1/p_\theta}$ für alle einfachen Subtreppenfktn f der Höhe H, Breite W.

Beweis Mit Prop. 1.3.2 genügt es zu zeigen, dass es für alle $F \subseteq Y$ (endlichen Maßes) ein $F' \subset F$ gibt

mit $\nu(F') \geq \nu(F)/2$ und

$$(*) \int_Y \mathbb{1}_{F'}(y) \, |(T \mathbb{1}_E)(y)| \, d\nu(y) \lesssim A_\theta \, \mu(E)^{\frac{1}{p_\theta}} \, \nu(F')^{\frac{1}{q'_\theta}}$$

für alle $E \subseteq X$ (endlichen Maßes)

Wg Annahme + Prop 1.3.2 gilt

$$LHS(*) \lesssim A_i \, \mu(E)^{1/p_i} \, \nu(F')^{1/q_i'}$$

$\Rightarrow$ aus skalarer Interpolation $\left[X \leq Y_0, \, X \leq Y_1 \Rightarrow X \leq Y_0^{1-\theta} Y_1^{\theta} \text{ für alle } 0 < \theta < 1 \right]$

folgt die Behauptung. $\square$

$p_0 \neq p_1, \; q_0 \neq q_1$

Thm 1.3.4 (Marcinkiewicz) Seien $0 < p_i, q_i \leq \infty$, T sublinear und vom restringiert schwachen Typ (p_i, q_i)
$\left(\|T f\|_{q_i,\infty} \lesssim A_i H W^{1/p_i}, \; f \text{ einfache Subtreppenfkt.} \right)$

Dann gilt für alle $1 \leq r \leq \infty$ und $0 < \theta < 1$ mit $q_\theta > 1$ die Abschätzung

$p_\theta, q_\theta, A_\theta$ wie oben

$$\|Tf\|_{L^{q_\theta, r}} \lesssim_{p_0,p_1,q_0,q_1,\theta} A_\theta \|f\|_{p_\theta, r}, \quad \underline{f \text{ einfach}}$$

$L^{q,q} = L^q$

$L^{p,q_1} \subseteq L^{p,q_2}$

$q_1 < q_2$

Wenn zusätzlich $q_\theta \geq p_\theta$ und $r = q_\theta$

$$\Rightarrow \|Tf\|_{L^{q_\theta}} \lesssim_{p_0,p_1,q_0,q_1,\theta} A_\theta \|f\|_{p_\theta}$$

$\|T 1\!\!1_E\|_{q_i,\infty} \lesssim |E|^{1/p_i}$

$q_i > 1 \Rightarrow$ $\Updownarrow$

$\langle 1\!\!1_F, T 1\!\!1_E \rangle \lesssim |F|^{\frac{1}{q'}} |E|^{\frac{1}{p}}$

$\Updownarrow q_i > 1$

$\|Tf\|_{q_i,\infty} \lesssim H W^{1/p_i}$

__Bemerkung__ Restringiert schwacher Typ kann ersetzt werden durch $\|T 1\!\!1_E\|_{L^{q_i,\infty}} \lesssim \|1\!\!1_E\|_{p_i,1} \sim |E|^{1/p_i}$ mit Hilfe von Prop. 1.3.2.

__Beweis__ Sei zunächst $q_i > 1$. OBdA, $0 \leq f$, $\|f\|_{p_\theta, r} = 1$.
OBdA: $A_0 = A_1 = 1$ und damit $A_\theta = 1$. Dazu multipliziere T mit C_1, μ mit C_2, ν mit C_3 und A_θ mit $C_1 C_2^{-1/q_\theta} C_3^{1/q_\theta}$. Dann bleibt behauptete Ungleichung unberührt, aber mit der Freiheit von C_1, C_2, C_3 können A_0 und A_1 auf 1 normiert werden.
Wg Dualität der Lorentzräume (Thm 1.2.18, mit $q_\theta > 1$!) genügt es zu zeigen

$$\left| \int_Y (Tf)(y)\, g(y)\, d\nu(y) \right| \lesssim A_\theta \quad \text{mit } \|g\|_{p_\theta', q_\theta'} \leq 1$$

Nebenrechnung: Für Subtreppenfkten u auf X mit Höhe H, Breite W

$\|Tu\|_{q_i,\infty} \lesssim H \cdot W^{1/p_i}$, $\quad v$ auf Y mit Höhe H',

$\|v\|_{q_i',1} \lesssim H'(W')^{1/q_i'}$ $\quad$ Breite W'

rechnen wir $\displaystyle\int |Tu| \cdot |v| \overset{\text{Hölder + Voraussetzung}}{\lesssim} \underbrace{A_i}_{=1} H \cdot H' \cdot W^{1/p_i} \cdot (W')^{1/q_i'}$

$\overset{\text{skalare Interpolation}}{\Rightarrow} \displaystyle\int |Tu| |v| \lesssim H \cdot H' \cdot \min_{i=0,1} \{ W^{\frac{1}{p_i}} \cdot (W')^{\frac{1}{q_i'}} \cdot \underbrace{A_i}_{=1} \}$

(Verwende Thm 1.2.14 (i) $\Leftrightarrow$ (iv))

$L^{p_\theta, r} \ni f = \sum_m f_m \qquad f_m$ Subtreppenfkt. d. Höhe H_m, Breite 2^m

$L^{q_\theta', r'} \ni g = \sum_n g_n \qquad g_n \quad$ — " — $\quad H_n'$, Breite 2^n

mit $\| H_m \cdot 2^{m/p_\theta} \|_{\ell^r_m}$, $\| H_n' \cdot 2^{n/q_\theta'} \|_{\ell^{r'}_n} \sim 1$.

$\to$ Einsetzen: $\displaystyle\int_Y |Tf| \, g \, d\nu \lesssim \sum_{m,n} H_m H_n' \cdot \min \{ 2^{m/p_i}, 2^{n/q_i'} \}$

Notation: $a_m := H_m 2^{m/p_\theta}$, $b_n := H_n' \cdot 2^{n/q_\theta'}$

$\Rightarrow$ Es verbleibt zu zeigen

$\displaystyle\sum_{m,n} a_m b_n \min_{i=0,1} \{ 2^{m(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_\theta})}, 2^{n(\frac{1}{q_\theta'} - \frac{1}{q_i'})} \} \overset{!}{\lesssim} 1$ mit $\|a_m\|_{\ell^r_m} = \|b_n\|_{\ell^{r'}_n} = 1$

$\hookrightarrow$ Einsetzen von p_θ, q_θ zeigt, dass die linke Seite gleich ist zu

$$\sum_{m,n} a_m b_n \min \{ 2^{\alpha\theta(m - \frac{\beta}{\alpha} n)}, 2^{-\alpha(1-\theta)(m - \frac{\beta}{\alpha} n)} \},$$

wobei $\alpha := \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}$ und $\beta := \frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1}$. Definiert man noch $\gamma := \beta/\alpha$ und verschiebt $m \mapsto m + \lfloor \gamma n \rfloor$ $\quad$ ($\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$),

erhält man $\displaystyle\sum_{m \in \mathbb{Z}} \min \{ 2^{\alpha\theta m}, 2^{-\alpha(1-\theta)m} \} \sum_n a_{m + \lfloor \gamma n \rfloor} \cdot b_n$

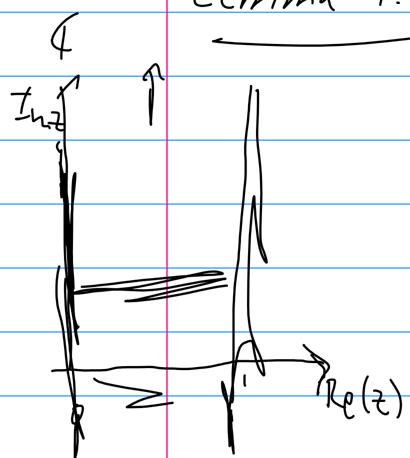
$$\le \Big(\underbrace{\sum_m \min\{2^{\alpha\theta m}, 2^{-\alpha(1-\theta)m}\}}_{\lesssim_{\alpha,\theta} 1}\Big) \cdot \sup_m \underbrace{\sum_n a_{m+\lfloor \gamma n \rfloor} \cdot b_n}_{\le \underbrace{\|b_n\|_{\ell_n^{r'}}}_{\lesssim 1} \underbrace{\|a_{m+\lfloor \gamma n\rfloor}\|_{\ell_n^r}}_{\lesssim_\gamma \|a_{m+n}\|_{\ell_n^r} \lesssim 1}}$$

Das zeigt Marcinkiewicz für $q_i > 1$

<u>Hausaufgabe:</u> Verwende Prop. 1.3.3, um $q_i \le 1$ zu behandeln.

(z.B. Stein-Weiss Kapitel V) 7.5.2020

1.3.2 Komplexe Interpolation



Lemma 1.3.5 Sei f holomorph auf $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ und stetig auf dem Rand ($\operatorname{Re} z = 0, 1$)

Angenommen, $|f(z)| \lesssim_\delta \exp(O_f(\exp((\pi - \delta)|z|)))$ für ein $\delta > 0$ in S und

$|f(z)| \le A$ für $\operatorname{Re} z = 0$

$|f(z)| \le B$ für $\operatorname{Re} z = 1$.

$$\Rightarrow \quad |f(z)| \le A^{1-\operatorname{Re} z} \cdot B^{\operatorname{Re} z}, \quad z \in S.$$

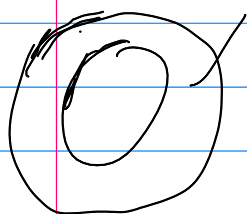
<u>Bemerkungen</u> 1) Mittels affiner Transformation, können wir auch den Fall wo $\operatorname{Re} z = 0, 1$ durch $\operatorname{Re} z = a, b$ für $a, b \in \mathbb{R}$ ersetzt wird, behandeln

$|f(z)| \le A^{1-t} \cdot B^t$, wobei t durch $\underset{[a,b]}{\underset{\uparrow}{\operatorname{Re} z}} = (1-t)a + t \cdot b$

2) Hausaufgabe: das doppelexponentielle Wachstum

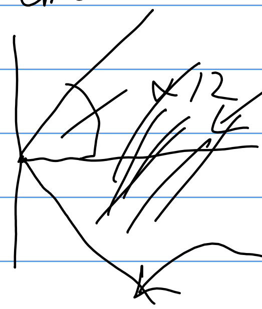
($|f| \lesssim \exp(c\exp((\pi-\delta)|z|))$ mit $\delta=0$) ist scharf!

(sh. z.B. Bak-Newman Section 15.2) 3) Verallgemeinerte Situation → Phragmén–Lindelöf Theoremen



$|f| \lesssim_\epsilon e^{\epsilon|z|^{\pi/\alpha}}$

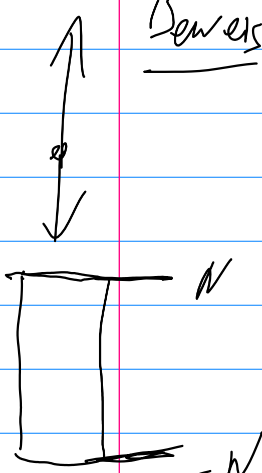
$|f|\le 1$ auf Rändern des Sektors



$\Rightarrow |f| \le 1$ auf ganzem Sektor.

4) Hausaufgabe: Anwendung für 3-Kreise-Theorem

<u>Beweis</u> Durch Ersetzen von $f \mapsto f\cdot A^{z-1}\cdot B^{-z}$ können wir oBdA annehmen, dass $A=B=1$.



1. Schritt: Angenommen, $|f|\to 0$ für $|z|\to\infty$.

$\Rightarrow$ die holomorphe Fkt ist auf einem hinreichend großen Rechteck $\{0<\mathrm{Re}\, z<1,\ -N<\mathrm{Im}\, z<N\}$ durch 1 beschränkt, d.h. insbesondere auf den Rändern des Rechtecks

$\Rightarrow$ fertig mit Maximumsprinzip. ($N\to\infty$)

2. Schritt. Allgemeine f: Definiere

$$f_\epsilon(z) = f(z)\cdot g_\epsilon(z)\, g_\epsilon(1-z) \quad \text{mit}$$

$$g_\epsilon(z) = \exp\left(\epsilon\, e^{i[(\pi-\frac{\delta}{2})z+\delta/4]}\right)$$

$g_\epsilon(z)$ macht $f_\epsilon(z)$ bei $i\infty$ klein, $g_\epsilon(1-z)$ bei $-i\infty$ — dann fällt $f_\epsilon(z)$ im Unendlichen ab (wenn f die doppelexponentielle Schranke erfüllt)

und $f_\epsilon(z)$ ist auf Rändern durch 1 beschränkt.

$\Rightarrow$ mit Schritt 1 ist $|f_\epsilon(z)| \leq 1$ in ganz S

$\Rightarrow \epsilon \to 0$ ▨

Theorem 1.3.6 (Riesz-Thorin) Sei T linear, sodass $\langle g, Tf \rangle$ für einfache f, g wohldefiniert ist und $0 < p_0, p_1 \leq \infty$, $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$, $A_0, A_1 > 0$ und $\|Tf\|_{L^{q_i}(Y)} \leq A_i \|f\|_{L^{p_i}(X)}$, $f \in L^p$ (oder dichte Teilmenge)

$\Rightarrow \|Tf\|_{L^{q_\theta}(Y)} \leq A_\theta \|f\|_{L^{p_\theta}(X)}$ $\theta \in (0,1)$

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{q_0}, \ldots$$

Bemerkungen · Vorteile von R.-T. ggü. M.
- Kein Verlust von impliziten Konstanten
- keine Einschränkung, dass $q_\theta \geq p_\theta$

· Nachteil: wir brauchen strong-type Schranken

Beweis $\alpha_i = \frac{1}{p_i}$, $\beta_i = \frac{1}{q_i}$, $\alpha = \frac{1}{p_\theta}$, $\beta = \frac{1}{q_\theta}$

$$\alpha(z) = (1-z)\alpha_0 + z \cdot \alpha_1, \quad \beta(z) = \ldots \quad z \in \mathbb{C}$$
(insb. $\alpha(i) = \alpha_i$, $\alpha(\theta) = \alpha$, $\beta(i) = \beta_i$, $\beta(\theta) = \beta_\theta$)

1. Schritt: f einfach $f = \sum_{j=1}^{m} a_j \mathbb{1}_{E_j}$
2. Schritt: · Dualität $\|Tf\|_q \leftrightarrow |\langle g, Tf \rangle|$
3. Schritt: · "Komplexifiziere f, g"

4. Schritt Einsetze in $\langle g_z, T f_z \rangle$ und 3-Linien-Thm anwenden.

5) Approximationsargumente, um $f \in L^p$ zu bekommen.

$$|\langle g, Tf \rangle| = \left| \int_Y \bar{g} \cdot Tf \, d\nu(y) \right| \equiv |I| \overset{!}{\leq} A_0^{1-\theta} A_1^{\theta} \|f\|_{p_\theta}$$

$F_i = |f|^{p_\theta / p_i}$

Wg Homogenität sei oBdA $\|f\|_{p_\theta} = 1$; zunächst $\alpha > 0$, $\beta < 1$

$$f = \sum_{j=1}^{m} a_j \mathbb{1}_{E_j} \qquad g = \sum_{k=1}^{n} b_k \mathbb{1}_{F_k}, \quad \|g\|_{q'} \leq 1$$

$L^{p_0} \quad L^{p_1}$

$f = F_0^{1-\theta} \cdot F_1^{\theta} \cdot a$

nicht-neg, einfache Fkten

$|a| \leq 1$

$\alpha(z) = (1-z)\alpha_0 + z\alpha_1$

$$f_z = \sum_{j=1}^{m} |a_j|^{\alpha(z)/\alpha} \cdot e^{i\theta_j} \mathbb{1}_{E_j}$$

$$g_z = \sum_{k=1}^{n} |b_k|^{(1-\beta(z))/(1-\beta)} e^{i\psi_k} \mathbb{1}_{F_k}$$

Definiere $F(z) = \langle g_z, T f_z \rangle$, $F(\theta) = I$

$$= \sum_{j,k}^{m,n} |a_j|^{\alpha(z)/\alpha} |b_k|^{(1-\beta(z))/(1-\beta)} \gamma_{jk}$$

mit $\gamma_{jk} = e^{i(\theta_j + \psi_k)} \langle \mathbb{1}_{F_k}, T \mathbb{1}_{E_j} \rangle$

$\Rightarrow$ Da jeder der Summanden in S beschränkt, ist die holomorphe Fkt $F(z)$, wenn sie auf S restringiert wird, beschränkt

$\rightarrow$ verbleibt z.z. $|F(iy)| \leq A_0$, $|F(1+iy)| \leq A_1$

Hätten wir das, so folgte die Aussage (für einfache Fkten) aus 3-Linien-Theorem.

$\alpha(z) = (1-z)\alpha_0 + z\alpha_1$

$\alpha(i) = \frac{1}{p_i}$

$\alpha = \frac{1}{p_0}$

Erinnerung $\alpha(iy) = \alpha_0 + iy(\alpha_1 - \alpha_0)$ $\qquad 1 - \beta(iy) = (1-\beta_0) - iy(\beta_1 - \beta_0)$

$$|f_{iy}|^{p_0} = \ldots = |f|^p, \quad |g_{iy}|^{q_0'} = \ldots = |g|^{q'}$$

$\Rightarrow$ Einsetze + Hölder + Annahme $T: L^{p_0} \to L^{q_0}$

$$|F_{iy}| \le \|T f_{iy}\|_{q_0} \|g_{iy}\|_{q_0'} \le A_0 \|f_{iy}\|_{p_0} \|g\|_{q'}$$
$$= A_0 \|f\|_p \|g\|_{q'}.$$

Analog für F_{1+iy} $\rightarrow$ Fertig für einfache Fkten.

[Approximationsargument: Finde Folge f_n einfacher Fkten

sodass $\|f_n - f\|_p \to 0$, $Tf_n(x) \longrightarrow Tf(x)$ f.ü.

$\Rightarrow$ Fatou gibt $\|Tf\|_q \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \|Tf_n\|_q$

$$\le \underline{\lim}_{n\to\infty} A_\theta \|f_n\|_p = A_\theta \|f\|_p.$$

Verbleibt: Restriktion $\alpha > 0$, $\beta < 1$ entfernen.

($\alpha = 0$, $\beta = 1 \Leftrightarrow$ entweder (p_0, q_0) oder nichts zu zeigen... $\Leftarrow (p_1, q_1)$ ist $(1, \infty)$

$\alpha > 0$, $\beta = 1 \to$ obiger Beweis geht durch, wenn $g_z \equiv g$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

$\beta < 1$, $\alpha = 0 \to$ ebenfalls, wenn $f_z \equiv f$

Fundamentale Beobachtung von E. M. Stein!

__Theorem 1.3.7__ Sei T_z eine holomorphe Familie linearer Operatoren auf $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < Re(z) < 1\}$,

sodaß für $f \in D_x$, $g \in D_y$ die Form

$$\int g(y) (T_z f)(y) \, d\nu(y)$$ absolut konvergiert,

holomorph in S, stetig auf den Rändern, und höchstens doppelexponentiell schnell wächst.

$\|Tf\|_q = \langle g, Tf\rangle$
Dualität in L^q
$q > 1$

Seien $0 < p_0, p_1 \le \infty$, $1 \le q_0, q_1 < \infty$, A_0, A_1

sodass $\|T_z f\|_{L^{q_j}(Y)} \le A_j \|f\|_{L^{p_j}(X)}$ $j = 0, 1$

bei $\mathrm{Re}(z) = j$ $(j = 0, 1)$

$\Rightarrow \|T_z f\|_{q_\theta} \le A_\theta \|f\|_{p_\theta}$

Beweis Wiederhole obiges Argument mit Beobachtung, dass $\tilde{F}(z) = \langle g_z, T_z f_z\rangle$ immer noch holomorph ist $\boxtimes$

Bemerkunge Genügt zu verlange, dass $\sup_{-\infty < y < \infty} e^{-b|y|} \log A_j < \infty$ mit $b < \pi$. (sh Stein Weiss, V. 4)

Weiteres Interpolationsthm von Bourgain (1985)
(auch aufgeschriebe in Bak – Seeger (2001)
Carbery – Seeger – Wainger – Wright)

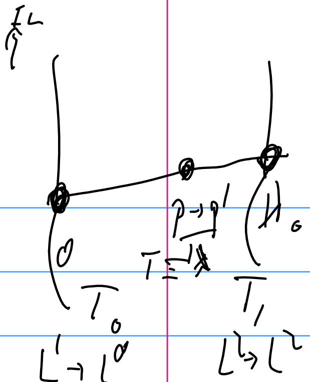
Angenommen $T = \sum_{j \in \mathbb{Z}} T_j$ $1 \le p_0, p_1, q_0, q_1 \le \infty$

Angenommen $\exists \beta_0, \beta_1 > 0$, so daß $\|T_j\|_{p_0 \to q_0} \le A_0 2^{-\beta_0 j}$, $\|T_j\|_{p_1 \to q_1} \le A_1 2^{+\beta_1 j}$

$\Rightarrow \|Tf\|_{L^{q_\theta, \infty}} \le C(\beta_0, \beta_1) M_\theta \|f\|_{L^{p_\theta, 1}}$, $\theta = \frac{\beta_0}{\beta_0 + \beta_1}$

Wertvolle Beobachtung von R.L. Frank & J. Sabin.

Angenommen, T linearer operator in $\mathbb{R}^d$, der zuerst auf $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ definiert), dessen eindeutige Fortsetzung $L^p_{(\mathbb{R}^d)} \to L^{p'}_{(\mathbb{R}^d)}$ – beschr. für $1 < p < 2 < p' < \infty$.



$W_1 \, T \, W_2$ ist L^2-beschr. wenn $W_1, W_2 \in L^{2p/(2-p)}$

Fkten

Angenommen, wir haben die $L^p \to L^{p'}$-Beschr. durch Stein-Interpolation bekommen von einer Familie holomorpher Operatoren T_z wo $T_{iy} : L^2 \to L^2$

$T_{-\lambda_0+iy} : L^1 \to L^\infty$ für ein $\lambda_0 > 1$. dann wüssten wir (wg Stein interpolation), dass $T \equiv T_{-1}$ ist $L^p \to L^{p'}$-beschränkt. In diesem Fall ist sogar

$$W_1 T_{-1} W_2 \in \mathfrak{S}^{2\lambda_0}(L^2(\mathbb{R}^d)) \qquad W_1, W_2 \in L^{2\lambda_0}$$

(statt nur L^2-beschränkt)

Proposition Sei T_z eine analytische Familie von Operatoren in $\mathbb{R}^d$ im Sinne von Stein (Thm 1.3.7), definiert auf dem Streifen $\{z \in \mathbb{C} : -\lambda_0 < \operatorname{Re} z < 0\}$ für ein $\lambda_0 > 1$.

Angenommen, $\| T_{iy} \|_{L^2 \to L^2} \le A_0 \, e^{a|y|}$

(hier nicht doppel-exponentiell) $\qquad a, b > 0$

$$\| T_{-\lambda_0+iy} \|_{L^1 \to L^\infty} \le A_1 \, e^{b|y|}$$

$\Rightarrow$ Für alle $W_1, W_2 \in L^{2\lambda_0}(\mathbb{R}^d)$ ist

$$W_1 T_{-1} W_2 \in \mathfrak{S}^{2\lambda_0}(L^2(\mathbb{R}^d)) \text{ mit}$$

$$\| W_1 T_{-1} W_2 \|_{\mathfrak{S}^{2\lambda_0}(L^2(\mathbb{R}^d))} \le A_0^{1-1/\lambda_0} A_1^{1/\lambda_0} \|W_1\|_{L^{2\lambda_0}} \|W_2\|_{L^{2\lambda_0}}$$

Ein auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ definierter beschränkter Operator S liegt in $\mathfrak{S}^p$ $(1 \le p < \infty)$, wenn $\operatorname{tr}(S^*S)^{p/2} < \infty$, d.h. $\sum_{n=1}^{\infty} |s_n(S)|^p < \infty$

↑ Singulärwerte von S

$T = A^*A \to$ Dualitätsprinzip

$\Rightarrow L^p$ - Schranken für Dichtematrizen, z.B. Strichartz

$\{f_j\}$ ONS $\quad \left\| \sum \nu_j |e^{it\Delta} f_j|^2 \right\|_{L^{1+2/d}_{x,t}} \lesssim \sum |\nu_j|^{\frac{2+d}{1+d}}$

$\Updownarrow$

$\left\| \rho_{e^{it\Delta}\gamma e^{-it\Delta}} \right\|_{L^{1+2/d}_{t,x}} \lesssim \|\gamma\|_{\mathfrak{S}^{(d+2)/(d+1)}(L^2(\mathbb{R}^d))}$

(aus klassischem Strichartz für einzelne Fkt.en welches aus Stein-Interpolation gewonnen wurde + Prop von Frank - Sabin + Dualitätsprinzip)