Bemerkungen zum Spektralsatz (+ Stonesche Formel + Borel-Stieltjes-Formel)

Motivation: hermitesche Matrizen auf $\mathbb{C}^n$ lassen sich diagonalisieren, d.h.

$$A = \sum_i^{} \lambda_i \, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \quad \text{wobei } A\varphi_i = \lambda_i \varphi_i$$

$$f(A) = \sum_i f(\lambda_i) \, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$$

Verallgemeinerung auf unbeschränkte Operatoren?

__Definition__: Sei $\mathcal{B}$ die Borel-σ-Algebra von $\mathbb{R}$.

Eine Abbildung $E: \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ heißt projection valued measure :⇔

(i) $E(\mathbb{R}) = id_{\mathcal{H}}$ ~~(⇒ $E(\emptyset)=0$, $E(\mathbb{R}\setminus A) = \mathbb{1} - E(A)$, $E(A_1$~~

(ii) Für alle $A \in \mathcal{B}$ ist $E(A) = E(A)^2 = E(A)^*$, also eine orthogonale Projektion

(iii) Für alle paarweise disjunkten Mengen $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$ und alle $\psi \in \mathcal{H}$ gilt

$$\sum_j E(A_j)\psi = E\Big(\bigcup_j A_j\Big)\psi \quad \text{(starke } \sigma\text{-Additivität)}$$

(wir brauchen nur __starke__ Konvergenz, keine Norm-Konvergenz)

__Bemerkung__:
- Tatsächlich kann Norm-Konvergenz bereits in den einfachsten Fällen nicht gelten, z.B. $\mathcal{H} = L^2(I)$, $E(A) = \mathbb{1}_A$ (Multiplikationsoperator), da die Operatornorm in diesem Fall mit der $\|\cdot\|_\infty$-Norm übereinstimmt.
- Die starke Konvergenz kann durch schwache Konvergenz ersetzt werden, da $P_n \rightharpoonup P \Rightarrow P_n \to P$, da $\langle \psi, P_n\psi\rangle = \langle \psi, P_n^2 \psi\rangle = \|P_n\psi\|^2$ zusammen mit der Tatsache $\left(\psi_n \rightharpoonup \psi \Rightarrow \psi_n \to \psi\right) \Leftarrow \limsup \|\psi_n\| \leq \|\psi\|$

$\big[$ Bew: $\psi_n \rightharpoonup \psi \Rightarrow \|\psi\|^2 = \langle\psi,\psi\rangle = \underline{\lim} \langle \psi, \psi_n\rangle \leq \|\psi\| \liminf \|\psi_n\| \Leftrightarrow \|\psi\| \leq \underline{\lim} \|\psi_n\|$

$\Rightarrow \|\psi - \psi_n\|^2 = \|\psi\|^2 + \underbrace{\|\psi_n\|^2}_{\to \|\psi\|} - 2\,\mathrm{Re}\langle\psi,\psi_n\rangle \to 0$ $\big]$

Weitere einfache Eigenschaften von $E(A)$: $E(\emptyset) = 0$, $E(\mathbb{R}\setminus A) = \mathbb{1} - E(A)$, $E(A_1 \cap A_2) = E(A_1)E(A_2)$

$E(A_1 \cup A_2) + E(A_1 \cap A_2) = E(A_1) + E(A_2)$

$A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow E(A_1) \leq E(A_2)$ (im quad. Form Sinne)

Zerlegung der Eins: Sei $E(\lambda) := E((-\infty, \lambda])$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ ⇒
- $E(\lambda) = E(\lambda)^2 = E(\lambda)^*$
- $E(\lambda_1) \leq E(\lambda_2)$ für $\lambda_1 \leq \lambda_2$
- $E(\lambda_n) \xrightarrow[\lambda_n \searrow \lambda]{s} E(\lambda)$
- $E(\lambda) \xrightarrow[\lambda \to -\infty]{s} 0$ $\quad E(\lambda) \xrightarrow[\lambda \to \infty]{s} \mathbb{1}$

kann als __Verteilungsfunktion__ interpretiert werden

Für $\psi \in \mathcal{H}$ ~~definieren~~ erhalten wir ein Borelmaß $\mu_\psi(A) := \langle \psi, E(A)\psi \rangle = \| E(A)\psi \|^2 \le \|\psi\|^2 = \mu_\psi(\mathbb{R})$

mit zugehöriger Verteilungsfunktion $\mu_\psi(\lambda) = \langle \psi, E(\lambda)\psi \rangle$

Mit der Polarisation erhalten wir auch komplexe Maße für $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$

$$\mu_{\varphi\psi}(A) = \langle \varphi, E(A)\psi \rangle = \frac{1}{4}\left(\mu_{\varphi+\psi}(A) - \mu_{\varphi-\psi}(A) + i\mu_{\varphi-i\psi}(A) - i\mu_{\varphi+i\psi}(A)\right)$$

$$\le \sqrt{\mu_\varphi(A)\,\mu_\psi(A)} \le \|\varphi\|\,\|\psi\|.$$

~~Theorem~~ Integration bzgl. PVMs: Für einfache Funktionen $f = \sum \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$ (wobei $A_j = f^{-1}(\alpha_j)$) setzen wir $E(f) \equiv \int f(\lambda)\, dE(\lambda) = \sum \alpha_j E(A_j)$, d.h. insbesondere $E(\mathbb{1}_A) = E(A)$

Dann folgt aus $\langle \varphi, E(f)\psi \rangle = \sum_j \alpha_j \mu_{\varphi\psi}(A_j)$, dass

$$\langle \varphi, E(f)\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, d\mu_{\varphi\psi}(\lambda)$$

Wg. Linearität des Integrals ist E eine Abbildung von der Menge der einfachen Funktionen in die Menge der beschränkten Operatoren auf $\mathcal{H}$.

Außerdem folgt aus $\| E(f)\psi \|^2 = \cancel{\Sigma} \langle \psi, E(f)E(f)\psi \rangle \underset{A_i \cap A_j = \emptyset}{=} \sum |\alpha_j|^2 \mu_\psi(A_j)$, dass

$$(*) \quad \| E(f)\psi \|^2 = \int |f(\lambda)|^2\, d\mu_\psi(\lambda) \le \|f\|_\infty^2 \|\psi\|^2$$

Da die einfachen Fkt.en dicht in den beschränkten Fkt.en liegen, kann dies auf $f \in L^\infty$ verallgemeinert werden.

Definiert man noch $D_f = \{\psi \in \mathcal{H} : \int |f(\lambda)|^2\, d\mu_\psi(\lambda) < \infty\}$ (dicht in $\mathcal{H}$) und ~~für $\psi \in D_f$~~ die Folge beschränkter Borelfunktionen $f_n = \mathbb{1}_{A_n} f$, $A_n = \{\lambda : |f(\lambda)| < n\}$, dann ~~kann~~ ist f_n Cauchy in L^2, d.h. es konv gegen f in L^2. D.h. $\psi_n = E(f_n)\psi$ ist Cauchy in $\mathcal{H}$, weshalb wir definieren $E(f)\psi := \lim_n E(f_n)\psi$, $\psi \in D_f$. (vgl. mit (*))

Theorem 3 (Funktionalkalkül für messbare Funktionen) Für jede Borelfunktion f ist ~~$P(f)$~~ $E(f) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, dE(\lambda)$, $D(E(f)) = D_f$ ein normaler Operator (d.h. $D(E(f)) = D(E(f)^*)$, $\|E(f)\psi\| = \|E(f)^*\psi\|$, $\psi \in D(E(f))$) und es gilt ~~$P(f)$~~

- $E(\bar{f}) = E(f)^*$
- $E(f)E(\bar{f}) = E(\bar{f})E(f) = E(|f|^2)$
- $\langle E(f)\varphi, E(g)\psi \rangle = \int \overline{f(\lambda)}\, g(\lambda)\, d\mu_{\varphi\psi}(\lambda)$
- $E(\alpha f + \beta g) \supseteq \alpha E(f) + \beta E(g)$ (=, wenn RHS abgeschl.)
- $E(f \cdot g) \supseteq E(f)E(g)$

Lemma 4 $E(f)$ ist invertierbar $\Leftrightarrow$ $f(x) \neq 0$ für E-fast alle $x \in \mathbb{R}$

In diesem Fall ist $E(f)^{-1} = E(\frac{1}{f})$ mit

$$\frac{1}{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \cup \{\pm\infty\}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1/f(x) & \text{wenn } f(x) \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \\ 0 & |f(x)| = \infty \\ \infty & f(x) = 0 \end{cases}$$

Lemma 5 a) $\sigma(E(f)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0 : E(\{x \in \mathbb{R} : |f(x) - \lambda| < \varepsilon\}) \neq 0\}$ (Erinnerung an Multiplikations-operator)

b) Für $\lambda \in \rho(E(f))$ ist $(E(f) - \lambda)^{-1} = E\left(\frac{1}{f - \lambda}\right)$

c) $\lambda \in \mathbb{C}$ ist genau dann ein EW von $E(f)$, wenn ~~$E(\{x \in \mathbb{R} : |f(x) - \lambda| <$~~ $E(\{x \in \mathbb{R} : f(x) - \lambda = 0\}) \neq 0$. In diesem Fall ist $E(\{x \in \mathbb{R} : f(x) - \lambda = 0\})$ die Projektion auf den Eigenraum von $E(f)$ zum Eigenwert λ.

d) Ist $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom, dann gilt $E(p(f)) = p(E(f))$.

Wir sind dem Spektralsatz jetzt schon sehr nahe.

Für ein gegebenes PVM E erhalten wir einen selbstadjungierten Operator $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE(\lambda)$. Frage: Gilt auch die Umkehrung? (d.h. gegeben A s.a. $\Rightarrow \exists$ PVM E s.d. $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE(\lambda)$)

Ja! (für $D(A) = \{\psi \in \mathfrak{h} : \int \lambda^2 dE_\psi(\lambda) < \infty\}$

Theorem 6 (Spektralsatz) Sei $A : D(A) \to \mathfrak{h}$ ein selbstadjungierter Operator, dann gibt es ein eindeutiges PVM $E_A : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathfrak{h})$ sodass $\langle \varphi, A\psi \rangle = \int \lambda \, d\mu_{\varphi\psi}(\lambda)$ $\forall \varphi \in \mathfrak{h}, \psi \in D(A)$

d.h. $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE_A(\lambda)$.

mit $\mu_{\varphi\psi} : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$
$B \mapsto \langle \varphi, E_A(B)\psi \rangle$

Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ messbar definieren wir $f(A) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \, dE_A(\lambda)$ über den Funktionalkalkül.

Dann gilt
- $D(f(A)) = \{\psi \in \mathfrak{h} : \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d\mu_\psi(\lambda) < \infty\}$
- $\|f(A)\psi\|^2 = \int |f(\lambda)|^2 d\mu_\psi(\lambda)$ $\quad \psi \in D(A), \varphi \in \mathfrak{h}$
- $\langle \varphi, f(A)\psi \rangle = \int f(\lambda) \, d\mu_{\varphi\psi}(\lambda)$
- $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ gilt $E([\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]) \neq 0$
- $E_A(\sigma(A)) = \mathbb{1}$
- Für $z \in \rho(A)$ gilt $(A - z)^{-1} = \int \frac{1}{\lambda - z} \, dE_A(\lambda)$
- λ ist EW von A $\Leftrightarrow$ $E_A(\{\lambda\}) \neq 0$. In diesem Fall ist $E_A(\{\lambda\})$ die Proj. auf den Eigenraum von A zum EW λ

Mult.-Operator

- $E_{f(A)}(B) = \mathbb{1}_{f^{-1}(B)}$
- ~~$\sigma(f(A)) \subset \overline{f(\sigma(A))}$ mit Gleichheit, wenn f stetig. Abschluss kann vernachlässigt werden, wenn ($\sigma(A)$ beschr. bzw. kompakt)~~

Mehr zum Spektralmaß $\mu_\psi(\lambda)$ von A.

Sei $F_\psi(z) = \langle \psi, (A-z)^{-1}\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z}\, d\mu_\psi(\lambda)$ $\qquad (A-z)^{-1} = \int_{\mathbb{R}} (\lambda - z)^{-1}\, dE_A(\lambda), \quad z \in \rho(A)$

die <u>Boreltransformation des Maßes μ_ψ</u>

Da $\operatorname{Im}(F_\psi(z)) = \operatorname{Im}(z) \cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|\lambda - z|^2}\, d\mu_\psi(\lambda)$ ist F_ψ eine Abbildung von $H_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ in sich selbst, also eine <u>Pick-Funktion</u>.

Nach dem Satz von Nevanlinna können sie eindeutig durch die Stieltjes-Inversionsformel durch $F_\psi(z) = \alpha + \beta z + \int \left(-\frac{\lambda}{1+\lambda^2} + \frac{1}{\lambda - z} \right) d\mu_\psi(\lambda)$ dargestellt werden, wobei

$$\mu_\psi(b) - \mu_\psi(a) = \lim_{\eta \searrow 0} \frac{1}{\pi} \int_a^b \operatorname{Im} F_\psi(x + i\eta)\, dx \qquad \text{(Satz von Neumann)}$$

d.h. $\mu_\psi(\lambda) = \lim_{\delta \searrow 0} \lim_{\eta \searrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\lambda+\delta} \operatorname{Im} F_\psi(x + i\eta)\, dx$

vgl. Riesz-Proj. $P_\lambda = -\frac{1}{2\pi} \oint_{|\mu - \lambda| = \varepsilon} (A - \mu)^{-1}\, d\mu$ $\quad (0 < r < \varepsilon)$ $\{\lambda\} = \sigma(A) \cap B_\lambda(\varepsilon)$

$$= \lim_{\delta \searrow 0} \lim_{\eta \searrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\lambda+\delta} \langle \psi, \left((A - x - i\varepsilon)^{-1} - (A - x + i\varepsilon)^{-1}\right) \psi \rangle\, dx$$

$\frac{1}{2}\left(\mu_\psi((\lambda_1, \lambda_2)) + \mu_\psi([\lambda_1, \lambda_2])\right) = \lim_{\eta \searrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \operatorname{Im} F_\psi(\lambda + i\eta)\, d\lambda$ $\Rightarrow$ <u>Stonesche Formel</u> $\frac{1}{2}\left(E_A((\lambda_1, \lambda_2)) + E_A([\lambda_1, \lambda_2])\right) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\eta \searrow 0} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \left((A - \lambda - i\eta)^{-1} - (A - \lambda + i\eta)^{-1}\right)$

<u>Mehr zur Boreltransformation</u> ~~$\overline{F_\psi(\bar z)} = F_\psi(z)$, F_ψ ist holomorph auf~~

Sei $\sigma(\mu) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \mu((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)) > 0 \ \forall \varepsilon > 0\}$ die Menge aller Wachstumspunkte heißt Spektrum von μ. Man kann zeigen $\mu(\mathbb{R} \setminus \sigma(\mu)) = 0$, d.h. $\sigma(\mu)$ ist ein Träger von μ.

Sei $F(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z}$

<u>Theorem 7</u> Ist μ ein endliches Borelmaß, dann ist F eine Pick-Funktion, die auf $\mathbb{C} \setminus \sigma(\mu)$ holomorph ist und $F(\bar z) = \overline{F(z)}$ und $|F(z)| \leq \frac{\mu(\mathbb{R})}{\operatorname{Im} z}$, $z \in H_+$ erfüllt. $\lim_{z \to -\infty} F(z) = 0$ ~~$\lim_{z\to\infty} F(z) z$~~ $\lim_{z \to \infty} z F(-z) = \int d\mu(\lambda)$

Definiere den pullback $(f_* \mu)(B) \equiv \mu(f^{-1}(B))$, dann gilt $\int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\, d(f_* \mu)(\lambda)$

man stelle sich $f = 1$ vor $\qquad = \int g(f(\lambda))\, d\mu(\lambda)$

Wenn wir also zum Maß μ den Operator $(Af)(\lambda) = \lambda f(\lambda)$ mit $\mathcal{D}(A) = \{f \in L^2(\mathbb{R}, d\mu) : \lambda f \in L^2(\mathbb{R}, d\mu)\}$ definieren, dann folgt

- $E_{f(A)}(B) = \mathbb{1}_{f^{-1}(B)}$ ← Multiplikationsoperator
- $\sigma(f(A)) = \sigma(f_* \mu) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \mu(f^{-1}(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)) > 0 \ \forall \varepsilon > 0\}$
- $\sigma(f(A)) \subseteq \overline{f(\sigma(A))}$ mit Gleichheit, wenn f stetig; Abschluß kann vernachlässigt werden, wenn $\sigma(A)$ beschränkt (also kompakt) ist.

Lebesgue-Zerlegung von μ

$$d\mu = d\mu_{ac} + \underline{d\mu_s}$$
$$= d\mu_{sc} + d\mu_{pp}$$

(Dynamische Charakterisierung des Spektrums mittels RAGE-Thm, insb "gut", wenn $\sigma_{sc} = \emptyset$)

$\forall \epsilon > 0 \, \exists r(\lambda) > 0 \ldots$ $\to$ $\mathcal{X}_b = \mathcal{X}_{pp}$, $\mathcal{X}_s = \tilde{\mathcal{X}}_s = \mathcal{X}_{ac} = \mathcal{X}_c$
$\| (1 - P_{B_0(r)}) e^{-itA} \psi \| < \epsilon \; \forall t \in \mathbb{R}$ (bound state) scattering $\to \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} \| P_{B_0(r)} e^{-itA} \psi \| dt = 0$

μ_{ac} ist <u>absolut stetig</u> bzgl dx (Lebesgue), d.h. $\mu_{ac}(B) = 0$, wenn $|B| = 0$ ($|B|$ = Lebesguemaß von B)

μ_s ist singulär bzgl. Lebesgue, d.h. μ_s ist auf Lebesgue-Nullmengen getragen, also $\mu_s(\mathbb{R} \setminus B) = 0$ für $|B| = 0$.

μ_{sc} ist stetig auf $\mathbb{R}$ und μ_{pp} sind Treppenfkten
(μ_{sc}: z.B. Cantor)

Da $d\mu_{ac}$, $d\mu_{sc}$ und $d\mu_{pp}$ paarweise singulär bzgl sich selbst sind, sind auch ihre Träger M_{ac}, M_{sc}, M_{pp} disjunkt. Diese Mengen sind jedoch <u>nicht eindeutig</u>, wir wählen sie so, dass M_{pp} die Menge aller Sprünge von $\mu(\lambda)$ ist und, dass $|M_{sc}| = 0$.

Die zu M_{ac}, M_{sc} und M_{pp} zugehörigen Projektionen seien $E^{ac} = \mathbb{1}_{M_{ac}}(A), \ldots$ mit $E^{ac} + E^{sc} + E^{pp} = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$.

$\Rightarrow L^2(\mathbb{R}, d\mu) = L^2(\mathbb{R}, d\mu_{ac}) \oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu_{sc}) \oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu_{pp})$ (abgeschlossen)

und $A = (AE^{ac}) \oplus (AE^{sc}) \oplus (AE^{pp})$

$\sigma_{ac}(A) := \sigma(\mu_{ac})$, $\ldots \sigma_{sc}$, σ_{pp} absolut stetiges Spektrum, ...

<u>Achtung</u> (auch eingebettete EW möglich)
Für die Menge der Eigenwerte
$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \text{ ist EW von } A\}$

gilt i.A. nur $\sigma_{pp}(A) = \overline{\sigma_p(A)}$ (alternative Definition) für σ_{pp}; dann kann es passieren, dass $\sigma \neq \sigma_{ac} \cup \sigma_{sc} \cup \sigma_{pp}$

(λ ist EW $\Leftrightarrow$ $E_A(\{\lambda\}) \neq 0$, d.h. λ ist eine Sprungstelle
$E_A(\{\lambda\}) = E_A(\lambda) - E(\lambda-)$)

(vgl. $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A) = \begin{cases} \cdot \text{ EW unendlicher Multiplizität} \\ \cdot \text{ Häufungspunkte des Spektrums} \\ \cdot\ \sigma_{ess} = \sigma_{ac} \cup \sigma_{sc}; \ E_{(\lambda-\epsilon, \lambda+\epsilon)} \text{ ist } \infty\text{-dim } \forall \epsilon > 0 \\ \quad (\text{d.h. } \operatorname{Ran} E_{(\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon)} \text{ ist } \infty\text{-dim.}) \end{cases}$

$\sigma_{disc}(A) = \begin{cases} \text{EW endlicher Multiplizität, die} \\ \text{isolierte Punkte von } \sigma(A) \text{ sind} \\ \cdot\ E_{(\lambda-\epsilon, \lambda+\epsilon)} \text{ ist endlich-dim für ein } \epsilon > 0 \end{cases}$
(σ_{disc} nicht abgeschlossen)

Es stellt sich heraus, dass die kleinsten Mengen M_{ac}, M_{sc} und M_{pp} durch die Grenzwerte von $\operatorname{Im}(F)$ zur reellen Achse hin bestimmt sind.

$$M_{ac} = \{\lambda : 0 < \limsup_{\epsilon \searrow 0} \operatorname{Im}(F(\lambda + i\epsilon)) < \infty\} \qquad M = M_{ac} + M_s = \{\lambda : 0 < \limsup_{\epsilon \searrow 0} \operatorname{Im} F(\lambda + i\epsilon)\}$$
$$M_s = \{\lambda : \limsup_{\epsilon \searrow 0} \operatorname{Im} F(\lambda + i\epsilon) = \infty\}$$

<u>Thm 8</u> Es gilt außerdem $\sigma(\mu) = \overline{M}$, $\sigma(\mu_{ac}) = \overline{M_{ac}}^{ess} = \{\lambda \in \mathbb{R} : |(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon) \cap M_{ac}| > 0 \; \forall \epsilon > 0\}$ (essential closure)

- $d\mu_{ac} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} F(\lambda + i0) \, d\lambda$
- $\mu(\{E_0\}) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon \cdot \operatorname{Im} F(E_0 + i\epsilon)$, $\lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon \operatorname{Re} F(E_0 + i\epsilon) = 0 \quad \forall E_0 \in \mathbb{R}$
- $\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} F(\lambda + i\epsilon) \, d\lambda \to d\mu$ im Sinne, dass $\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi} \int f(\lambda) \cdot \operatorname{Im} F(\lambda + i\epsilon) \, d\lambda = \int f(\lambda) \, d\mu(\lambda)$, $f \in C_c^0(\mathbb{R})$.

Beispiele $H_0 = -\Delta$, $\mathcal{D}(H_0) = H^2(\mathbb{R}^d)$, $\sigma(H_0) = \sigma_{ac}(H_0) = [0,\infty)$, $\sigma_{pp} = \sigma_{sc} = \emptyset$

und $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ist ein determinierender Bereich.

Wir zeigen, dass $d\mu_\psi$ rein absolut stetig $\forall \psi \in Q(H_0)$.

$$\langle \psi, (H_0 - z)^{-1}\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} d\xi \frac{|\hat\psi(\xi)|^2}{\xi^2 - z} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{k^2 - z}\, d\tilde\mu_\psi(k) \text{ mit}$$

$$d\tilde\mu_\psi(k) = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(k)\, k^{d-1} \int_{S^{d-1}} |\hat\psi(k\omega)|^2 d\omega\, dk$$

$$\overset{k^2 \mapsto \sqrt{k^2}}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z}\, d\mu_\psi(\lambda)$$

mit $d\mu_\psi(\lambda) = \underbrace{\frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(\lambda)\, \lambda^{\frac{d}{2}-1}\left(\int_{S^{d-1}} |\hat\psi(\sqrt{\lambda}\omega)|^2 d\omega\right)}_{\in L^1_{loc}} d\lambda$ welches ac bzgl Lebesgue ist.

Multiplikationsoperator $\cancel{(x-z)\psi}$ $(M_x - z)\psi = 0$, wenn $\psi = \mathbb{1}_{f^{-1}(\{z\})} = \mathbb{1}_{x=z}$

$$\Rightarrow E_{M_x} : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(L^2) \qquad E_{M_f}(B) = M_{\mathbb{1}_{f^{-1}(B)}}$$
$$B \mapsto M_{\mathbb{1}_{f^{-1}(B)}}$$

$$\langle \varphi, \underset{E_{M_x}((-\infty,t])}{\overset{\|}{E_{M_x}(t)}}\psi\rangle = \int_{-\infty}^t \overline{\varphi(x)}\psi(x)\,dx \quad \cancel{= d\mu_{\varphi\psi}(t)} =$$

$$= \mu_{\varphi\psi}((-\infty,t]) = \int_{-\infty}^t d\mu_{\varphi\psi}(\lambda)$$

in $\mathbb{R}^d$: $\psi = \mathbb{1}_{f^{-1}(\{z\})}$

$$d\mu_{\varphi\psi}(\lambda) = \overline{\varphi(\lambda)}\psi(\lambda)\,d\lambda$$

$$\Rightarrow \langle \varphi, M_f \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\varphi(x)} f(x)\psi(x)\,dx$$

$$\overset{!}{=} \int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\mu_{\varphi\psi}(\lambda) \qquad \langle \varphi$$

$$= \int \lambda \left(\int \varphi(x)\psi(x)\mathbb{1}_{f(x)=\lambda}\,dx\right) d\lambda$$

$\langle \varphi, E_{M_f}(\lambda)\psi\rangle$

$\cancel{= \langle \varphi, M_{\mathbb{1}_{f^{-1}(\{\lambda\})}}\psi\rangle}$

$= \langle \varphi, M_{\mathbb{1}_{f^{-1}((-\infty,\lambda])}}\psi\rangle$

$= \int \overline{\varphi(x)}\psi(x)\mathbb{1}_{f^{-1}((-\infty,\lambda])}(x)\,dx$

$\Rightarrow d\langle \varphi, E_{M_f}(\lambda)\psi\rangle = \int \varphi(x)\psi(x)\mathbb{1}_{f^{-1}(\{\lambda\})}\,dx$

Beispiel für Menge aller Eigenwerte $\overset{m\,\sigma_p}{}$ $\subseteq \sigma(\mu_{pp})$

Sei $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ und A durch $A\delta_n = \frac{1}{n}\delta_n$ gegeben, wobei $\delta_n = (0, 0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-te Stelle}}}{1}, 0, 0, \dots)$.

d.h. $A = \begin{pmatrix} 1/1 & & & 0 \\ & 1/2 & & \\ & & 1/3 & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \sigma_p = \{n^{-1} : n \in \mathbb{N}\}$

aber $\sigma_{pp} = \sigma_p \cup \{0\}$.

Dazu zeigen wir, dass $0 \in \sigma(A)$ und $\sigma_{ac}(A) = \sigma_{sc}(A) = \emptyset$.

Zunächst gilt $A\delta_n = \frac{1}{n}\delta_n$, d.h. für $z \notin \sigma(A)$, $(A-z)^{-1}\delta_n = \frac{1}{\frac{1}{n} - z}\delta_n = \frac{n}{1-nz}\delta_n$

$\downarrow z \to 0$

$A^{-1}\delta_n = n\delta_n$, d.h. die Resolvente existiert zwar bei $z = 0$, aber sie ist nicht beschränkt, d.h. $\underline{0 \in \sigma(A)}$

$\left(A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \ddots \end{pmatrix}\right)$

Da stetige Maße allerdings nicht auf einem einzelnen Punkt und daher auch nicht auf abzählbaren Mengen leben können, sind $\sigma_{ac} = \sigma_{sc} = \emptyset$.

Weiteres zu abstrakter Maßtheorie (auf $\mathbb{R}$ zunächst)

Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton steigende Funktion, dann existieren $\underbrace{\lim_{\varepsilon \to 0} \alpha(x + |\varepsilon|)}_{= \alpha(x+0)}$, $\underbrace{\alpha(x - |\varepsilon|)}_{\alpha(x-0)}$

Dann definieren wir $\mu_\alpha((a,b)) = \alpha(b-0) - \alpha(a+0)$

$\Rightarrow \mu_\alpha : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ mit $\mu_\alpha\left(\bigcup_i B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$ für $B_i \cap B_j = \emptyset \; \forall i \neq j$, $\mu_\alpha(\emptyset) = 0$

Per Konstruktion hat dieses Maß die Regularitätseigenschaft

$$\mu_\alpha(B) = \sup\{\mu(C) : C \subseteq B,\ C \text{ kompakt}\} \quad \text{und} \quad \mu(C) < \infty \;\; \forall C \text{ kompakt}$$
$$= \inf\{\mu(O) : B \subseteq O,\ O \text{ offen}\}$$

Ein Maß mit diesen Regularitätseigenschaften heißt Borelmaß.

$\Rightarrow$ Man kann ein Integral $f \mapsto \int f \, d\mu_\alpha \equiv \int f \, d\alpha$ konstruieren (wie bei Lebesgue durch $\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{n} \mu\left(f^{-1}\left[\left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right]\right]\right)$) mit

$\underset{\mathcal{L}^1}{f} + \underset{\mathcal{L}^1}{g} \in \mathcal{L}^1((a,b), d\alpha)$, $\lambda f \in \mathcal{L}^1((a,b), d\alpha)$, $|g| \leq \underset{\mathcal{L}^1}{f} \Rightarrow g \in \mathcal{L}^1$, $\int f+g = \int f + \int g$

$|\int f| \leq \int |f|$

$f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$, $|\int_a^b f| \leq |b-a| \, \|f\|_\infty$

$\to$ "Lebesgue-Stieltjes-Integral"

Bsp. 1) Sei $\underline{\alpha \in C^1}$ $\Rightarrow \mu_\alpha(a,b) = \int_a^b \frac{d\alpha}{dx} \underset{\text{Lebesgue}}{dx}$ und $\int f \, d\mu_\alpha = \int f\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) dx$

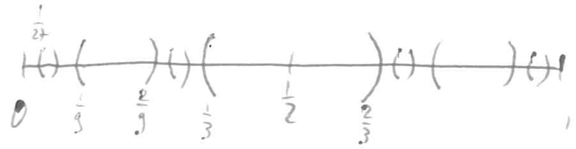
2) Sei $\alpha(x) = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) \Rightarrow \mu_\alpha(a,b) = \begin{cases} 1 & 0 \in (a,b) \\ 0 & 0 \notin (a,b) \end{cases}$ d.h. $\mu_\alpha(B) = \begin{cases} 1 & 0 \in B \\ 0 & 0 \notin B \end{cases}$

und insb. $\int f \, d\mu_\alpha = f(0)$! Dirac-Delta

3) α = <u>Cantor-Funktion.</u> Sei $S \subseteq [0,1]$ durch

$$S = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right) \cup \left(\tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9}\right) \cup \left(\tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9}\right) \cup \left(\tfrac{1}{27}, \tfrac{2}{27}\right) \cup \ldots$$ definiert.

mittleres Drittel von $[0,1]$ — mittleres Drittel von $\left[\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right)$ — +symmetrisieren



Das Lebesgue-Maß von S ist [illegible]

$$\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1.$$

$$= 3^{-1} \sum_{n=0} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{3^{-1}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1/3}{1/3} = 1$$

Sei nun $C = [0,1] \setminus S$, d.h. $|C| = 0$
$\hookrightarrow$ Cantor-Menge

C kann auch wie folgt beschrieben werden: Schreibe $x \in [0,1]$ im Dreiersystem, d.h. $x \in C \iff$ es gibt keine 1er in der 3er-Darstellung von x. $\Rightarrow C$ ist eine überabzählbare Menge mit Lebesguemaß 0. (Bilde dazu C in bijektiver Art auf $[0,1]$ ab, indem 2er zu 1er werden und das Ergebnis in 2er-Darstellung betrachtet wird).

Konstruiere α wie folgt. $\alpha(x) = \frac{1}{2}$ auf $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\alpha(x) = \frac{1}{4}$ auf $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, $\alpha(x) = \frac{3}{4}$ auf $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$... und setzte α auf $[0,1]$ <u>stetig</u> fort. $\Rightarrow \alpha$ ist eine nicht-konstante, stetige Funktion mit $\alpha'(x)$ existiert (Lebesgue)-fast-überall und ist fast überall 0! Da α stetig ist, ist $\mu_\alpha(\{x\}) = 0$ für jede einpunktige Menge $\{x\}$; allerdings ist μ_α auf der Menge C konzentriert im Sinne $\mu_\alpha([0,1] \setminus C) = \mu_\alpha(S) = 0$

Diese drei Beispiele sind klassisch für eher möglichst allgemeine Lebesgue-Stieltjes-Maße.

Angenommen, μ sei ein Borel-Maß auf $\mathbb{R}$.

Sei zunächst $P = \{x : \mu(\{x\}) \neq 0\}$ die Menge aller <u>reinen Punkte von μ</u>.

Da μ Borel ist ($\Rightarrow \mu(C) < \infty$ für C kompakt) ist P eine abzählbare Menge.

Definiere μ_{pp}: $\mu_{pp}(X) = \sum_{x \in X \cap P} \mu(\{x\}) = \mu(P \cap X)$, dann ist μ_{pp} ein Maß und $\mu_{cont} = \mu - \mu_{pp} \geq 0$. Weiter hat μ_{cont} die Eigenschaft $\mu_{cont}(\{p\}) = 0 \ \forall p$, d.h. μ_{cont} hat keine reinen Punkte und μ_{pp} hat nur reine Punkte in dem Sinne, dass $\mu_{pp}(X) = \sum_{x \in X} \mu_{pp}(\{x\})$

<u>Definition</u>: Ein Borelmaß μ auf $\mathbb{R}$ heißt <u>stetig</u>, wenn es keine reinen Punkte hat.

——— " ——— pure point measure, wenn $\mu_{pp}(X) = \sum_{x \in X} \mu_{pp}(\{x\})$ für alle Borelmengen X.

$\Rightarrow \mu = \mu_{pp} + \mu_{cont}$

Definition μ heißt <u>absolut stetig bzgl Lebesgue</u>, wenn es $f \in L^1_{loc}$ gibt, sodaß $\int g \, d\mu = \int g \cdot f \, dx$ $\forall$ Borelfunktionen $g \in L^1(\mathbb{R}, d\mu)$.

Man schreibt $d\mu = f\,dx$.

Definition μ heißt singulär ~~stetig~~ bzgl. Lebesgue, ~~wenn~~ $\Leftrightarrow$ $\mu(S) = 0$ für eine Menge S, wobei $\underbrace{|\mathbb{R} \setminus S|}_{\text{Lebesguemaß}} = 0$